Grundlagen der Geometrie

-

Mitschrift der Vorlesung

WS 2005/2006

Britta Meixner

Ana-Catalina Plesa

29. Juli 2006

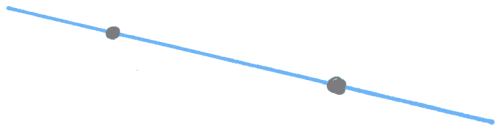
Inhaltsverzeichnis

1 Euklidische Geometrie

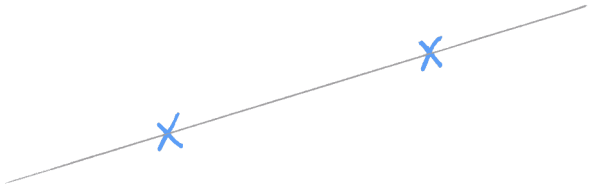
1.1 Axiome für die Euklidische Geometrie

1.1.1 I. Inzidenzaxiome

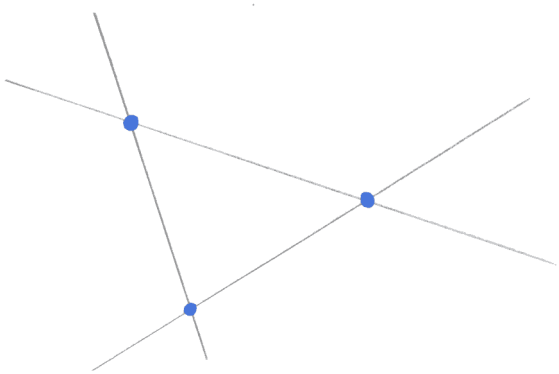
I.1 Zu zwei Punkten $x, y \in \mathscr{P}, x \neq y$ gibt es genau eine Gerade $G \subset \mathscr{G}$ mit $x\ I\ G$ und $y\ I\ G$.
$\overline{xy}$: Verbindungsgerade von x und y.



I.2 Zu $G \subset \mathscr{G}$ gibt es mindestens zwei verschiedene Punkte auf G



I.3 Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind.



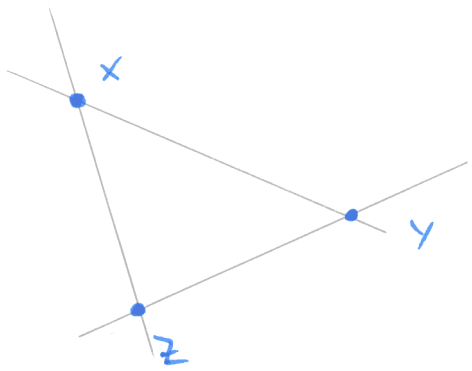
1.1.2 II. Abstandsaxiome

Es gibt eine Abbildung $d : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathbb{R}^{\geq}$ mit

II.1 $d(x,y) = 0 \iff x = y$

II.2 $d(x,y) = d(y,x)$

II.3 $d(x,y) \geq d(x,z) + d(z,y)$

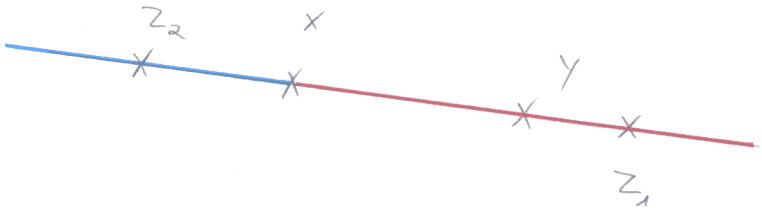


II.4 $x, y, z \in \mathscr{P}$ sind kollinear
$\iff d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$
oder $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$
oder $d(y,z) = d(y,x) + d(x,z)$

1.1.3 Definitionen

- z **liegt zwischen** x und y (x, y, z verschieden), wenn gilt: $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$
- $(x,y) = \{z \mid z \text{ liegt zwischen } x \text{ und } y\}$ ist die **offene Verbindungsstrecke**

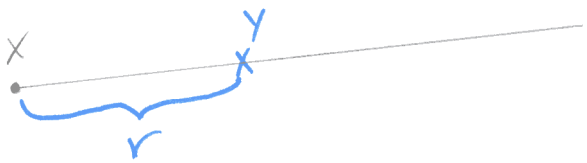
- $[x,y] = \{x\} \cup (x,y) \cup \{y\}$ ist die **abgeschlossene Verbindungsstrecke**
- $x,y \in \mathscr{P}, x \neq y$



  - $(x,\infty)_y = \{z \in \mathscr{P} \mid z \in (x,y) \text{ oder } z = y \text{ oder } y \in (x,z)\}$
    $(-\infty,x)_y = \{z \in \mathscr{P} \mid x \in (y,z)\}$
    offene Halbgeraden (Strahlen) mit Anfangspunkt x
  - $[x,\infty)_y = (x,\infty)_y \cup \{x\}$
    $(-\infty,x]_y = (-\infty,x)_y \cup \{x\}$
    abgeschlossene Halbgeraden (Strahlen)

1.1.4 III. Anordnungsaxiome

III.1 Für jeden Punkt $x \in \mathscr{P}$ und jeden Strahl mit Anfangspunkt x und jede reelle Zahl $0 \leq r$ gibt es auf dem Strahl genau einen Punkt y mit



III.2 Zu jeder Geraden G gibt es zwei Punktmengen $\mathscr{P}_{G,1}$, $\mathscr{P}_{G,2}$ mit

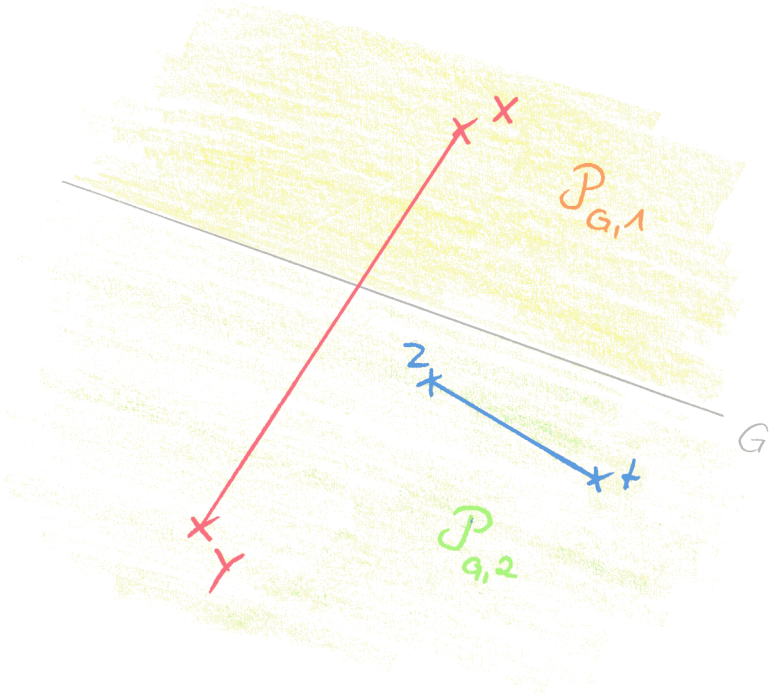
a) $\mathscr{P}_{G,1} \neq \emptyset$, $\mathscr{P}_{G,2} \neq \emptyset$, $\mathscr{P}_{G,1} \cap \mathscr{P}_{G,2} = \emptyset$

b) $\mathscr{P}_{G,1} \cup \mathscr{P}_{G,2} = \{x \in \mathscr{P} \mid x \not I\, G\}$

c) Sind $x \in \mathscr{P}_{G,1}$, $y \in \mathscr{P}_{G,2}$, so hat (x,y) einen Punkt mit G gemeinsam

d) Sind $x,y \in \mathscr{P}_{G,1}$ oder $x,y \in \mathscr{P}_{G,2}$, so schneidet G die Verbindungsstrecke (x,y) nicht.

$\mathscr{P}_{G,1} \cup \{x \mid x\, I\, G\}$
$\mathscr{P}_{G,2} \cup \{x \mid x\, I\, G\}$ abgeschlossene Halbebenen

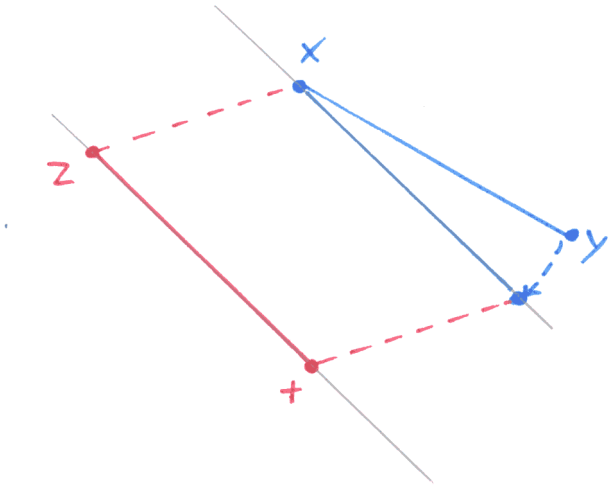


1.1.5 Definition

Eine Bewegung ist eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, so daß $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x,y)$ ist.

1.1.6 IV. Bewegungsaxiom

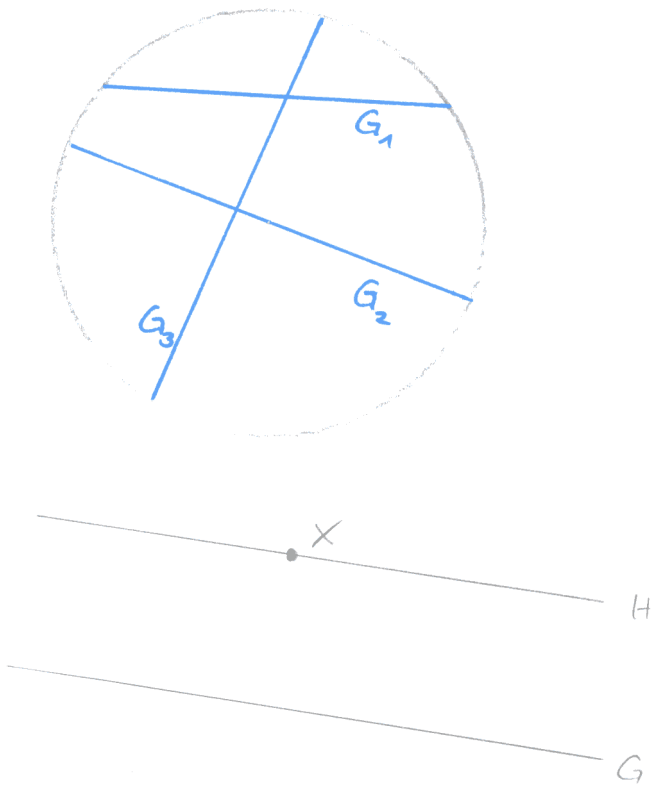
Sind $x, y, z, t \in \mathscr{P}, x \neq y, z \neq t$. Ist $d(z,t) = d(x,y)$, so gibt es genau zwei Bewegungen φ_1, φ_2 mit $\varphi_i(x) = z, \varphi_i(y) = t$



$\varphi_i(\{\mathscr{P}_{\overline{x,y},1}, \mathscr{P}_{\overline{x,y},2}\}) = \{\mathscr{P}_{\overline{z,t},1}, \mathscr{P}_{\overline{z,t},2}\}$. D. h. durch φ_i wird die Menge der Halbebenen auf die Menge der Halbebenen abgebildet.

1.1.7 V. Parallelenaxiom

Zu $G \in \mathscr{G}$ und zu $x \not I\, G$ gibt es höchstens eine Gerade H mit $x\, I\, H$, $H \parallel G$.
Betrachtet man die Geometrie der Stückgeraden, so sind $G_1 \parallel G_2$



1.1.8 Definition

- Inzidenzgeometrien erfüllen: I. (die Inzidenzaxiome).
- Metrische Inzidenzgeometrien erfüllen: I. + II..
- Anordnungsgeometrien: I. + II. + III.
- Absolute Geometrie (auch neutrale Geometrie): I. + II. + III. + IV.
- Zyklische Geometrie: I. + II. + III. + IV. + V.
- Hyperbolische Geometrie: I. + II. + III. + IV. + $\not$V. (d.h. V. ist falsch)

1.2 Inzidenzgeometrie

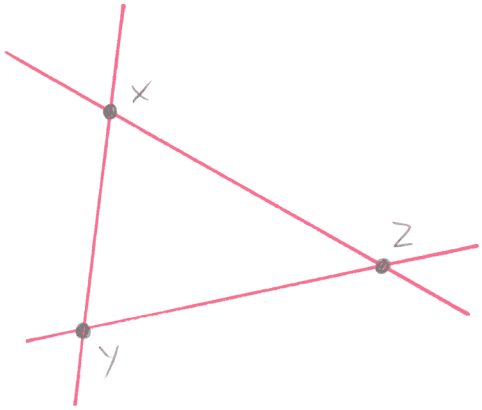
1.2.1 Satz

Zwei Geraden (verschieden) schneiden sich höchstens in einem Punkt.

1.2.2 Satz

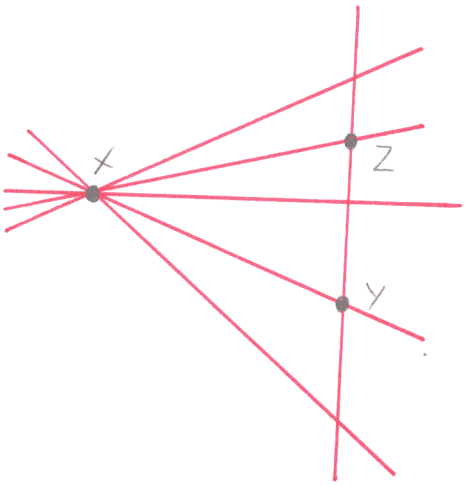
Es gibt drei verschiedene Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen.

Beweis
Nach I.3 gibt es drei Punkte, die nicht kollinear sind.
$\overline{xy}, \overline{xz}, \overline{zy}$ verschieden



Falls $t \in \overline{xy} \cap \overline{xz} \cap \overline{zy}$, dann gilt $t \neq y \& y, t \in \overline{xy} \cap \overline{yz} \Rightarrow \overline{xy} = \overline{yz} \Rightarrow x, y, z$ kollinear.

Alternativer Beweis:
x, y, z nicht kollinear



1.2.3 Beispiele

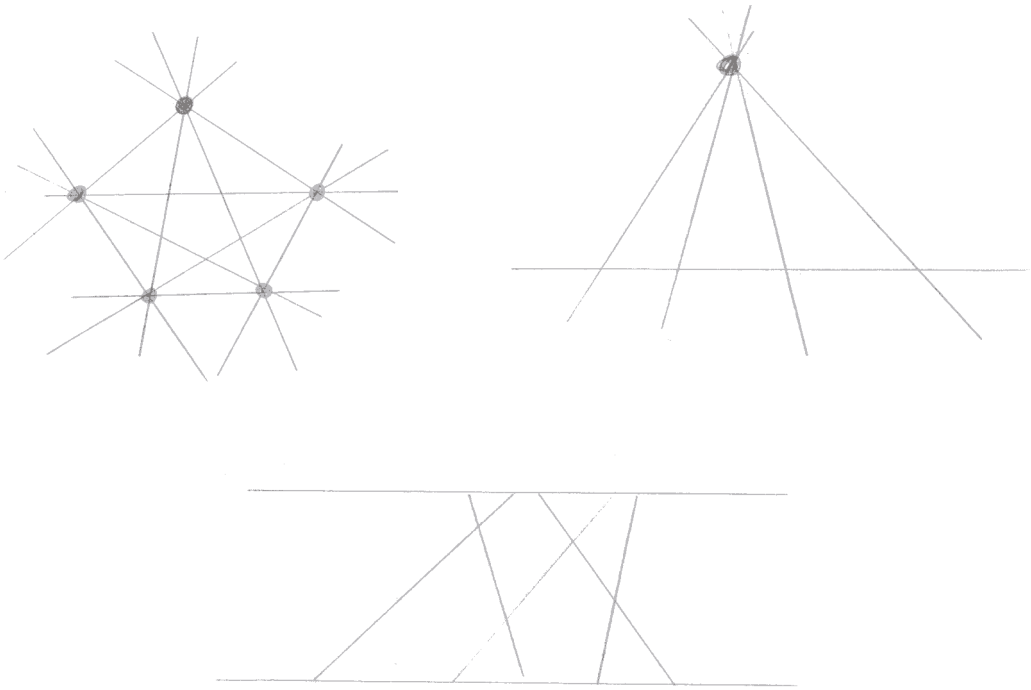
1. $\mathscr{P}$ beliebige Menge mit $|\mathscr{P}| \geq 3$
   $\mathscr{G}$: 2-elementige Teilmengen von $\mathscr{P}$
   Inzidenz: Elementbeziehung

2. $\mathbb{K}$ Körper
   V K-Vektorraum, $dim(V) \geq 2$
   $\mathscr{P} := V$
   $\mathscr{G}$:= Menge der affinen Geraden
   $v, w \in$ V, $y \neq w$, dann ist die affine Gerade: $\{\lambda v + \mu w \mid \lambda + \mu = 1\}$
   Inzidenz: Elementbeziehung

   - Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $dim(V) = 2$ haben wir die Ebene: euklidische Geometrie!
   - Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $dim(V) = 3$ haben wir den Raum, aber die Parallelenaxiome gelten nicht mehr so wie wir es definiert haben, denn windschiefe Geraden sind auch parallel.

3. Sei $(\mathscr{P},\mathscr{G},I)$ Inzidenzgeometrie
   Sei $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ Teilmenge, die drei nicht-kollineare Punkte hat.
   Setze $\mathscr{G}' = \{G \in \mathscr{G} \mid \exists x,y \in \mathscr{P}' : x \neq y \& \overline{xy} = G\}$
   I' = $(\mathscr{P}' \times \mathscr{G}') \cap I$

4. $(\mathscr{P},\mathscr{G},I) : \mathbb{R}$ (d.h. die Ebene mit allen Punkten und allen Geraden)



1.3 Metrische Inzidenzgeometrie

1.3.1 Beispiele

1. $(\mathscr{P},\mathscr{G},I)$ vollständiger Graph auf $\mathscr{P}$

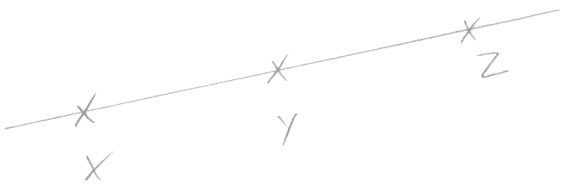
$$d(x,y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & falls\ x \neq y \\ 0 & falls\ x = y \end{cases}$$

   x,y,z verschieden.
   x,y,z kollinear $\Longleftrightarrow$
   $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$
   $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$

$d(y,z) = d(y,x) + d(x,z)$
Da eine Gerade in dieser Struktur nur 2 Punkte enthält können 3 Punkte niemals kollinear sein und die rechte Seite der Äquivalenz ist auch niemals erfüllt, denn $1 \neq 1+1 = 2$

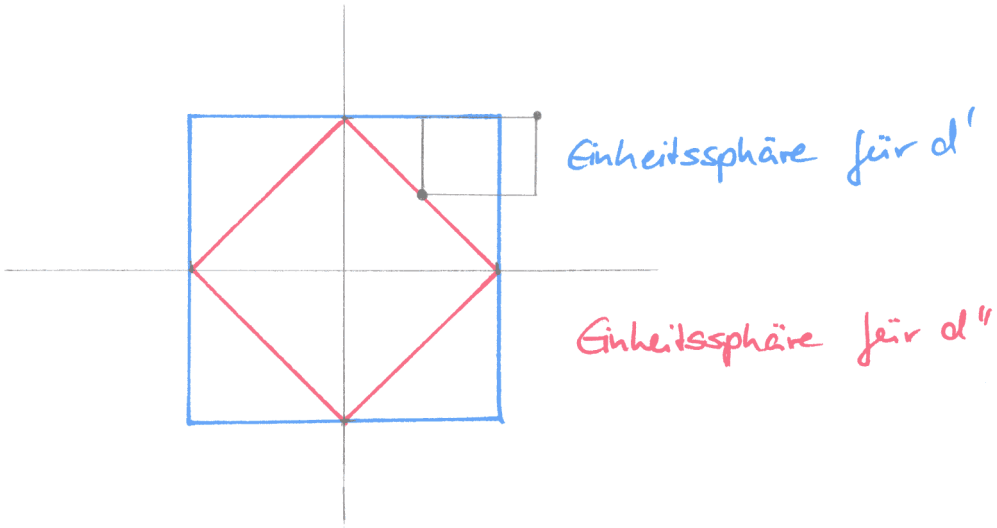
2. $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, I, d)$ metrische Inzidenzgeometrie.
   $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$, $\mathscr{G}' \subseteq \mathscr{G}$, $I' = I \cap (\mathscr{P}' \times \mathscr{G}')$ Inzidenzgeometrie
   Mit $d' = d_{|\mathscr{P}' \times \mathscr{P}'}$: metrische Inzidenzgeometrie

3. $\mathbb{R}^2$
   $d((x,y),(z,t)) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2}$
   d ist eine Metrik (siehe Analysis)
   Wir überprüfen jetzt die 4. Bedingung (3 Punkte kollinear $\Longleftrightarrow$ ...)
   $y = x + \lambda(z-x) \;\; \lambda \in (0,1)$

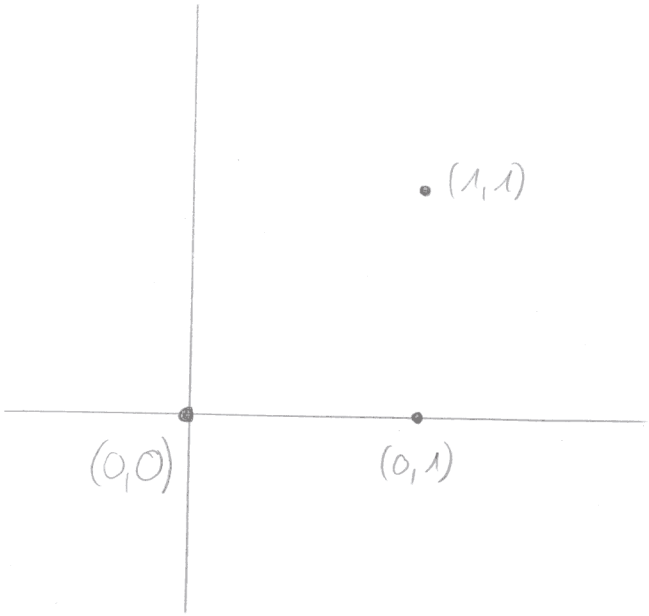


$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$
Falls $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$: x,y,z kollinear folgt nach Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung
$x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. $(x,y) = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in (0,1)\}$: Verbindungsstrecke
Halbgeraden:
$(x,\infty)_y = \{x + \lambda(y-x) \mid \lambda > 0\}$
$(-\infty,x)_y = \{x + \lambda(y-x) \mid \lambda < 0\}$

Keine metrische Inzidenzgeometrie:
$d((x,y),(z,t)) = \max\{|x-z|,|y-t|\}$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ (siehe Analysis)
$d((x,y),(z,t)) = |x-z|+|y-t|$ ist auch eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$.



$d''((0,0),(1,1)) = 2$
$d''((0,0),(0,1)) = 1$
$d''((0,1),(1,1)) = 1$
d.h. $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,1)$ sind nicht kollinear



1.3.2 Proposition

Wenn x zwischen y und z liegt, so liegt x auch zwischen z, y

Beweis:
x zwischen y, $z \Rightarrow x \in (y,z)$, d.h. $d(y,z) = d(y,x) + d(x,z)$
Verwende die Symmetrie der Metrik $d(z,y) = d(x,y) + d(z,x) \Longleftrightarrow x \in (z,y)$

1.3.3 Proposition

Sind $x,y,z \in \mathscr{P}$ verschieden und kollinear, so liegt genau einer der Punkte zwischen den beiden anderen

Beweis:
Wegen x,y,z kollinear, gilt eine der Gleichungen:
$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$
Setze $\alpha = d(x,y) > 0$, $\beta = d(x,z) > 0$ und $\gamma = d(y,z) > 0$
d.h. $\alpha = \beta + \gamma$
$\beta = \alpha + \gamma$
$\gamma = \alpha + \beta$
und nach II.4 gilt eine dieser Gleichungen.
Eine der drei Zahlen ist größer als die beiden anderen $\Rightarrow$ nur eine Gleichung gilt.
Die längste Strecke für 3 kollineare Punkte gibt die beiden Endpunkte an.

1.3.4 Proposition

$x \neq y \in \mathscr{P}$

(a) $(x,\infty)_y \cap (-\infty,x)_y = \emptyset$

(b) $(x,y) = (x,\infty)_y \cap (y,\infty)_x$

Beweis: Siehe Proposition 1.3.5

1.3.5 Proposition

$G, x, y \in G,\ x \neq y$

(a) $(-\infty,x)_y \cap (x,\infty)_y = \emptyset$

(b) $(-\infty,x)_y \cup (x,\infty)_y = \{z \in G \mid z \neq x\}$

(c) $(x,\infty)_y \cap (y,\infty)_x = (x,y)$

Beweis:

(a) $z \in (-\infty,x)_y$ heißt $x \in (y,z)$ (*)
$z \in (x,\infty)_y$ heißt $z \in (x,y)$ oder $z = y$ oder $y \in (x,z)$
Bedingung (*) kann nicht gleichzeitig mit einer der anderen drei Bedingungen erfüllt werden. Damit folgt die Behauptung.

(b) $(x,\infty)_y = \{x + \lambda(y-x) \mid \lambda > 0\}$
$(-\infty,x)_y = \{x + \lambda(y-x) \mid \lambda < 0\}$
Damit folgt:

$$\begin{aligned}(-\infty,x)_y \cup (x,\infty)_y &= \{x + \lambda(y-x) \mid \lambda \neq 0\} \\ &= \{z \in G \mid z \neq x\}\end{aligned}$$

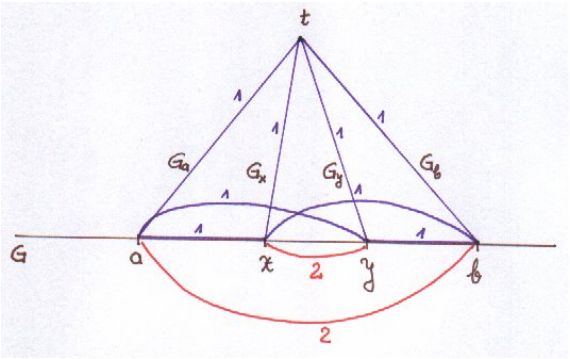
(c) $z \in (x,\infty)_y$ heißt $z \in (x,y)$ oder $z = y$ oder $y \in (x,z)$
$z \in (y,\infty)_x$ heißt $z \in (y,x)$ oder $z = x$ oder $x \in (y,z)$
Falls $z = y$ oder $y \in (x,z)$ gilt, kann $z = x$ oder $x \in (y,z)$ nicht gelten.
Damit kann nur $z \in (x,y) \Leftrightarrow z \in (y,x)$ erfüllt sein.

1.3.6 Frage

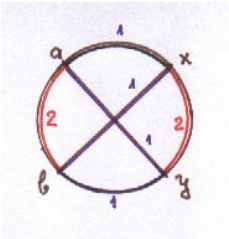
$x,y \in (a,b)$, d.h. x,y liegen zwischen a,b.
a,b,x,y verschieden.
$\Rightarrow (x,y) \subseteq (a,b)$ ist das richtig?

Behauptung: Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel:



oder



$d(x,y) = d(a,b) = 2$
$d(a,x) = d(y,b) = d(a,y) = d(x,b) = 1$
Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{P}$.

$$?d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta)?$$

Sei $d(\alpha,\beta) = 2$.
Falls $\gamma = \alpha$ oder $\gamma = \beta$, dann ist es trivial.
Falls $\gamma \neq \alpha \& \gamma \neq \beta \Rightarrow d(\alpha,\gamma), d(\gamma,\beta) \geq 1$, die Ungleichung gilt!
Annahme α, β, γ kollinear & verschieden. Dann gilt einer der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} d(\alpha,\gamma) &= d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma) \\ d(\alpha,\beta) &= d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta) \\ d(\beta,\gamma) &= d(\beta,\alpha) + d(\alpha,\gamma) \end{aligned}$$

α, β, γ *I G G* hat <u>nur</u> vier Punkte $\Rightarrow$ entweder $a, b \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ oder
$x, y \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$
Sei $a, b \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ etwa $\alpha = a$, $\beta = b$. Mit

$$\begin{aligned} d(\alpha,\beta) &= 2 \\ d(\alpha,\gamma) &= 1 \\ d(\gamma,\beta) &= 1 \end{aligned}$$

folgt $d(\alpha,\beta) = d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta)$.
Analog falls $x, y \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$

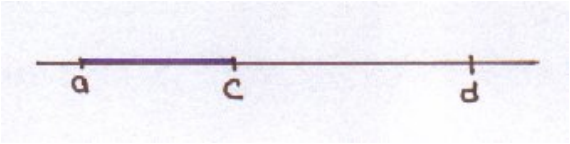
$$x, y \in (a,b) \overset{?}{\Rightarrow} (x,y) \subseteq (a,b)$$

$\underbrace{d(a,b)}_{=2} = \underbrace{d(a,x)}_{=1} + \underbrace{d(x,b)}_{=1}$ und analog für y
$a, b \in (x,y)$
$\underbrace{d(x,y)}_{=2} = \underbrace{d(x,a)}_{=1} + \underbrace{d(a,y)}_{=1}$ und analog für b
da $a, b \in (x,y)$ aber $a, b \notin (a,b)$ folgt dann $(x,y) \not\subseteq (a,b)$

1.3.7 Proposition

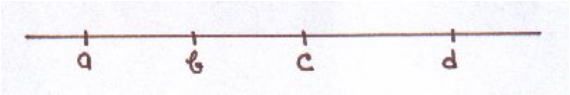
$c \in (a,d) \Rightarrow (a,c) \subseteq (a,d)$

Beweis:
Sei $b \in (a,c)$



$$\begin{aligned} d(a,c) &= d(a,b)+d(b,c) \\ d(a,d) &= d(a,c)+d(c,d) \\ &= d(a,b)+d(b,c)+d(c,d) \\ &\overset{D.U.}{\geq} d(a,b)+d(b,d) \\ &\overset{D.U.}{\geq} d(a,d) \end{aligned}$$

damit $d(a,d) = d(a,b)+d(b,d)$, d.h. $b \in (a,d)$ Voraussetzung $b \in (a,c)$ & $c \in (b,d)$

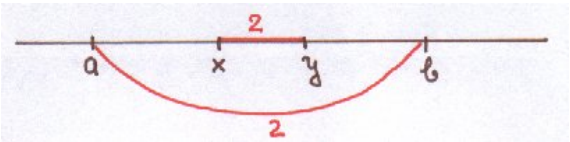


Folgt daraus $b \in (a,d)$ & $c \in (a,d)$?
Behauptung: $b \in (a,d) \Leftrightarrow c \in (a,d)$
Beweis:

$$\begin{aligned} d(a,c) &= d(a,b)+d(b,c) \\ d(b,d) &= d(b,c)+d(c,d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(a,d) = d(a,c)+d(c,d) &= d(a,b)+d(b,c)+d(c,d) \\ &= d(a,b)+d(b,d) \end{aligned}$$

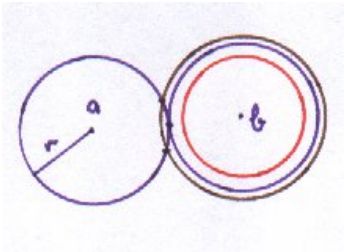
$\Rightarrow d(a,d) = d(a,c)+d(c,d) \Leftrightarrow d(a,d) = d(a,b)+d(b,d)$.



$x \in (a,b)$ $\quad x \notin (a,y)$
$b \in (x,y)$

Sei $a \in \mathscr{P}$, $0 < r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} K(a,r) &= \{x \mid d(a,x) < r\} \text{ offene Kugel} \\ K(a,r) &= \{x \mid d(a,x) \leq r\} \text{ abgeschlossene Kugel} \\ K(a,r) &= \{x \mid d(a,x) = r\} \text{ Sphäre} \end{aligned}$$



Zwei Kreise haben 0, 1 oder 2 Schnittpunkte. Das gilt aber nur in der euklidischen Geometrie.

Beispiel (zwei Kreise haben mehr als 2 Schnittpunkte):
$\mathscr{P}$ Menge, $|\mathscr{P}| \geq 3$
$\mathscr{G}$: Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\mathscr{P}$
Inzidenz: $\in$
$d(x,y) = \delta_{xy}$
Seien $a,b \in \mathscr{P}$, $a \neq b$. Dann gilt:

$$|S(a,1) \cap S(b,1)| = |\mathscr{P}| - 2,$$

denn:

$$\begin{aligned} S(a,1) &= \{x \in \mathscr{P} \mid d(a,x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathscr{P}\} \backslash \{a\} \ (d(a,a) = \delta_{aa} = 0) \\ S(b,1) &= \{x \in \mathscr{P}\} \backslash \{b\} \ (d(b,b) = \delta_{bb} = 0) \end{aligned}$$

damit also

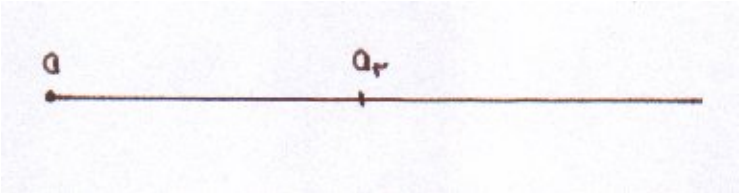
$$\begin{aligned} S(a,1) \cap S(b,1) &= (\{x \in \mathscr{P}\} \backslash \{a\}) \cap (\{x \in \mathscr{P}\} \backslash \{b\}) \\ &= \{x \in \mathscr{P}\} \backslash \{a,b\} \end{aligned}$$

also $|S(a,1) \cap S(b,1)| = |\mathscr{P}| - 2$.

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Sei $C \subseteq M$ Teilmenge, $C \neq \emptyset$.
$d_C : M \to \mathbb{R}^{\geq}: x \longmapsto \inf\{d(x,c) \mid c \in C\}$ stetig.

1.3.8 III. Anordnungsaxiome

III.1 Zu $r \in \mathbb{R}^{\geq}$ gibt es genau einen Punkt a_r auf der Halbgeraden mit $d(a,a_r) = r$.



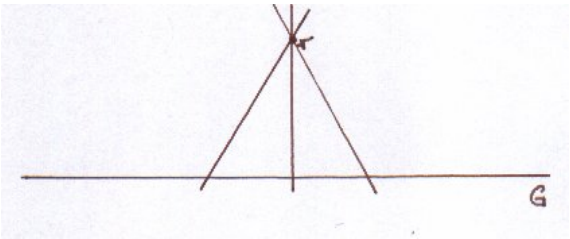
III.2 Für jede Geraden G, $\mathscr{P}_G^+$, $\mathscr{P}_G^-$ gilt:

a) $\mathscr{P}_G^+ \cap \mathscr{P}_G^- = \emptyset$, $\mathscr{P}_G^+ \neq \emptyset$, $\mathscr{P}_G^- \neq \emptyset$
b) $\mathscr{P}_G^+ \cup G \cup \mathscr{P}_G^- = \mathscr{P}$
c) Sind $x \in \mathscr{P}_G^+$, $y \in \mathscr{P}_G^-$, so gilt: $(x,y) \cap G \neq \emptyset$
d) Sind $x,y \in \mathscr{P}_G^+$ oder $x,y \in \mathscr{P}_G^-$, so gilt: $(x,y) \cap G = \emptyset$

1.4 Satz

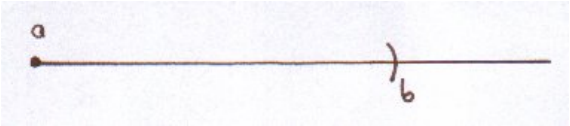
Jede Gerade, jede Strecke, jede Halbgerade hat ∞ viele Punkte. Durch jeden Punkt gehen ∞ viele Geraden.

Beweis:
(a,b), $a \neq b$ $(a,\infty)_b$: zu jeder Zahl $r \geq 0$: Punkt a_r mit $d(a,a_r) = r$



Wann ist $a_r \in (a,b)$?
Sei $a_r \neq a,b$

$$a_r \in (a,b) \;\Leftrightarrow\; d(a,b) = \underbrace{(a,a_r)}_{=r} + d(a_r,b) \;\Leftrightarrow\; 0 < r < d(a,b)$$

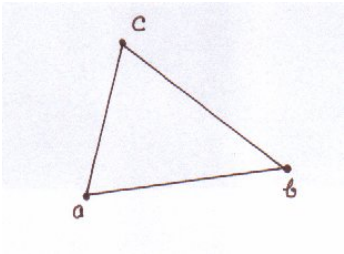


#Geraden durch $r \geq$ #Punkte auf G.

1.5 Definition

Seien a, b, c nicht kollinear. Das Dreieck mit Ecken a, b, c ist:

$$\Delta(a,b,c) = \{a,b,c\} \cup (a,b) \cup (b,c) \cup (c,a)$$

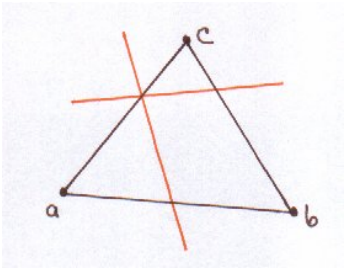


offene Seiten: (a,b), (b,c), (c,a)
abgeschlossene Seiten: $[a,b]$, $[b,c]$, $[c,a]$

1.6 Satz von Pasch

Sind a, b, c nicht kollinear, a, b, $c \notin G$. Falls G eine offene Seite schneidet, dann schneidet G genau eine der beiden anderen offenen Seiten auch.

Beweis:

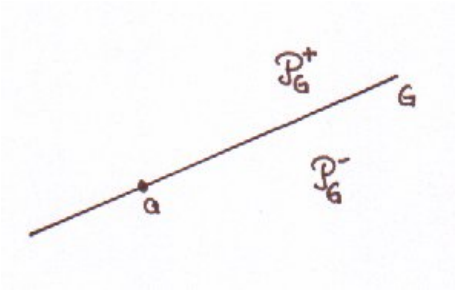


OE:
$G \cap (a,b) \neq \emptyset$. Dann folgt nach Axiom III.2c) $a \in \mathscr{P}_G^+$, $b \in \mathscr{P}_G^-$.
$c \notin G$. Dann folgt nach Axiom III.2b) $c \in \mathscr{P}_G^+$ oder $c \in \mathscr{P}_G^-$.
Sei $c \in \mathscr{P}_G^+$:
$a,c \in \mathscr{P}_G^+ \Rightarrow$ nach Axiom III.2d) $(a,c) \cap G = \emptyset$
$b \in \mathscr{P}_G^-$, $c \in \mathscr{P}_G^+ \Rightarrow$ nach Axiom III.2c) $(b,c) \cap G \neq \emptyset$
Für $c \in \mathscr{P}_G^-$: analog

1.7 Satz

Sei $a \in G$, $b \notin G$. Daraus folgt $(a,\infty)_b \subseteq \mathscr{P}_G^+$ oder $(a,\infty)_b \subseteq \mathscr{P}_G^-$. $(-\infty,a)_b$ liegt in der anderen Halbebenen.

Beweis:



OBdA: $b \in \mathscr{P}_G^+$
Sei $x \in (a,\infty)_b$
1. Fall: $x \in G$

dann folgt $a,x \in \overline{ab}, a \neq x$ und $a,x \in G$. Daraus folgt $G = \overline{ab} \Rightarrow$ $b \in G$ im Widerspruch zur Voraussetzung $b \notin G$.

2.Fall: $x \in \mathscr{P}_G^-$

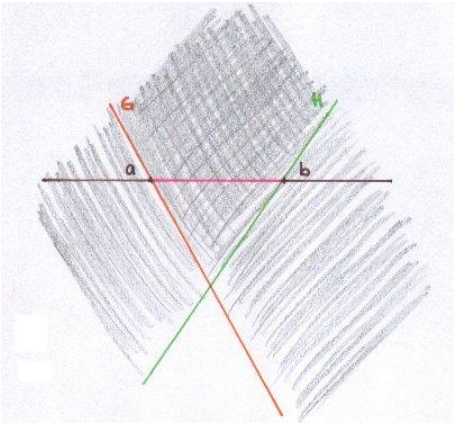
dann folgt: x, b liegen auf verschiedene Seiten von G.
Damit gilt nach Axiom III.2c): $(x,b) \cap G \neq \emptyset$
$(x,b) \cap G \subseteq \overline{xb} \cap G = \{a\} \Rightarrow a \in (x,b) \Rightarrow x \in (-\infty, a)_b$.
Daraus folgt $(a,\infty)_b \cap (-\infty,a)_b = \{x\}$ im Widerspruch zu $(a,\infty)_b \cap (-\infty,a)_b = \emptyset$.

Daher: $x \in \mathscr{P}_G^+$.
Sei $x \in (-\infty,a)_b$

d.h. $a \in (x,b) \Rightarrow G \cap (x,b) \neq \emptyset$. Dann folgt nach Axiom III.2c): x, b liegen auf verschiedenen Seiten von $G \Rightarrow x \in \mathscr{P}_G^-$

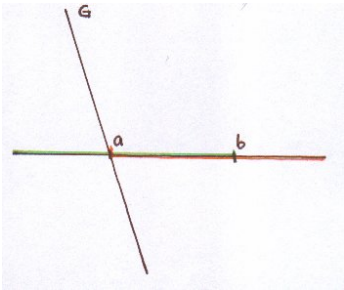
1.8 Satz

Seien a, b $a \neq b$, $a \in G$, $b \notin G$, $a \notin H$, $b \in H \Rightarrow (a,b) = \overline{ab} \cap \mathscr{P}_G^b \cap \mathscr{P}_H^a$.



Beweis:

$$(b,\infty)_a \cap (a,\infty)_b = (a,b)$$



Behauptung:
$(a,\infty)_b = \overline{ab} \cap \mathscr{P}_G^b$
Beweis: „$\subseteq$“

$x \in (a,\infty)_b \Rightarrow x \in \overline{ab}$
$b \in (a,\infty)_b \cap \mathscr{P}_G^b \Rightarrow (a,\infty)_b \subseteq \mathscr{P}_G^b$
Also $(a,\infty)_b \subseteq \overline{ab} \cap \mathscr{P}_G^b$.

„$\supseteq$“

Sei $x \in \overline{ab} \cap \mathscr{P}_G^b$
$x \in \overline{ab}, x \neq a \Rightarrow x \in \underbrace{(a,\infty)_b}_{\subseteq \mathscr{P}_G^b}$ oder $x \in (-\infty,a)_b$

Da $(-\infty,a)_b$ in der anderen Halbebenen leigt, ist $x \in (-\infty,a)_b$ unmöglich, d.h. $x \in (a,\infty)_b$

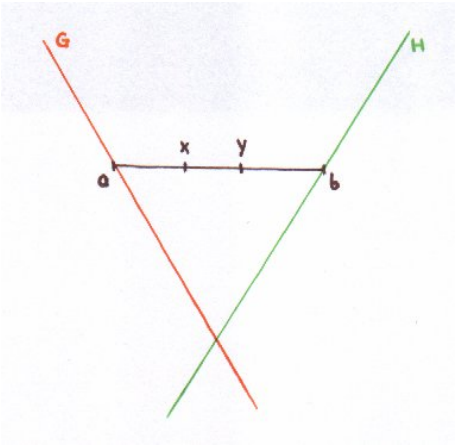
Somit folgt:

$$\begin{aligned}(a,b) &= (b,\infty)_a \cap (a,\infty)_b \\ &= (\overline{ab} \cap \mathscr{P}_H^a) \cap (\overline{ab} \cap \mathscr{P}_G^b)\end{aligned}$$

1.9 Satz

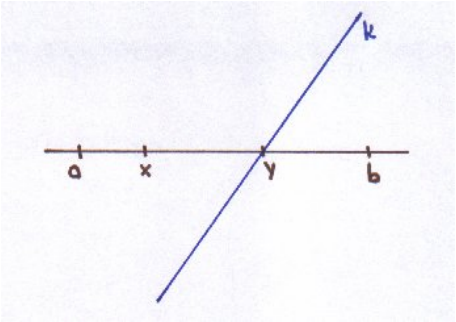
a, b, x, y verschieden und x, $y \in (a,b)$. Daraus folgt: $a \notin (x,y)$, $b \notin (x,y)$, $d(x,y) < d(a,b)$ und $(x,y) \subseteq (a,b)$.

Beweis:



$x,y \in (a,b) \Rightarrow x,y \in \overline{ab} \cap \mathscr{P}_G^b = (a,\infty)_b$

Falls $a \in (x,y)$: $(x,y) \cap G \neq \emptyset \Rightarrow x$, y auf verschiedene Seiten von G. Im Widerspruch zu x, $y \in \mathscr{P}_G^b$.
Also $a \notin (x,y)$. Analog $b \notin (x,y)$.
$a \notin (x,y) \Rightarrow x \in (a,y)$ oder $y \in (a,x)$
$b \notin (x,y) \Rightarrow x \in (b,y)$ oder $y \in (b,x)$
Annahme: $x \in (a,y)$
Sei K Gerade so dass $y \in K$, $K \neq \overline{ab}$



$y = (a,b) \cap K \Rightarrow a$, b liegen auf verschiedene Seiten von K (nach Axiom III.2c))
OE:
$a \in \mathscr{P}_K^+$, $b \in \mathscr{P}_K^-$: $x \in (y,\infty)_a \subseteq \mathscr{P}_K^+$
Falls $x \in (b,y)$, dann $x \in \mathscr{P}_K^-$ (in der selben Halbebene wie b) Widerspruch!
Analog: es kann nicht gleichzeitig gelten: $y \in (a,x) \& y \in (b,x)$.

$$\begin{aligned} d(a,b) &= d(a,x) + d(x,b) \\ &= \underbrace{d(a,x)}_{>0} + d(x,y) + \underbrace{d(y,b)}_{>0} \\ &> d(x,y) \end{aligned}$$

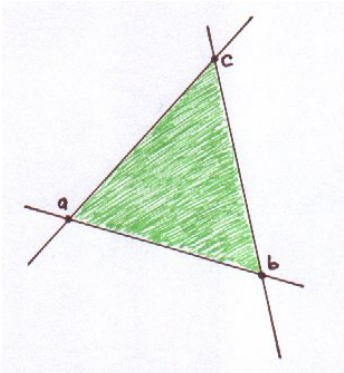
$(x,y) \subseteq (a,b) = (a,\infty)_b \cap (b,\infty)_a$ und x, $y \in \mathscr{P}_G^b$.
$(x,y) \cap G = \emptyset \Rightarrow (x,y) \subseteq \mathscr{P}_G^b$, ebenso: $(x,y) \in \mathscr{P}_H^a$.

1.10 Definition

a, b, c nicht kollinear.

$$\Delta^\circ(a,b,c) = \mathscr{P}_{\overline{bc}}^a \cap \mathscr{P}_{\overline{ac}}^b \cap \mathscr{P}_{\overline{ab}}^c$$

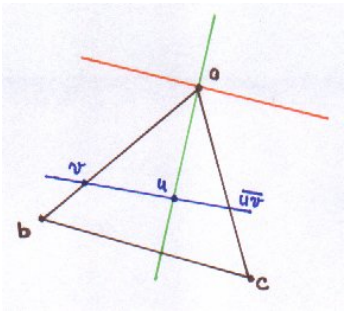
ist das Innere des Dreiecks $\Delta(a,b,c)$.



1.11 Satz

a, b, c nicht kollinear. $u \in \Delta^\circ(a,b,c) \Rightarrow \overline{au} \cap (b,c) \neq \emptyset$.

Beweis:



$u \notin \overline{ab}$ und $\overline{au} \neq \overline{ab}$. Für die Gerade $\overline{uv}$ haben wir 3 Möglichkeiten:

(1) $\overline{uv}$ schneidet (a,c)

(2) oder schneidet (b,c) (Satz von Pasch)

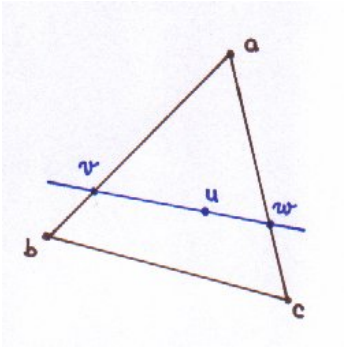
(3) oder geht durch c

(1),(3): Sei $w = \overline{uv} \cap \overline{ac} \Rightarrow w \in (a,\infty)_c$

Annahme: $v \in (u,w)$

Dann liegen u, w auf verschiedene Seiten von $\overline{ab}$.
w, c liegen auf derselben Seite von $\overline{ab}$.
$w \in \mathscr{P}^c_{\overline{ab}} \Rightarrow u \notin \mathscr{P}^c_{\overline{ab}}$. Im Widerspruch zu $u \in \Delta^\circ(a,b,c)$

Annahme: $w \in (u,v)$



Dann liegen u, v auf verschiedene Seiten von $\overline{ac}$.
u, b liegen auf derselben Seite von $\overline{ac} \Rightarrow b$, v liegen auf verschiedenen Seiten von $\overline{ac}$. Aber $v \in (a,\infty)_b \Rightarrow v \in \mathscr{P}^b_{\overline{ac}}$. Wiederspruch!

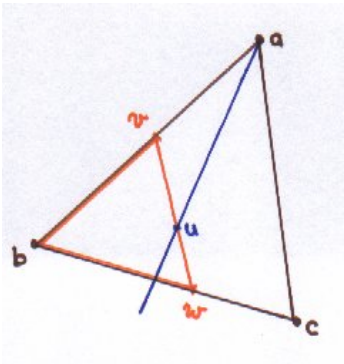
Also $u \in (v,w)$.
$u \in (v,w) \cap \overline{au} \Rightarrow v$, w liegen auf verschiedene Seiten von $\overline{au}$ (*)
Wir wissen:

w, c liegen auf derselben Seite von $\overline{au}$ (**)
v, b liegen auf derselben Seite von $\overline{au}$ (***)

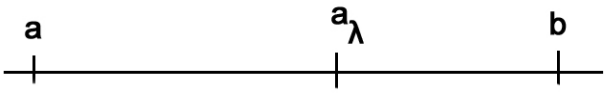
Aus (*), (**) und (***) folgt dann: b, c liegen auf verschiedenen Seiten von $\overline{au}$. Nach Axiom III.2c) folgt dann $\overline{au} \cap (b,c) \neq \emptyset$

(2): Sei $w \in (b,c) \cap \overline{vu}$. Nach Satz von Pasch gilt:

$\overline{au} \cap (v,b) \neq \emptyset$ oder
$\overline{au} \cap (w,b) \neq \emptyset$



$\overline{au} \cap (v,b) = \emptyset$ sonst $\overline{au} = \overline{ab}$ Widerspruch zu $u \in \Delta^\circ(a,b,c)$.
Also $\overline{au} \cap (w,b) \neq \emptyset$.
Sei $x \in \overline{au} \cap (w,b)$. Es gilt noch $(w,b) \subseteq (b,c)$.
Damit ist $x \in (b,c)$, d.h. $\overline{au} \cap (b,c) \neq \emptyset$, denn $\overline{au} = \overline{ax}$ (wegen $x \in \overline{au}$ haben $\overline{au}$ und $\overline{ax}$ 2 Punkte gemeinsam).



$0 < \lambda < 1$
$0 < \lambda \cdot d(a,b) < d(a,b)$
$d(a,a_\lambda) : \lambda \cdot d(a,b)$

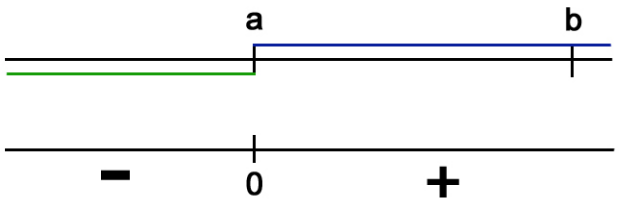
1.12 Parametrisierung einer Geraden

$\varphi : \mathbb{R} \to G$ Homomorphismus (φ bijektiv, φ, φ^{-1} stetig).

1.13 Definition von φ

Seien $a,b \in G, a \neq b$
$\varphi^+ : \mathbb{R}^{\geq} \to [a,\infty)_b : r \to \varphi^+(r) \;\; d(a,\varphi^+(r)) = r$
$\varphi^- : \mathbb{R}^{\geq} \to (-\infty,a]_b : r \to \varphi^-(r) \;\; d(a,\varphi^-(r)) = r$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \underbrace{\overline{ab}}_{=G} : r \to \begin{cases} \varphi^+(r) & r \geq 0 \\ \varphi^-(r) & r \leq 0 \end{cases}$$



1.14 Satz

φ ist eine Parametrisierung.

Beweis:

- φ injektiv
  Sei $\varphi(r) = \varphi(s)$

  - 1. Fall:
    $\varphi(r) = \varphi(s) = a \Longleftrightarrow r = s = 0$

  - 2. Fall:
    $\varphi(r) = \varphi(s) \leq (a,\infty)_b \Longleftrightarrow 0 < r,s$
    und $d(a,\varphi(r)) = r$, $d(a,\varphi(s)) = s$

  - 3. Fall:
    $\varphi(r) = \varphi(s) \in (-\infty,a)_b \Longleftrightarrow r,s < 0$
    $-r = d(a,\varphi(r)) = d(a,\varphi(s)) = -s \Longleftrightarrow r = s$

- φ surjektiv
  Sei $x \in G$
  Sei $x = a : \varphi(0) = x$
  Sei $x \in (a,\infty)_b \;\; x = \varphi(d(a,x))$
  Sei $x \in (-\infty,a)_b \;\; x = \varphi(-d(a,x))$

- φ bijektiv
  φ surjektiv und injektiv $\Longleftrightarrow$ φ bijektiv

- φ^{-1} stetig
  $$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} d(a,x) & x \in (a,\infty)_b \\ -d(a,x) & x \in (-\infty,a]_b \end{cases}$$
  M metrischer Raum, $z \in M$
  $d_z : M \to \mathbb{R} : z \to d(z,t)$ stetig
  Falls $Z = M, Z \neq \emptyset$
  $d_z : M \to \mathbb{R} : z \to inf\{d(z,t)|z \in Z\}$ stetig

  $d_a : G \to \mathbb{R} \;\; x \to d(a,x)$ stetig
  $$\sigma : G \to \{+1,-1\} : x \to \begin{cases} +1 & x \in (a,\infty)_b \\ -1 & x \in (-\infty,a]_b \end{cases}$$
  $\sigma \cdot d_a = \varphi^{-1}$ ist stetig.

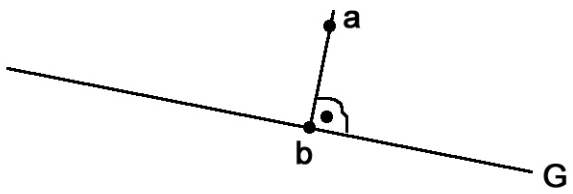
- φ stetig
  Sei $r \in \mathbb{R}$. Sei $0 < \varepsilon$.
  z.Z.: $\exists 0 < \delta : \varphi((r-\delta, r+\delta)) \leq K(\varphi(r),\varepsilon)$

- 1. Fall
  $r = 0$. Sei $\varepsilon > 0$
  Setze $\delta = \varepsilon$
  Falls $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \varphi(s) \in K(a, \varepsilon)$
  $s = 0 \;\; \varphi(s) = \varphi(a)$
  $s > 0 \;\; d(a, \varphi(s)) = s < \varepsilon$
  $s < 0 \;\; d(a, \varphi(s)) = -s < \varepsilon$

- 2. Fall
  $r > 0$
  $0 < \varepsilon < r$
  $\delta = \varepsilon$
  $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^{>}$

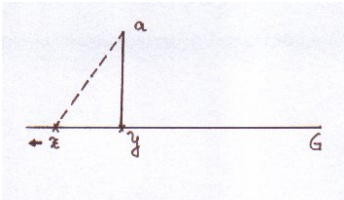
  * 1. Fall
    Sei $s = r$
    $\varphi(s) = \varphi(r) \in U(a, \varepsilon)$
  * 2. Fall
    $r - \varepsilon < s < r$
    $d(a, \varphi(s)) = s < r = d(a, \varphi(r))$
    $\underbrace{d(a, \varphi(r))}_{=r} = \underbrace{d(a, \varphi(s))}_{=s} + d(\varphi(s), \varphi(r))$
    $d(\varphi(r), \varphi(s)) = r - s < \varepsilon$
  * 3. Fall
    $r < s < r + \varepsilon$
    $d(a, \varphi(s)) = s > r = d(a, \varphi(r))$
    $\underbrace{d(a, \varphi(s))}_{=s} = \underbrace{d(a, \varphi(r))}_{=r} + d(\varphi(r), \varphi(s))$

Parametrisierungen:
$\varphi^+ : \mathbb{R}^{\geq} \to [a, \infty)_b$
$\varphi^- : \mathbb{R}^{\geq} \to (-\infty, a]_b$
Es gibt einen Punkt $b \in G$ mit $d(a, G) = d(a, b)$



1.15 Satz

Sei G eine Gerade und $a \notin G \Rightarrow \exists z \in G$: $d(a,z) = \inf\{d(a,z) \mid z \in G\}$.



Beweis:
$d_a : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^{\geq}: x \longmapsto d(a,x)$ ist stetig
Für $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{d_a} \mathbb{R}^{\geq}$ mit φ Parametrisierung ist $d_a \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq}$ auch stetig.
Wähle $y \in G$ fest.
Sei $x \in G$ beliebig. Nach Dreiecksungleichung gilt:

$$d(x,y) \leq d(a,x) + d(a,y)$$

Damit folgt: $d(x,y) - d(a,y) \leq d(a,x)$.
Wenn $d(x,y) \geq 2d(a,y)$ ist, folgt dann $d(a,x) \geq d(a,y)$.
$M = \{x \in G \mid d(a,x) \leq d(a,y)\}$ ist eine beschränkte und abgeschlossene Menge. Damit ist $\varphi^{-1}(M) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.
Daraus folgt: die stetige Abbildung $d_a \circ \varphi$ nimmt auf die kompakte Menge $\varphi^{-1}(M)$ ein Minimum an, etwa in $\rho \in \mathbb{R}$. Setze $z = \varphi(\rho)$.
Behauptung: $d(a,z) = \inf\{d(a,x) \mid x \in G\}$

Beweis:
Sei $x \in G$.

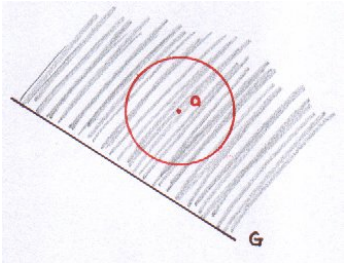
- Falls $x \in M$: $d(a,z) \leq d(a,x)$ nach Wahl von z.
- Falls $x \notin M$: $d(a,x) > d(a,y) \geq d(a,z) = \inf\{d(a,x) \mid x \in G\}$.

1.16 Folgerung

Offene Halbebenen sind offen.
Geraden sind abgeschlossen.
Das Innere eines Dreiecks ist offen.

Beweis:

- Offene Halbebenen sind offen
  Sei G eine Gerade, $\mathscr{P}_G^+$ eine offene Halbebene dazu.

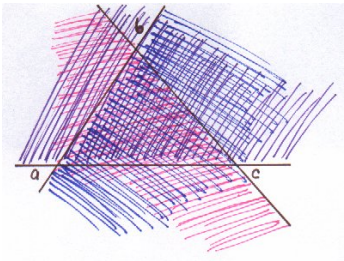


Sei $a \in \mathscr{P}_G^+$. Sei $z \in G$ mit $0 < \mu = d(a,z) = \inf\{d(a,x) \mid x \in G\}$.
Sei $K(a, \frac{\mu}{2}) \subseteq \mathscr{P}_G^+$ ($K(a, \frac{\mu}{2})$ = Kreis mit Mittelpunkt a und Radius $\frac{\mu}{2}$)
Sei $x \in K(a, \frac{\mu}{2})$. Falls $x \notin \mathscr{P}_G^+$:

1. $x \in G$. dann $d(a,x) < \frac{\mu}{2} < \inf\{d(a,y) \mid y \in G\}$. Widerspruch!
2. $x \in \mathscr{P}_G^-$: $\exists y \in (a,x) \cap G \Rightarrow d(a,y) < d(a,x) < \frac{\mu}{2}$. Widerspruch!

Damit sind offene Halbebenen offen.

- <u>Geraden sind abgeschlossenn</u>
  $G = \mathscr{P} \setminus \underbrace{(\mathscr{P}_G^+ \cup \mathscr{P}_G^-)}_{\text{offen}} \Rightarrow G$ ist abgeschlossen.
- <u>Das Innere eines Dreiecks ist offen</u>
  $\Delta^\circ(a,b,c) = \underbrace{\mathscr{P}^c_{\overline{ab}}}_{\text{offen}} \cap \underbrace{\mathscr{P}^a_{\overline{bc}}}_{\text{offen}} \cap \underbrace{\mathscr{P}^b_{\overline{ca}}}_{\text{offen}}$

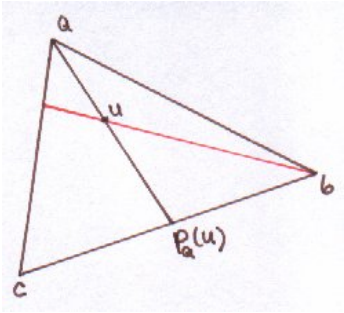


$\Rightarrow \Delta^\circ(a,b,c)$ ist offen.

1.17 Bemerkung

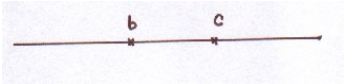
Sei $p_a : \Delta^\circ(a,b,c) \to (b,c)$: $u \longmapsto \overline{au} \cap (b,c)$ (analog $p_b : \Delta^\circ(a,b,c) \to (a,c)$).

Dann ist die Abbildung p_a stetig.



1.18 Bemerkung

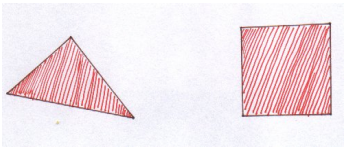
Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{bc}$ eine Parametrisierung mit $\varphi(0) = b$ und $\varphi(d(b,c)) = c$.



Damit ist $\varphi : (0, d(b,c)) \to (b,c)$ ein Homöomorphismus.

$$\pi_a : \Delta^\circ(a,b,c) \xrightarrow{p_a} (b,c) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (0, d(b,c)) \text{ ist eine stetige Abbildung.}$$

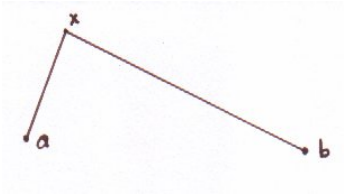
Sei die Abbildung $\Delta^\circ(a,b,c) \to (b,c) \times (a,c)$ mit $u \to (p_a(u), p_b(u))$. Und sei die Abbildung $(b,c) \times (a,c) \to (0, d(b,c)) \times (0, d(a,c))$. Dann ist diese Abbildung ein Homöomorphismus (d.h. die Abbildung $(b,c) \times (a,c) \to (0, d(b,c)) \times (0, d(a,c))$ ist stetig und bijektiv und die Umkehrabbildung ist wieder stetig).



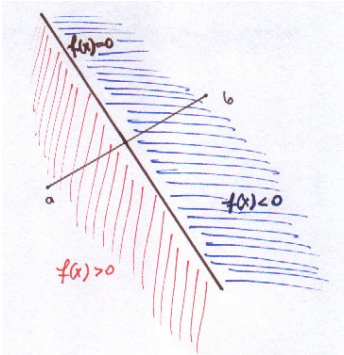
Beispiel: Das Innere des Dreiecks ist homöomorph zu dem Inneren des Rechtecks.

1.19 Definition

Sei $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \longmapsto d(b,x) - d(a,x)$.



Dann ist f stetig und es gilt $f(x)\begin{cases} <0 & \text{, wenn } x \text{ näher bei } b \text{ als bei } a \\ =0 & \text{, wenn } x \text{ von } a \text{ und } b \text{ gleich weit entfernt} \\ >0 & \text{, wenn } x \text{ näher bei } a \text{ als bei } b \end{cases}$.

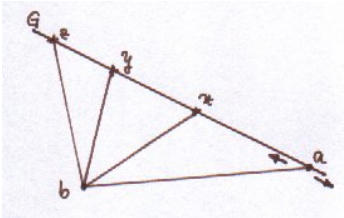


1.20 Satz

Seien $a,b \in \mathscr{P}$ und G eine Gerade, so dass: $a \in G$, $b \notin G \Rightarrow f$ hat auf G ein Maximum bei a und ist auf beiden Halbgeraden bei Entfernung von a strikt monoton fallend.

Beweis:
Es gilt: $f(a) = d(b,a)$
Sei $x \in G$, $x \neq a$.
$\Rightarrow a,b,x$ nicht kollinear
$\Rightarrow d(b,x) < d(b,a) + d(a,x)$
$\Rightarrow f(a) < d(b,a) = f(a)$

zu zeigen: $x \in (a,y) \Rightarrow f(x) > f(y)$

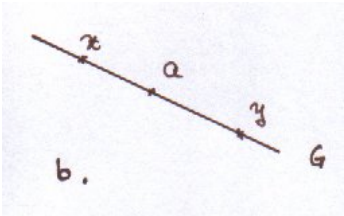


$$
\begin{aligned}
d(a,y) &= d(a,x)+d(x,y) \\
f(y) &= d(b,y)-d(a,y) \\
&= d(b,y)-d(ax)-d(x,y) \\
&< d(b,x)+d(x,y)-d(a,x)-d(x,y) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

1.21 Folgerung

Auf G gibt es höchstens einen Punkt, der von a und b denselben Abstand hat.

Beweis:



Annahme $f(x) = f(y) = 0$, $x \neq y \Rightarrow a \in (x,y)$

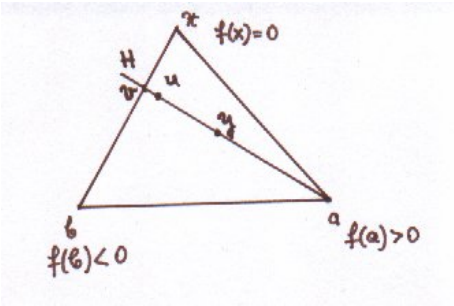
$$
\begin{aligned}
d(b,x)-d(a,x) &= 0 \\
d(b,y)-d(a,y) &= 0
\end{aligned}
$$

$$d(b,x)+d(b,y)-\underbrace{d(a,x)+d(ay)}_{d(x,y)} = 0$$

$d(b,x)+d(b,y) = d(x,y)$
$\Rightarrow x,y,b$ kollinear. Widerspruch!

1.22 Folgerung

Sei $x \in \mathscr{P}$, $f(x) = 0$ und a, b, x nicht kollinear. Sei $u \in \Delta^\circ(a,b,x)$ und $H = \overline{au}$.

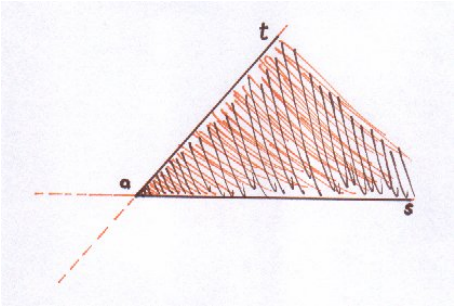


$\Rightarrow$ Dann gibt es einen Punkt $y \in H$ mit $f(y) = 0$, $y \in \Delta^\circ(a,b,x)$.

Beweis:
Sei $v = H \cap (b,x)$. Es gilt: $f(a) > 0$ und $f(v) < 0$ (da $f(x) = 0$)
Da $f(v) < 0$ und $f(a) > 0 \overset{Z.W.S.}{\Rightarrow}$ auf (a,v) nimmt f den Wert 0 an (z.B. in y).

1.23 Definition

Seien s und t Halbgeraden mit denselben Anfangspunkt a. Das geordnete Paar (s,t) ist der gerichtete Winkel von s und t : $\angle(s,t)$. a ist der Scheitel und s, t die Schenkeln des Winkels.

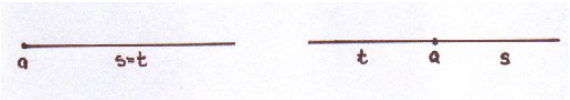


Das Innere des Winkels ist: $\angle^\circ(s,t) = \mathscr{P}^t_{\bar{s}} \cap \mathscr{P}^s_{\bar{t}}$
Der abgeschlossene Winkel ist: $\overline{\angle}(s,t) = \angle(s,t) \cup \angle^\circ(s,t)$

1.24 Bemerkung

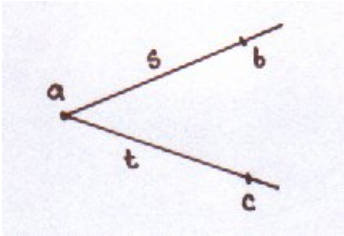
Man soll speziell zwei Fälle behandeln:

Falls $s = t$: dann haben wir ein Nullwinkel und $\angle^\circ(s,t) = \emptyset$
Falls $\bar{s} = \bar{t}$, $s \neq t$: dann haben wir ein gestreckter Winkel und $\angle^\circ(s,t) = \mathscr{P}^+_{\bar{s}}$ oder $\angle^\circ(s,t) = \mathscr{P}^-_{\bar{s}}$



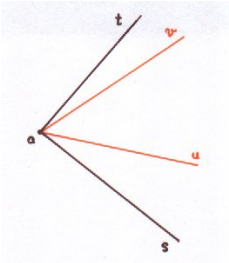
1.25 Bemerkung

Seien a,b,c verschiedene Punkte. Sei $s = (a,\infty)_b$ und $t = (a,\infty)_c$. Dann gilt: $\angle(bac) = \angle(s,t)$:



1.26 Bemerkung

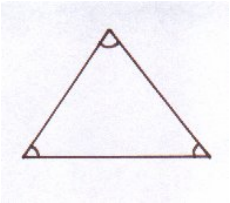
Man kann Winkeln nach ihrer Größe vergleichen. Beispiel:



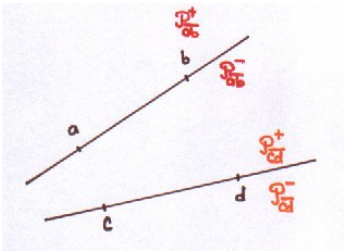
$\angle(s,t) > \angle(u,v)$

1.27 Bemerkung(Winkelsumme in einem Dreieck)

Bis jetzt haben wir keine Methode kennengelernt um die Winkeln in einem Dreieck miteinander zu vergleichen.



2 Absolute Geometrie



$d(a,b) = d(c,d)$

2.1 Bewegungsaxiom:

Es gibt zwei Bewegungen φ und ψ mit $\varphi(a) = c = \psi(a)$ und $\varphi(b) = d = \psi(b)$.
Es ist $\varphi(\mathscr{P}^{+}_{\overline{ab}}) = \mathscr{P}^{+}_{\overline{cd}}$ und $\psi(\mathscr{P}^{+}_{\overline{ab}}) = \mathscr{P}^{-}_{\overline{cd}}$.

2.2 Satz

Sei $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ eine Bewegung.

a) φ ist bijektiv

b) φ bildet Geraden auf Geraden, Halbgeraden auf Halbgeraden und Verbindungsstrecken auf Verbindungsstrecken ab.

c) Ist $a \in G \Rightarrow \varphi(a) \in \varphi(G)$

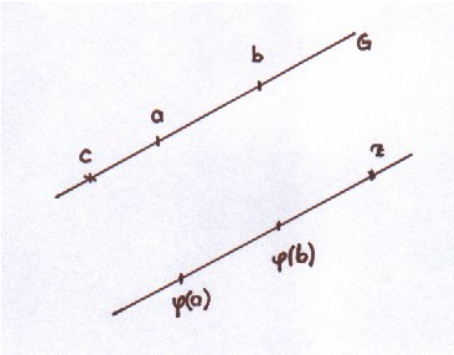
Beweis:

a) φ bijektiv $\Leftrightarrow$ φ injektiv & surjektiv
φ injektiv:
Sei $a \neq b \Rightarrow d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a,b) > 0 \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b) \Rightarrow \varphi$ injektiv.

b) Sei G Gerade. Seien $a,b \in G$, $a \neq b$. Dann ist $\varphi(G) = \overline{\varphi(a)\varphi(b)}$.
Sei $x \in G$, $x \neq a,b$. Dann gilt:

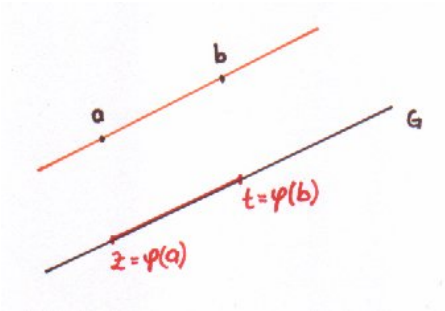
$$\begin{aligned}
d(a,b) = d(a,x) + d(x,b) \quad &\Rightarrow \quad d(\varphi(a),\varphi(b)) = d(\varphi(a),\varphi(x)) + d(\varphi(x),\varphi(b)) \\
\text{oder } d(a,x) = d(a,b) + d(b,x) \quad &\Rightarrow \quad \text{oder } d(\varphi(a),\varphi(x)) = d(\varphi(a),\varphi(b)) + d(\varphi(b),\varphi(x)) \\
\text{oder } d(b,x) = d(b,a) + d(a,x) \quad &\Rightarrow \quad \text{oder } d(\varphi(b),\varphi(x)) = d(\varphi(b),\varphi(a)) + d(\varphi(a),\varphi(x))
\end{aligned}$$

Damit: $\varphi(x) \in (\varphi(a),\varphi(b))$ oder $\varphi(b) \in (\varphi(a),\varphi(x))$ oder $\varphi(a) \in (\varphi(b),\varphi(x))$.
Somit wird eine Gerade in eine Gerade abgebildet: $\varphi(x) \in \overline{\varphi(a)\varphi(b)}$
d.h. $\varphi(G) \subseteq \overline{\varphi(a)\varphi(b)}$
Frage: Ist $\varphi(G) = \overline{\varphi(a)\varphi(b)}$?
Von der Anordnungsaxiome wissen wir:



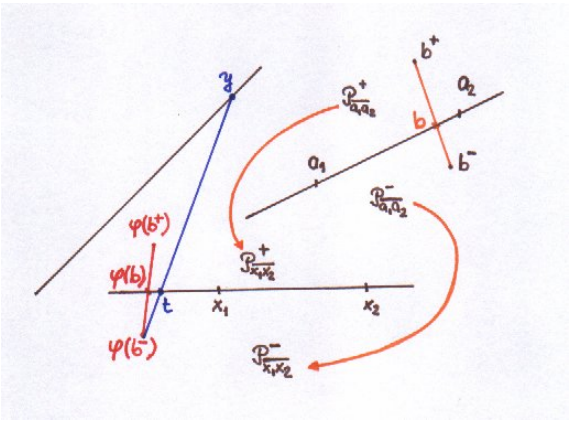
Gibt es ein Punkt x auf $\overline{\varphi(a)\varphi(b)}$, so existiert ein Punkt $c \in \overline{ab}$ so dass:
$d(c,a) = d(\varphi(c),\varphi(a)) = d(x,\varphi(a))$
$d(c,b) = d(\varphi(c),\varphi(b)) = d(x,\varphi(b))$
Damit $\varphi(G) = \overline{\varphi(a),\varphi(b)}$

a) φ surjektiv
Sei $y \in \mathscr{P}$, $y \notin Bi(\varphi)$. Sei G eine Gerade durch y. Es gebe $z,t \in G$, $z \neq t$ mit $z,t \in Bi(\varphi)$.



Mit $z = \varphi(a)$ und $t = \varphi(b)$ folgt dann $\varphi(\overline{ab}) = G = \overline{zt}$. Insbesondere $y \in Bi(\varphi)$. Widerspruch!
Also $|G \cap Bi(\varphi)| \leq 1$ und $Bi(\varphi) = \infty$.

Seien x_1,$x_2 \in Bi(\varphi)$ mit $x_1 = \varphi(a_1)$ und $x_2 = \varphi(a_2)$. Dann ist $\varphi(\overline{a_1 a_2}) = \overline{x_1 x_2}$.



Wähle $b^+ \in \mathscr{P}^+_{\overline{a_1 a_2}}$, $b^- \in \mathscr{P}^-_{\overline{a_1 a_2}} \Rightarrow \exists b : b \in (b^+, b^+) \cap \overline{a_1, a_2}$. Es gilt dann $\varphi(b^+) \in \mathscr{P}^+_{\overline{x_1 x_2}}$ und $\varphi(b^-) \in \mathscr{P}^-_{\overline{x_1 x_2}}$.
<u>OE:</u> $y \in \mathscr{P}^+_{\overline{x_1 x_2}}$
Dann schneidet $(y, \varphi(b^-))$ die Gerade $\overline{x_1 x_2}$ in einen Punkt t. Sei $\overline{y\varphi(b^-)}$.
Dann gilt: $t \in \overline{y\varphi(b^-)}$ und $t \in \overline{x_1 x_2} \subseteq Bi(\varphi)$. Damit sind auf $\overline{y\varphi(b^-)}$ zwei verschiedene Punkte aus $Bi(\varphi)$, nämlich t und $\varphi(b^-)$. Widerspruch!

2.3 Folgerung

Die Menge der Bewegungen ist eine Gruppe.

2.4 Folgerung

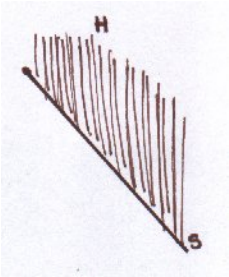
Sei φ eine Bewegung. Dann gilt:

a) $\varphi(\mathscr{P}^a_G) = \mathscr{P}^{\varphi(a)}_{\varphi(G)}$

b) es werden Dreiecke auf Dreiecke, Winkel auf Winkel und Inneres auf Inneres abgebildet.

2.5 Satz

$\mathscr{F}$ sei die Menge aller Tripel (a, s, H), wobei $a \in \mathscr{P}$, s eine Halbgerade mit Anfangspunkt a und H eine Halbebene zur Geraden $\overline{s}$ ist. Das Tripel (a, s, H) heißt Fahne.



Zu (a,s,H) und (a',s',H') gibt es genau eine Bewegung φ mit $a' = \varphi(a)$, $s' = \varphi(s)$ und $H' = \varphi(H)$.

Beweis:
Sei $b \in s$. Dann gibt es auf s' genau ein Punkt b' mit $d(a,b) = d(a',b')$ (nach der Axiomatik der Anordnungsgeometrie). Daraus folgt: es existieren zwei Bewegungen φ und ψ mit $a \longmapsto a'$ und $b \longmapsto b'$.
<u>OE:</u> $\varphi(H) = H'$ und $\psi(H) \neq H'$.
Dann gibt es eine Bewegung φ die a auf a', s auf s' (denn $\varphi((a,\infty)_b) = (\varphi(a),\infty)_{\varphi(b)} = (a',\infty)_{b'}$) und H auf H' abbildet. Und diese Bewegung φ ist eindeutig.

2.6 Satz

φ Bewegung. Dann gilt:

- etweder $\varphi = id$, oder
- $Fix(\varphi)$ ist eine Gerade, oder
- $Fix(\varphi)$ ist ein einziger Punkt, oder
- $Fix(\varphi) = \emptyset$

a,b,c seinen nicht kollinear.
Wenn $a,b,c \in Fix(\varphi)$:
Es gibt genau zwei Bewegungen φ_1, φ_2 mit $\varphi_i(a) = a$, $\varphi_i(b) = b$
$\varphi = \varphi_1$ oder $\varphi = \varphi_2$
OBDA:
$\varphi_1(\mathscr{P}^c_{\bar{ab}}) = \mathscr{P}^c_{\bar{ab}}$, $\varphi_1 = id$
$\varphi_2(\mathscr{P}^c_{\bar{ab}}) \neq \mathscr{P}^c_{\bar{ab}}$
Wegen $\varphi(c) = c$: $\varphi = \varphi_1$
Sei $\varphi \neq id$

Seien $a,b \in Fix(\varphi)$, $a \neq b$
Wie eben existieren φ_1, φ_2.
In diesem Fall: $\varphi = \varphi_2$. Sei $x \in \bar{ab}$.
$d(a,x)$, $d(b,x)$ legen x eindeutig fest.
$d(a,\varphi(x)) = d(\varphi(a),\varphi(x)) = d(a,x)$ $d(b,\varphi(x)) = d(\varphi(b),\varphi(x)) = d(b,x)$
$\Rightarrow x = \varphi(x)$ Die Gerade besteht vollständig aus Fixpunkten.

2.7 Definition

Bewegung $\varphi \neq id$ ist eine **Spiegelung**, falls $Fix(\varphi)$ eine Gerade ist, eine **Drehung**, falls $|Fix(\varphi)| = 1$ ist, eine **Translation**, falls es eine Gerade G gibt mit $\varphi(G) \subseteq G$, falls es keinen Fixpunkt gibt, und wenn $\varphi(\mathscr{P}_G^+) \subseteq \mathscr{P}_G^+$.

Sei G eine Gerade.

- An G gibt es genau eine Spiegelung. Sie läßt jeden Punkt von G fest, vertauscht die Halbebenen.
- φ Spiegelung $\Rightarrow$ $\varphi^2 = id$. (φ ist eine Involution.)

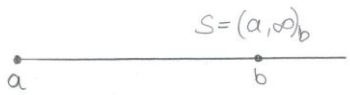
2.8 Satz

φ Bewegung, $\varphi \neq id$.

a) Es gebe eine Halgerade s mit $\varphi(s) = s \Rightarrow$ ist eine Speigelung.

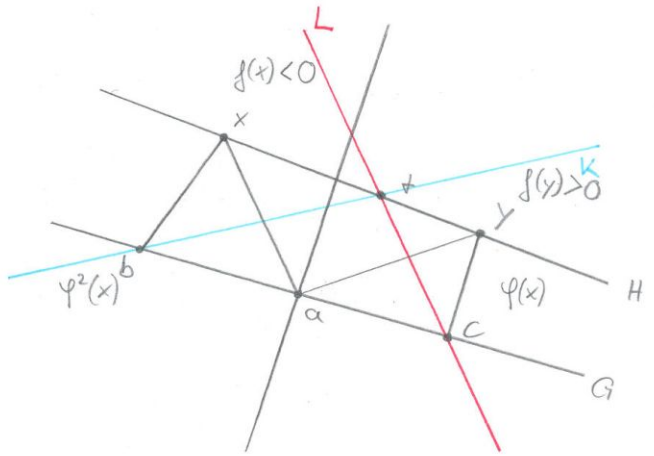
b) Wenn φ eine Gerade G, einen Punkt $a \in G$ und eine Halbebene $\mathscr{P}_G^+$ auf sich selbst abbildet, ist φ eine Spiegelung.

Beweis:



a) $\varphi(s) = s \Rightarrow \varphi(a) = a$
$\varphi(b) \in s$
$d(a,\varphi(b)) = d(a,b) \Rightarrow b = \varphi(b)$

b) Annahme:
Auf G gibt es ein weiteren Fixpunkt $b \Rightarrow \varphi$ ist eine Spiegelung an G.
Wiederspruch zu $\varphi(\mathscr{P}_G^+) = \mathscr{P}_G^+$.



$d(a,b) = d(a,c)$
$d(x,b) \leq d(x,a)$
$d(y,c) \leq d(y,a)$
$d(y,b) \geq d(a,b)$
$d(x,c) \geq d(a,b)$

$\varphi^2|_G = id_G$
$\varphi^2(\mathscr{P}_G^+) = \varphi(\mathscr{P}_G^+) = \mathscr{P}_G^+$
$\Rightarrow \varphi^2 = id$

$f(z) = d(b,z) - d(c,z)$
$f(x) = d(b,x) - d(c,x) \leq 0$
$f(y) \geq 0$

Zwischenwertsatz
$\exists t \in (x,y) : f(t) = 0$
$\varphi(b) = c$
$\varphi(c) = b$

1.Fall $K \cap \varphi(K) \neq \emptyset$, etwa $\{u\} = K \cap \varphi(K)$
$\Rightarrow \{\varphi(u)\} = \varphi(K) \cap \varphi(\varphi(K)) = \varphi(K) \cap K$
$\Rightarrow \varphi(u) = u$
φ hat 2 Fixpunkte: a, u, $\varphi \neq id \Rightarrow \varphi$ Spiegelung.

2.Fall $L \cap \varphi(L) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi$ hat zwei Fixpunkte.

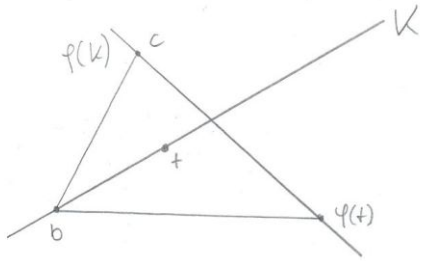
3.Fall $K \cap \varphi(K) = \emptyset$, $l \cap \varphi(L) = \emptyset$

$\{t\} = K \cap L \Rightarrow \{\varphi(t)\} = \varphi(K) \cap \varphi(L)$

$\varphi(K) \cap (b,t) = \emptyset \Rightarrow t \in \mathscr{P}^{b}_{\overline{c\varphi(t)}}$

$\varphi(L) \cap (c,t) = \emptyset \Rightarrow t \in \mathscr{P}^{c}_{\overline{t\varphi(t)}}$

$t \in \Delta^{\circ}(b,c,\varphi(t))$

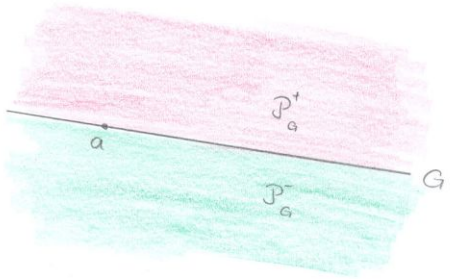


$\overline{bt} \cap \underbrace{(c,\varphi(t))}_{K \cap \varphi(K)} \neq \emptyset$

Widerspruch

2.9 Folgerung

G Gerade, $a \in G \Rightarrow \exists!$ Spiegelung φ mit $\varphi(a) = a, \varphi(G) = G, \varphi(\mathscr{P}^{+}_{G}) = \mathscr{P}^{+}_{G}$

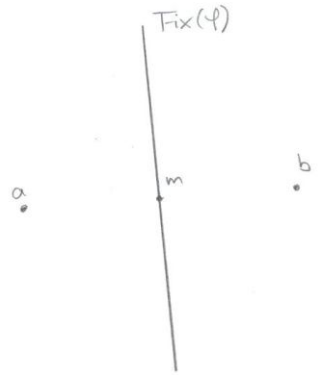


2.10 Folgerung

$a,b \in \mathscr{P}, a \neq b \Rightarrow \exists!$ Spieglung φ mit $\varphi(a) = b$ und $\varphi(b) = a$

$Fix(\varphi)$ besteht aus den Punkten, die von a und b denselben Abstand haben.

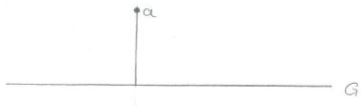
$Fix(\varphi)$ ist die "Mittelsenkrechte" von a und b.



Beweis:
Zu den Punktepaaren (a,b) und (b,a) gibt es genau zwei Bewegungen φ, ψ, welche $a \to b$ und $b \to a$ abbilden. $G = \overline{ab}$
Gelte:
$\varphi(\mathscr{P}_G^+) = \mathscr{P}_G^+$
$\psi(\mathscr{P}_G^+) = \mathscr{P}_G^-$
G ist nicht Fixgerade von φ, ψ.
Sei m der Mittelpunkt von $(a,b) \Rightarrow \varphi(m) = m, \psi(m) = m$
ψ hat sonst keine Fixpunkte $\Rightarrow$ ψ ist eine Drehung.
φ : $Fix(\varphi)$ besteht aus Punkten, die denselben Abstand von a,b haben.
Insbesondere: $|Fix(\varphi)| \geq 2 \Rightarrow Fix(\varphi)$ Gerade, φ Spiegelung.

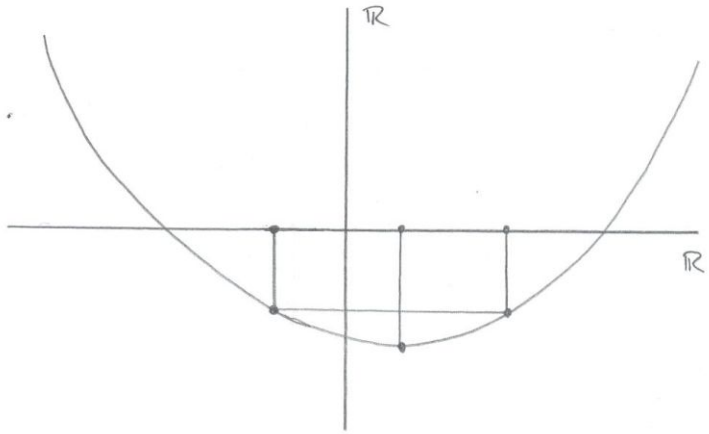
2.11 Satz

Sei $a \notin G$. Seien $x,y,z \in G$ verschieden $\Rightarrow d(a,x), d(a,y), d(a,z)$ sind nicht alle gleich.
Es gibt genau einen Punkt auf G der minimalen Abstand zu a hat.



2.12 Satz

Die Abbildung $d_a : G \to \mathbb{R},\ x \to d_a(x) = d(a,x)$ ist strikt konvex.



2.13 Satz

Seien s,t zwei Halbgeraden, Anfangspunkte jeweils $a \Rightarrow \exists!$ Drehung φ mit $\varphi(s) = \varphi(t)$.

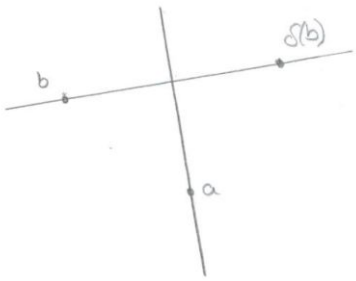
2.14 Satz

Sei $a \in G \Rightarrow \exists!$ Drehung mit $\varphi(a) = a$, $\varphi(G) = G$. Es ist $\varphi^2 = id$.

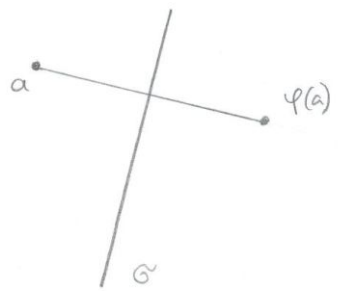
2.15 Satz

a) Jede Bewegung ist Komposition höchstens einer Translation, höchstens einer Drehung und höchstens einer Spiegelung.

b) Jede Bewegung ist Komposition von ≤ 3 Spiegelungen.



$\sigma\ (\sigma\ \delta) = \delta$



$(\sigma\ \varphi)(a) = a$
$\sigma\ \varphi = \tau\ \varphi$
$\varphi = \sigma\ (\sigma\ \varphi) = \sigma\ \tau\ \varphi$

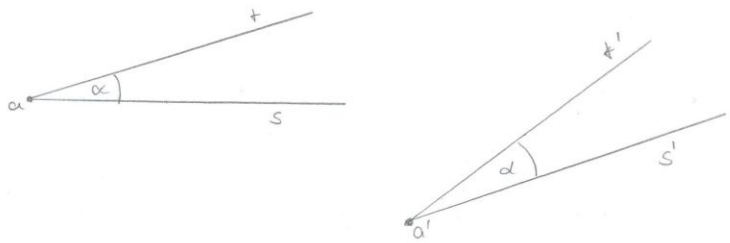
2.16 Definition

M und $N \subseteq \mathscr{P}$ sind kongruent ($M \equiv N$) $\Longleftrightarrow \exists$ Bewegung $\varphi : \varphi(M) = N$

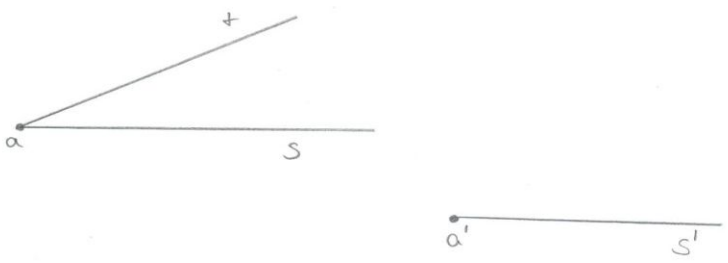
2.17 Satz

$(a,b) \equiv (c,d) \Longleftrightarrow d(a,b) = d(c,d)$

2.18 Satz

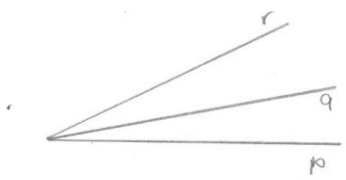


In jeder Halbebene $\mathscr{P}^+_{\overline{s'}}$ und $\mathscr{P}^-_{\overline{s'}}$ gibt es genau eine Halbgerade t' mit Anfangspunkt a', so daß $\angle(s,t) \equiv \angle(s',t')$

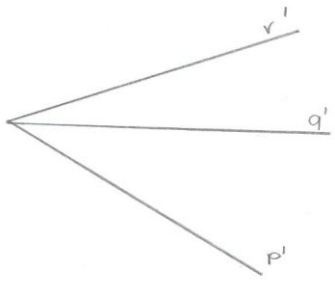


$(a, s, \mathscr{P}_{\overline{s}}^{+})$ Fahne
$\xrightarrow{\varphi} (a', s', \mathscr{P}_{\overline{s'}}^{+})\ t' = \varphi(t)$
$\xrightarrow{\psi} (a', s', \mathscr{P}_{\overline{s'}}^{-})\ t' = \psi(t)$

2.19 Satz



$q \subseteq \angle^{\circ}(p, r)$



$q' \subseteq \angle^{\circ}(p', r')$

(i) $\angle(p, q) \equiv \angle(p', q')$

(ii) $\angle(p, r) \equiv \angle(p', r')$

(iii) $\angle(q, r) \equiv \angle(q', r')$

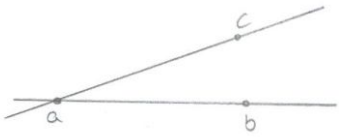
Wenn zwei Kongruenzen bestehen, besteht auch die dritte.

Beweis:
(i), (iii) sollen gelten.
Behauptung: (ii) gilt (auch).
φ Bewegung mit $\varphi(\angle(p,q)) = \angle(p',q')$
ψ Bewegung mit $\psi(\angle(q,r)) = \angle(q',r')$
$\varphi(a) = a',\ \psi(a) = a'$
$\varphi(p) = p',\ \psi(q) = q'$
$\varphi(q) = q',\ \psi(r) = r'$
Entweder $\varphi = \psi$ oder φ und ψ sind die beiden verschiedenen Bewegungen, die q in q' überführen.
$\varphi(\mathscr{P}^p_{\overline{q}}) = \mathscr{P}^{p'}_{\overline{q'}} \Rightarrow \varphi(\mathscr{P}^r_{\overline{q}}) = \mathscr{P}^{r'}_{\overline{q'}},\ \psi(\mathscr{P}^r_{\overline{q}}) = \mathscr{P}^{r'}_{\overline{q'}}$
$\varphi(p) = p',\ \varphi(r) = \psi(r) = r'$

2.20 Satz

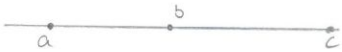
Seien a, b, c verschieden

- nicht kollinear



$\angle(b,a,c) \equiv \angle(c,a,b)$

- kollinear

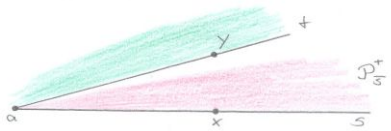


$\angle(b,a,c) \equiv \angle(c,a,b)$

Beweis:
kollinear:
$s = (a,\infty)_b$
$t = (a,\infty)_c$
$s = t:\ \angle(b,a,c) = \angle(s,t) = \angle(t,s) = \angle(c,a,b)$

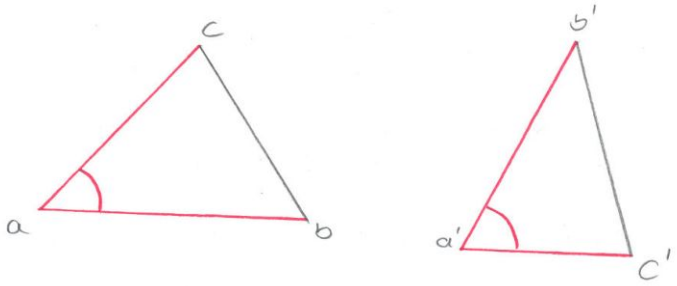
$s \neq t:\ OBdA:\ d(a,b) = d(a,c)$
φ Spiegelung, die b und c vertauscht. $\Rightarrow\ \varphi(s) = t, \varphi(t) = s$

nicht kollinear:
Wähle $x \in s$, $y \in t$ mit $d(a,x) = d(a,y)$
Es gibt genau zwei Bewegungen φ_1, φ_2 mit $\varphi_i((a,x)) = (a,y)$
$\varphi_1(\mathscr{P}^t_{\bar{s}}) = \mathscr{P}^s_{\bar{t}},\ \varphi_2(\mathscr{P}^t_{\bar{s}}) \neq \mathscr{P}^s_{\bar{t}}$



σ: Spiegelung die x, y vertauscht
$\sigma(a) = a$, weil $d(a,x) = d(a,y)$

2.21 Satz: Kongruenz SWS

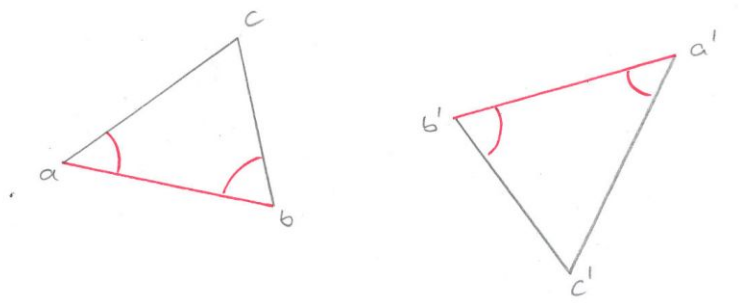


$d(a,b) = d(a',b')$
$d(a,c) = d(a',c')$
$\angle(b,a,c) = \angle(b',a',c')$
$\Rightarrow \Delta(a,b,c) \equiv \Delta(a',b',c')$

Beweis:
φ eindeutig bestimmte Bewegung mit :
$\varphi(\angle(b,a,c)) = \angle(b',a',c')$
$\varphi((a,\infty)_b) = (a',\infty)_{b'}$
$\varphi((a,\infty)_c) = (a',\infty)_{c'}$
$\varphi(b) \in (a',\infty)_{b'}$ und

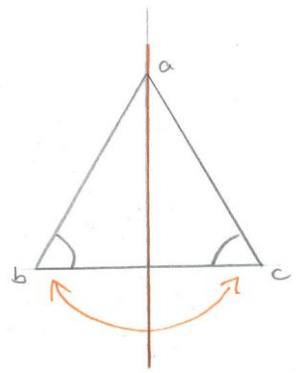
$d(a', \varphi(b)) = d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a,b) = d(a',b')$
$\Rightarrow b' = \varphi(b)$

2.22 Satz: Kongruenz WSW



$d(a,b) = d(a',b')$
$\angle(b,a,c) = \angle(b',a',c')$
$\angle(a,b,c) = \angle(a',b',c')$
$\Rightarrow \Delta(a,b,c) \equiv \Delta(a',b',c')$

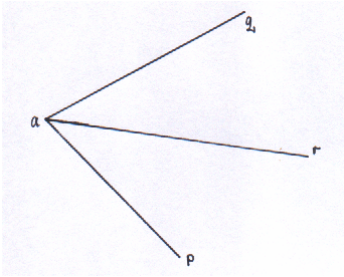
2.23 Satz (Basiswinkelsatz)



$d(a,b) = d(a,c) \Longleftrightarrow \angle(a,c,b) \equiv \angle(a,b,c)$

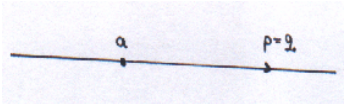
2.24 Definition

Seien p, q und r Halbgeraden mit Anfangspunkt a.

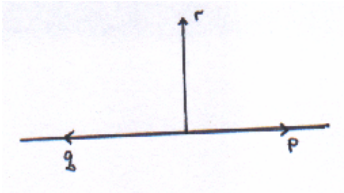


1. Wenn $\overline{p} \neq \overline{q}$:
   r ist Winkelhalbierende von $\angle(p,q)$, falls:
   $\angle(p,r) \equiv \angle(r,q)$ und $r \in \angle^{\circ}(p,q)$

2. Wenn $\overline{p} = \overline{q}$ und $p = q$:
   r ist Winkelhalbierende von $\angle(p,q)$, falls:
   $r = p = q$



3. Wenn $\overline{p} = \overline{q}$ und $p \neq q$:
   r ist Winkelhalbierende von $\angle(p,q)$, falls:
   $\angle(p,r) \equiv \angle(r,q)$

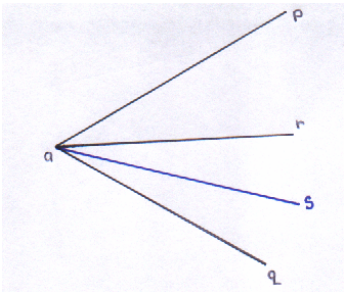


2.25 Satz

Wenn $\angle(p,q)$ eine Winkelhalbierende besitzt und $\angle(p,q)$ nicht gestreckt ist, dann ist die Winkelhalbierende eindeutig bestimmt.

Beweis:

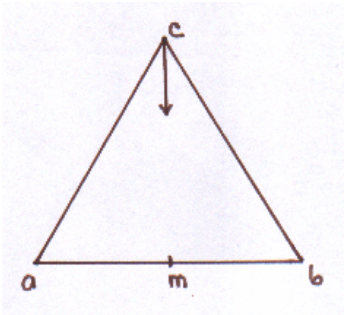
φ sei eine Bewegung so dass $\angle(p,r) \equiv \angle(q,r) \Rightarrow \varphi(a) = a$ und $\varphi(p) = q$.
Es gibt genau zwei Bewegungen mit der Eigenschaft, dass a auf a und p auf q abgebildet werden. ψ sei eine weitere Bewegung, so dass:
$\angle(p,s) \subset \angle(q,s) \Rightarrow \psi(a) = a$, $\psi(p) = q$.



D.h. $\varphi(\mathscr{P}^r_{\overline{p}}) = \mathscr{P}^r_{\overline{q}} = \mathscr{P}^s_{\overline{q}} = \psi(\mathscr{P}^r_{\overline{p}})$. Damit $\varphi = \psi$ und aus $r \subseteq Fix(\varphi)$ und $s \subseteq Fix(\varphi)$ folgt $r = s$.

2.26 Satz

Sei $\Delta(a,b,c)$ gleichschenklig, d.h. $d(a,c) = d(b,c)$. Sei m der Mittelpunkt von $(a,b) \Rightarrow (c,\infty)_m$ ist Winkelhalbierende von $\angle(a,c,b)$



Beweis:
$(c,\infty)_m \subseteq \angle^\circ(a,c,b)$.
φ sei eine Bewegung mit $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$ und $\varphi(\mathscr{P}^c_{\overline{ab}}) = \mathscr{P}^c_{\overline{ab}}$ sei eine Spiegelung mit:

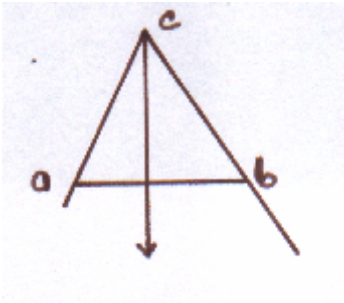
$$Fix(\varphi) = \{x \mid d(a,x) = d(b,x)\}$$

Mit $c \in Fix(\varphi)$ und $m \in Fix(\varphi)$ folgt: φ ist eine Kongruenz $\angle(a,c,m) = \angle(b,c,m)$.

2.27 Folgerung

Sind a,b,c nicht kollinear, so hat $\angle(a,c,b)$ eine Winkelhalbierende.

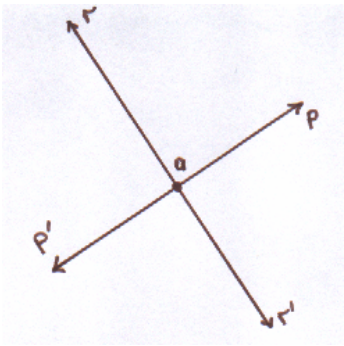
Beweis:



$d(x,c) = d(y,c)$

2.28 Satz

Der Winkel $\angle(p,p^{'})$ hat genau 2 Winkelhalbierende.

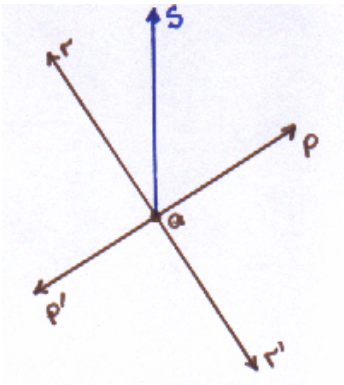


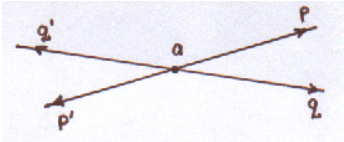
Beweis:
Es gibt genau 2 Bewegungen φ, ψ mit $\varphi(a) = a$, $\psi(a) = a$, $\varphi(p) =^{'}$, $\psi(p) = p^{'}$, $\varphi(\mathscr{P}_{\overline{p}}^{+}) = \mathscr{P}_{\overline{p}}^{+}$, $\psi(\mathscr{P}_{\overline{p}}^{+}) = \mathscr{P}_{\overline{p}}^{-}$.
φ ist also eine Spiegelung mit $a \in Fix(\varphi)$. Seien $r, r^{'}$ Halbgeraden auf $Fix(\varphi)$ mit Anfangspunkt a so dass: $\varphi(\angle(p,r)) = \angle(p^{'},r)$, $r \in \mathscr{P}_{\overline{p}}^{+}$.
Es gilt $\varphi(r^{'}) = r^{'}$ und $\varphi(\angle(p,r^{'})) = \angle(p^{'},r^{'})$, $r^{'} \in \mathscr{P}_{\overline{p}}^{-}$

$s \subseteq Fix(\varphi) \Rightarrow s = r.$

2.29 Definition

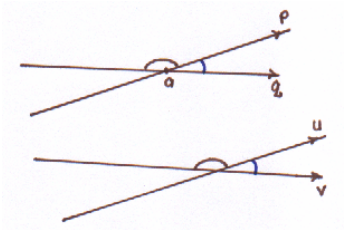
$\angle(p,q)$ hat Nebenwinkel $\angle(p^{'},q)$ und $\angle(p,q^{'})$ und Scheitelwinkel $\angle(p^{'},q^{'})$





2.30 Satz

- $\angle(p,q) \equiv \angle(p^{'},q^{'})$ (Scheitelwinkel sind kongruent)



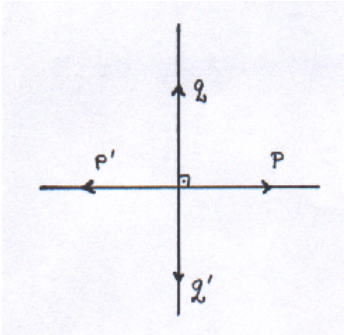
- $\angle(p,q) \equiv \angle(u,v) \Rightarrow \angle(p,q^{'}) \equiv \angle(u,v^{'})$.

2.31 Definition (rechter Winkel)

$\angle(p,q)$ ist ein rechter Winkel, wenn $\angle(p,q) \equiv \angle(p^{'},q)$.
Geraden G und H stehen senkrecht aufeinander, wenn sie sich schneiden und eine Halbgerade auf G im Schnittpunkt mit einer Halbgeraden auf H einen rechten Winkel bilden.
$G \perp H$

2.32 Definition (Lot)

Sei G eine Gerade und a ein Punkt.



- $a \notin G$: Eine Gerade H heißt Lot von a auf G, wenn $a \in H$ und $H \perp G$ ist. Schnittpunkt von H und G: Fußpunkt des Lotes.
- $a \in G$: Eine Gerade H heißt Lot auf G in a, wenn $a \in H$ und $H \perp G$ ist.

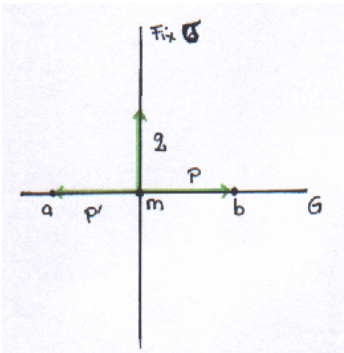
2.33 Bemerkung

Wenn $\angle(p,q)$ ein rechter Winkel ist, dann ist q Winkelhalbierende für $\angle(p,p^{'})$ (Lot als Winkelhalbierende)

2.34 Satz

Sei $a \neq b$. Sei $G = \overline{ab}$, H die Mittelsenkrechte von $(a,b) \Rightarrow H \perp G$.

Beweis:
σ Spiegelung mit $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$ (Involution)

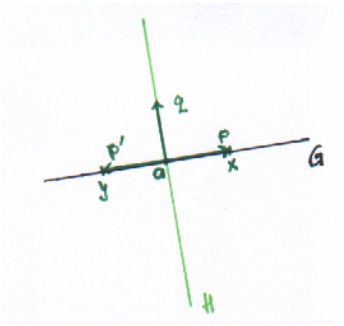


$\sigma(\angle(p,g)) = \angle(p^{'},q)$

2.35 Satz

Sei $a \in G$. Es gibt genau ein Lot in a auf G.

Beweis:

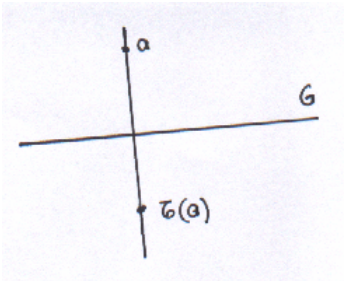


$d(x,a) = d(y,a)$
Bestimme Mittelsenkrechte H. $H \perp G$.
Halbgeraden auf dem Lot: Winkelhalbierende von $\angle(p,p^{'}) \Rightarrow$ Eindeutigkeit.

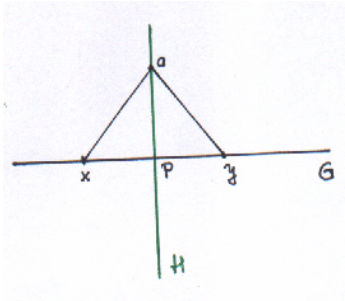
2.36 Satz

Sei $a \notin G$. Dann gibt es genau einen Lot von a auf G. Der Fußpunkt z des Lotes ist derjenige Punkt von G, der am nächsten zu a liegt.

Beweis:
σ : Spiegelung an G ($\overline{a\sigma(a)}$ ist Lot). Sei σ eine Spiegelung an G. $\overline{a\sigma(a)}$ ist

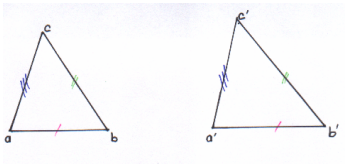


Lot. Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > d(a,G)$, dann gibt es $x,y \in G$, $x \neq y$ mit $d(a,x) = r = d(a,y)$
H: Mittelsenkrechte von $(x,y) \Rightarrow a \in H$, $H \perp G$
Die Eindeutigkeit ist gegeben auf Grund der Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden!



$d(a,p) < \frac{1}{2}d(a,x) + \frac{1}{2}d(a,y) = r$ gilt für jedes $r > d(a,G)$. Damit folgt $d(a,p) = d(a,G)$, also p ist der Punkt mit minimalen Abstand zu a.

2.37 Satz: Kongruenz SSS



$\Rightarrow \Delta(a,b,c) = \Delta(a',b',c')$
<u>Ziel beim Winkelmessen:</u>

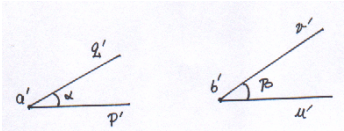
- Jedem Winkel soll eine reelle Zahl zwischen 0 und π zugeordnet werden.
- Zwei Winkel haben dasselbe Winkelmaß $\Leftrightarrow$ Winkel kongruent.

2.38 Definition: Summe von Winkeln

Seien α und β zwei Größenklassen von Winkeln. Die Größenklasse γ ist die Summe von α und β ($\gamma = \alpha + \beta$), wenn gilt:

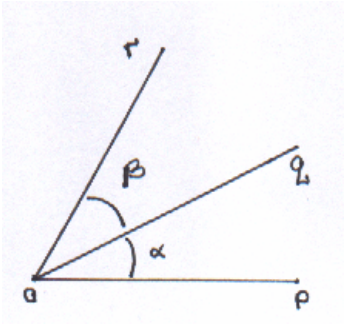
1. α, β haben Repräsentanten $\angle(p,q)$ und $\angle(q,r)$
2. $q \subseteq \overline{\angle}(p,r)$ (wobei $\overline{\angle}$ = abgeschlossene $\angle$)

$\angle(p,r)$ ist dann Repräsentant von γ.

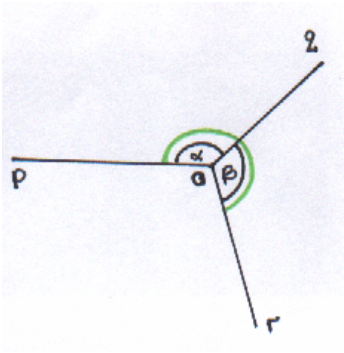


2.39 Satz (Winkelsumme: wohldefinierte Operationen)

- Die Winkelsumme ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten
- Die Winkelsumme ist: assoziativ und kommutativ und hat ein neutrales Element(die Größenklasse des Nullwinkels $\angle(p,p)$)



$\alpha = \angle(p,q) < \angle(p,r) = \beta$ $\angle(p,q) + \angle(q,r) = \angle(p,r)$



2.40 Definition

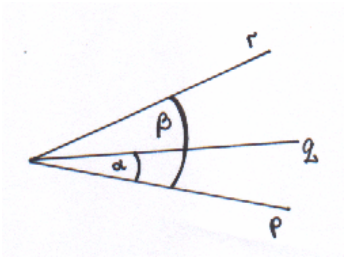
Seien α und β zwei Größenklassen. α ist kleiner als β ($\alpha < \beta$), wenn gilt: α und β haben Repräsentanten $\angle(p,q)$ und $\angle(p,r)$ mit $q \subseteq \overline{\angle}(p,r)$ mit $q \neq r$

2.41 Satz

- Die Definition von „<“ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

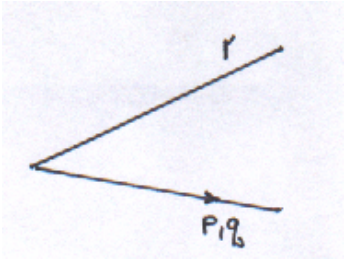
- „<“ ist irreflexiv, transitiv und total.

2.42 Satz

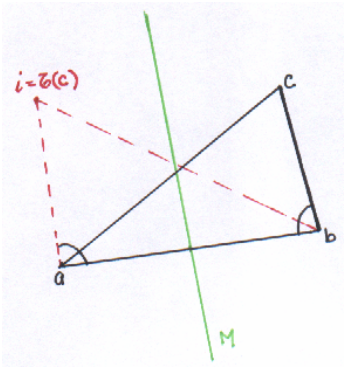


$d(a,c) < d(b,c) \Leftrightarrow \angle(a,b,c) < \angle(b,a,c)$ (eigentlich die Größenordnung)

Beweis:
Sei M die Mittelsenkrechte von (a,b) und σ eine Spiegelung an M mit

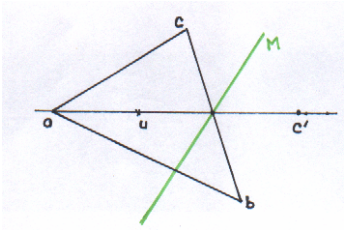


$\sigma(\angle(c,b,a)) = \angle(c',a,b)$
<u>1. Fall</u>
$\angle(b,a,c') \equiv \angle(a,b,c) < \angle(b,a,c) \equiv \angle(a,b,c')$
$(a,\infty)_{c'} \subseteq \angle^{\circ}((a,\infty)_b,(a,\infty)_c)$



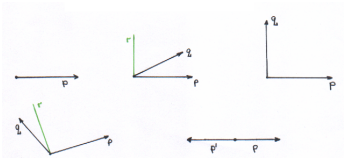
$v \in M$
b,c auf verschiedene Seiten von M

b, a auf verschiedene Seiten von M
Damit folgt, dass a und c auf derselben Seite von M liegen.
Mit $d(b,x) - d(a,x) > 0$ für $x = a$ und $x = c$, folgt $d(b,c) > d(a,c)$
<u>2. Fall</u> $\angle(a,b,c) = \angle(b,a,c)$
$\Delta(a,b,c) \equiv \Delta(b,a,c)$ (WSW)



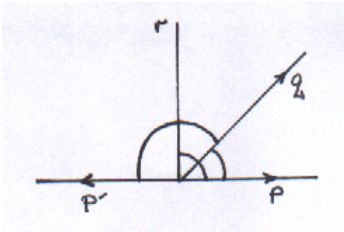
Es gilt also $(a,c) \equiv (b,c)$, d.h. $d(a,c) = d(b,c)$
<u>3. Fall</u> $\angle(a,b,c) > \angle(b,a,c)$
Analog 1. Fall

2.43 Arten von Winkeln:

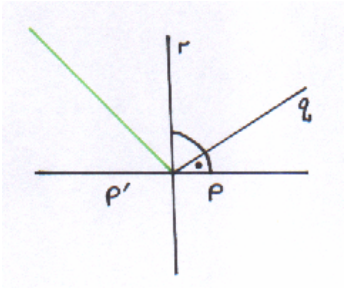


2.44 Satz

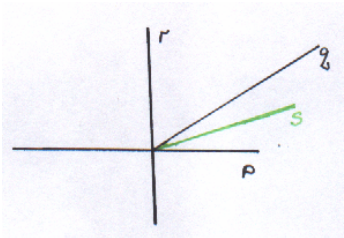
- Das Nebenwinkel eines spitzen Winkels ist stumpf
- Das Nebenwinkel eines stumpfen Winkels ist spitz



Jeder Winkel ist entweder Nullwinkel, spitz, recht, stumpf oder gestreckt.(ausschließliches oder) Sei $\angle(p,q) \neq 0$, nicht gestreckt und nicht recht. Dann ist $\angle(p,q)$ entweder spitz oder stumpf.



Beweis:
$q \subseteq \angle^\circ(p,r)$ oder $q \subseteq \angle^\circ(p',r)$ d.h. $r \subseteq \angle^\circ(p,q)$
$q \subseteq \angle^\circ(p,r)$ falls es noch ein s gäbe mit $\angle(p,s)$ recht und $s \subseteq \angle^\circ(p,q) \Rightarrow$

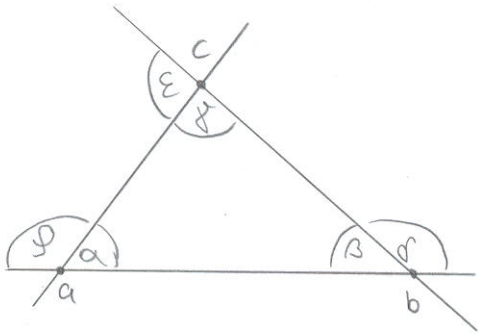


$s \subseteq \angle^\circ(p,r)$
$\exists!\varphi$: $\angle(p,r) \equiv \angle(p',r)$
$\exists!\psi$: $\angle(p,s) \equiv \angle(p',s)$
Es gilt:

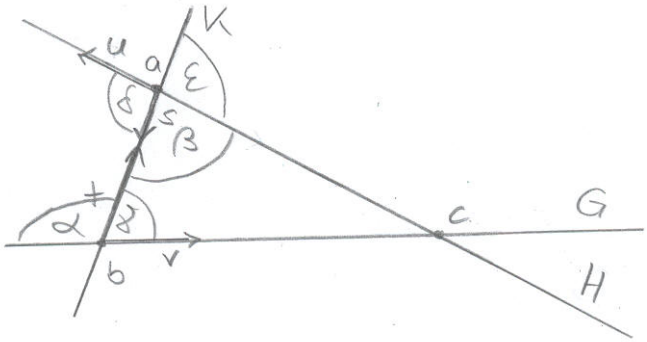
$$\varphi : (a,p,\mathscr{P}^r_{\overline{p}}) \equiv (a,p',\mathscr{P}^r_{\overline{p}})$$

$$\psi : (a,p,\mathscr{P}^s_{\overline{p}}) \equiv (a,p',\mathscr{P}^s_{\overline{p}})$$

wobei $\mathscr{P}^r_{\overline{p}} = \mathscr{P}^s_{\overline{p}}$. Daraus folgt, dass die beide Fahnen und beide Halbebenen gleich sind.
Also φ und ψ bilden die Fahne $(a,p,\mathscr{P}^r_{\overline{p}})$ gleich ab. Damit folgt $\varphi = \psi$.
Mit $r \subseteq Fix(\varphi) = Fix(\psi) \supseteq s$, folgt $r = s$. Also $q \subseteq \angle^\circ(p,r)$ und $r \subseteq \angle^\circ(p,q)$.
Widerspruch! Also folgt dass der Winkel nicht gleichzeitig spitz und stumpf sein kann.



α, β, γ Innenwinkel
$\delta, \varepsilon, \varphi$ Außenwinkel

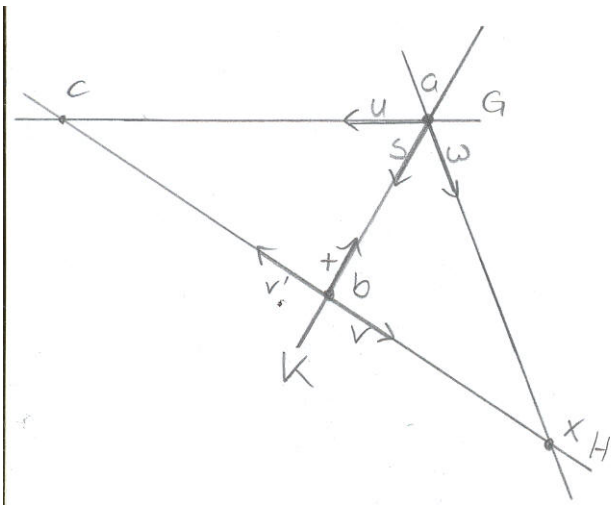


α, β und γ, δ Wechselwinkel
γ, ε Stufenwinkel

2.45 Satz

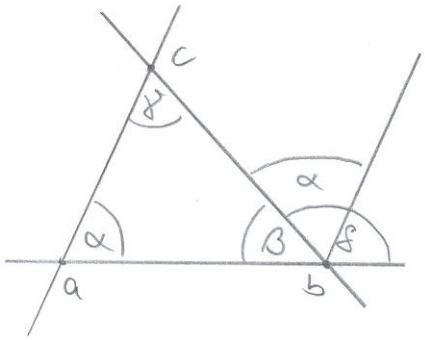
$\angle(u,s) \equiv \angle(v,t) \Rightarrow G||H$

Beweis:
G, H schneiden sich im Punkt $c \Rightarrow c \notin K$
$c \in U \Rightarrow b, c \in K \cap H$
o.B.d.A: $c \in \mathscr{P}_K^u$
Auf v Punkt x: $d(b,x) = d(a,c)$
$[\Delta(a,b,c) \overset{\varphi}{\equiv} \Delta(b,a,x)]$



$d(a,b) = d(b,a)$
$d(a,c) = d(b,x)$
$\angle(b,a,c) = \angle(u,s) = \angle(v,t) = \angle(a,b,x)$
$\angle(a,b,c) \equiv \angle(b,a,x)$
Kongruenzabb.:
$\varphi(v') = w, \varphi(u) = v \Rightarrow \overline{w} = \overline{u} \Rightarrow c,a,x$ kollinear $\Rightarrow G = \overline{ca} = \overline{ax} = H$. Widerspruch.

2.46 Satz (Aussenwinkelsatz)

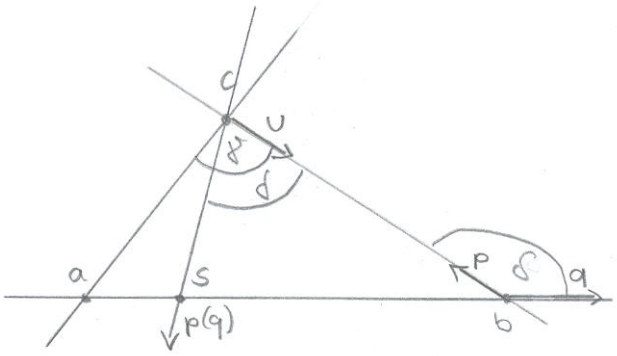


$\Delta(a,b,c)$
$\alpha, \gamma < \delta$
Summe von je zwei Innenwinkeln ist definiert und kleiner als ein gestreckter Winkel.

Beweis:

zu zeigen: $\gamma < \delta$

1. Fall $\gamma \equiv \delta$: Gleich großer Wechselwinkel $\Rightarrow \overline{ac} || \overline{ab}$ Widerspruch.
2. Fall Annahme $\gamma > \delta$: Fahnen $(b, p, \mathscr{P}_p^q) \overset{\varphi}{\equiv} (c, u, \mathscr{P}_?^a)$
   $s = \varphi(q) \cap (a, b)$



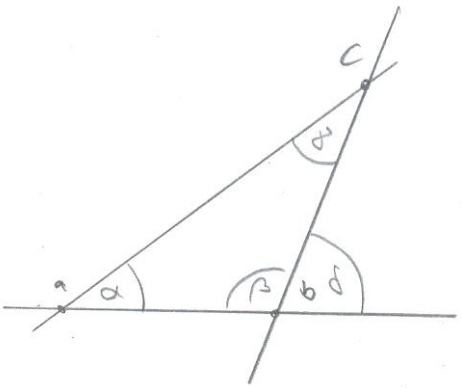
Wechselwinkel gleich $\Rightarrow \overline{ab} || \overline{cs}$. Widerspruch.

$(a, (a, \infty)_b, \mathscr{P}_{\overline{ab}}^c) \equiv (b, p, \mathscr{P}_{\overline{ba}}^q)$ (Vergleiche Skizze zu Satz).
$p \subseteq \angle((b, \infty)_a, \psi((a, \infty)_c))$

2.47 Folgerung

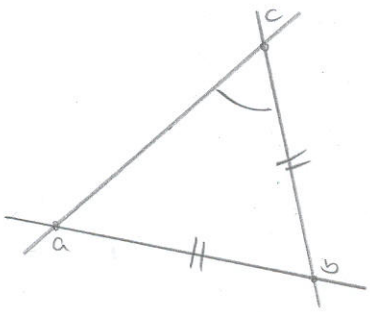
Im $\Delta(a, b, c)$ sind mindestens zwei Winkel spitz.

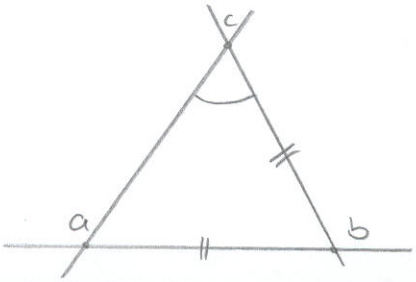
Beweis:
Sei $\angle(a, b, c)$ stumpf oder recht $\Rightarrow \delta$ ist spitz oder recht.
$\alpha, \gamma < \delta \Rightarrow \alpha, \gamma$ spitz.



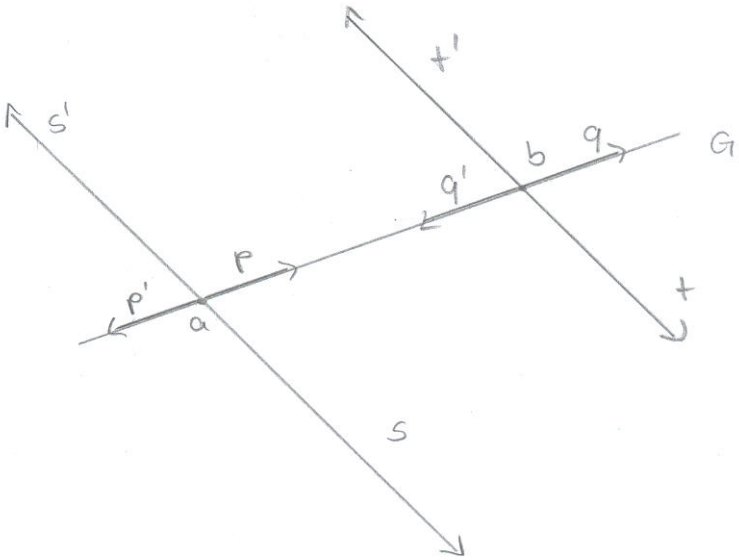
2.48 Satz (Kongruenz SSW)

$\Delta(a,b,c) \equiv \Delta(a',b',c')$
falls:
$d(a,b) = d(a',b')$
$d(b,c) = d(b',c')$
$\angle(b,c,a) \equiv \angle(b',c',a')$
$\rightarrow$ kongruenter Winkel muss der größte sein $\Rightarrow$ kongruent?
$d(a,b) > d(b,c)$



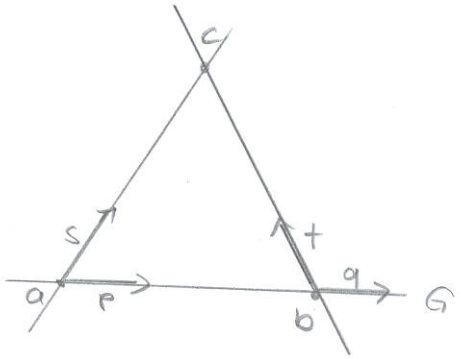


2.49 Satz

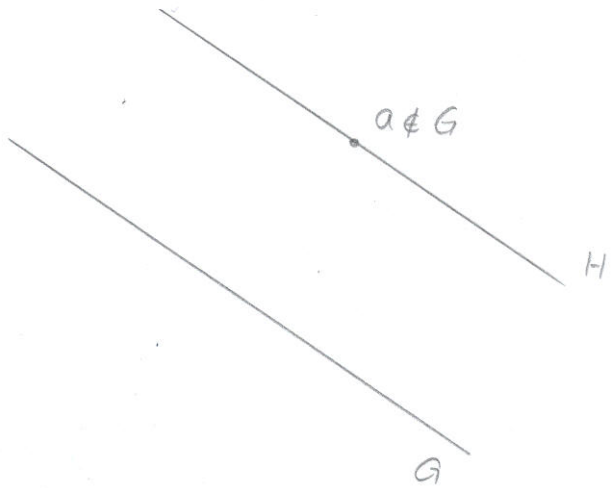


Falls $\angle(p,s) \equiv \angle(q,t)$: $\bar{s}||\bar{t}$

Beweis:
Annahme: $\bar{s}, \bar{t}$ schneiden sich, etwa in C. $a,\ b,\ c$ sind nicht kollinear.
Falls c nicht in $\mathscr{P}^s_G = \mathscr{P}^t_G$: $\angle(p', s') \equiv \angle(q', t')$
$\overline{s'}, \overline{t'}$ schneiden sich $(\overline{s'} = \bar{s},\ \overline{t'} = \bar{t})$
Schnittpunkt C liegt in der $\mathscr{P}^{s'}_G = \mathscr{P}^{t'}_G$
Ab jetzt: $c \in \mathscr{P}^s_G = \mathscr{P}^t_G$
Außenwinkelsatz: $\angle(q,t) > \angle(p,s)$ Widerspruch zur Voraussetzung.

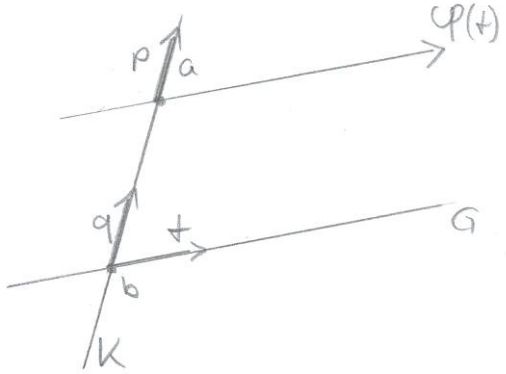


2.50 Satz



$a \notin G\ \exists\, H : a \in H,\ H || G$

Beweis: Wähle $b \in G,\ K = \overline{ab}$
Fahne: $(b, q, \mathscr{P}^t_K) = F_b$
Fahne: $(a, p, \mathscr{P}^t_K) = F_a$



$\exists(!)$ Bewegung φ mit $F_b \to F_a$
φ: $\angle(q,t) \to \angle(p,\varphi(t))$
$\angle(q,t) \equiv \angle(p,\varphi(t))$
$\Rightarrow G = \bar{t} || \varphi(t)$

2.51 Anforderungen an das numerische Maß für Winkelgrößen

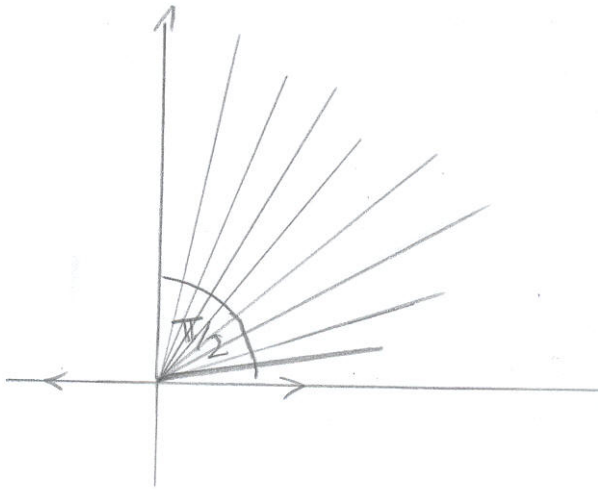
$\omega(\angle(p,q))$: numerisches Maß

- $\omega(\angle(p,q)) \in [0,\pi]$
- $\omega(\angle(p,p)) = 0,\ \omega(\underbrace{\angle(p,p')}_{gestreckter\ Winkel}) = \pi$
- $\omega(\angle(p,q)) = \omega(\angle(r,s)) \Longleftrightarrow \angle(p,q) \equiv \angle(r,s)$
- $\omega(\angle(p,q) + \angle(q,r)) = \omega(\angle(p,q)) + \omega(\angle(q,r))$
- $\angle(p,q) < \angle(r,s) \Rightarrow \omega(\angle(p,q)) < \omega(\angle(r,s))$

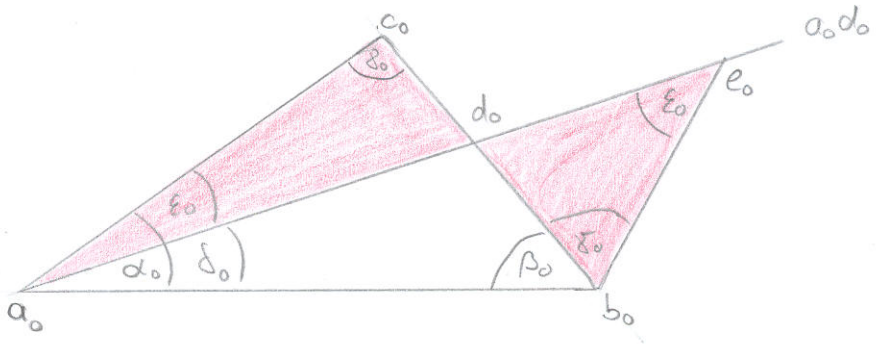
$\omega(\angle(p,q)) = lim_{n\to\infty}\omega(\angle(p,s_n))$
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge von Halbgeraden mit: $\angle(p,s_n) \subseteq \angle(p,s_{n+1}) \subseteq ... \subseteq \angle(p,q)$
$lim_{n\to\infty}s_n = q$

2.52 Satz

Die Winkelsumme im Dreieck ist $\leq \pi$



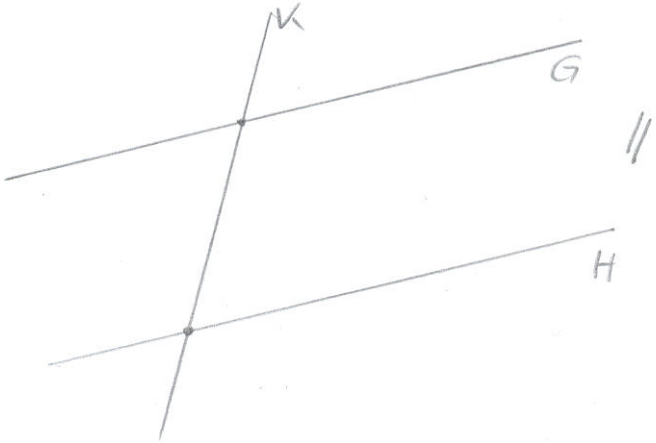
Beweis:
Annahme: $\exists\Delta$, in ddem die Winkelsumme $> \pi$ ist.
$\Delta(a_0,\ b_0,\ c_0)$ sei ein solches Dreieck.
Die Winkelsumme $= \pi + \delta$, $\delta > 0$
Winkel bei $a_0,\ b_0,\ c_0$: $\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0$
α_0 sei $\leq \beta_0,\ \gamma_0$
neues $\Delta(e_0,\ b_0,\ d_0)$
Vergleichen
Ziel:



Konstruktion $\Delta(a_1,\ b_1,\ c_1)$ mit Winkeln $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ und $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi + \delta$
und $\alpha_1 \leq \frac{1}{2}\alpha_0$
$d(a_0, d_0) = d(e_0, d_0)$
$d(d_0, c_0) = d(d_0, b_0)$
$\angle(e_0,\ d_0,\ b_0) \equiv \angle(a_0,\ d_0,\ c_0)$
Kongruenz SWS $\Delta(a_0,\ d_0,\ c_0) \equiv \Delta(e_0,\ d_0,\ b_0)$
$\Delta(a_0,\ b_0,\ e_0)$ Winkelsumme
$\pi + \delta = \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \varepsilon_0 + \delta_0 + (\beta_0 + \gamma_0)$

$\varepsilon_0 + \delta_0 = \alpha_0 \Rightarrow \min(\varepsilon_0, \delta_0) \leq \frac{1}{2}\alpha_0$
$a_1 = e_0$, $b_1 = b_0$, $c_1 = a_0$
$a_1 = a_0$, $b_1 = b_0$, $c_1 = e_0$
$\Rightarrow$ Folge von $\Delta(a_n,\ b_n,\ c_n)$, $n \in \mathbb{N}$
$\alpha_n \leq \frac{1}{2}\alpha_{n+1} \leq \frac{1}{4}\alpha_{n+2} \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}\alpha_0$
$\alpha_n \to 0$ mit $n \to \infty$
Wähle n mit: $\alpha_n < \delta$
$\Rightarrow \pi + \delta = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$
$\Rightarrow \beta_n + \gamma_n = \pi + (\delta - \alpha_n) > \pi$
Aber: Summe von 2 Winkeln ist $< \pi$

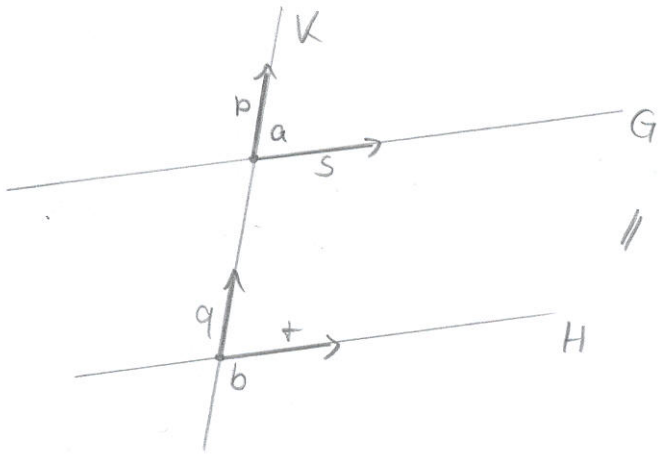
3 Euklidische Geometrie



3.1 Satz

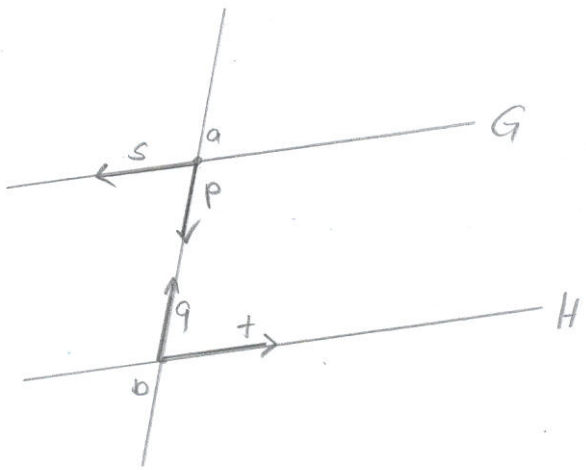
Falls $G \parallel H$, $K \cap G \neq \emptyset \Rightarrow K \cap H \neq \emptyset \Rightarrow \angle(p,s) \equiv \angle(q,t)$

Bewegung φ mit $(a,\ p,\ \mathscr{P}_K^s) \to (b,\ q,\ \mathscr{P}_K^t)$
$\varphi(s)$: Halbgerade bei b in $\mathscr{P}_K^s$
$\varphi(\angle(p,s)) = \angle(q, \varphi(s))$
$\angle(p,s) \equiv \angle(q, \varphi(s))$
$\Rightarrow G = \overline{s} || \overline{\varphi(s)}$
$b \in H$
$H || G$
$b \in \overline{\varphi(s)}$



$\overline{\varphi(s)} || G$
$\Rightarrow H = \overline{\varphi(s)}$
$t,\ \varphi(s)$ in derselben Halbebene bzgl. K
$t = \varphi(s)$

3.2 Folgerung

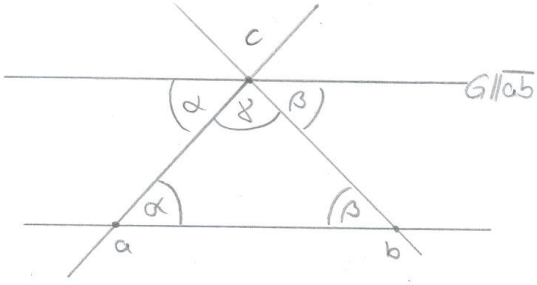


$\Rightarrow \angle(p,s) \equiv \angle(q,t)$

3.3 Satz

Winkelsumme im Dreieck: π

Beweis:
$\alpha + \beta + \gamma =$ gestreckter Winkel $\Rightarrow = \pi$



3.4 Satz

$\Delta(a,\ b,\ c)$

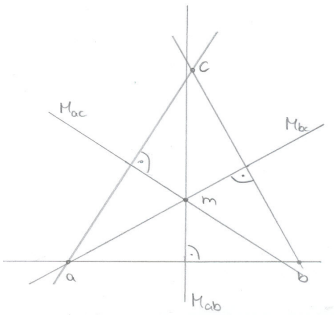
(a) Die Mittelsenkrechten der Seiten schneiden sich in einem Punkt.

(b) Die Höhen schneiden sich in einem Punkt.

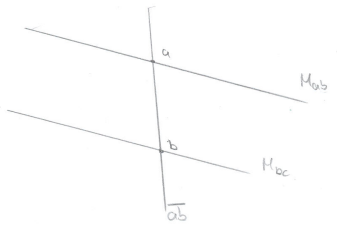
(c) Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

(d) Die Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

Beweis:
(a)
Falls $M_{ab}||M_{bc}$



$\Delta(M_{ac} \cap \overline{bc},\ m,\ M_{bc} \cap \overline{bc})$: Hat zwei rechte Winkel: $\angle(M_{bc}, \overline{bc})$ und $\angle(M_{ab}, \overline{bc})$(da $M_{ab}||M_{bc}$) $\Rightarrow$ Widerspruch
$d(a,m) = d(b,m) = d(c,m) \Rightarrow m \in M_{ac}$



3.5 Definition

Ein Parallelogramm ist ein Viereck $(a,\ b,\ c,\ d)$, (keine drei Eckpunkte sind kollinear), bei dem gilt, dass $\overline{ab}||\overline{cd}$, $\overline{bc}||\overline{da}$. Die Diagonalen sind die Strecken $\overline{ac}$ und $\overline{bd}$.

3.6 Satz

In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. Die Diagonalen schneiden sich in ihrem Mittelpunkt.

3.7 Satz

Sei G eine Gerade, $r \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

(a) falls $r = 0$, $G = \{a \in \mathscr{P} | d(a,b) = r\}$

(b) falls $r \geq 0$, $\{a \in \mathscr{P} | d(a,G) = r\}$ besteht aus 2 Geraden H_1 und H_2. Es gilt $H_1||G$, $H_2||G$, $\mathscr{P}_G^{H_1} \neq \mathscr{P}_G^{H_2}$

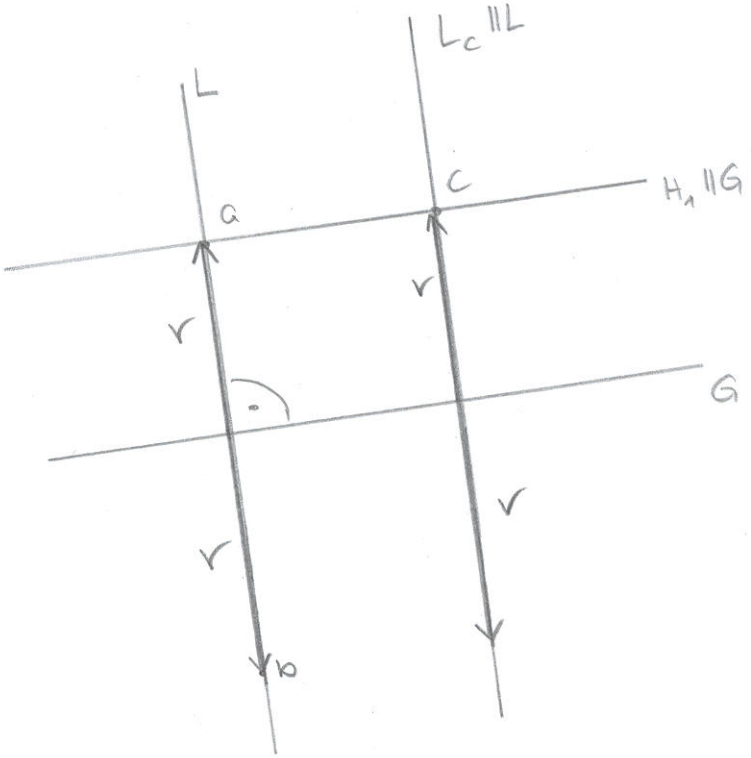
Beweis:

(a) $r = 0$ OK

(b) $r \geq 0$

noch offen $\{a \in \mathscr{P} \mid d(a,G) = r\} = \{H_1, H_2\}$
Sei $x \notin H_1$ und $x \in \mathscr{P}_G^{H_1}$

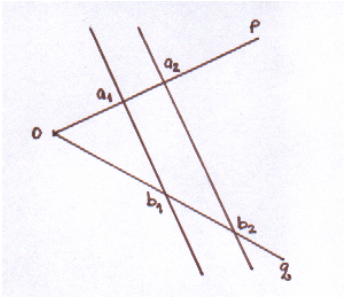
1. Fall $x \in (y,z)$: $d(y,z) = d(y,x) + d(x,z)$ und da $d(y,z) = d(y,x) = r$ folgt, dass $d(x,z) = 0$, also $x = z$ und damit $x \in H_1$



2. Fall $y \in (x,z) \Rightarrow x,z$ auf verschiedene Seiten von G. Im Widerspruch zu Wahl von x
3. Fall $z \in (x,y)$ Analog Fall 1

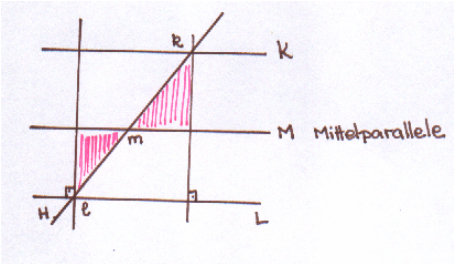
3.8 Satz (ersten Strahlensatz)

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Maßzahlen der Abschnitte auf dem eine Strahl wie die der entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.



$$\frac{d(0,a_1)}{d(0,a_2)} = \frac{d(0,b_1)}{d(0,b_2)} \text{ also } \frac{d(0,a_1)}{d(0,b_1)} = \frac{d(0,a_2)}{d(0,b_2)}$$

Beweis:
Falls zwei dieser drei Zahlen gleich sind, dann sind alle drei gleich.



$\Rightarrow d(l,m) = d(k,m)$

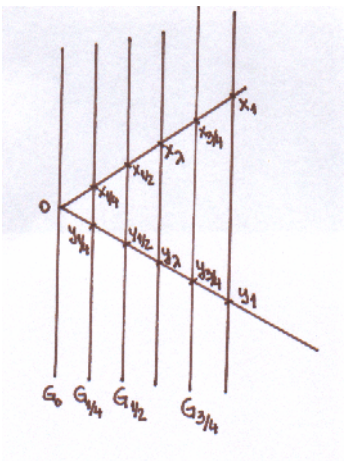
$$\frac{d(0,x_{1/2})}{d(0,y_{1/2})} = \frac{d(0,x_1)}{d(0,y_1)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{d(0,x_{1/2})}{d(0,x_1)} = \frac{d(0,y_{1/2})}{d(0,y_1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d(0,x_{1/4})}{d(0,x_1)} = \frac{d(0,x_{1/4})}{d(0,x_{1/2})} \cdot \frac{d(0,x_{1/2})}{d(0,x_1)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{d(x_{1/4},x_{3/4})}{d(x_{1/2},x_1)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{d(0,x_{3/4})}{d(0,x_1)} = \frac{3}{4}$$

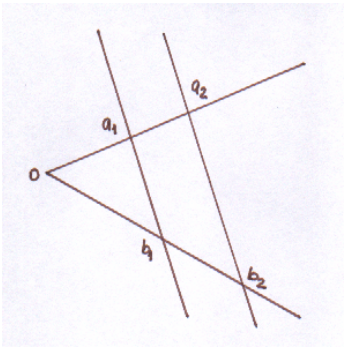
Seien ε, ε' unmittelbare Nachfolger und $\varepsilon < \lambda < \varepsilon'$
$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \frac{1}{2^i}$ mit $\varepsilon_i = 0,1$



$x_\lambda \in (x_\varepsilon, x_{\varepsilon'}) \Rightarrow y_\lambda \in (y_\varepsilon, y_{\varepsilon'})$
$\frac{d(0,x_\lambda)}{d(0,y_\lambda)}$
$d(0,x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon, x_\lambda)$
$d(0,y_\varepsilon) + d(y_\varepsilon, y_\lambda)$
$\varepsilon' > \frac{d(0,x_\lambda)}{d(0,x_1)} > \varepsilon$
$\varepsilon' > \frac{d(0,y_\lambda)}{d(0,y_1)} > \varepsilon$
$d(0,x_{\varepsilon'}) = d(0,x_\lambda) + d(x_\lambda, x_{\varepsilon'})$

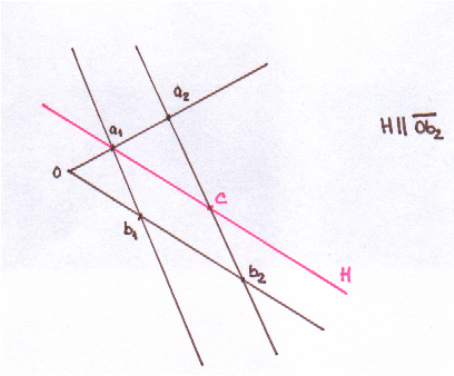
3.9 Satz (zweite Strahlensatz)

Werden zwei von einem Punkt O ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Maßzahlen der Abschnitte auf den Parallelen wie die der zugehörigen Scheitelabschnitte auf einem Strahl.



$$\frac{d(a_1,b_1)}{d(a_2,b_2)} = \frac{d(0,a_1)}{d(0,a_2)}$$

Beweis:
$H || \overline{0b_2}$, dann folgt nach Strahlensatz:

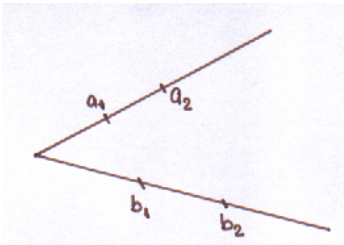


$$\frac{d(a_2,a_1)}{d(a_2,c)} = \frac{d(a_2,0)}{d(a_2,b_2)} = \frac{d(a_1,0)}{d(c,b_2)}$$

$\Rightarrow \frac{d(0,a_1)}{d(0,a_2)} = \frac{d(c,b_2)}{d(a_2,b_2)}$
Da aber $a_1cb_2b_1$ ein Parallelogram ist folgt: $d(a_1,b_1) = d(c,b_2)$
Damit folgt: $\frac{d(0,a_1)}{d(0,a_2)} = \frac{d(a_1,b_1)}{d(a_2,b_2)}$

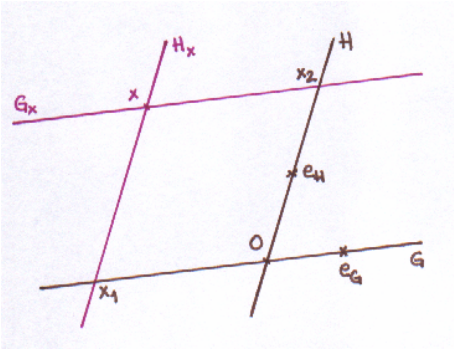
3.10 Satz

Wenn $\frac{d(0,a_1)}{d(0,a_2)} = \frac{d(0,b_1)}{d(0,b_2)} \Rightarrow \overline{a_1b_1} || \overline{a_2b_2}$



Koordinatisierung:
Sei G eine Gerade und 0 ein Punkt mit $0 \in G$

Sei weiter $e_G \in G$ mit $d(0,e_G) = 1$
Parametrisierung: $\varphi : \mathbb{R} \to G$
Koordinatisierung: $: G \to \mathbb{R}$
$\varphi : \mathbb{R} \to G$
$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto e_G$
Für $\varphi(r)$ ist dann: $d(0,\varphi(r)) = |r|$ und $d(e_G,\varphi(r)) = |r-1|$
$\psi : \mathbb{R} \to H$ sei analog definiert.
Seien $\pi_G = \varphi^{-1}$ und $\pi_H = \psi^{-1}$
Sei $x \in \mathscr{P}$ so dass:

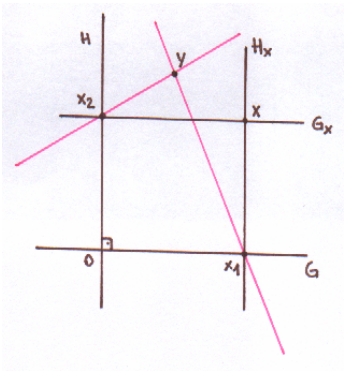


$G_x || G$ und $x \in G_x$
$H_x || H$ und $x \in H_x$

Seien $x_1 = H_x \cap G$ und $x_2 = G_x \cap H$. Eine Koordinatisierung wird wie folgt definiert:
$\mathscr{P} \to G \times H \to \mathbb{R}^2$
$x \mapsto (x_1, x_2) \mapsto (\pi_G(x_1), \pi_H(x_2))$

$\mathbb{R}$ als Inzidenzgeometrie
$\to$ Punkte (x_1, x_2)
$\to$ Geraden $\{x + \lambda(y - x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$
$\to$ Metrik: $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
$\Rightarrow (\mathscr{P}, \mathscr{G}, \mathscr{I}, d)$ Inzidenzstruktur

Koordinatisierung:



$\mathscr{P} \mapsto G \times H$
$x \mapsto (x_1, x_2)$
<u>injektiv:</u> x, y, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

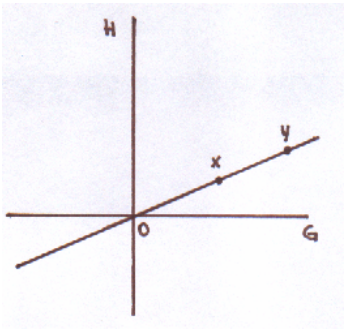
$H_x \cap G = \{x_1\}$
$H_y \cap G = \{y_1\}$

$x_1 = y_1 \in H_x \cap H_y$
$H_y || H || H_x$
$\Rightarrow H_x = H_y$
Ebenso: $G_x = G_y$
$\Rightarrow \{x\} = G_x \cap H_x = G_y \cap H_y = \{y\}$
$\Rightarrow x = y$

<u>sujektiv:</u> OK

$\kappa_G : G \to \mathbb{R}$ Koordinatisierung
$\kappa_H : H \to \mathbb{R}$
$\kappa : \mathscr{P} \to G \times H \to \mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2) \mapsto (\kappa_G(x_1), \kappa_H(x_2))$

Seien $x, y \in \mathscr{P}$.
Sei z folgender Punkt:
<u>falls</u> $x = 0$: $z = y$ <u>falls</u> $y = 0$: $z = x$ <u>falls</u> $x, y, 0$ kollinear:



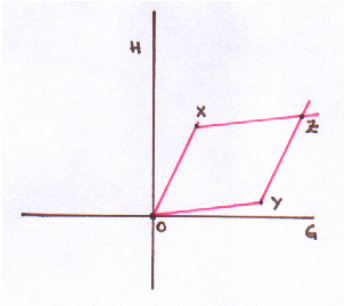
- <u>$x \neq y$:</u>
  $d(z,x) = d(y,0)$
  $d(z,y) = d(x,0)$

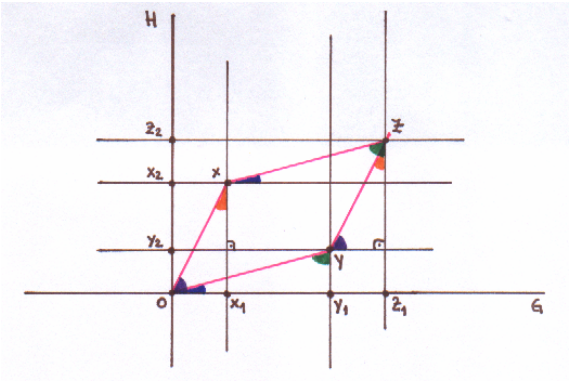
- <u>$x = y$:</u>
  $d(z,x) = d(x,0)$,
  $z \neq 0$

<u>falls</u> $x, y, 0$ nicht kollinear:

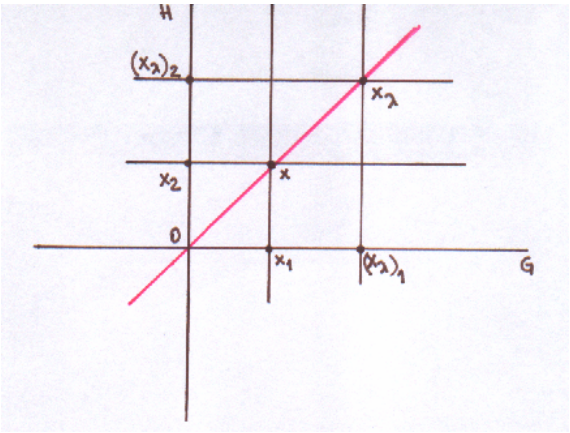
z ist der 0 gegenüberliegende Punkt des Parallelogramms, das von $0, x, y$ aufgespannt wird.
Dann gilt: $\kappa(z) = \kappa(x) + \kappa(y)$.

<u>Exemplarisch:</u> $0, x, y$ nicht kollinear $\kappa(z_1) = \kappa(x_1) + \kappa(y_1)$ $\lambda \in \mathbb{R}$





$\lambda = 0$: $x_\lambda = 0$
$\lambda > 0$: $x_\lambda \in (0,\infty)_x$ mit $d(0,x_\lambda) = \lambda d(0,x)$
$\lambda < 0$: $x_\lambda \in (-\infty,0)_x$ mit $d(0,x_\lambda) = -\lambda d(0,x)$

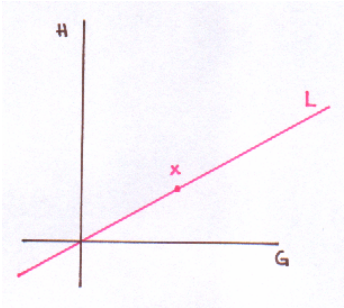


Es gilt: $\kappa(x_\lambda) = \lambda\kappa(x)$

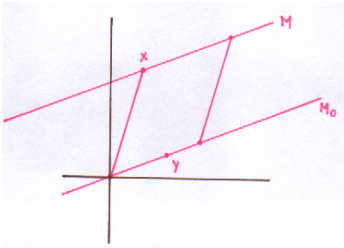
$$\lambda = \frac{d(0,x_\lambda)}{d(0,x)} = \frac{d(0,(x_\lambda)_1)}{d(0,x_1)} = \frac{\kappa_G((x_\lambda)_1)}{\kappa_G((x)_1)}$$

Wie bildet man eine Gerade auf eine Gerade ab?

L sei Gerade in der euklidische Geometrie. Ist $\kappa(L)$ dann Gerade im $\mathbb{R}^2$?
$\kappa(L) = \{\lambda\,\kappa(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ Gerade in $\mathbb{R}^2$



$0 \in M_0$, $M_0 || M$
$\kappa(M) = \{\kappa(x) + \lambda\,\kappa(y) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$



3.11 Definition

$\mathscr{S} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ ist eine zentrische Streckung mit Zentrum $z_0 \in \mathscr{P}$ und Streckungsfaktor $k \in \mathbb{R}^x$, wenn gilt:

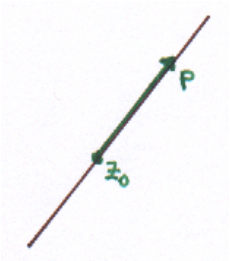
a) ist $z_0 \in G$, so ist $\mathscr{S}(G) \subseteq G$

b) ist P Halbgerade mit Anfangspunkt z_0, so ist $\mathscr{S}(P) \subseteq P$, wenn $k > 0$ ist und $\mathscr{S}(P) \subseteq P'$, wenn $k < 0$ ist

c) $d(z_0, \mathscr{S}(t)) = |k| d(z_0, t)$

<u>Ähnlichkeitsabbildung</u>
Komposition $\varphi \cdot \mathscr{S}$, mit $\mathscr{S}$ zentrische Streckung und φ Bewegung.

$$\mathscr{S}(z) = z_0 + k(z - z_0)$$

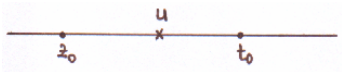


3.12 Satz

$\mathscr{S}$ Streckung mit Zentrum z_0. Sei t_0 beliebiger anderer Punkt $\Rightarrow$ es gibt eine Translation τ und eine zentrische Streckung μ mit Zentrum t_0, so dass $\mathscr{S} = \tau \circ \mu$

Beweis:
μ Zentrische Streckung mit Zentrum t_0 und Faktor k.

$$\mu(z) = t_0 + k(z - t_0)$$



$d(u,t_0) = (1-k)d(0,t_0)$ $(u = \mathscr{S}(0))$
$u \in [t_0,\infty)_{z_0}$, falls $1-k \geq 0$
$u \in (\infty,t_0]_{z_0}$, falls $1-k < 0$
Translation τ: $\tau(\overline{z_0 t_0}) = \overline{z_0,t_0}$
$\mathscr{S} = \tau \circ \mu$
$z_0 = \mathscr{S}(z_0) = \tau(\mu(z_0)) = \tau(t_0 + k(z_0 - t_0)) = \tau((1-k)t_0 + kz_0)$

3.13 Satz

a) zu $z_0 \in \mathscr{P}$ und $k \in \mathbb{R}^x$ gibt es eine zentrische Streckung

b) $\mathscr{S}$ hat genau einen Fixpunkt (das Zentrum), wenn $\mathscr{S} \neq id$

c) Die Menge der zentrischen Streckungen mit Zentrum z_0 bilden eine Gruppe, welche $\cong \mathbb{R}^x$(„$\mathbb{R}$ mal“) ist

d) Ähnlichkeitsabbildungen sind Gruppe.

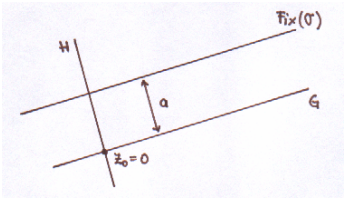
φ, ψ Bewegungen; $\mathscr{S}, \eta$ Streckungen mit Zentrum z_0, t_0

$$\varphi \circ \mathscr{S} \circ \psi \circ \eta = \varphi \circ \mathscr{S} \circ (\psi \circ \tau) \circ \vartheta$$

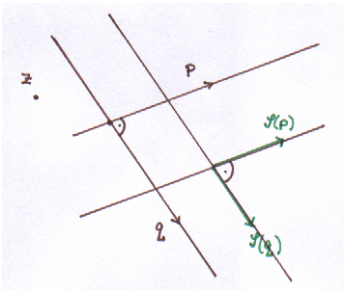
mit $\eta = \tau \circ \vartheta$, Zentrum von $\vartheta : z_0$

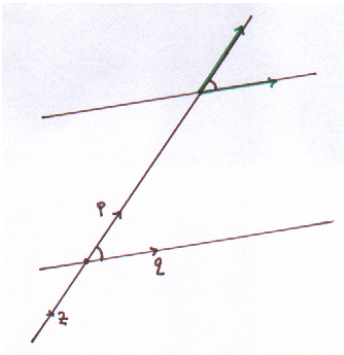
$$\begin{aligned} \mathscr{S} \circ \psi &= \mathscr{S} \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \\ &= \sigma_1^{'} \circ \mathscr{S} \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \\ &= \sigma_1^{'} \circ \sigma_2^{'} \circ \sigma_3^{'} \circ \mathscr{S} \end{aligned}$$

Koordinatisiere:



$\mathscr{S} \circ \sigma(x_1, x_2) = \mathscr{S}(x_1, 2a - x_2) = (kx_1, 2ka - kx_2) = \sigma^{'} \circ \mathscr{S}(x_1, x_2)$
$\sigma^{'}$ Spiegelung an der Geraden durch $(0, ka)$, parallel zu G.
$(\varphi \circ \mathscr{S})^{-1} = \mathscr{S}^{-1} \circ \varphi^{-1} \Rightarrow$ Ähnlichkeitsabbildungen sind Gruppe.

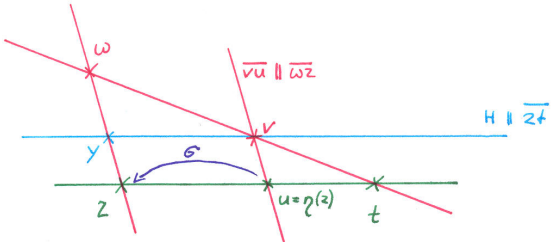




$\mathscr{S}$: zentrische Streckung mit Zentrum Z und Faktor $k \neq 1$.
Sei $t \in \mathscr{P}$, $t \notin Z$.
Sei η die Streckung mit Zentrum t und mit demselben Streckungsfaktor $\Rightarrow$ Es gibt eine Translation σ mit $\mathscr{S} = \sigma \circ \eta$.

Beweis:
Sei $u_0 = \eta(z_0)$
Sei σ die Translation die u in z überführt. $u \longmapsto z$, $\overline{tz} = \overline{uz}$ wird in sich abgebildet.
Erinnerung: Translation

- hat keine Fixpunkte
- es gibt eine Gerade, die in sich selbst abgebildet wird und die Halbebenen bzgl. dieser Geraden werden in sich selbst abgebildet



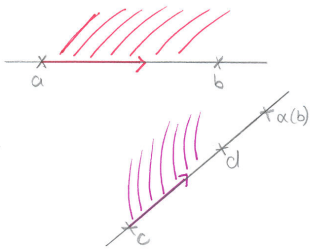
$\mathscr{S} = \sigma \circ \eta$
$\mathscr{S}(z) = z$
$(\sigma \circ \eta)(z) = \sigma(u) = z$
$k = \frac{d(u,t)}{d(z,t)} = \frac{d(v,t)}{d(w,t)} = \frac{d(y,z)}{d(w,z)}$
$\Rightarrow \mathscr{S}(w) = y$
und $\sigma(\eta(w)) = \sigma(v) = y$.

3.14 Satz

Seien $a,\ b,\ c,\ d \in \mathscr{P}$, $a \neq b$ und $c \neq d$. Es gibt genau 2 Ähnlichkeitsabbildungen φ und ψ mit $a \longmapsto c$ und $b \longmapsto d$. Der Unterschied zwischen φ und ψ ist die Abbildung der Halbebenen bzgl $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$.

Beweisidee:
Seien die Fahnen $(a, (a,\infty)_b, \mathscr{P}^+_{\overline{ab}})$ und $(c, (c,\infty)_d, \mathscr{P}^+_{\overline{cd}})$.
Sei α eine Bewegung mit $\alpha(a) = e$ (α ist die Bewegung die eine Fahne in die andere Fahne überführt).

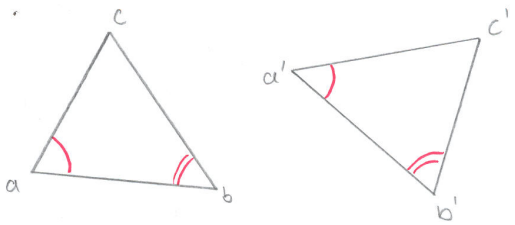
Sei $\mathscr{S}$ ein Streckung mit Faktor $k = \frac{d(d,c)}{d(a(b),c)}$ und Zentrum c



3.15 Definition

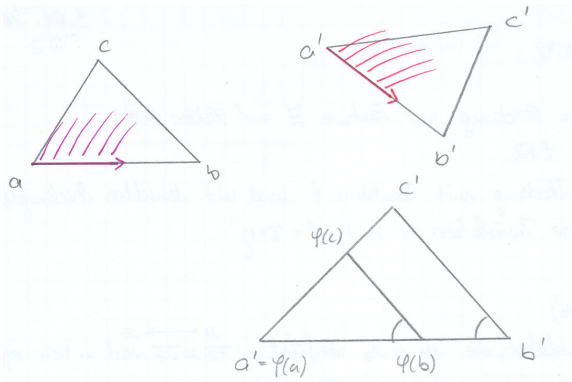
Seien $M,\ N \subseteq \mathscr{P}$. M und N sind ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung φ gibt mit $\varphi(M) = N$.

3.16 Satz



Wenn $\angle(c,a,b) \equiv \angle(c',a',b')$ und $\angle(a,b,c) \equiv \angle(a',b',c')$
$\Rightarrow \Delta(a,b,c)$ ähnlich zu $\Delta(a',b',c')$

Beweis:
Da $\angle(a',\varphi(b),\varphi(c)) \equiv \angle(a',b',c') \Rightarrow \overline{b'c'} || \overline{\varphi(b)\varphi(c)}$ und da $\mathscr{S}$ eine Stre-

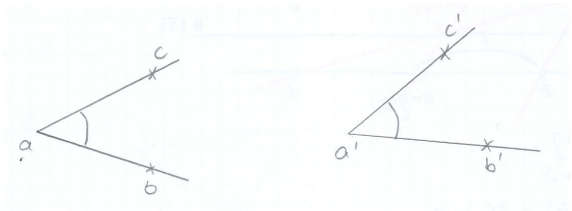


ckung mit Zentrum a' und Faktor $k = \frac{d(\varphi(b),a')}{d(b',a')}$ folgt, dass die beiden Dreiecke zueinander ähnlich sind.

3.17 Satz

Seien $\Delta(a,b,c)$, $\Delta(a',b',c')$

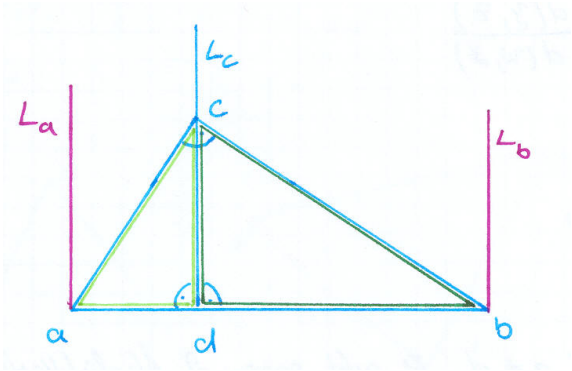
a) $\angle(c,a,b) \equiv \angle(c',a',b')$ und $\frac{d(a,b)}{d(a',b')} = \frac{d(a,c)}{d(a',c')} \Rightarrow$ ähnlich.



b) $\frac{d(a,b)}{d(a',b')} = \frac{d(b,c)}{d(b',c')} = \frac{d(c,a)}{d(c',a')} \Rightarrow$ ähnlich.

3.18 Lemma

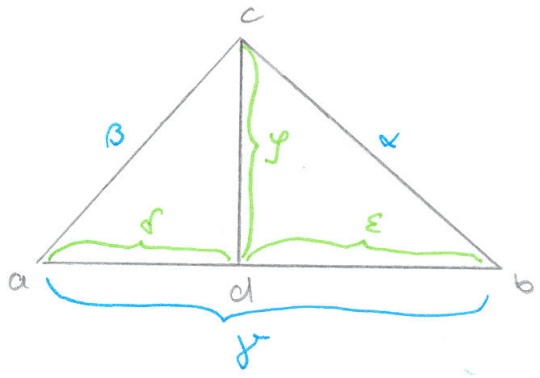
Sei $\Delta(a,b,c)$ mit $\angle(acb)$ rechter Winkel.
L_c: Lot von c auf $\overline{ab}$ mit Fußpunkt d.
Es gilt: $\Delta(a,b,c)$ ähnlich zu $\Delta(a,c,d)$ ähnlich zu $\Delta(b,c,d)$.



Beweis:
$d \in (a,b)$
$\pi = \angle(c,a,b) + \angle(a,b,c) + \angle(b,c,a)$
$= \angle(d,a,c) + \angle(a,c,d) + \angle(c,d,a)$
$= \angle(d,c,b) + \angle(c,b,d) + \angle(b,d,c)$

3.19 Satz (Höhensatz und Kathetensatz)

Sei $\Delta(a,b,c)$ mit $\angle(acb)$ rechter Winkel.
Sei weiter $\beta = d(a,c), \alpha = d(c,b), \gamma = (a,b), \mathscr{S} = d(c,d), \delta = d(a,d), \varepsilon = d(d,b)$



a) Höhensatz
$\mathscr{S}^2 = \delta \cdot \varepsilon$

b) Kathetensatz
$\alpha^2 = \gamma \cdot \varepsilon$
$\beta^2 = \gamma \cdot \delta$

Beweis:
$\frac{\mathscr{S}}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ (wegen Dreiecksähnlichkeiten)
$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\mathscr{S}}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}$
Damit folgt:
$\mathscr{S} = \alpha \cdot \frac{\delta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{\mathscr{S}} \cdot \delta \Rightarrow \mathscr{S}^2 = \delta \cdot \varepsilon \Rightarrow$ Höhensatz.
$\varepsilon = \alpha \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \Rightarrow \alpha^2 = \varepsilon \cdot \gamma \Rightarrow$ Kathetensatz.
$\delta = \beta \cdot \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \beta^2 = \delta \cdot \gamma \Rightarrow$ Kathetensatz.

3.20 Satz (Pythagoras)

Seien die Voraussetzungen wie im Satz 3.19. Dann gilt: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

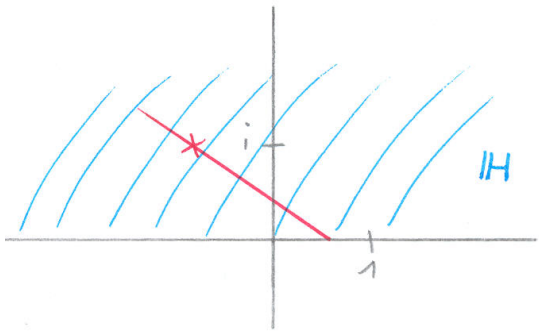
Beweis:
$$\alpha^2 + \beta^2 \underbrace{=}_{Kathetensatz} \varepsilon \cdot \gamma + \delta \cdot \gamma = \underbrace{(\varepsilon + \delta)}_{=\gamma} \gamma = \gamma^2$$

4 Hyperbolische Geometrie

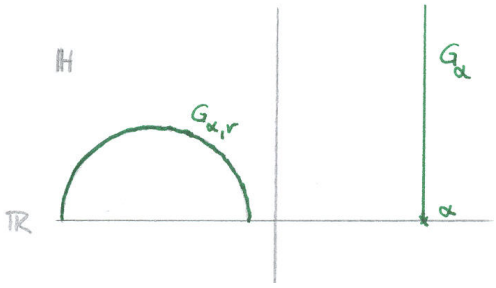
Wird nicht axiomatisch behandelt.

4.1 Die obere Halbebene als Inzidenzstruktur

Obere Halbebene $\mathbb{H}$: $\{c \in \mathbb{C} | Im(c) > 0\}$
Geraden



- $G_\alpha = \{c \in \mathbb{H} | Re(c) = \alpha\}$; $\alpha \in \mathbb{R}$
  $\alpha \notin G_\alpha$ (die Punkte auf der reellen Achse gehören nicht zur Geraden G_α)



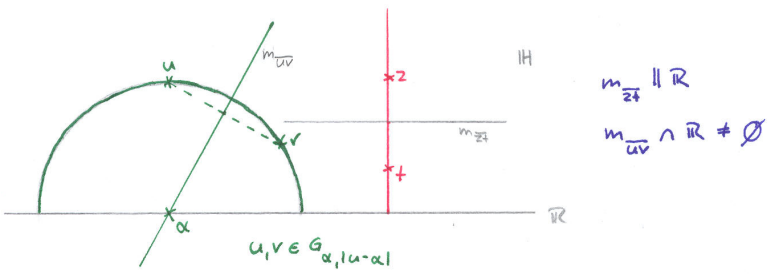
- $G_{\alpha,r} = \{c \in \mathbb{H} | |c - \alpha| = r\}$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^>$

4.2 Satz

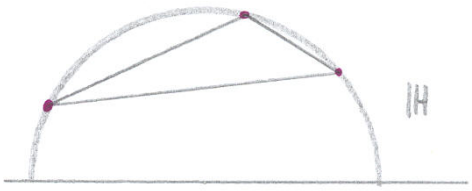
$\mathbb{H}$ ist eine Inzidenzstruktur.

Beweis:

- Auf jeder Geraden liegen mindestens 2 Punkte. OK.
- Es gibt 3 Punkte die nicht auf einer Geraden liegen. OK.
- Durch 2 Punkte gibt es genau eine Gerade
  Seien $z,t \in \mathbb{H}$ und $u,v \in \mathbb{H}$
  Falls $Re(z) = Re(t) \Rightarrow z,t \in G_{Re(z)}$
  Falls $Re(u) \neq Re(v)$, konstruiere einen Halbkreis durch u und v mit Mittelpunkt auf der reellen Achse.



- Es gibt keine weitere Garade durch z und t und auch keine weitere Gerade durch u und v

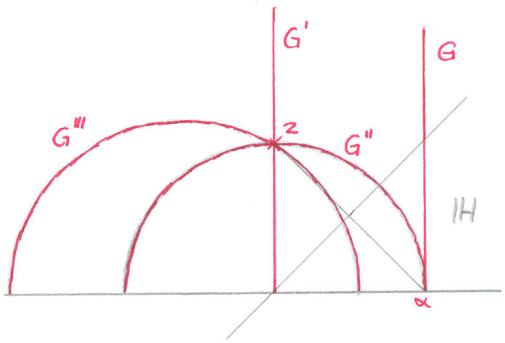


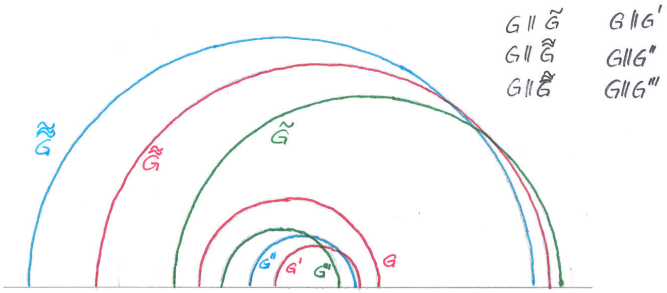
4.3 Satz

Sei G eine hyperbolische Gerade und $z \notin G$. Dann existieren unendlich viele Parallelen durch z zu G.

Beweis:
$G' || G$ klar.
$G'' || G$ wobei G'' ist der Halbkreis durch z und α ($\alpha \notin G$)
$G''' || G$ denn $G''' \cap G = \emptyset$

Hyperbolische Halbebenen
$G_\alpha : \mathbb{H} \cap \{(x,y) | x - \alpha = 0\}$





$G_{\alpha,r} : \mathbb{H} \cap \{(x,y) | (x-\alpha)^2 + y^2 = r^2\}$

Darstellung als Nullstellenmengen von Polynomen
G_α: Nullstellenmenge von $X - \alpha$
$G_{\alpha,r}$: Nullstellenmenge von $(X-\alpha)^2 + Y^2 - r^2$

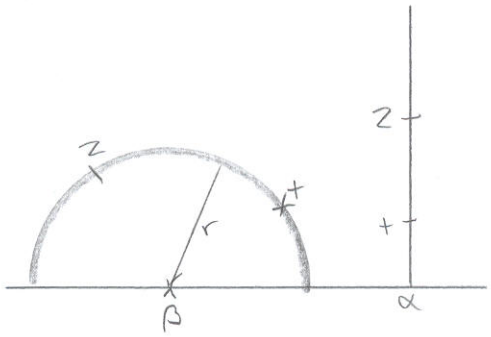
Zu G (hyperbolische Gerade) gibt es ein Polynom F ($deg(F) = 1$ *oder* $deg(F) = 2$) mit $G = \mathbb{H} \cap \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | F(a,b) = 0\}$, $F \in \mathbb{R}[X,Y]$

offene Halbebene bzgl. G: $\{(a,b) \in \mathbb{H} | F(a,b) > 0\}$, $\{(a,b) \in \mathbb{H} | F(a,b) < 0\}$

4.4 Definition (Verbindungsstrecken)

Für zwei Punkte z und t definieren wir die Verbindungsstrecke dazwischen wie folgt:

- $z,\ t \in G_\alpha$
  Verbindungsstrecke $(z,t) = \{w | Im(z) < Im(w) < Im(t)\}$ bzw. $(z,t) = \{w | Im(z) > Im(w) > Im(t)\}$
- $z,\ t \in G_{\alpha,r}$
  Parametrisierung des Halbkreises



$\varphi : (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{H} : \sigma \longmapsto r \cdot (cos(\sigma), sin(\sigma)) + (\beta, 0)$
$\varphi(\sigma_0) = t$, $\varphi(\sigma_1) = z$, $\sigma_0 < \sigma_1$
dann ist die Verbindungsstrecke $(t,z) = \{\varphi(\sigma) | \sigma \in (\sigma_0, \sigma_1)\}$
u liegt zwischen v und w, wenn $u,\ v,\ w$ kollinear sind und $u \in (v,w)$ ist.

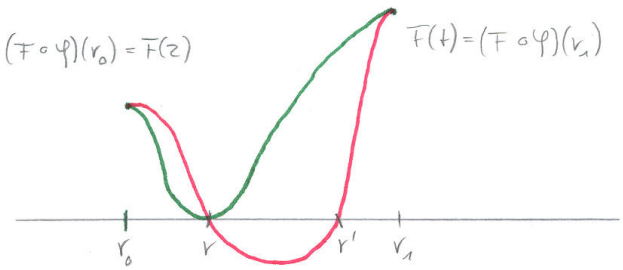
4.5 Satz

G hyperbolische Gerade, $z,\ t \notin G$.
Dann $z,\ t$ liegen in verschiedenen Halbebenen bzgl $G \Leftrightarrow (z,\ t) \cap G \neq \emptyset$

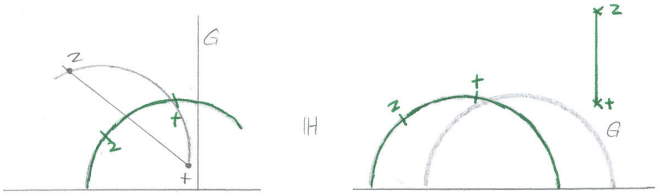
Beweis:

„$\Rightarrow$“ $F(z) < 0$ und $F(t) > 0$ (OBdA)
Parametrisierung $\varphi : (r_0, r_1) \to (z,t)$ stetig.
$\Rightarrow F \circ \varphi$ ist stetig, $(F \circ \varphi)(r_0) = F(z) < 0$, $(F \circ \varphi)(r_1) = F(t) > 0$
Damit folgt nach dem Zwischenwertsatz: $\exists r \in (r_0, r_1) : (F \circ \varphi)(r) = 0$
$\Rightarrow \varphi(r) \in G$

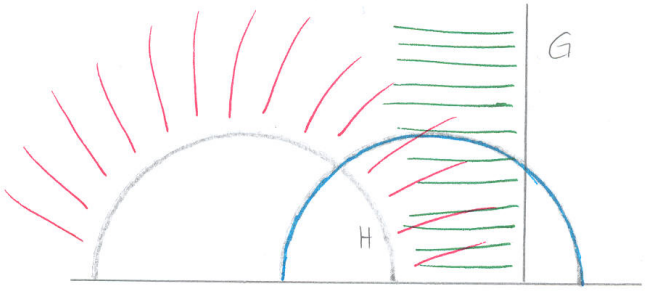
„$\Leftarrow$“ Seien $z,\ t$ in derselben Halbebene, d.h. (OBdA) $F(z) > 0$, $F(t) > 0$
Annahme $(z,\ t) \cap G \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists u \in (z,\ t) : F(u) = 0$
Parametrisierung φ von $(z,\ t)$



- Sei $u = \varphi(r) \Rightarrow F \circ \varphi(r) = 0$
  $\varphi(r)$, $\varphi(r') \in (z,\ t) \cap G$, falls $r \neq r'$ existieren mit $(F \circ \varphi)(r) = 0$, $(F \circ \varphi)(r') = 0$
  Damit folgt $\overline{zt} = G$ (2 Punkte gemeinsam) Widerspruch.
- $(F \circ \varphi)$ hat Minimum bei r.



$G||H$
H_G^+, H_G^-: Halbebenen bzgl. G
H_G^C, H_G^M: Halbebenen bzgl. G, die c, bzw. M enthalten.
z liegt zwischen H und G, falls $z \in H_G^H \cap H_H^G$

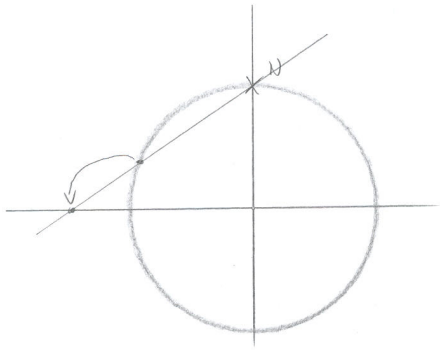


4.6 Definition (Riemannsche Zahlenkugel)

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
∞: Fernelement
$\hat{\mathbb{C}}$: Riemannsche Zahlenkugel.

$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$
$\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$$a = (a_1, a_2, a_3) \to \left(\frac{a_1}{1-a_3}, \frac{a_2}{1-a_3}\right) = \frac{a_1}{1-a_3} + i\frac{a_2}{1-a_3}$$



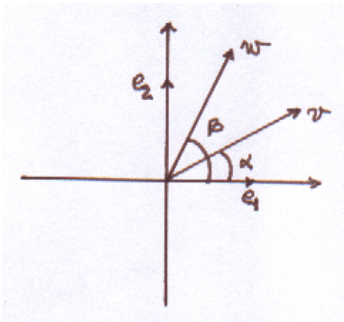
$\sigma^{-1} : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$.

$$c = a_1 + a_2 i \to \left(\frac{2a_1}{a_1^2+a_2^2+1}, \frac{2a_2}{a_1^2+a_2^2+1}, \frac{a_1^2+a_2^2-1}{a_1^2+a_2^2+1}\right)$$

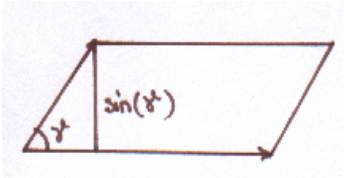
$$\hat{\sigma} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}} : a \longmapsto \begin{cases} \sigma(a) & a \neq N \\ \infty & a = N \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S^2 : c \longmapsto \begin{cases} \sigma^{-1}(c) & c \in \mathbb{C} \\ N & c = \infty \end{cases}$$

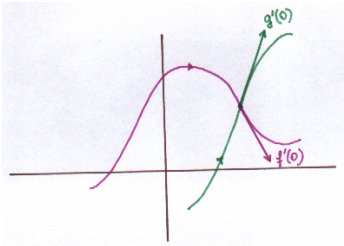
$\mathbb{C}$ ist homöomorph zu $S^2 \setminus \{N\}$
Die Topologie von S^2 wird auf $\hat{\mathbb{C}}$ mittels $\hat{\sigma}$ übertragen
$\hat{\sigma}$ erhält nicht die Abstände (denn in $\mathbb{C}$ können Punkte beliebigen Abstand haben während die Punkte auf der Sphäre nur begrenzten Abstand haben), aber $\hat{\sigma}$ erhält die Topologie (offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet, entsprechend abgeschlossene Mengen) und die Winkel.



$\angle(w,v) = -\angle(v,w)$
$v = \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2$
$w = \cos(\beta)e_1 + \sin(\beta)e_2$

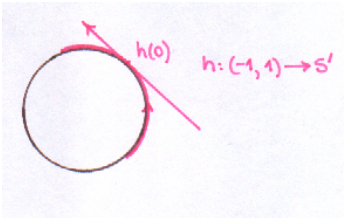


$\cos(\angle(v,w)) =< v,w >= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta) = cos(\beta-\alpha)$
Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts ist $\cos(\angle(v,w)) = \cos(\angle(w,v))$
$\sin(\angle(v,w)) = \sin(\beta-\alpha) = \sin(\beta)\cos(\alpha)-\cos(\beta)\sin(\alpha) = det(\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \cos(\beta)\\ \sin(\alpha) & \sin(\beta)\end{pmatrix})$
Seien $f,g : (-1,1) \to \mathbb{C}$ zwei Kurven; f,g differenzierbar, $f(0) = g(0)$ und $f^{'}(0) =$



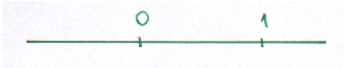
$g^{'}(0) \neq (0,0)$ [$f^{'}(0)$ und $g^{'}(0)$ sind die Tangentialvektoren an den Kurven f bzw. g im Punkt $(0,0)$]. Damit ist der Winkel zwischen f und g bei $f(0) = g(0)$: $\angle(f^{'}(0,g^{'}(0))$

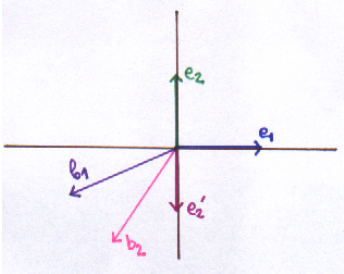
Seien $f_1, g_1 : (-1,1) \to S^2$ differenzierbare Kurven. Weiter gilt $f_1(0) = g_1(0)$ und $f^{'}(0) \neq 0, g^{'}(0) \neq 0$. Die Tangentialvektoren liegen in der Tangentialebene an der Sphäre in Punkt 0. Seien b_1, b_2 und c_1, c_2 zwei Orthonormalsystemen. Seien γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22} so dass:



$$\begin{aligned} c_1 &= \gamma_{11}b_1+\gamma_{12}b_2 \\ c_2 &= \gamma_{21}b_1+\gamma_{22}b_2 \end{aligned}$$

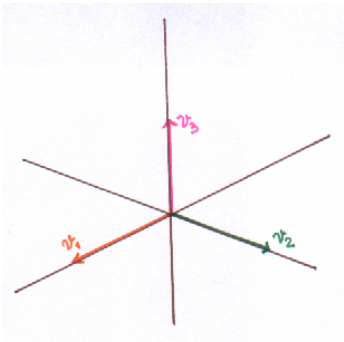
$det(\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}) = 1 \Rightarrow$ Beide Orthonormalsystemen - denselben Winkel
$det(\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{pmatrix}) = -1 \Rightarrow$ Die Winkeln in einem Orthonormalsystem sind negative Winkel in dem anderen. Die Orthonormalsystemen haben verschiedene Orientierung.
In 1-dimensionalen Fall legt man durch den Wahl der 1 eine Orientierung fest.
In 2-dimensionalen Fall:





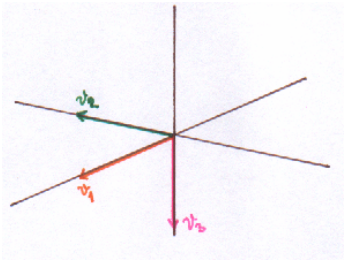
Da b_2 links von b_1 liegt und e_2 auch links von e_1 liegt, bekommt man eine positive Determinante bei der Übergang von $e_1, e_2 \to b_1, b_2$.
Bei der Übergang von $e_1, e_2' \to b_1, b_2$ bekommt man eine negative Determinante, da jetzt e_2' rechts von e_1 liegt.

In 3-dimensionalen Fall:

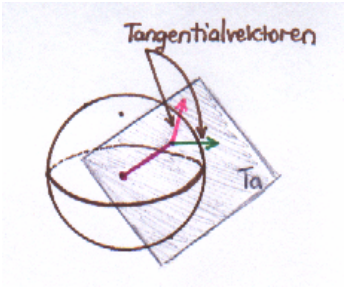


positive Orientierung:

1. v_2 links von v_1 und v_3 nach oben
2. v_2 rechts von v_1 und v_3 nach unten (Rechte-Hand Regel)



Tangentialvektoren:
In T_a: $b_1(a), b_2(a)$ ONB. Damit $(b_1(a), b_2(a), a)$ ONB von $\mathbb{R}^3$
positive Orientierung falls $det(b_1(a), b_2(a), a) = 1$.



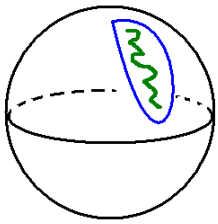
4.7 Satz

Sei $X \subseteq \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

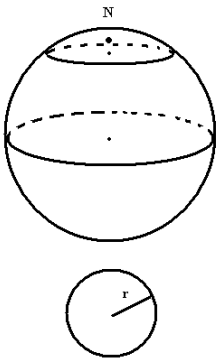
(a) X ist beschränkt

(b) $\overline{X}$ in $\hat{\mathbb{C}}$ enthält den Fernpunkt

Beweis: X sei unbeschränkt.



Folge in X: $(a_n)_n$, $|a_n| \geq n$, $a_n = a_{n1} + ia_{n2}$. Damit folgt:



$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(a_n) &= \left(\frac{2a_{n1}}{a_{n1}^2+a_{n2}^2+1}, \frac{2a_{n2}}{a_{n1}^2+a_{n2}^2+1}, \frac{a_{n1}^2+a_{n2}^2-1}{a_{n1}^2+a_{n2}^2+1}\right)\\ &= \left(\frac{2a_{n1}}{|a_n|^2+1}, \frac{2a_{n2}}{|a_n|^2+1}, \frac{|a_n|^2-1}{|a_n|^2+1}\right)\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\sigma^{-1}(a_n) \to N(\text{konvergiert gegen der Nordpol}) \Leftrightarrow \frac{|a_n|^2-1}{|a_n|^2+1} \to 1$$

$$\frac{|a_n|^2-1}{|a_n|^2+1} \geq \frac{n^2-1}{n^2+1} \to 1$$

Sei $\infty \in \overline{X} \Rightarrow N \in \overline{\sigma^{-1}(X)}$.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit: $(\sigma^{-1}(a_n))_n \to N$.
Falls $(a_n)_n$ unbeschränkt ist $\Rightarrow X$ ist unbeschränkt.

4.8 Satz

Sei $K = S^2 \cap E$ (E Ebene in $\mathbb{R}^3$) ein Kreis. Dann gilt:

a) ist $N \in K$, so ist $\sigma(K\backslash\{N\}) \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade

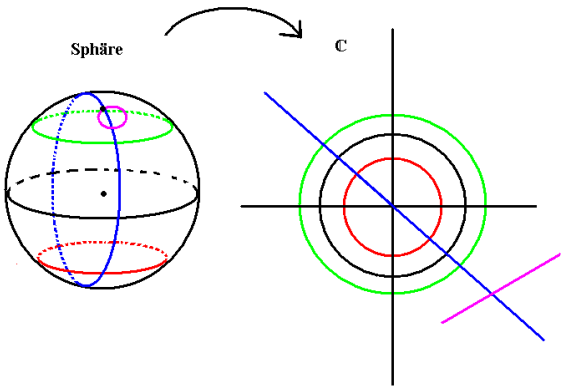
b) ist $N \notin K$, so ist $\sigma(K) \subseteq \mathbb{C}$ ein Kreis

D.h. Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ entsprechen Kreise auf S^2.

zu b) Beweis:
Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ Kreis. C: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ mit $a^2+b^2-4c>0$
$\sigma^{-1}(C)$ ist in einer Ebene enthalten!
Punkte $x \in \sigma^{-1}(C)$ erfüllen die Gleichung:

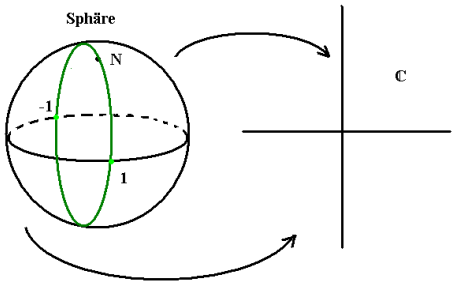
$$ax_1+bx_2+(1-c)x_3+(1-c)=0$$

Damit ist $\sigma^{-1}(C)$ ein Kreis, der N nicht enthält.
Sei $K \subseteq S^2\backslash\{N\}$ Kreis. Seien a,b,c drei verschiedene Punkte des Kreises. Dann folgt $\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c) \in \mathbb{C}$ sind drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen.
Sei $C \subseteq \mathbb{C}$ Kreis durch $\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)$.
$\sigma^{-1}(C) \subseteq S^2$ ist ein Kreis und enthält a,b,c. Damit ist $K = \sigma^{-1}(C)$. Also $\sigma(K) = \sigma(\sigma^{-1}(C)) = C$

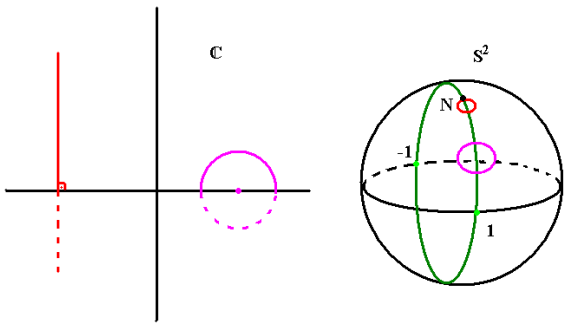


Es wird wie folgt abgebildet:

1. Meridiane auf $S^2 \to$ Ursprungsgeraden in $\mathbb{C}$
2. Ecuator und Breitenkreise $\to$ Kreise mit Mittelpunkt 0 in $\mathbb{C}$
3. Kreise durch $N \to$ Geraden in $\mathbb{C}$

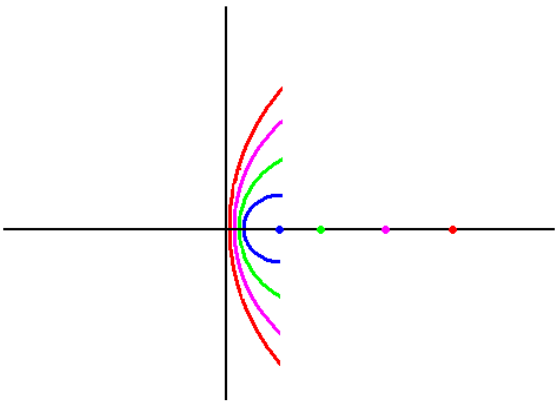


Vordere Hämisphere $\cong$ Untere Halbebene
Hintere Hämisphere $\cong$ Obere Halbebene

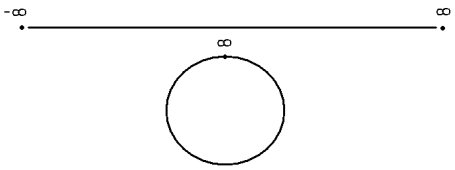


$$\sigma(a) = \frac{a_1}{1-a_3} + i\frac{a_2}{1-a_3}$$

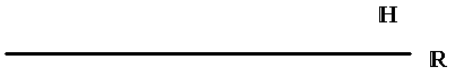
Wenn man Kreise auf S^2 mit selben Radius nimmt und lässt das Mittelpunkt gegen N wandern, so bekommt man in $\mathbb{C}$ folgendes Bild:



$\hat{\mathbb{C}} \supseteq \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong$ Meridian durch $\overset{+}{-}1$, der N enthält.



$\hat{\mathbb{R}} =$ unendlich ferne Gerade Sei $X \subseteq \mathbb{H}$ (obere Halbebene)

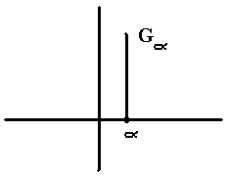


$\hat{X} \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ Abschluß von X
$\hat{X} \cap \hat{\mathbb{R}}$ unendlich ferne Rand von X

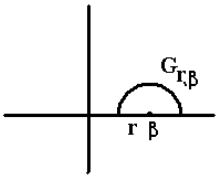
$$\begin{aligned} \hat{X} \cap \hat{\mathbb{R}} &= \sigma\widehat{\sigma^{-1}(X)} \cap \sigma\widehat{\sigma^{-1}(\mathbb{R})} \\ &= \sigma(\overline{\sigma^{-1}(X)}) \cap \sigma(\overline{\sigma^{-1}(\mathbb{R})}) \\ &= \sigma(\overline{\sigma^{-1}(X)} \cap \overline{\sigma^{-1}(\mathbb{R})}) \end{aligned}$$

Sei G eine hyperbolische Gerade. Dann gilt:

1. Falls $G = G_\alpha$ dann ist $\hat{G} \cap \hat{\mathbb{R}} = \infty, \alpha$

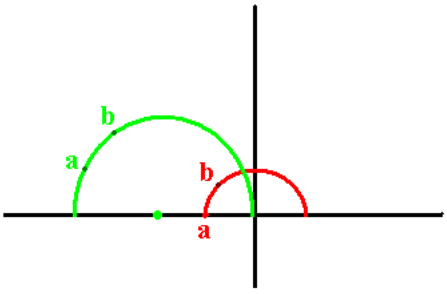


2. Falls $G = G_{\beta,r}$ dann ist $\hat{G} \cap \hat{\mathbb{R}} = \beta - r, \beta + r$

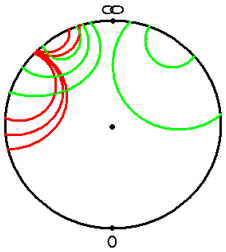


4.9 Satz

Seien $a,b \in \mathbb{H} \cup \hat{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. Dann $\exists!$ hyperbolische Gerade G mit $a,b \in \hat{G}$



Beweis:
In S^2: $\hat{\sigma}^{-1}(a)$, $\hat{\sigma}^{-1}(b) \in S^2$
Gesucht: Kreis K auf S^2 mit: $\hat{\sigma}^{-1}(a)$, $\hat{\sigma}^{-1}(b) \in K$ und Mittelpunkt liegt in der Ebene $\{r_2 = 0\}$. Kreis ist eindeutig bestimmt: schneidet den Meridian $\{r_2 = 0\} \cap S^2$ senkrecht.
Projektion der hinteren abgeschlossenen Hämisphere d.h. mit Meridian $(1,-1)$ senkrecht auf $xyz-$Koordinatensystem (Projektion $\rightarrow$ abgeschlossene Kreisscheibe)



$G||H$:

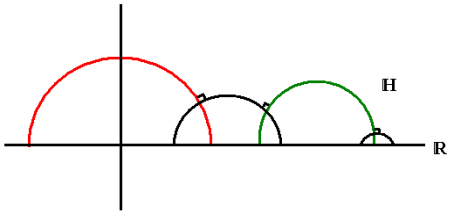
1. G,H sind ultraparallel, wenn $\hat{G} \cap \hat{H} = \emptyset$ (grüne Geraden im Bild)
2. G,H sind asymptotisch parallel, wenn $\hat{G} \cap \hat{H} \neq \emptyset$ (rote Geraden im Bild)

4.10 Satz

$G||H$. Dann sind äquivalent:

(a) G und H sind ultraparallel

(b) Es gibt eine hyperbolische Gerade K, die G und H senkrecht schneidet.



4.11 Möbius-Transformation

$S^2 \xrightarrow{\hat{\sigma}} \hat{\mathbb{C}}$

$S^2 \xleftarrow{\hat{\sigma}^{-1}} \hat{\mathbb{C}}$

Falls $\varphi : S^2 \to S^2 : \hat{\sigma} \circ \varphi \circ \hat{\sigma}^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

Falls $\psi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : \hat{\sigma}^{-1} \circ \psi \circ \hat{\sigma} : S^2 \to S^2$

Die Homöomorphismen bilden eine Gruppe. Die Homöomorphismengruppen $Homoeo(\hat{\mathbb{C}})$ und $Homoeo(S^2)$ sind zueinander isomorph.
$Homoeo(\hat{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} Homoeo(S^2)$

$Aut(\hat{\mathbb{C}})$: Homöomorphismen, die Kreise in Kreise abbilden.

$Aut(S^2)$: Homöomorphismen, die Kreise in Kreise abbilden.

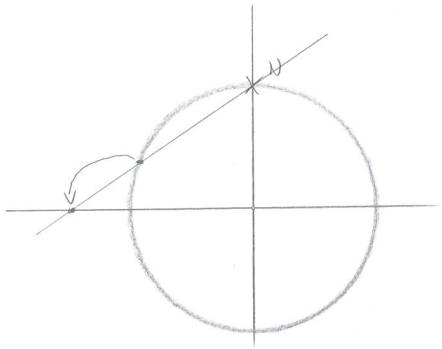
$Aut(\hat{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\cong} Aut(S^2)$ Gruppen

Falls $\varphi \in O(3) : \ \varphi|_{S^2} \in Aut(S^2)$

4.12 Satz

(a) Sei $\varphi : S^2 \to S^2$ eine Spiegelung an der Ebene $\{x_2 = 0\}$
$\Rightarrow \hat{\sigma} \circ \varphi \circ \hat{\sigma}^{-1}$ ist die komplexe Konjugation

(b) Sei $\psi : S^2 \to S^2$ eine Spiegelung an der Ebene $\{x_3 = 0\}$
$\Rightarrow \hat{\sigma} \circ \psi \circ \hat{\sigma}^{-1}(c) = \frac{1}{\bar{c}}$, falls $c \in \mathbb{C}^x$, $\infty \to 0$, $0 \to \infty$ Spiegelung am Einheitskreis (die Punkte die im Inneren des Einheitskreises liegen werden nach Außen abgebildet und umgekehrt. Der Einheitskreis ist die Fixkurve der Spiegelung)



Beweis:
$c \in \mathbb{C},\ c = c_1 + ic_2$

(a)

$$\begin{aligned}
& \hat{\sigma} \circ \varphi \circ \hat{\sigma}^{-1}(c) \\
= \quad & \hat{\sigma} \circ \varphi\left(\tfrac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}\right) \\
= \quad & \hat{\sigma}\left(\tfrac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{-2c_2}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}\right) \\
= \quad & \frac{1}{1-\frac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}}\left(\tfrac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1} + i\left(\tfrac{-2c_2}{c_1^2+c_2^2+1}\right)\right) \\
= \quad & c_1 - ic_2
\end{aligned}$$

(b) $\hat{\sigma} \circ \psi \circ \hat{\sigma}^{-1}(\infty) = 0$
$\hat{\sigma} \circ \psi \circ \hat{\sigma}^{-1}(0) = \infty$
Sei $c = c_1 - c_2 i \ \in \mathbb{C}^x$

$$\begin{aligned}
& \hat{\sigma} \circ \psi(\tfrac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}) \\
= \quad & \hat{\sigma}(\tfrac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1}, \tfrac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1}, -\tfrac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}) \\
= \quad & \tfrac{1}{1+\frac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}}(\tfrac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1} + i(\tfrac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1})) \\
= \quad & \tfrac{1}{2(c_1^2+c_2^2)}(2c_1 + i2c_2) \\
= \quad & \tfrac{c}{|c|^2} \\
= \quad & \tfrac{1}{\bar{c}}
\end{aligned}$$

4.13 Rechnen mit ∞

$\infty + c = c + \infty = \infty$, $c \in \hat{\mathbb{C}}$
$\infty^{-1} = 0$,
$0^{-1} = \infty$
$\infty \cdot c = c \cdot \infty = \infty$, $c \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$

$P \in \mathbb{C}[T]$ Polynom
$\hat{P} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : c \to P(c),\ \infty \to \infty,\ c \in \mathbb{C}$

4.14 Satz

$\hat{P}$ ist Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}} \Longleftrightarrow deg(P) = 1$

Beweis:

- Sei $deg(P) \leq 0$
  $\Rightarrow \hat{P}|_{\mathbb{C}}$ ist konstant
  $\Rightarrow \hat{P}$ nicht injektiv
  $\Rightarrow \hat{P} \notin Aut(\hat{\mathbb{C}})$
- $d = deg(P) \geq 2$:
  Für $z \in \mathbb{C}$:
  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}:\ P(c_1) = z = P(c_2)$
  Für fast alle z:
  $c_1 \neq c_2 \Rightarrow \hat{P}$ nicht injektiv $\hat{P} \notin Aut(\hat{\mathbb{C}})$

- $deg(P) = 1$:
  $P = \alpha \cdot T + \beta \;\; \alpha \neq 0$
  Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine Gerade
  zu zeigen: $P(G)$ ist Gerade
  $G = \{z | \lambda z + \overline{\lambda z} + \mu = 0\}, \; \lambda \in \mathbb{C}^x, \; \mu \in \mathbb{R}$
  $P(z) = \alpha \cdot z + \beta \Rightarrow z = \alpha^{-1} \cdot (P(z) - \beta)$
  $z \in G \Rightarrow \lambda \cdot \alpha^{-1}(P(z) - \beta) + \overline{\lambda} \cdot \overline{\alpha^{-1}}(\overline{P(z)} - \overline{\beta}) + \mu$
  $= \lambda \cdot \alpha^{-1} P(z) + (\overline{\lambda \alpha^{-1}})(\overline{P(z)}) + (-\lambda \cdot \alpha^{-1}\beta - \overline{\lambda \alpha^{-1}\beta} + \mu)$
  $= \lambda \cdot \alpha^{-1} P(z) + (\overline{\lambda \alpha^{-1}})(\overline{P(z)}) + (-(\lambda \cdot \alpha^{-1}\beta + \overline{\lambda \alpha^{-1}\beta}) + \mu)$

4.15 Definition

Sei $\hat{P}$ mit $deg(P) = 1$ und

$$J : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : c \to \begin{cases} \frac{1}{c} & c \neq 0, \infty \\ 0 & c = \infty \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$: Untergruppe von $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ die von diesen Abbildungen erzeugt wird. Die Abbildungen in $Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ heißen Möbius-Transformationen.

Sei $P \in \mathbb{C}[T]$, $deg(P) = 1$, $P = \alpha \cdot T + \beta$

$$\hat{P} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : z \to \alpha \cdot z + \beta$$

$$J : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : z \to \begin{cases} 0 & z = \infty \\ \infty & z = 0 \\ \frac{1}{z} & z \in \mathbb{C}^x \end{cases}$$

$$\mathscr{K} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} : z \to \begin{cases} \infty & z = \infty \\ \bar{z} & z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$: erzeugt von J und den $\hat{P}$ sind gerade Möbius-Transformationen
$Moeb(\hat{\mathbb{C}})$: erzeugt von $Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ und $\mathscr{K}$ heißen allgemeine Möbius-Transformationen.
$Moeb(\hat{\mathbb{C}})$ ist also eine Erweiterung von $Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$

4.16 Satz

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ besteht aus den Abbildungen

$$\varphi_A(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Falls $z = \infty$:

$$\varphi_A(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

Sei $z \neq \infty$
Falls $c \cdot z + d = 0$:
$a \cdot z + b \neq 0$, weil $det(A) \neq 0$
$\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \infty$

Beweis:
φ_A ist gerade Möbius-Transformation
$\varphi_A = \hat{P} \circ J \circ \hat{Q}$

- $c \neq 0$
  $Q = T \cdot \frac{d}{c}$
  $P = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot T + \frac{a}{c}$
- $c = 0$
  $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d} \cdot z + \frac{b}{d}$
  $P = \alpha \cdot T + \beta$
  $\hat{P}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{0 \cdot z + 1} = \varphi_{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}(z)$
  $J(z) = \frac{1}{z} = \frac{0z+1}{1z+0} = \varphi_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}(z)$
  Wenn $\{\varphi_A | A \in GL(2, \mathbb{C})\}$ Gruppe ist, dann $Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$
  $GL(2, \mathbb{C}) \to Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) : A \to \varphi_1$ ist Gruppenhomomorphismus.

  Nachrechnen: $A,\ B \in GL(2, \mathbb{C})$
  $\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$

$GL(2, \mathbb{C}) \to Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ surjektiv.
$\alpha \in \mathbb{C}^x$
$\alpha E = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$\varphi_{\alpha \in}(z) = \frac{\alpha z + 0}{0 + \alpha} = z$, $\varphi_A = id$

Sei $\varphi_A = id$, d.h. $\forall z \in \mathbb{C} : z = \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Falls $cz + d \neq 0$
$cz^2 + (d-z) \cdot z - b = 0$
$\Rightarrow$ Nullpolynom $cT + (d-a)T - b$
$\Rightarrow c = 0,\ d = a,\ b = 0$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) \cong GL(2,\mathbb{C})/\{\alpha \in |\alpha \in \mathbb{C}^x\} = PL(2,\mathbb{C})$
Projektive lineare Gruppe

Zu φ_A inverse Möbiustransformation: $\varphi_{a^{-1}}$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,
$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot det(A)^{-1}$

4.17 Elemente von $Moeb(\hat{\mathbb{C}})$

$\varphi_1 \circ \kappa \circ \varphi_2 \circ \kappa \circ \varphi_3 \circ \kappa \circ \ldots \circ \varphi_n$
$\varphi_i \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$
$\kappa \circ \varphi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(z) = \frac{\overline{a}\overline{z}+\overline{b}}{\overline{c}\overline{z}+\overline{d}} = \varphi_{\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}} \circ \kappa(z)$

Daher:
$Moeb(\hat{\mathbb{C}}) : \varphi \in Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
$\varphi \circ \kappa,\ \varphi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) \triangleleft Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
$< \kappa > \cap Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) = \{id\}$
$< Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) \cup \{x\} >= Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
$Moeb(\hat{\mathbb{C}}) = Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) \triangleleft < \kappa >$

4.18 Satz

$Moeb(\hat{\mathbb{C}})$ besteht aus konformen Abbildungen (erhalten den Winkel im Absolutbetrag).
$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ ist die Untergruppe der winkelerhaltenden Abbildungen.

Beweis:
Genügt zu zeigen: $Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ hat ein Erzeugendensystem, das aus winkelerhaltenden Abbildungen besteht.
Und ein Erzeugendensystem von $Moeb(\hat{\mathbb{C}})$ aus konformen Abbildungen besteht.
κ konform (genauer: winkelumkehrend)

Gerade Möbiustransformation:
$\hat{P}$, $P = \alpha \cdot x + \beta$, $deg(P) = 1$
J
$\hat{P}$:

- Falls $\beta = 0$
  $\alpha = r \cdot e^{i\zeta}$, $0 < r \in \mathbb{R}$
  $\hat{P} = \varphi \cdot \psi$, $\psi(z) = e^{i\zeta} \cdot z$, $\varphi(z) = r \cdot z$
- Falls $\beta \neq 0$
  $\beta = s \cdot e^{i\zeta}$
  $\frac{\alpha}{\beta} = r \cdot e^{i\zeta}$

$\hat{P}$ Komposition von:
$z \to e^{i\zeta} \cdot z$
$z \to r \cdot z \Rightarrow z \to \frac{\alpha}{\beta} \cdot z$
$z \to z + 1 \Rightarrow z \to \frac{\alpha}{\beta} \cdot z + 1$
$z \to e^{i\zeta} z$
$z \to s \cdot z \Rightarrow z \to \alpha \cdot z + \beta$

4.19 Satz

$\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$
<u>Falls $c = 0$:</u>
$\varphi_A(\infty) = \infty$
Sei $\varphi_A(\infty) = \infty \Rightarrow c = 0$
$\varphi_A(\infty) = \frac{a}{c}$, $\frac{a}{c} \Leftrightarrow c = 0$

Fixpunkte sind Lösungen von $z = \varphi_A(z) = \frac{a}{d} \cdot c + \frac{b}{d}$
$(d-a) \cdot z = b$
Falls $d - a \neq 0$:

$z = \frac{b}{d-a}$ ist Fixpunkt
Also zwei Fixpunkte: $z = \frac{b}{d-a}$ und $z = \infty$

Falls $d - a = 0$:

$b = 0, A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
Damit ist $\varphi_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} = id$

Falls $c \neq 0$:
$z = \varphi_a(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0 \Leftrightarrow z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{4bc + (d-a)^2}$

Entweder zwei verschiedene Fixpunkte oder ein doppelter Fixpunkt.

4.20 Satz

Eine gerade Möbiustransformation mit drei Fixpunkten ist identisch.

4.21 Definition ((scharf) n-fach Transitivität)

Sei $\mathscr{G}$ Gruppe, M eine Menge
$\mathscr{G} \times M \to M$ ist n-fach transitiv, wenn es zu je zwei n-Tupeln $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ verschiedener Elemente von M ein $g \in \mathscr{G}$ gibt mit $g(x_i) = y_i$, scharf n-fach transitiv, wenn g dabei eindeutig bestimmt ist.

4.22 Satz

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ operiert scharf 3-fach transitiv auf $\hat{\mathbb{C}}$.

Beweis:
Falls 3-fach transitiv: scharf 3-fach transitiv.

$(z_1, z_2, z_3) = z$
$(t_1, t_2, t_3) = t$
Es gebe zu jedem Trippel (u_1, u_2, u_3) eine Möbiustransformation φ_u mit $\varphi_u(0) = u_1$, $\varphi_u(1) = u_2$, $\varphi_u(\infty) = u_3$
$(0, 1, \infty) \xrightarrow{\varphi_z} (z_1, z_2, z_3)$
$(0, 1, \infty) \xrightarrow{\varphi_t} (t_1, t_2, t_3)$
$u_1 = \varphi(0) = \frac{b}{d}$
$u_2 = \varphi(1) = \frac{a+b}{c+d}$
$u_3 = \varphi(\infty) = \frac{a}{c}$
Falls $u_1 = \infty \Rightarrow d = 0$, Setze $c = 1, a = u_3, b = u_2 - u_3$
Falls $u_2 = \infty \Rightarrow c + d = 0$, Setze $c = 1, a = u_3, b = -u_1$
Falls $u_3 = ...$

$u_1,\ u_2,\ u_3 \neq 0$
$u_1 \cdot d = b$
$u_2 \cdot c + u_2 \cdot d = a + b$
$u_3 \cdot c = a$

$$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{u_3(u_2 - u_1)z + u_1(u_3 - u_2)}{(u_2 - u_1)z + (u_3 - u_2)}$$

Determinante der Koeffizientenmatrix $\neq 0$!

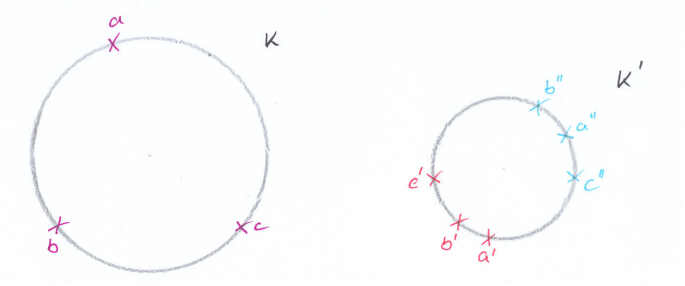
Inverse Möbiustransformation:
$u_1 \to 0$
$u_2 \to 1$
$u_3 \to \infty$

$u_1 = \infty$
$$z \to \frac{u_3 - u_2}{-z + u_3}$$
$u_2 = \infty$
$$z \to \frac{z - u_1}{-z + u_3}$$
$u_3 = \infty$
$$z \to \frac{z - u_1}{u_1 + u_2}$$
$u_1, u_2, u_3 \neq \infty$
$$z \to \frac{z - u_1}{z + u_3} \cdot \frac{u_3 \cdot u_2}{u_1 - u_2}$$

4.23 Satz

$Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ operiert transitiv (nicht scharf transitiv) auf der Menge der Kreise.

Beweis:



$\varphi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$
$\varphi(a) = a'$
$\varphi(b) = b'$
$\varphi(c) = c'$
$\Rightarrow \varphi(K) = K'$

$\psi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$
$\psi(a) = a''$
$\psi(b) = b''$
$\psi(c) = c''$
$\Rightarrow \psi(K) = K'$
$\psi \neq \varphi$

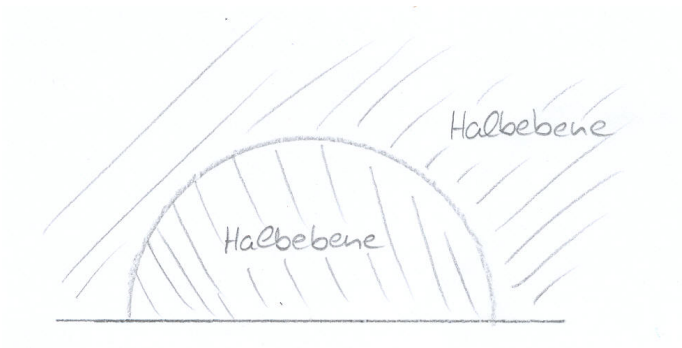
K, K'
Kreisscheiben dazu: S_1, S_2, S_1', S_2'
Es gibt $\varphi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\varphi(K) = K' \Rightarrow (S_1) = S_1'$ oder $= S_2'$

$\varphi : K \to S'$
$S_1 \to \begin{cases} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{cases}$

σ: Spiegelung am Einheitskreis
$\sigma \circ \varphi : K \to S'$
$S_1 \to \begin{cases} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{cases}$

4.24 Satz

$Moeb(\hat{\mathbb{C}})$ ist transitiv auf der Menge der Kreisscheiben



4.25 Satz

$Aut(\hat{\mathbb{C}}) = Moeb(\hat{\mathbb{C}})$

Beweis:
Sei $\varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$
$0 \to \varphi(0)$
$1 \to \varphi(1)$
$\infty \to \varphi(\infty)$
Wähle $\psi \in Moeb^{+}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\psi(\varphi(0)) = 0$, $\psi(\varphi(1)) = 1$ und $\psi(\varphi(\infty)) = \infty$.
$\tau = \psi \circ \varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}}) \Rightarrow \tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$ und $\tau(\infty) = \infty$
Falls $\tau = id$:
$\psi^{-1} = \varphi$, $\psi^{-1} \in Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
$\tau(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$
Kreisscheiben zu $\hat{\mathbb{R}}$:

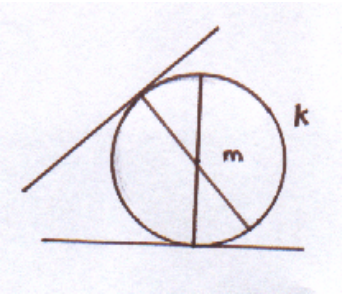
$\mathbb{H}$ (obere Halbebene)
$\mathbb{H}'$ (untere Halbebene)

$\Rightarrow \tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ oder $\tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$
Falls $\tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$: passt!
Falls $\tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$: $\kappa \circ \tau$ (wobei κ Möbius-Transformation):

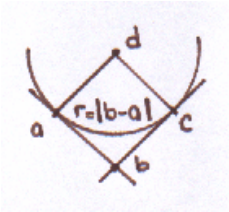
$\kappa \circ \tau(0) = 0$, $\kappa \circ \tau(1) = 1$ und $\kappa \circ \tau(\infty) = \infty$
$\kappa \circ \tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$

O.B.d.A.: $\tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$
Behauptung: $\forall z \in \mathbb{C}$: $\tau(z) = z$

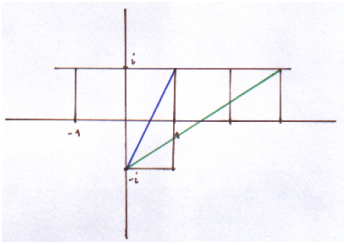
- τ bildet Geraden auf Geraden ab
- parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet
- Wenn $G \in \mathbb{C}$ Gerade und $\tau(G) = G$ ist, dann werden die beiden Halbebenen jeweils auf sich abgebildet.



- Sei K ein Kreis mit Tangente T in $z \Rightarrow \tau(T)$ ist Tangente an $\tau(K)$ in $\tau(z)$
- Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Kreis mit Mittelpunkt $m \Rightarrow \tau(K)$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\tau(m)$



$\tau(a) = a$, $\tau(b) = b$, $\tau(c) = c$ und $\tau(d) = d$
$\tau(K(d,r))$: Kreis der $\overline{ab}$ in a berührt und $\overline{bc}$ in $c \Rightarrow$ Bildkreis hat Radius $r \Rightarrow \tau(d) = d$
$\tau(K(c,r))$: Kreis der $\overline{ab}$ in b berührt



5 Klassifizierung von geraden Möbiustransformationen und Normalformen

5.1 Definition (konjugierte Möbiustransformation)

$\varphi, \psi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$ sind konjugiert, wenn es $\omega \in Moeb^(+)(\hat{\mathbb{C}})$ gibt mit:

$$\varphi = \omega \circ \psi \circ \omega^{-1}$$

Geometrische Interpretation: φ und ψ sind konjugiert bzgl. ω, wenn die Operationen von φ auf $\hat{\mathbb{C}}$ die Operationen von ψ auf $\omega(\hat{\mathbb{C}})$ entsprechen. D.h. die Konjugation entspricht das Koordinatenwechsel auf $\hat{\mathbb{C}}$.
Die Idee der Möbiustransformation Klassifizierung ist eine gegebene Möbiustransformation in eine Normalform zu konjugieren und dann die mögliche Normalformen zu klassifizieren.
Sei $\varphi_A = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Sei $\omega \in Moeb^+(\hat{C})$ mit $\omega = \varphi_B$. Dann ist:

$$\omega \circ \varphi_A \circ \omega^{-1} = \varphi_{BAB^{-1}}$$

Eine Matrix A ist ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform genau dann, wenn:

$$\exists B \in GL(2,\mathbb{C}) : BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \text{ oder } 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Falls $\lambda = \mu$, dann ist $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ oder $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
Falls $\lambda \neq \mu$, dann ist $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Jede gerade Möbiustransformation ist konjugiert zu:

- $\varphi_{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$ identische Abbildung
  oder
- $\varphi_{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$, denn $z \mapsto z+1$ entspricht $\varphi_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ (parabolisch)
  oder
- $\varphi_{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}$, $z \mapsto \frac{\lambda}{\mu} z = \alpha z$ (elliptisch oder loxodromisch)
  α heißt Multiplikator.
  Falls $\alpha \in S^{'} \Rightarrow$ die Möbiustransformation ist elliptisch
  Falls $\alpha \notin S^{'} \Rightarrow$ die Möbiustransformation ist loxodromisch

Sei $\varphi = \varphi(A)$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
O.E. sei $det(A) = 1$
Falls $det(A) = \delta^2 \neq 1$ ist, dann hat die Matrix $\begin{pmatrix} \delta^{-1}a & \delta^{-1}b \\ \delta^{-1}c & \delta^{-1}d \end{pmatrix}$ die Determinante 1.
$Tr(A) = a+d$ bezeichne die Spur der Matrix A und sie $\tau(\varphi) = \tau(A) = (a+d)^2$

5.2 Definition: τ

$\tau : Moeb^+(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\tau(\varphi_A) = Tr(A)^2$, wobei φ_A normalisiert ist, d.h. A ist in Normalform.

5.3 Satz

Seien $\varphi, \psi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$. Dann gilt: $\tau(\varphi \circ \psi) = \tau(\psi \circ \varphi)$ und $\tau(\varphi) = \tau(\psi \circ \varphi \circ \psi)$.

Beweis:
Für Matrizen gilt: $Tr(BAB^{-1}) = Tr(A)$ (ähnliche Matrizen haben selbe Spur)
Damit folgt die Behauptung.

Sei φ eine gerade Möbiustransformation. Dann gilt:

- φ parabolisch:

φ ist konjugiert zu ψ: $z \mapsto z+1$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist dann die Matrix zu φ
Damit ist $\tau(\varphi) = 4$

- φ elliptisch:

  φ ist konjugiert zu $z \mapsto \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$
  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist dann die Matrix zu φ, aber sie ist nicht normalisiert, denn
  $det \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \neq 1$
  Mit $\alpha = \beta^2$ beschreibt die Matrix $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}$ dieselbe Möbiustransformation. Diese Matrix ist jetzt normalisiert.
  Damit ist $\tau(\varphi) = (\beta + \beta^{-1})^2 = (e^{i\vartheta + e^{-i\vartheta}})^2$, wobei $\beta = e^{i\vartheta}$ mit $\vartheta \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= [(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) + (\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta))]^2 \\ &= 4\cos(\vartheta)^2 \in [0,4) \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

- φ loxodromisch:

  die Matrix von φ ist $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ mit dem Normalform $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}$
  Damit ist $\tau(\varphi) = (\beta + \beta^{-1})^2$ mit $\beta = \rho e^{i\vartheta}$, $0 < \rho \in \mathbb{R}$ und $\rho \neq 1$
  Somit

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= (\beta + \beta^{-1})^2 \\ &= 2 + \cos(2\vartheta)(\rho^2 + \rho^{-2}) + i\sin(2\vartheta)(\rho^2 + \rho^{-2}),\ \rho \neq 1 \Rightarrow \rho^2 + \rho^{-2} > 2 \end{aligned}$$

  - Falls $\vartheta \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, so ist $\tau(\varphi) = 2 + (\overset{+}{-} 1)(\rho^2 + \rho^{-2})$
    $\vartheta = 0 \Rightarrow \tau(\varphi) > 4$ und reell
    $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau(\varphi) \in \mathbb{R}$ aber $\tau(\varphi) < 0$
  - Falls $\vartheta \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$, so ist $\tau(\varphi) \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

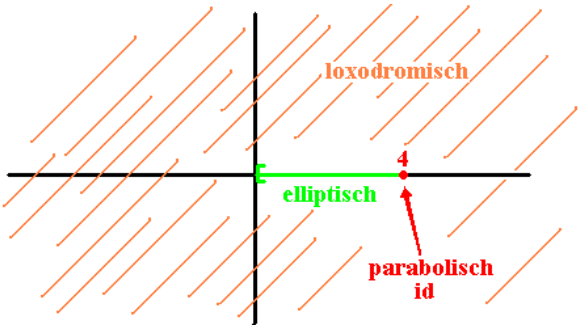
Für φ eine gerade Möbiustransformation gilt:

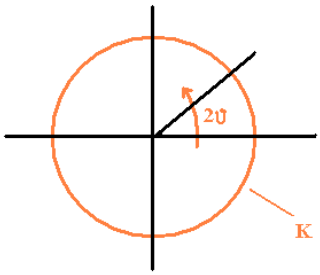
- φ parabolisch:

  nur 1 Fixpunkt
  Fixpunkt: ∞

- φ elliptisch:

  2 Fixpunkte
  Fixpunkte: $0, \infty$

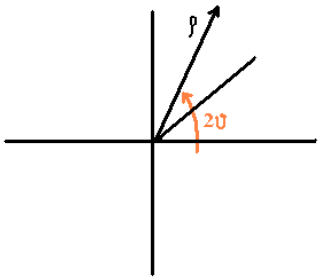




Drehung um Winkel 2ϑ

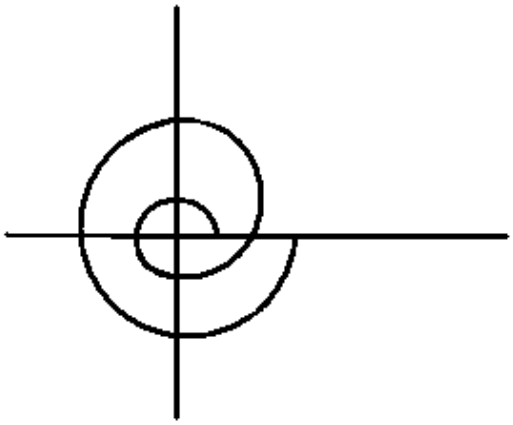
- φ loxodromisch:

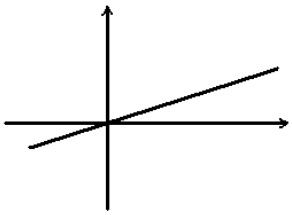
  2 Fixpunkte
  Fixpunkte: $0, \infty$



  Erst eine Drehung um Winkel 2ϑ und hinterher eine Streckung um Faktor ρ.
  Kreise werden nicht mehr in sich selbst abgebildet.

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
  $t \mapsto e^{\kappa t}(\cos(t) + i\sin(t))$ mit $\kappa = \frac{\ln(\rho)}{\vartheta}$, $\vartheta \neq 0$
  $\varphi(f(t)) = f(t + 2\vartheta)$
  d.h. die Spirale bleibt fest unter der loxodromischen Abbildung.
  Für $\vartheta = 0$ werden die Geraden durch 0-Punkt auf sich selbst abgebildet.





Begriffe:**Loxodromen, Mercator Projection**
Der Begriff loxodromisch kommt vom Loxodrom, welches eine Kurve auf der Sphäre beschriebt, die alle latitudinal Linien unter dem selben Winkel schneidet. Zum Beispiel alle longitudinal Linien sind Loxodromen aber es gibt auch andere Loxodromen. Die Loxodrome bleiben unter loxodromische Möbiustransformationen invariant.

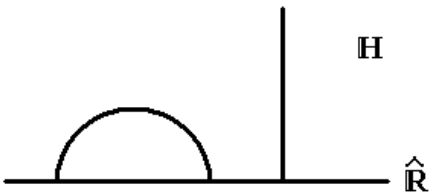
6 Möbiustransformationen der oberen Halbebenen

$Moeb(\mathbb{H}) = \{\varphi \in Moeb(\hat{\mathbb{C}}) \mid \varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$ Untergruppe von $Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
$Moeb(\hat{\mathbb{R}}) = \{\varphi \in Moeb(\hat{\mathbb{C}}) \mid \varphi(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}\}$ Untergruppe von $Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
Sei $\varphi \in Moeb(\mathbb{H})$. Dann folgt: $\varphi(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$ ($\partial\mathbb{H}$ = Rand von $\mathbb{H}$) und $\partial\mathbb{H} = \hat{\mathbb{R}}$.
Es gilt:

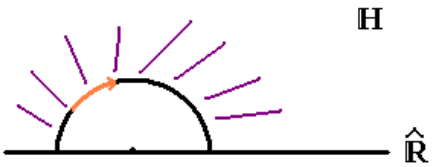
$$Moeb(\mathbb{H}) \subseteq Moeb(\hat{\mathbb{R}}) \subseteq Moeb(\hat{\mathbb{C}})$$

6.1 Satz

$\varphi \in Moeb(\mathbb{H})$ bildet hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden ab.

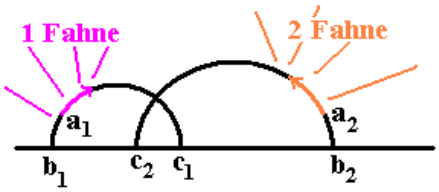


Fahnen in der oberen Halbebenen:



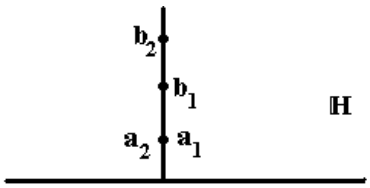
6.2 Satz

$Moeb(\mathbb{H})$ operiert scharf transitiv auf der Fahnen.



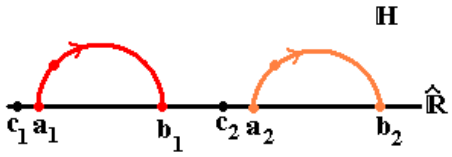
$\exists!\ \varphi \in Moeb^+(\mathbb{C})$: $\varphi(a_1) = a_2$, $\varphi(b_1) = b_2$, $\varphi(c_1) = c_2$
b_1c_1 wird auf b_2c_2 abgebildet, denn $b_1c_1, b_2c_2 \subseteq \mathbb{R}$
J: sei Spiegelung am Einheitskreis: $z \mapsto \frac{1}{z}$
Falls die Fahnen nicht aufeinander abgebildet werden (falls sie auf falschen Halbebenen abgebildet werden), können wir die Spiegelung am Einheitskreis verwenden.

$Moeb(\mathbb{H})$ operiert transitiv auf $\mathbb{H}$
$Moeb(\mathbb{H})$ operiert nicht 2-fach transitiv auf $\mathbb{H}$



6.3 Satz

$Moeb^+(\mathbb{H})$ ist 2-fach transitiv auf $\hat{\mathbb{R}}$ aber nicht 3-fach transitiv.
$Moeb(\mathbb{H})$ ist 3-fach transitiv auf $\hat{\mathbb{R}}$



$(-1,0,1)$ und $(-1,\infty,1)$ können durch eine gerade Möbiustransformation nicht aufeinander abgebildet werden.
Sei $\varphi \in Moeb(\hat{\mathbb{C}})$
$\varphi = \varphi_A$ mit A normalisiert, d.h. $det(A) = 1$ (gerade Möbiustransformation)
oder $\varphi = \varphi_A \circ \kappa$ (ungerade Möbiustransformation)

- geraden Fall: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$
- ungeraden Fall: $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

$\varphi = \varphi_A$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist $\varphi^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$ mit $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
(da $det(A) = 1$)
Es gilt:
$\varphi(0) = \frac{b}{d}$, $\varphi(1) = \frac{a+b}{c+d}$, $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$
$\varphi^{-1}(0) = \frac{-b}{a}$, $\varphi^{-1}(1) = \frac{d-b}{a-c}$, $\varphi^{-1}(\infty) = \frac{d}{-c}$

- 1. Fall: $a \neq 0$ und $c \neq 0$

$$a = \varphi(\infty)c$$
$$b = -\varphi^{-1}(0)a = -\varphi^{-1}(0)\varphi(\infty)c$$

$d = -\varphi^{-1}(\infty)c$

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{\varphi(\infty)cz - \varphi^{-1}(0)\varphi(\infty)c}{cz - \varphi^{-1}(\infty)c} \\ &= \frac{\varphi(\infty)z - \varphi^{-1}(0)\varphi(\infty)}{z - \varphi^{-1}(\infty)}\end{aligned}$$

$1 = det\begin{pmatrix}\varphi(\infty)c & -\varphi^{-1}(0)\varphi(\infty)c \\ c & -\varphi^{-1}(\infty)c\end{pmatrix} = c^2(\underbrace{-\varphi(\infty)\varphi^{-1}(\infty) + \varphi^{-1}(0)\varphi(\infty)}_{\in\mathbb{R}})$

$\Rightarrow c \in \mathbb{R}$ oder $c \in i\mathbb{R}$

Falls $c \in \mathbb{R}$, dann ist die Matrix $A = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ eine reelle Matrix

Falls $c \in i\mathbb{R}$, dann ist die Matrix $A = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ rein imaginär

- 2. Fall: $a = 0$ und $c \neq 0$

  A rein imaginär oder reell

- 3.Fall: $a \neq 0$ und $c = 0$

  A rein imaginär oder reell

6.4 Satz

$\varphi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

$$\varphi_A = \varphi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{R}}) \Leftrightarrow A \text{ reell oder } A \text{ rein imaginär}$$

$Moeb^+(\mathbb{H}) = \{\varphi \in Moeb^+(\hat{\mathbb{R}}) \mid \varphi(i) \in \mathbb{H}\}$, d.h. $\varphi(i) = \alpha + \beta i$ mit $\beta > 0$

6.5 Bemerkung

$$Moeb\hat{\mathbb{R}} : z \to \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\ oder \in i\mathbb{R} \\ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} & a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\ oder \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, dann ist $\varphi(i) = \frac{ai+b}{ci+d}$

$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$:

$\varphi(i) = \frac{(ai+b)(-ci+d)}{c^2+d^2} = \frac{(bd+ac)+i(ad-bc)}{c^2+d^2}$ und da $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow ad-bc = 1 > 0$, d.h. i wird in die obere Halbebene abgebildet.

$a,\ b,\ c,\ d \in i\mathbb{R}$:

$\varphi(i) = \frac{(ai+b)}{(ci+d)} = \frac{(a'i+b')}{(c'i+d')} = \frac{(b'd'+a'c')+i(a'd'-b'c')}{c'^2+d'^2}$, wobei $a = ia'$, $b = ib'$, $c = ic'$ und $d = id'$, $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 = -det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ damit ist $a'd'-b'c' < 0$, d.h. wird auf die untere Halbebene abgebildet.

6.6 Satz

$\varphi \in Moeb(\hat{\mathbb{C}})$ gehört zu $Moeb(\mathbb{H}) \Leftrightarrow \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}, det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$, $Moeb^+(\mathbb{H})$ (orientierungserhaltend, gerade Möbiustransformation)
oder
$\varphi(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, a,\ b,\ c,\ d \in i\mathbb{R}, det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$, $Moeb(\mathbb{H}) - Moeb^+(\mathbb{H})$ (orientierungsumkehrend, ungerade Möbiustransformation)

Erzeugendensystem von $Moeb^+(\mathbb{H})$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^x$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ungerade Möbiustransformation:
Spiegelung am Einheitskreis: $z \longmapsto \frac{1}{z} = \frac{0i\bar{z}+1i}{1i\bar{z}+0i}$

Klassifizierung der geraden Möbiustransformationen

- parabolisch: 1 Fixpunkt
- elliptisch: 2 Fixpunkte
- loxodromisch: 2 Fixpunkte

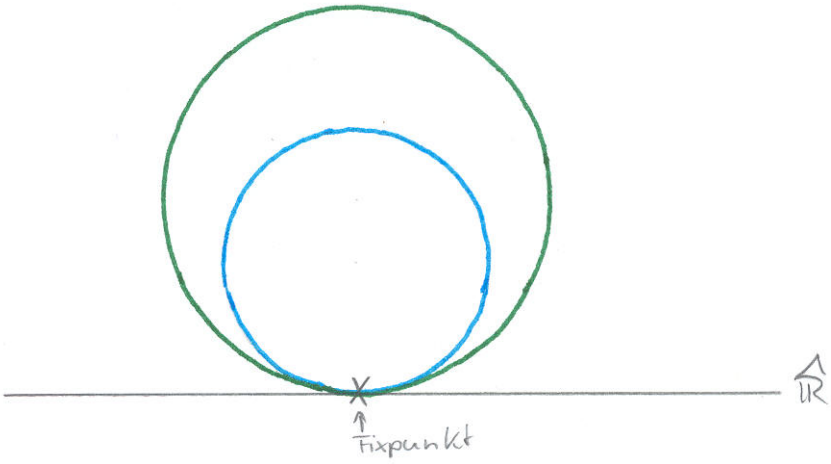
Sei $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$, dann gilt: $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

- Falls $c = 0$
  ∞ ist Fixpunkt
  $(d-a)z = -b$

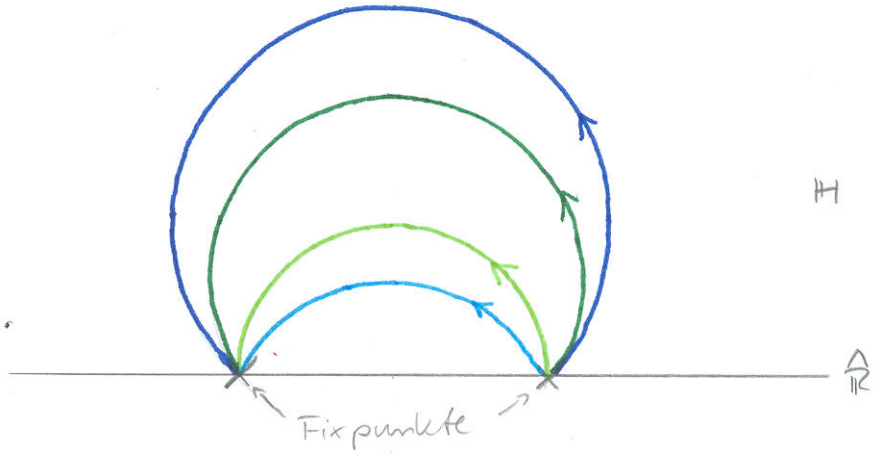
- Falls $(d-a) \neq 0$
  $z = \frac{b}{d-a} \rightarrow 2$ Fixpunkte
  $\rightarrow d \neq a : A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
  $0 < d < 1 < a$
  $\tau(A) = (a+d)^2 > 4$ loxodromisch
- Falls $d-a = 0,\ b \neq 0$
  $(d-a)z = b$ keine Lösung
  nur ein Fixpunkt $\Rightarrow$ parabolisch
- Falls $d-a = 0,\ b = 0$
  $\mathbb{C}$ besteht aus Fixpunkten, als φ ist id.

- Falls $c \neq 0$
  (∞ ist kein Fixpunkt)
  $z_{1/2} = \frac{1}{2c}((a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4ac})$
  $(d-a)^2 + 4ac = (a+d)^2 - 4 = \tau(A) - 4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

  - 1. Fall: $\tau(A) - 4 = 0$:
    nur ein Fixpunkt $\Rightarrow$ φ parabolisch
    $\varphi_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ konjugiert zu φ in $Moeb^+(\hat{\mathbb{C}})$
    $\varphi,\ \varphi_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ konjugiert in $Moeb(\mathbb{H})$, nicht in $Moeb^+(\mathbb{H})$
    Die Möbiustransformation (parabolische Möbiustransformation) bildet den blauen Kreis auf den grünen Kreis ab $\rightarrow$ beide gehen durch den Fixpunkt.

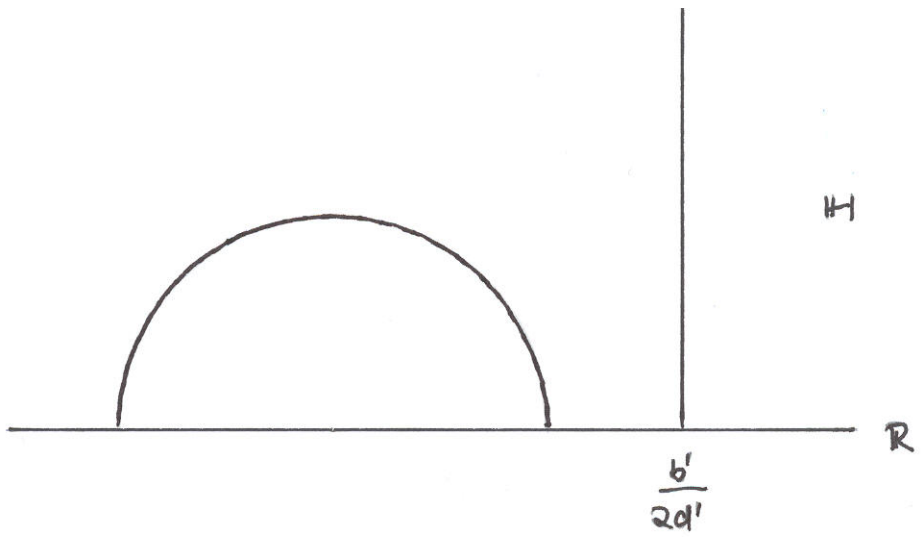


- 2. Fall: $\tau(A) - 4 > 0$
  2 verschiedene reelle Nullstellen
  Kreise die durch die Fixpunkte gehen werden durch die elliptische Möbiustransformation auf Kreise abgebildet die wieder durch z_1 und z_2 gehen.



- 3. Fall: $\tau(A) - 4 < 0$
  2 verschiedene komplexe Nullstellen, eine in $\mathbb{H}$, die andere in $\overline{\mathbb{H}}$.
  Durch Konjugation: Fixpunkt in $\mathbb{H}$: i
  $i = \frac{ai+b}{ci+d}$
  $\exists$ Winkel ϑ : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$

Sei $\varphi(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, ungerade Möbiustransformation mit $a,\ b,\ c,\ d \in i\mathbb{R}$
Sei $a = ia'$, $b = ib'$, $c = ic'$ und $d = id'$
$\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$
∞ ist Fixpunkt $\Leftrightarrow c = 0$
$c = 0$: Weitere Fixpunkte: $z = \frac{a\bar{z}+b}{d}$, wobei $z = x + iy$
Dann folgt:
$x + iy = \frac{a'}{d'}x - i\frac{a'}{d'}y + \frac{b'}{d'}\ x = \frac{a'}{b'}x + \frac{b'}{d'}\ y = -\frac{a'}{b'}y \ \Rightarrow\ \frac{a'}{d'} = 1 \ \Rightarrow\ x = -x + \frac{b'}{d'} \ \Rightarrow\ x = \frac{b'}{2d'},\ y$ beliebig.



7 Bogenlänge und Metrik in $\mathbb{H}$

- 1. Schritt
  Bestimme Länge von stückweise c^1-Wegen in $\mathbb{H}$.
  $w : [a,b] \to \mathbb{H}$
  $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$
  $w|_{[a_{i-1},a_i]}$ ist c^1

- 2. Schritt
  Definiere Metrik
  $d_{\mathbb{H}}(a,b)$: Infimum der Längen aller Verbindungen von a und b.

Seien $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise c^1 und $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist die Länge wie folgt definiert:
$l_\xi(w) = \int_a^b (\xi \circ w)(t) \cdot |w'(t)| dt$ (Integral von ξ entlang w).

Sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ eine Umparametrisierung. φ sei bijektiv und $\varphi,\ \varphi^{-1}$ c^1-Abbildungen.
Dann gilt $\ell_\xi(w \circ \varphi) = \ell_\xi(w)$

Sei $[a,b] \xrightarrow{w} \mathbb{H} \xrightarrow{\mu} \mathbb{H} \xrightarrow{\xi} \mathbb{R}$

Ziel: Bewegungen zu haben. Bewegungen ändern die Abstände nicht! Gesucht ist ξ so dass: $\ell_\xi(w) = \ell_\xi(\mu \circ w)$, $\mu \in Moeb(\mathbb{H})$.

Differenzierbarkeit von Möbiustransformationen
Falls $\mu \in Moeb^+(\mathbb{H})$: dann ist μ komplex differenzierbar
$\mu(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow \mu'(z) = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(az+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$
$\mu(x+iy) = \mu_1(x,y) + i \cdot \mu_2(x,y)$

Ungerade Möbiustransformation:
$\mu(z) = -\bar{z} = \frac{i\bar{z}+i\cdot 0}{i\cdot 0\cdot\bar{z}+i(-1)}$
$\mu_1(x,y) = -x$
$\mu_2(x,y) = y$
$\frac{\partial\mu_1}{\partial x}(x,y) = 1$ und $\frac{\partial\mu_1}{\partial y}(x,y) = 0$
$\frac{\partial\mu_2}{\partial x}(x,y) = 0$ und $\frac{\partial\mu_2}{\partial y}(x,y) = 1$
d.h. Funktionalmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ell_\xi(w) = \int_a^b \xi(w(t)) \cdot |w'(t)| dt$

$\ell_\xi(\mu \circ w) = \int_a^b \xi(\mu \cdot w(t)) \cdot |(\mu \cdot w)'(t)| dt$
$= \int_a^b \xi(\mu \circ w(t)) \cdot |(\mu'(w(t)) \cdot w'(t)| dt$
$= \int_a^b \xi(\mu \circ w(t)) \cdot |(\mu'(w(t))| \cdot |w'(t)| dt$

Falls $\ell_\xi(w) = \ell_\xi(\mu \circ w) \Rightarrow \ell_\xi(w) - \ell_\xi(\mu \circ w) = 0$, d.h.:
$\int_a^b \xi(w(t)) \cdot |w'(t)| dt - \int_a^b \xi(\mu \circ w(t)) \cdot |(\mu'(w(t))| \cdot |w'(t)| dt = 0$
$\int_a^b (\xi(w(t)) - \int_a^b \xi(\mu \circ w(t)) \cdot |(\mu'(w(t))|) \cdot |w'(t)| dt = 0$
$\Rightarrow \zeta_\xi(w) = 0$ für jedes w
$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{H} : \xi(z) = \xi(\mu(z)) \cdot |\mu'(z)|$

Seien $\mu_1,\ \mu_2 \in Moeb(\mathbb{H})$, dann gilt:
$(\xi \circ (\mu_1 \circ \mu_2))(z) \cdot |(\mu_1 \circ \mu_2)(z)|$
$= \xi(\mu_1 \circ \mu_2))(z) \cdot |(\mu_1(\mu_2))(z)| \cdot |\mu_2'(z)|$
$= \xi(\mu_2(z)) \cdot |\mu_2'(z)|$
$= \xi(z)$

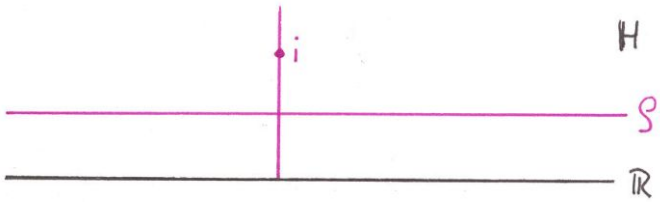
Erzeugendensystem für $Moeb(\mathbb{H})$

- $z \longmapsto a^2 \cdot z,\ a \in \mathbb{R}^>$
- $z \longmapsto z + b,\ b \in \mathbb{R}$
- $z \longmapsto -\frac{1}{z}$ erzeugen $Moeb^+(\mathbb{H})$

- $z \longmapsto -\overline{z}$

Sei $\mu(z) = z + b,\ \mu'(z) = 1$
$\forall z \in \mathbb{H} : \xi(z) = \xi(\mu(z)) = \xi(z+b)$
ξ ist konstant auf den Geraden parallel zu $\mathbb{R}$. D.h. ξ hängt nur vom Imaginärteil ab $(*)$.

Sei $\mu(z) = a^2 \cdot z,\ a \in \mathbb{R}^>$ wegen $(*)$
$\xi(iy) = \xi(z) = \xi(\mu(z))|\mu'(z)| = \xi(a^2 z) \cdot a^2 = \varphi(ia^2 y) \cdot a^2 \ \Rightarrow\ \xi(ia^2 y) = \frac{1}{a^2}\xi(iy)$



Setze $y = 1$, dann folgt: $\xi(ia^2) = \frac{1}{a^2}\xi(i)$
Sei $z \in \mathbb{H} \;\Rightarrow\; z = x + ia^2$
$\xi(z) = \xi(ia^2) = \xi(i \cdot Im(z))$
$= \frac{1}{a^2}\xi(i) = \frac{1}{Im(z)}\xi(i)$

Setze $c = \xi(i) \;\in \mathbb{R}, \xi \geq 0, \xi \neq 0 \;\Rightarrow\; \xi(i) = c \in \mathbb{R}^{>}$

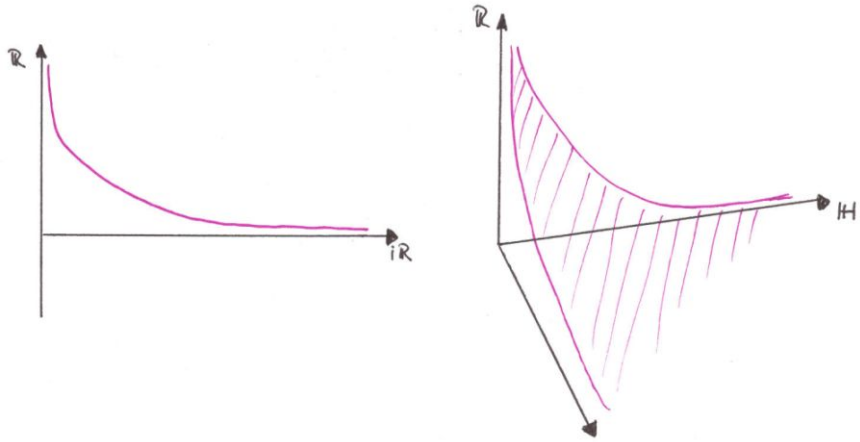
7.1 Satz

Ist $\xi(z) = \frac{c}{Im(z)}$, $0 < c \in \mathbb{R}$, dann ist $\ell_\xi(w)$ invariant unter $Moeb(\mathbb{H})$.

Beweis:
Invarianz bzgl $z \longmapsto -\frac{1}{z}$, $z \longmapsto -\overline{z}$ müssen noch überprüft werden. Nachrechnen!

7.2 Definition

$\xi : \mathbb{H} \to \mathbb{R} : \; z \longmapsto \frac{1}{Im(z)}$



7.3 Definition

$\ell_{\mathbb{H}}(w) = \int_a^b \xi(w(t)) \cdot |w'(t)| dt = \int_a^b \frac{1}{Im(w(t))}|w'(t)|dt$ ist die hyperbolische Länge von w.

7.4 Definition

$\ell_{\mathbb{H}}(a,b) = Inf\{\ell_{\mathbb{H}}(w) | w$ stückweise $C^1,\ w : [\alpha,\beta] \to \mathbb{H},\ w(\alpha) = a,\ w(\beta) = b\}$ ist der hyperbolische Abstand von $a,\ b$.

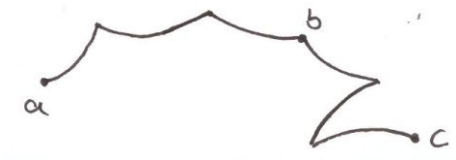
7.5 Satz

$d_{\mathbb{H}}$ ist Metrik auf $\mathbb{H}$.
Für $a,\ b \in \mathbb{H}$ ist $d_{\mathbb{H}}(a,b) = \ell_{\mathbb{H}}(v)$, wobei $v : [0,1] \to \mathbb{H}$ eine Parametrisierung der hyperbolischen Verbindungsstrecke von $a,\ b$ ist.

Beweis:
Metrik
$d_{\mathbb{H}}(a,b) \geq 0$ OK
$d_{\mathbb{H}}(a,b) = 0$, falls $a = b$ OK
Umkehrung: zum Schluss des Beweises

Symmetrie: $d_{\mathbb{H}}(a,b) = d_{\mathbb{H}}(b,a)$ OK

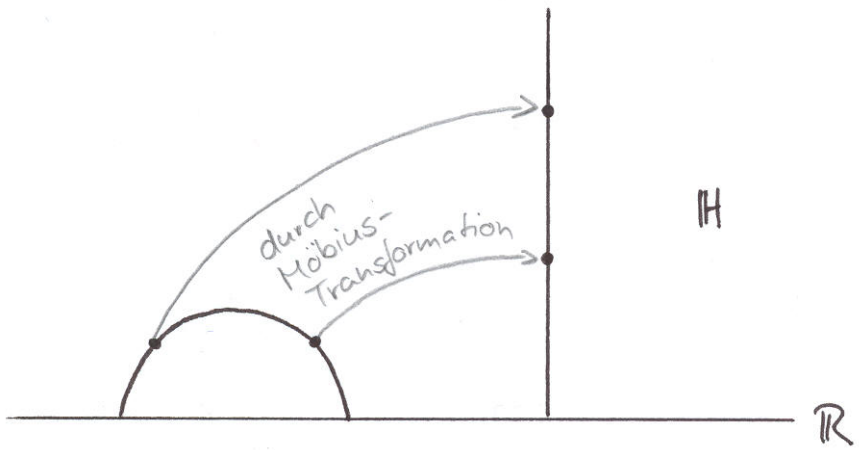
Dreieicksungleichung: $d_{\mathbb{H}}(a,c) \leq d_{\mathbb{H}}(a,b) + d_{\mathbb{H}}(b,c)$
Annahme: $d_{\mathbb{H}}(a,b) + d_{\mathbb{H}}(b,c) < d_{\mathbb{H}}(a,c)$
Setze $\varepsilon = d_{\mathbb{H}}(a,c) - d_{\mathbb{H}}(a,b) - d_{\mathbb{H}}(b,c)$
$w : [0,1] \to \mathbb{H},\ w(0) = a,\ w(1) = b$ und $\ell_{\mathbb{H}}(w) - d_{\mathbb{H}}(a,b) < \frac{\varepsilon}{2}$
$v : [1,2] \to \mathbb{H},\ v(1) = b,\ v(2) = c$ und $\ell_{\mathbb{H}}(v) - d_{\mathbb{H}}(b,c) < \frac{\varepsilon}{2}$



Dann ist
$u : [0,2] \to \mathbb{H} :\ u|_{[0,1]} = w$ und $u|_{[0,2]} = v$
$\ell_{\mathbb{H}}(u) = \ell_{\mathbb{H}}(w) + \ell_{\mathbb{H}}(v)$
$d_{\mathbb{H}}(a,c) \leq \ell_{\mathbb{H}}(u) = \ell_{\mathbb{H}}(w) + \ell_{\mathbb{H}}(v) < d_{\mathbb{H}}(a,b) + \frac{\varepsilon}{2} + d_{\mathbb{H}}(b,c) + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\mathbb{H}}(a,c)$

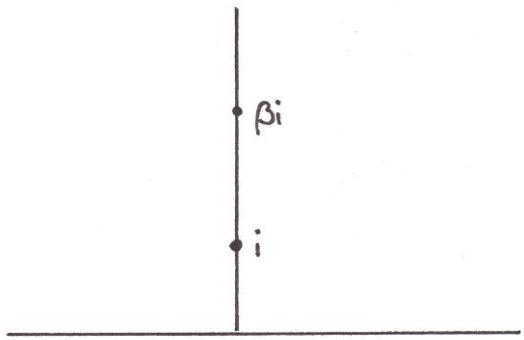
Widerspruch

Falls $d_{\mathbb{H}}(a,b) = \ell_{\mathbb{H}}(v)$ ist (wie im Satz) $a \neq b,\ v : [0,1] \to \mathbb{H}$ Parametrisierung der Strecke $\int_0^1 \frac{1}{Im(v(t))}|v'(t)|dt > 0,\ |v'(t)| > 0$



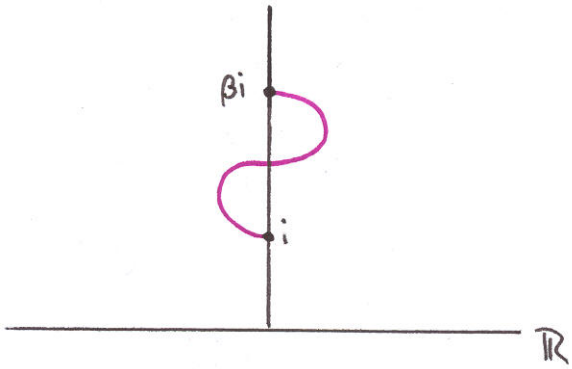
OE:
$a = i,\ b = \beta i$
$w : [0,1] \to \mathbb{H},\ t \longmapsto (1-t)i + t\beta i$
$v : [0,1] \to \mathbb{H},\ v(0) = a,\ v(1) = b$

Behauptung: $\ell_{\mathbb{H}}(v) \geq \ell_{\mathbb{H}}(w)$
1. Fall: $v([0,1]) \subseteq i\mathbb{R}$



Sei $s = Max\{t | v(t) = i\}$,
$t = Min\{t | v(t) = \beta i \ \&\ t > s\}$
$v' = v|_{[s,r]}$
$\ell_{\mathbb{H}}(v) \geq \ell_{\mathbb{H}}(v') \geq \ell_{\mathbb{H}}(w)$

2. Fall: $v([0,1]) \notin i\mathbb{R}$



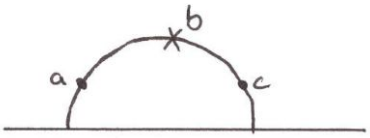
$\int_0^1 \frac{1}{Im(v(t))} \sqrt{v_1'(t)^2 + v_2'(t)^2} dt$

Abstand von i und $i\beta$:
$d_{\mathbb{H}}(i, i\beta) = |ln(\beta)|$ (integrieren von a nach b)

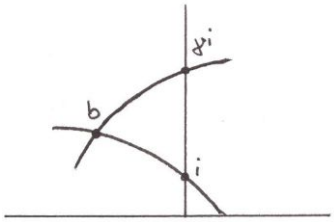
7.6 Satz

$(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ ist Modell der absoluten Geometrie.

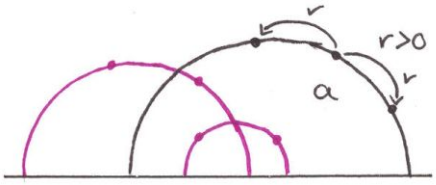
Beweis:
Falls $a,\ b,\ c$ kollinear, etwa b zwischen $a,\ c$

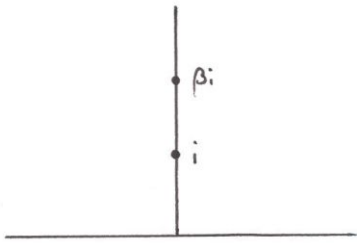


Dann ist $d_{\mathbb{H}}(a,c) = d_{\mathbb{H}}(a,b) + d_{\mathbb{H}}(b,c)$
Annahme $a,\ b,\ c \in i\mathbb{R}$ (sonst verwende Möbiustransformation). Rechne dann die Abstände auf $i\mathbb{R}$ nach.

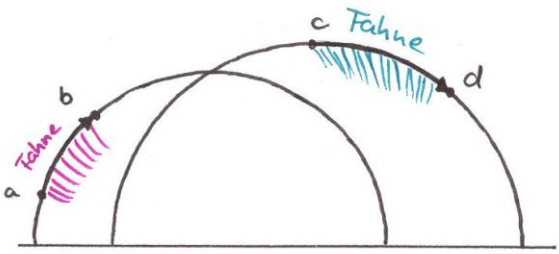


Sei





Bewegungsaxiom



$d_{\mathbb{H}}(a,b) = d_{\mathbb{H}}(c,d)$
Es gibt genau 2 Bewegungen die ab auf cd abbilden.
$\exists!$ Bewegung (durch Möbiustransformation), die die Fahne bei a, b in die Fahne bei c, d überführt.

Hyperbolische Geometrie ist sehr wichtig für ihre Anwendungen in der Physik.