
Differential Geometrie

-

Mitschrift der Vorlesung

SS 2006

Britta Meixner
Ana-Catalina Plesa

29. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

Beispiele in der Differentialgeometrie:

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, t^2)$

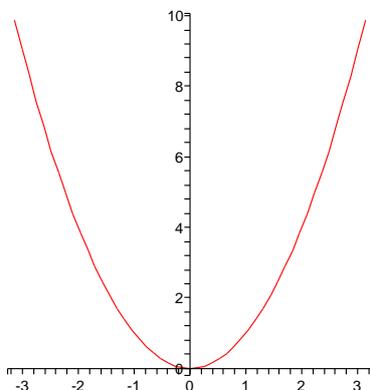


Abbildung 1: Parabel

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$

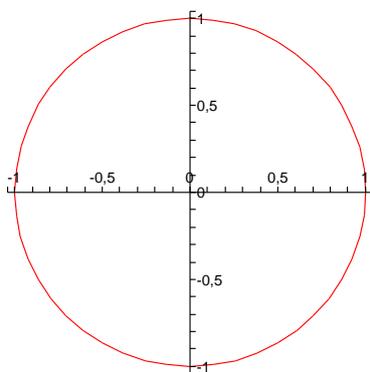
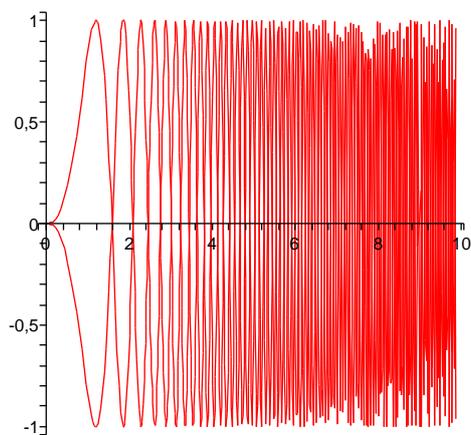


Abbildung 2: Kreis

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t^2, \sin(t^5))$



- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: t(x,y) \mapsto x^2 + y^2$

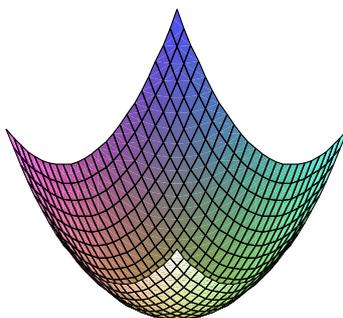


Abbildung 3: Kegel

- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (s, t) \mapsto (\cos(t) \cos(s), \cos(t) \sin(s), \sin(t))$

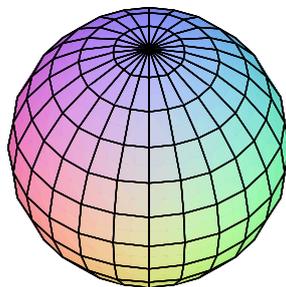


Abbildung 4: Einheitssphäre in \mathbb{R}^3

- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto ((a + r \cos(x)) \cos(y), (a + r \cos(x)) \sin(y), r \sin(y))$
mit $a > r > 0$

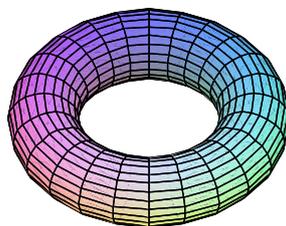


Abbildung 5: Torus

- Lösungsmenge von $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$

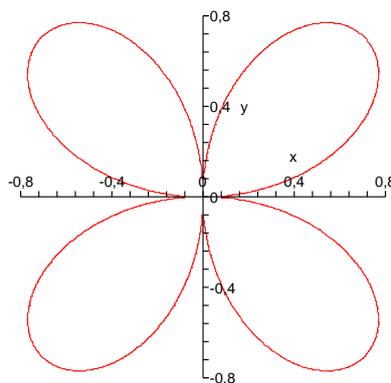


Abbildung 6: Rosenkurve (Niveaugraph zum Niveau 0)

- Lösungsmenge von $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 1$

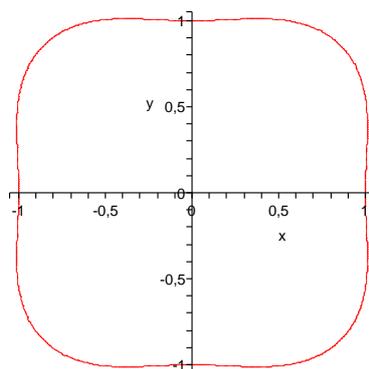


Abbildung 7: Rosenkurve (Niveaugraph zum Niveau 1)

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$
 Höhenlinien (Niveaulinien): $f^{-1}(r)$, mit $r \in \mathbb{R}$

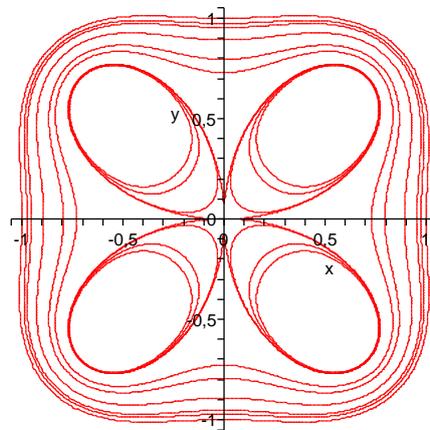
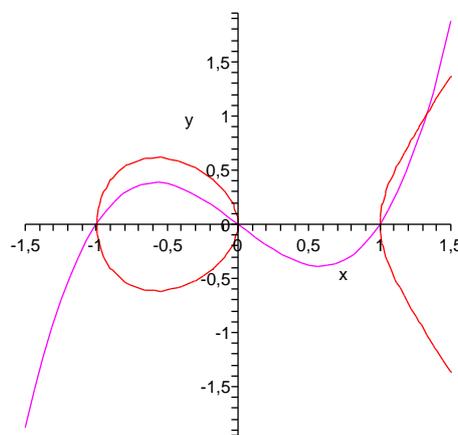
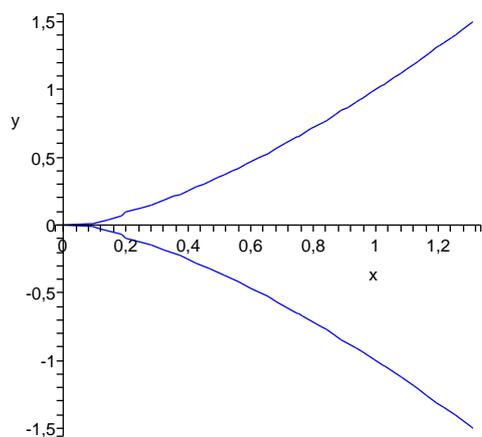


Abbildung 8: Rosenkurve (Höhenlinien)

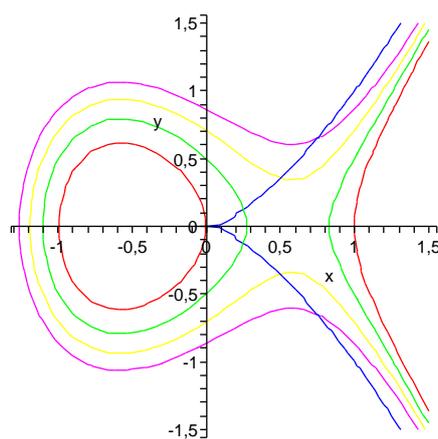
- Nullstellen von $y^2 - x^3 + tx$, $t \in \mathbb{R}$ variabel
 - $t = 1$
 $x \mapsto x^3 - x (y^2 - x^3 + x = 0 \Rightarrow y^2 = x^3 - x)$



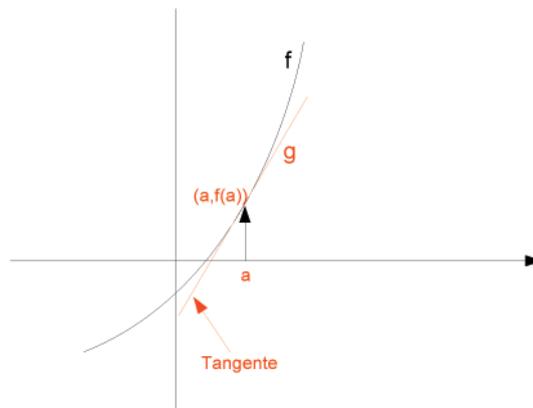
- $t = 0$



- Übergang von $t = 0 \rightarrow t = 1$ für der Niveauliniengraph



- $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kurve
Tangente (geometrische Beschreibung)

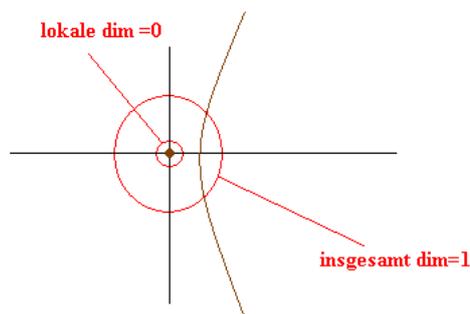


Tangente an C in x : $T_x(C)$

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in C \text{ und } y \in T_x(C)\}$ heißt Tangentialbündel über C und ist eine Fläche in \mathbb{R}^{2n}
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in C \text{ und } y \in T_x(C)^\perp\}$ heißt Normalenbündel ist eine Fläche, die in \mathbb{R}^{2n} liegt, und hat $\dim: n$

Fragen über Kurven und Flächen

- Welche Daten werden benötigt, um eine Kurve oder Fläche eindeutig festzulegen?
- Wie kann man den Unterschied zwischen zwei Kurven (oder Flächen) beschreiben?



- Wie kann man den Grad der Krümmung einer Kurve oder Fläche beschreiben? Krümmungsinformationen kann man mit Hilfe der Approximation mit Kreise gewinnen

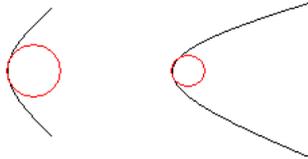
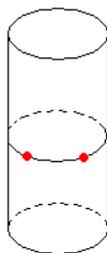


Abbildung 9: die Kurve links hat eine größere Krümmung als die Kurve von rechts, daher hat den Kreis von links einen kleineren Radius als den Kreis von rechts

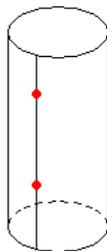
- Seien zwei Punkte x, y auf einer Fläche gegeben. Gibt es eine Kurve kleinster Länge, welche x, y verbindet (die Kurve liegt auf der Fläche): „geodätische Linien“?

Beispiel: 2 Punkte auf einen Kreiszyylinder

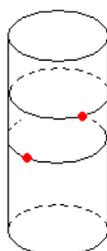
- 1. Fall:



– 2. Fall:



– 3. Fall:



Teil I

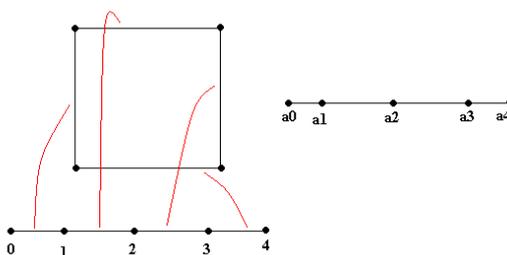
Kurven

1 Parametrisierte Kurven

1.1 Definition

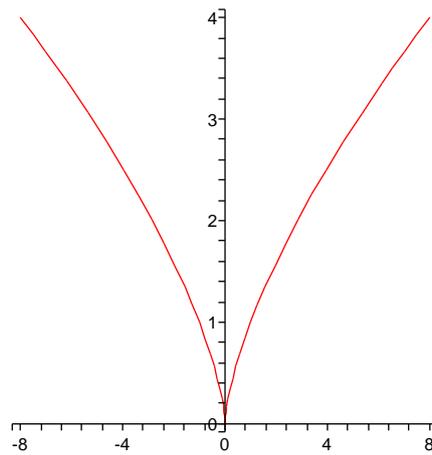
$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $I^\circ \neq \emptyset$ (verboten ist also, dass I einpunktig ist). Eine parametrisierte Kurve der Klasse C^k , $k \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$, ist eine Abbildung $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differenzierbarkeitsklasse C^k .

Eine stückweise glatte Kurve der Klasse C^k ist eine stetige Abbildung $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ so dass es endlich viele Punkte $a_1 < \dots < a_r$ in I gibt, mit $w|_{[a_i, a_{i+1}]}$ von der Klasse C^k ist, $i = 0, \dots, r$ mit $a_0 = \inf(I)$ und $a_{r+1} = \sup(I)$.

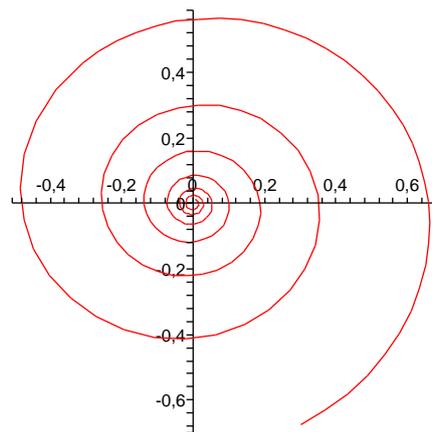


Beispiele:

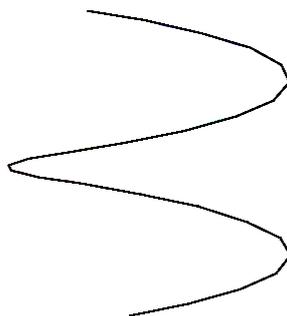
- $w_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t, t^{\frac{2}{3}})$ ist stückweise C^∞ -Kurve



- $w_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t, e^t(\cos(t), \sin(t)))$ ist C^∞ -Kurve (und sogar analytische Kurve, d.h. mit Hilfe der Potenzreihen darstellbar).



- $w_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t), at)$, $a > 0$ ist Schraubenlinie auf einem Zylinder.



1.2 Definition

Seien $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $w_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven von der Klasse C^k . w_1 geht aus w durch Umparametrisierung hervor, wenn es eine Abbildung $\varphi : I_1 \rightarrow I$ gibt mit

- $w_1 = w \circ \varphi$
- φ bijektiv
- φ, φ^{-1} differenzierbar von der Klasse C^k

φ ist orientierungserhaltend, wenn $\varphi'(t) > 0$ ist für alle $t \in I_1$, orientierungsumkehrend, wenn $\varphi'(t) < 0$ ist für alle $t \in I_1$.

- Aus der Analysis bekannt:
 $\varphi \circ \varphi^{-1} = id$
 $1 = (\varphi \circ \varphi^{-1})'(t) = \varphi'(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)$
 $\Rightarrow \forall t : \varphi'(\varphi^{-1}(t)), (\varphi^{-1})'(t) \neq 0$
 $\varphi'(\varphi^{-1}(t)), (\varphi^{-1})'(t)$ haben dasselbe Vorzeichen
- Sei $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k -Kurve, $\varphi : J \rightarrow I$ bijektiv und ein Parameterwechsel, φ, φ^{-1} C^k -Abbildungen, dann ist $w \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung

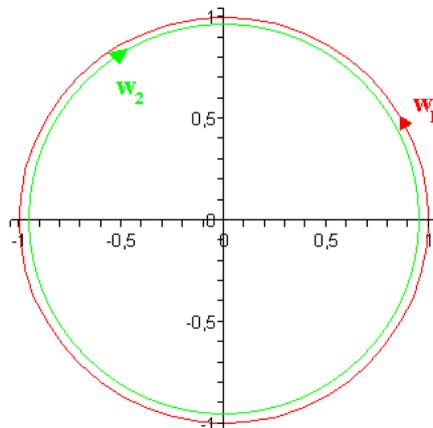
Beispiele:

- $w_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$

- $w_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\sin(t), \cos(t))$

Parameterwechsel:

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$$



- $w_3 : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$
(keine Umparametrisierung, umläuft den Einheitskreis 2mal)
- $w_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t^2), \sin(t^2))$
(keine Umparametrisierung, umläuft den Einheitskreis unterschiedlich schnell, Richtungsänderung)
- $w_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t^3 + 3t), \sin(t^3 + 3t))$
Parameterwechsel:
 $\varphi_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow t^3 + 3t$
 $\varphi_5'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \Rightarrow \varphi_5^{-1}$ diffbar, C^∞

1.3 Definition

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist diffbare Kurve.

$w'(t)$ heißt Tangentialvektor von w bei t .

$\mathbb{R} \cdot w'(t)$ heißt Tangente.

Falls $w'(t) \neq 0$: $\frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}$ heißt Tangenteneinheitsvektor.

Falls $w'(t) \neq 0 \forall t \in I$, so heißt w reguläre Kurve.

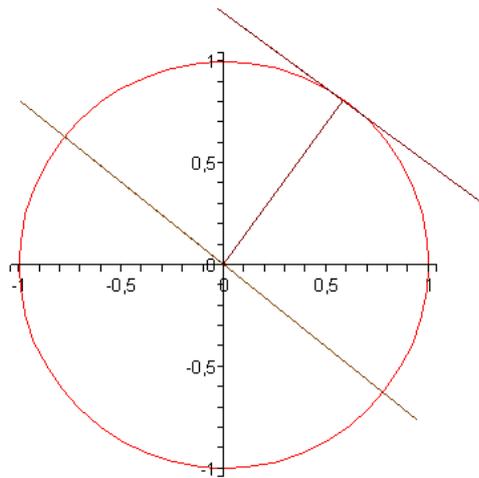
Falls $\|w'(t)\| = 1 \forall t \in I$, so heißt w normale Kurve.

Bemerkung

Der Tangentialvektor gibt die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an. Dabei beschreibt $w(t)$ eine Bahn in Abhängigkeit vom Zeitparameter t .

Beispiel:

$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ ist eine normale Parametrisierung.
 $w'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ ($\|w'(t)\| = 1 \forall t \in \mathbb{R}$)

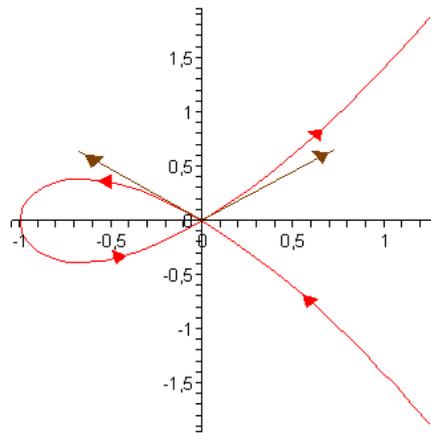
**Beispiel:**

$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t^2 - 1, t^3 - t)$
 $w'(t) = (2t, 3t^2 - 1) \neq (0, 0) \forall t \rightarrow$ die Kurve ist regulär parametrisiert aber nicht normal parametrisiert.

$$w'(1) = (2, 2)$$

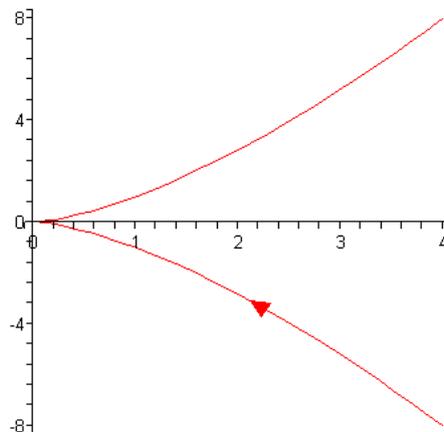
$$w'(-1) = (-2, 2)$$

Der Nullpunkt wird 2mal durchlaufen mit der Geschwindigkeit $\|w'(1)\| = \sqrt{8}$.



Beispiel:

$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (t^2, t^3)$
 $w'(t) = (2t, 3t^2)$ nicht regulär.



1.4 Satz

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär, $\varphi : J \rightarrow I$ Umparametrisierung $\Rightarrow \forall s \in J$: Tangente von $w \circ \varphi$ bei s stimmt überein mit der Tangente von w bei $\varphi(s)$.

Beweis:
Kettenregel

Bogenlänge der stetig diffbaren Kurve $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Stück $[a, b] \subseteq I$: $\int_a^b \|w'(t)\| dt$

1.5 Satz

Sei $w : i \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisiert. Dann gibt es genau einen Parameterwechsel $\varphi : J \rightarrow I$, sodass $w \circ \varphi$ normal parametrisiert ist. Dieser Parameterwechsel ist orientierungserhaltend.

Beweis:

wähle $t_0 \in I$

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow \int_{t_0}^t \|w'(\tau)\| d\tau$$

ψ ist streng monoton wachsend, da $\|w'(t)\| > 0 \forall t \in I$

w' stetig $\rightarrow \psi$ stetig, $\psi'(t) = \|w'(t)\|$

Sei $J = \psi(I) \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

$\psi : I \rightarrow J$ bijektiv

Sei $\varphi : J \rightarrow I$ die Umkehrabbildung

$$\Rightarrow \varphi \text{ diffbar, } \varphi'(s) = \frac{1}{\psi(\varphi(s))}$$

zu zeigen: $w \circ \varphi$ ist normal parametrisiert

$$(w \circ \varphi)'(s) = w'(\varphi(s)) \circ \varphi'(s) = w'(\varphi(s)) \cdot \frac{1}{\psi'(\varphi(s))} = \frac{w'(\varphi(s))}{\|w'(\varphi(s))\|} \text{ Länge} = 1$$

w normal parametrisiert:

$$t_0 \in I : \int_{t_0}^t \|w(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t d\tau = t - t_0$$

w ist nach der Bogenlänge parametrisiert.

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei normal parametrisiert

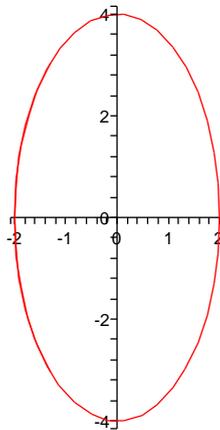
$\varphi : J \rightarrow i$ orientierungserhaltender Parameterwechsel

$w \circ \varphi$ auch normal parametrisiert $\iff \varphi(s) = s + c$

Beispiele:

- $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ normal
- $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t), at)$, $a > 0$
 $w'(t) = (-\sin(t), \cos(t), a)$
 $\|w'(t)\| = \sqrt{1+a^2}$
 $\psi(t) = \int_0^t \|w'(\tau)\| d\tau = \sqrt{1+a^2} \cdot \tau|_0^t = \sqrt{1+a^2} \cdot t$
 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : s \rightarrow \frac{s}{\sqrt{1+a^2}}$
 $w \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : s \rightarrow (\cos(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}), (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}})s)$

- $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (a \cos(t), b \sin(t)), 0 < ab$ $w'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$
 $\|w'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$
 $\psi(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt$



2 Ebene Kurven

Geradensegmente: $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow at + b, a, b \in \mathbb{R}^2$

w regulär $\iff a \neq 0$, d.h. w nicht stationär (konstant)

$$w'(t) = a$$

Sei $v : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär mit konstanter Tangente.

OBdA: v normal parametrisiert

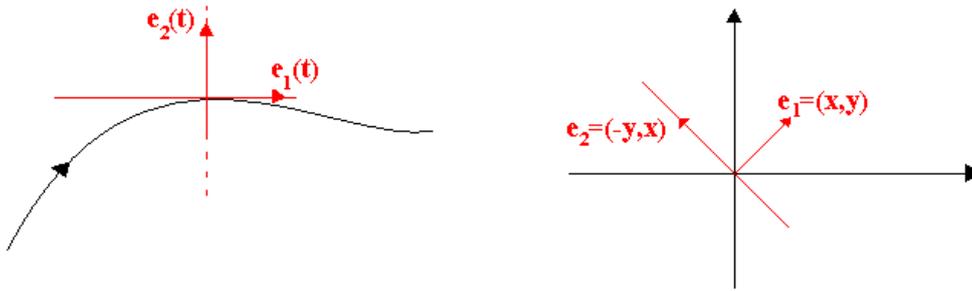
Damit ist $v'(t) = a$ konstant $\Rightarrow v(t) = at + b$

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^k -Kurve

$w' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^{k-1} -Kurve

w sei regulär, dann ist die Tangente Einheitsvektor: $\frac{w'(t)}{\|w'(t)\|} = e(t) = e_1(t)$.

Ergänze $e_1(t)$ durch $e_2(t)$ zu einem positiven ONS($e_2(t)$ = Normaleneinheitsvektor $n(t)$)



$$I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (e(t), n(t))$$

diese Abbildung heißt Frenet'sches 2-Bein.

2.1 Satz

w sei normal parametrisiert $\Rightarrow w'(t) = e(t)$ und $w''(t) \perp e(t)$

Beweis:

$$t \mapsto \langle w'(t), w'(t) \rangle = 1 \Rightarrow 0 = 2 \langle w'(t), w''(t) \rangle$$

und damit $w''(t) \perp w'(t)$.

2.2 Definition

Die Krümmung von w bei t : $\kappa(t)$ mit $\kappa(t)n(t) = w''(t)$. Nach wie vor w ist normal parametrisiert.

Es gilt: $\kappa(t) = \langle w''(t), n(t) \rangle$ diffbar von der Klasse C^{k-2}

Interpretation der Krümmung einer Kurve:

Die Krümmung ist die Größe der Beschleunigung.

Die Kurve w wird bei t durch Taylor-Polynome approximiert:

$$\begin{aligned} w(s) &= w(t) + (s-t)w'(t) + \frac{(s-t)^2}{2}w''(t) + \frac{(s-t)^3}{3!}w'''(t) + \dots \\ &= w(t) + (s-t)e(t) + \frac{(s-t)^2}{2}\kappa(t)n(t) + \dots \end{aligned}$$

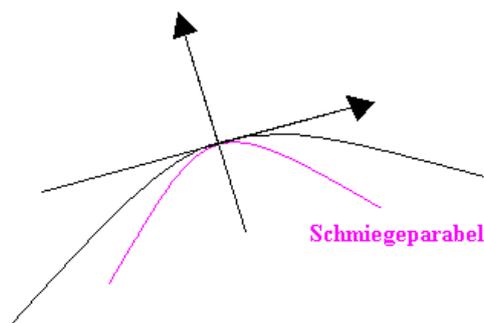
$w(t) = 0$ und $e(t), n(t)$ Basis, damit folgt:

$$w(s) = (s-t)(1, 0) + \frac{(s-t)^2}{2}\kappa(t)(0, 1) + \dots$$

Für $t = 0$: $w(s) = s(1, 0) + \frac{s^2}{2} \kappa(0)(0, 1) + \dots$

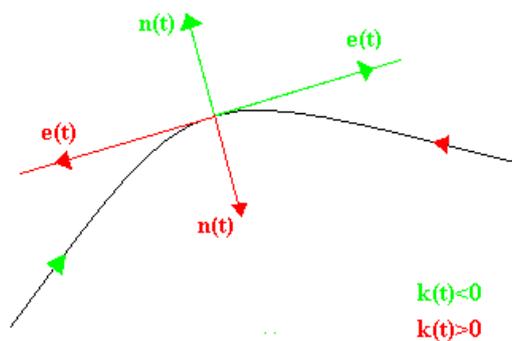
Die Approximation:

1. Ordnung: liefert die Tangente
2. Ordnung: liefert die Schmiegeparabel (die Parabel die unter allen anderen Parabeln die Kurve am besten annähert)

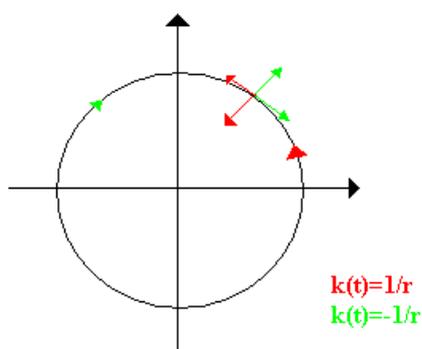


Beispiele:

- $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto at + b$ mit $a \in S^1$
 $w'(t) = a$
 $w''(t) = 0 \Rightarrow \kappa(t) = 0$
- $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto r(\cos(t), \sin(t))$, $r > 0$
 $w'(t) = r(-\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow \|w'(t)\| = r$ (keine normale Parametrisierung)
 Normale Parametrisierung: $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto r(\cos(\frac{t}{r}), \sin(\frac{t}{r}))$
 $e(t) = v'(t) = (-\sin(\frac{t}{r}), \cos(\frac{t}{r}))$
 $n(t) = v''(t) = \frac{1}{r}(-\cos(\frac{t}{r}), -\sin(\frac{t}{r}))$
 Damit $\kappa(t) = \langle v''(t), n(t) \rangle = \frac{1}{r}$, also konstante Krümmung.



Für ein Kreis:



Das Vorzeichen der Krümmung hängt von der Richtung in der die Kurve durchlaufen wird.

w sei regulär.

Sei $\varphi : J \rightarrow I$ positiver Parameterwechsel

$v = w \circ \varphi$ normal parametrisiert

Sei $t \in I, s = \varphi^{-1}(t)$

$$e(t) = e(s) \quad e(t) = \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}$$

$$n(t) = n(s) \quad n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}$$

$$\begin{aligned} w'(t) &= (v \circ \varphi^{-1})'(t) = v'(s)(\varphi^{-1})'(t) \\ &= v'(s) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \\ &= \frac{v'(s)}{\varphi'(s)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi'(s) = \frac{1}{\|w'(t)\|}$ da $\|v'(s)\| = 1$ wegen der normalen Parametrisierung.

Krümmung von w bei $t =$ Krümmung von v bei $s = \langle v''(s), n(s) \rangle$

$$w'(t) = v'(\varphi^{-1}(t)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

$$w''(t) = v''(\varphi^{-1}(t)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))^2} - \frac{v'(\varphi^{-1}(t))\varphi''(\varphi^{-1}(t)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))^2}$$

⇒

$$\begin{aligned} v''(\varphi^{-1}(t)) &= \varphi'(\varphi^{-1}(t))^2 w''(t) + \varphi'(\varphi^{-1}(t)) w'(t) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \varphi''(\varphi^{-1}(t)) \\ &= \frac{1}{\|w'(t)\|^2} w''(t) + \varphi''(\varphi^{-1}(t)) w'(t) \end{aligned}$$

$$\langle v''(s), n(s) \rangle \stackrel{n(s)=n(t)}{=} \left\langle \frac{1}{\|w'(t)\|^2} w''(t) + \varphi''(\varphi^{-1}(t)) w'(t), n(t) \right\rangle$$

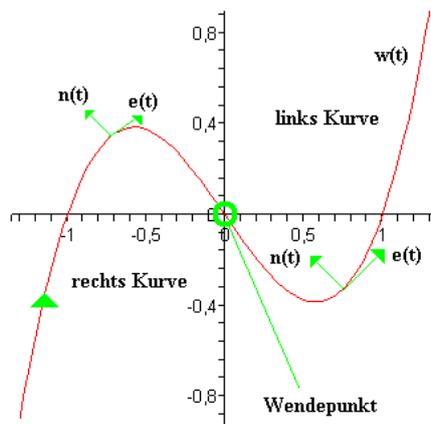
Beachte: $\langle w'(t), n(t) \rangle = 0$

Damit:

$$\begin{aligned} \langle v''(s), n(s) \rangle &= \frac{1}{\|w'(t)\|^2} \left\langle (w_1''(t), w_2''(t)), \frac{1}{\|w'(t)\|} (-w_2'(t), w_1'(t)) \right\rangle \\ &= \frac{\det(w'(t), w''(t))}{\|w'(t)\|^3} \end{aligned}$$

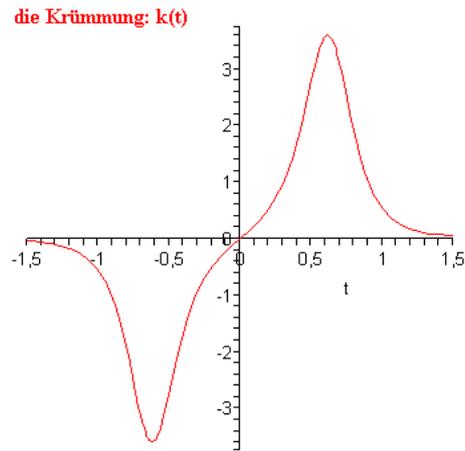
Beispiel:

$$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t^3 - t) \quad w'(t) = (1, 3t^2 - 1)$$



$$w''(t) = (0, 6t)$$

$$\kappa(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3t^2 - 1 & 6t \end{pmatrix}}{(\sqrt{2+9t^4-6t^2})^3} = \frac{6t}{(\sqrt{2+9t^4-6t^2})^3}$$



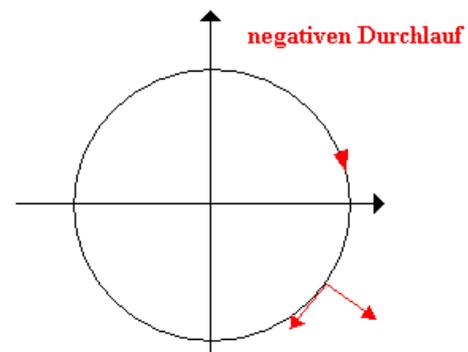
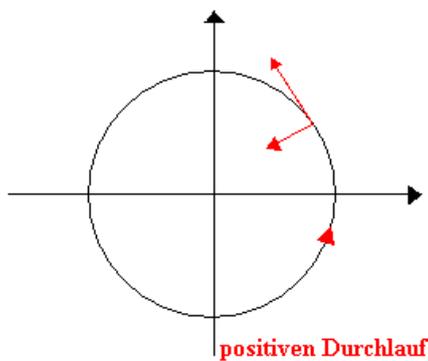
2.3 Definition

Sei $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär von der Klasse C^2

Sei $t \in I$. Bei t :

- Rechtskurve: $\kappa(t) < 0$
- Linkskurve: $\kappa(t) > 0$
- Wendepunkt: $\kappa(t) = 0$

Bei einem Kreis:



Scheitel: falls κ bei t ein lokales Extremum hat.

2.4 Definition

Sei $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar mit $(Df)(x) \neq 0$, falls $f(x) = 0$

$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$

$V(f)$ berührt w bei t von der Ordnung k , falls für $F = f \circ w$ gilt: $F(t) = 0, F'(t) = 0, \dots, F^{(k)}(t) = 0$

Beispiel:

- f affin-linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle a, x \rangle + c$
 $(Df)(x) = a, V(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Gerade.
 $V(f)$ berührt w bei t von 1.ter Ordnung: $V(f)$ ist Tangente von w bei t
- Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle x - a, x - a \rangle - r^2, r > 0$
 $V(f)$ ist ein Kreis mit Radius r um a

2.5 Satz

Seien w und f wie in Definition 2.4.

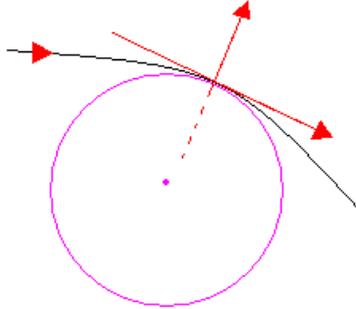
$\varphi : J \rightarrow I$ sei Parameterwechsel und $s \in J, t = \varphi(s) \in I, v = w \circ \varphi$.

Dann folgt: $V(f)$ berührt w bei t mit derselben Ordnung wie v bei s .

Beweis:
Kettenregel

2.6 Satz

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei regulär und $t \in I$ mit $\kappa(t) \neq 0$. Dann gibt es genau einen Kreis, der w bei t von 2.ter Ordnung berührt: Schmiegekreis, mit Mittelpunkt = Krümmungsmittelpunkt und Radius = Krümmungsradius = $\frac{1}{|\kappa(t)|}$



Krümmungsmittelpunkt: $w(t) + \frac{1}{\kappa(t)}n(t)$.

Die Kurve, die aus den Krümmungsmittelpunkte besteht, heißt Evolute: $t \mapsto w(t) + \frac{1}{\kappa(t)}n(t)$, wobei w normal parametrisiert ist.

Formel für die Evolute auch im Fall einer nicht normalen Parametrisierung:

$w : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ normal parametrisiert

$\varphi : I \rightarrow J$

$v : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$w = v \circ \varphi$

Sei $s = \varphi(t)$

Krümmungsmittelpunkt von $v(w)$ bei $t(s)$: $m_v(t) = m_w(s)$

$m_w(s) = w(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$

$m_v(t) = v(t) + \frac{\|v'(t)\|^3}{\det(v'(t), v''(t))} \frac{1}{\|v'(t)\|} (-v'_2(t), v'_1(t))$

$= v(t) + \frac{\|v'(t)\|^2}{\det(v'(t), v''(t))} (-v'_2(t), v'_1(t))$ ist Krümmungsmittelpunkt und auch Formel für die Evolute für eine nicht normal parametrisierte Kurve.

Sei $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve und $t \in I$: $\kappa(t) \neq 0$.

Es gibt dann genau einen Kreis, welcher die Kurve von 2-ter Ordnung berührt. O.E.: w ist normal parametrisiert.

Beweis: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle x - a, x - a \rangle - r^2$

Dann ist $V(f)$ Kreis mit Mittelpunkt a und Radius r .

$F = f \circ w$

$F(t) = 0, F'(t) = 0, F''(t) = 0$ heißt Berührung 2-ter Ordnung.

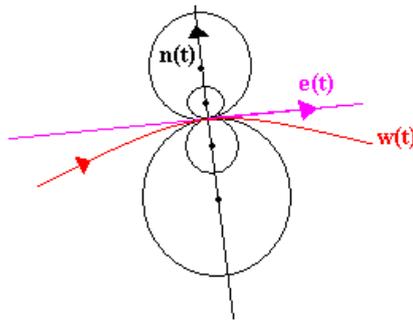
$F(t) = 0$ heißt $w(t) \in V(f)$

$F'(t) = 0 \Rightarrow F'(t) = (f \circ w)'(t) = (Df)(w(t))w'(t)$

$F'(t) = 0$ heißt $w'(t) \perp (Df)(w(t))$

$(Df)(w(t)) \perp$ Tangente an Kreis im $w(t)$

also $F'(t) = 0 \Leftrightarrow$ Tangente an w in $t =$ Tangente an $V(f)$ im $w(t)$

Abbildung 10: $\kappa(t) < 0 \Rightarrow w(t) - a$ zeigt in die Richtung des Normalenvektors

$$F''(t) = 0 \quad F''(t) = ((Df)(w(t))w')' = \langle (D^2f)(w(t))w'(t), w'(t), w'(t) \rangle + \langle (Df)(w(t)), w''(t) \rangle$$

$$(Df)(x) = 2(x - a)$$

$$(D^2f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Damit ist } F''(t) = 2 \langle w'(t), w'(t) \rangle + 2 \langle w(t) - a, w''(t) \rangle = 2(1 + \langle w(t) - a, w''(t) \rangle)$$

Wegen normaler Parametrisierung ist $w''(t) \kappa(t) n(t)$

Damit, aus $F''(t) = 2(1 + \kappa(t)) \langle w(t) - a, n(t) \rangle$ und $F''(t) = 0$ folgt:

$$w(t) - a \perp n(t) \Rightarrow w(t) - a = \alpha n(t)$$

Also folgt:

$$F''(t) = 2(1 + \alpha \kappa(t))$$

$$F''(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha \kappa(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{\kappa(t)}$$

Da a Mittelpunkt des Kreises ist $\Leftrightarrow w(t) - a = \text{Radius des Kreises}$.

Somit ist $\alpha = \frac{-1}{\kappa(t)}$ Radius des Kreises mit eventl. Vorzeichen wegen der Krümmung der Kurve.

Man kann jetzt den Mittelpunkt des Kreises berechnen:

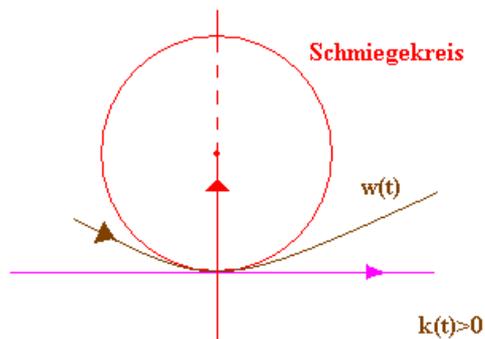
$$a = w(t) - \alpha n(t) = w(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$$

Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

Mit diesem Mittelpunkt und Radius ist die Berührung 2-ter Ordnung gezeigt.

$$\alpha = \frac{-1}{\kappa(t)} > 0 \text{ falls } \kappa(t) < 0$$

$$\alpha = \frac{-1}{\kappa(t)} < 0 \text{ falls } \kappa(t) > 0$$



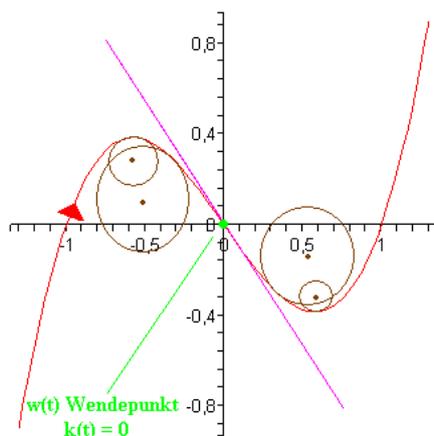
Der Schmiegekreis liegt immer auf der inneren Seite der Kurve.

Mittelpunkt des Schmiegekreises bei t :

$a(t) = w(t) + \frac{1}{\kappa(t)}n(t)$, falls w normal parametrisiert

$$= w(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \begin{pmatrix} -w'_2(t) \\ w'_1(t) \end{pmatrix}$$

Bei beliebiger Parametrisierung: $a(t) = w(t) + \frac{\|w'(t)\|^2}{\det(w'(t), w''(t))} \begin{pmatrix} -w'_2(t) \\ w'_1(t) \end{pmatrix}$



Wenn man sich an den Wendepunkt von links oder von rechts annähert, wird der Radius des Schmiegekreises immer größer. Nach dem Wendepunkt, wechseln die Kreise von einer Seite auf die andere Seite der Kurve.

Die Kurve $a(t) = w(t) + \frac{\|w'(t)\|^2}{\det(w'(t), w''(t))} \begin{pmatrix} -w'_2(t) \\ w'_1(t) \end{pmatrix}$ heißt Evolute. Sie wird von den Mittelpunkten der Krümmungskreisen (Schmiegekreise) beschrieben.

Beispiel:

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t^2)$$

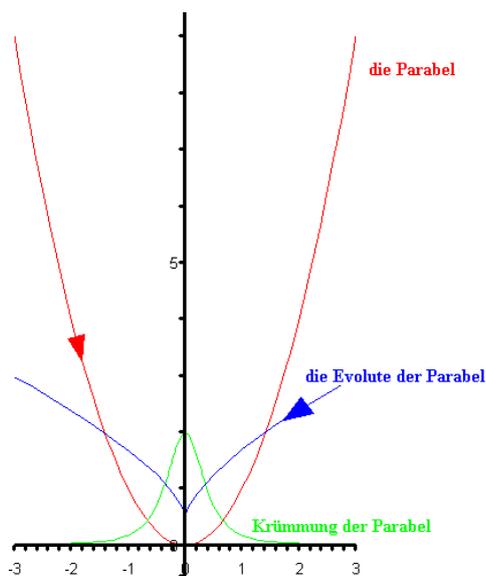
$$w'(t) = (1, 2t)$$

$$w''(t) = (0, 2)$$

$$\kappa(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{pmatrix}}{(\sqrt{1+4t^2})^3} = \frac{2}{(\sqrt{1+4t^2})^3}$$

$\kappa(t) \neq 0 \forall t$ (d.h. es gibt keinen Wendepunkt auf der Parabel)

$$\text{Evolute: } a(t) = (t, t^2) + \frac{1}{2}(1+4t^2)(-2t, 1) \Rightarrow a(t) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2})$$

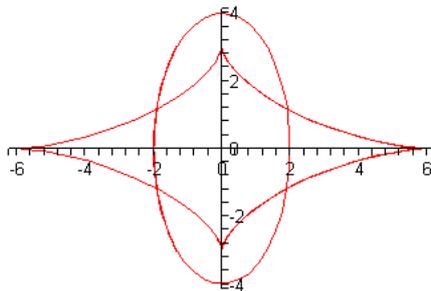
**Beispiel:**

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \rightarrow (a \cos(t), b \sin(t)), 0 < a < b$$

$$w'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$$

$$w''(t) = (-a \cos(t), -b \sin(t))$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(w'(t), w''(t))}{\|w'(t)\|^3} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)^2}}$$



$$\begin{aligned}
 a(t) &= w(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot n(t) \\
 &= (a \cos(t), b \sin(t)) + \frac{\sqrt{a^2 \sin^2(t) - b^2 \cos^2(t)}^3}{ab} \cdot \left(\frac{-b \cos(t), -a \sin(t)}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) - b^2 \cos^2(t)}} \right) \\
 &= (a \cos(t), b \sin(t)) + \frac{a^2 \sin^2(t) - b^2 \cos^2(t)}{ab} \cdot (-b \cos(t), -a \sin(t))
 \end{aligned}$$

2.7 Satz (Frenet'sche Gleichung)

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ normal parametrisiert, $(e(t), n(t))$: Frenet'sches 2-Bein
 $\Rightarrow e'(t) = w''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$, $n'(t) = -\kappa(t) \cdot e(t)$

Beispiel:

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat konstante Krümmung $\kappa \neq 0 \iff w(I)$ ist in einem Kreisbogen enthalten.
 OE: w ist normal parametrisiert

Beweis:

\Rightarrow

OK

\Leftarrow

Krümmungsmittelpunkt: $a(t) = w(t) + \frac{1}{\kappa} n(t)$

zu zeigen: $a(t)$ konstant

(dann folgt: $|w(t) - a| = |\frac{1}{\kappa} n(t)| = \frac{1}{|\kappa|}$, d.h. $w(t)$ liegt auf dem Kreis um a mit

Radius $\frac{1}{|\kappa|}$)

Dazu: Ableitung

$$a'(t) = w'(t) + \frac{1}{\kappa} n'(t) = e(t) - \frac{1}{\kappa} \cdot \kappa \cdot e(t) = 0$$

$$a'(t) \text{ konstant } 0 \Rightarrow a(t) \text{ konstant}$$

Bemerkung

Alle Ableitungen $w^{(r)}(t)$ sind durch Krümmung κ , $(e(t), n(t))$ auszudrücken:

$$w'(t) = e(t)$$

$$w''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$$w'''(t) = \kappa'(t) \cdot n(t) + \kappa(t) \cdot n'(t) = -\kappa(t)^2 \cdot e(t) + \kappa'(t) \cdot n(t)$$

$$w^{(4)}(t)$$

$$= -2\kappa(t) \cdot \kappa'(t) \cdot e(t) - \kappa(t)^2 \cdot e'(t) + \kappa''(t) \cdot n(t) + \kappa'(t) \cdot n'(t)$$

$$= -2\kappa(t) \cdot \kappa'(t) \cdot e(t) - \kappa(t)^3 \cdot n(t) + \kappa''(t) \cdot n(t) - \kappa(t) \cdot \kappa'(t) \cdot e(t)$$

2.8 Satz

Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion

$\Rightarrow \exists$ diffbare normalparametrisierte Kurve $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass κ deren Krümmung ist.

Sei $w_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine weitere solche Kurve, dann gibt es eine eigentliche Bewegung φ des \mathbb{R}^2 mit $w = \varphi \circ w_1$

Beweis:

Sei $t_0 \in I$

Gesucht: Kurve w mit: $w(t_0) = 0$, $w'(t_0) = (1, 0)$

Frenet'sches 2-Bein bei t_0 : $(e(t_0), n(t_0)) = ((1, 0), (0, 1))$

$$e(t) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$$

$$n(t) = (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t)))$$

Suche $\alpha(t)$!

Falls w existiert:

$$e'(t) = \kappa(t) \cdot n(t) = \alpha'(t) (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t)))$$

$$\kappa(t) \cdot n(t) = \kappa(t) (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t)))$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \kappa(t)$$

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t \kappa(\tau) d\tau$$

$$w_1'(t) = \cos\left(\int_{t_0}^t \kappa(\tau) d\tau\right)$$

$$w_2'(t) = \sin\left(\int_{t_0}^t \kappa(\tau) d\tau\right)$$

$$\text{Definiere } w_1(t) = \int_{t_0}^t \cos\left(\int_{t_0}^s \kappa(\tau) d\tau\right) ds$$

$$w_2(t) = \int_{t_0}^t \sin\left(\int_{t_0}^s \kappa(\sigma) d\sigma\right) ds$$

mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: w ist die gesuchte Kurve.

Beispiel:

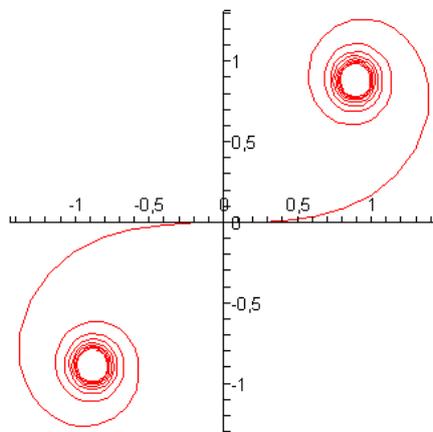
$$\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow t$$

$$t_0 = 0$$

$$\alpha(t) = \int_0^t \kappa(\tau) d\tau = \frac{1}{2}t^2$$

$$w_1(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}\tau^2\right) d\tau$$

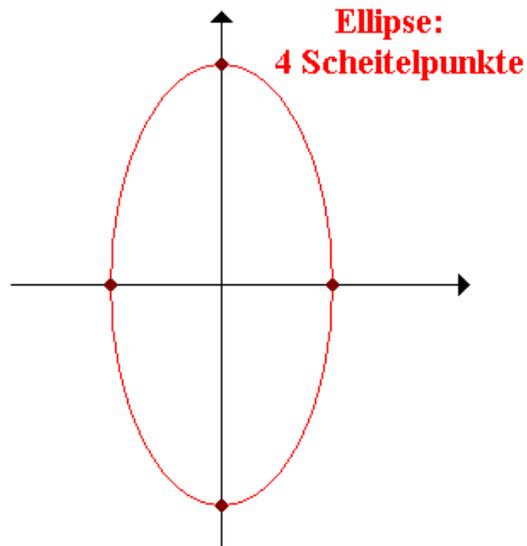
$$w_2(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}\tau^2\right) d\tau$$



Spinnkurve

3 Der Vier-Scheitel-Satz

3.1 Definition

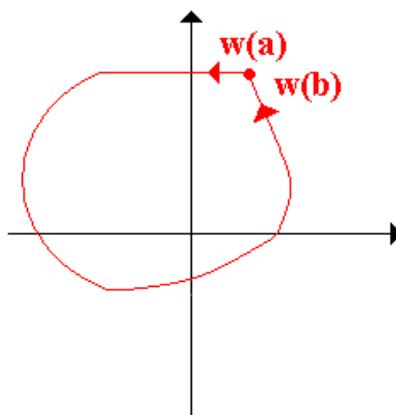


Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve,

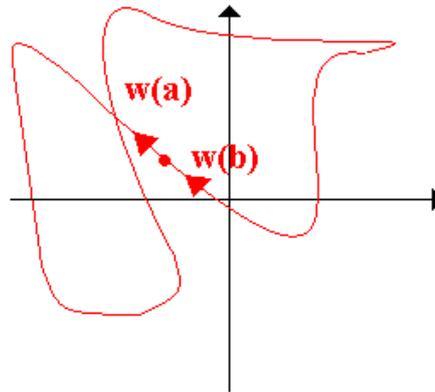
$$w(a) = w(b)$$

Definiere $\tilde{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in der folgenden Weise: zu $t \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein Intervall $\mu_t \cdot (b - a) + [a, b]$, welches t enthält ($n_t \in \mathbb{Z}$)

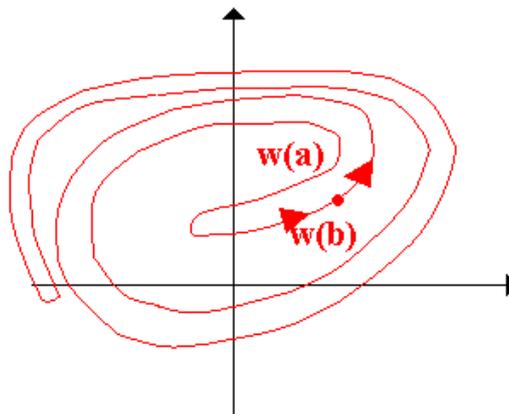
Setze $\tilde{w}(t) = w(t - n_t(b - a))$.



w ist eine geschlossene differenzierbare Kurve, wenn auch \tilde{w} differenzierbar ist.



Einfach geschlossen: $w|_{[a,b]}$ injektiv, d.h. jeder Punkt wird nur einmal durchlaufen (ausser $w(a)$ und $w(b)$).



w geschlossen differenzierbar $\Rightarrow w$ hat endliche Länge
 Länge der Kurve = $\int_a^b \|w'(t)\| dt$

3.2 Definition

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ Kurve, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen.

Sei $[a, b] \subseteq I$.

Totalkrümmung von w auf $[a, b]$:

$$\int_a^b \kappa(t) \cdot \|w'(t)\| dt$$

3.3 Satz

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ Kurve, $\varphi : J \rightarrow I$ positiver Parameterwechsel, $v = w \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $[a, b] \subseteq I$, $c = \varphi^{-1}(a)$, $d = \varphi^{-1}(b)$
 \Rightarrow Totalkrümmung von w auf $[a, b]$ = Totalkrümmung von v auf $[c, d]$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \kappa_w(t) \cdot \|w'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \kappa_w(\varphi(s)) \cdot \|w'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) ds \\ &= \int_a^b \kappa_v(s) \cdot \|v'(s)\| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'(s) &= (w \circ \varphi)'(s) = w'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \\ \sqrt{\langle v'(s), v'(s) \rangle} &= \sqrt{\langle w'(\varphi(s)), w'(\varphi(s)) \rangle} \cdot \varphi'(s) \end{aligned}$$

3.4 Lemma

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig $\Rightarrow \exists$ stetige Abbildung $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit:
 $f(t) = \|f(t)\| \cdot (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$
 Dabei ist $\theta(b) - \theta(a)$ unabhängig von der Wahl von θ
 Falls f differenzierbar ist, dann ist auch θ differenzierbar.

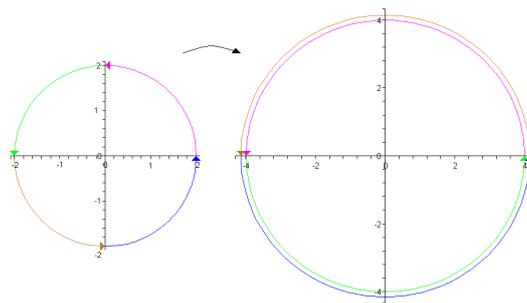
Beweis:

$$\text{Setze } g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$$

Falls Aussage für g richtig, dann auch für f

$$S^1 \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

$$S^1 \rightarrow S^1 : z \rightarrow z^2$$

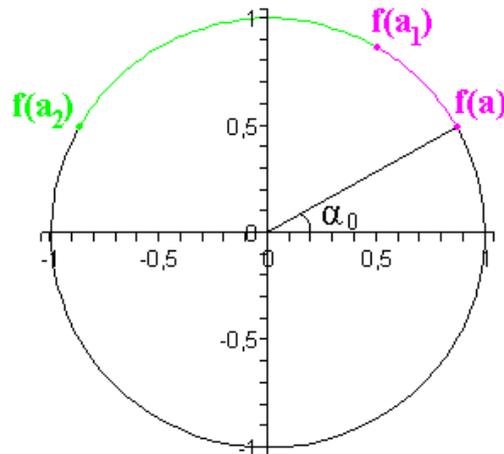


$$H_1 : x_1 > 0$$

$$H_2 : x_2 > 0$$

$$H_3 : x_1 < 0$$

$$H_4 : x_2 < 0$$



$[a, b]$ kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilungspunkte $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_r = b$, so dass das Bild von $[a_{i-1}, a_i]$ unter f jeweils vollständig in einer Halbebene liegt.

$$f(t) = f_1(t), f_2(t)$$

Wähle $\alpha_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\theta(t) = \arcsin(f_2(t))$$

3.5 Lemma

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig $\Rightarrow \exists$ stetige Abbildung $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$f(t) = \|f(t)\| \cdot (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$$

Falls f differenzierbar ist, dann ist auch θ differenzierbar. θ ist eindeutig bis auf Addition von $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\theta(b) - \theta(a)$ ist unabhängig von der Wahl von θ .

Beweis:

O.E.: $\|f(t)\| = 1$

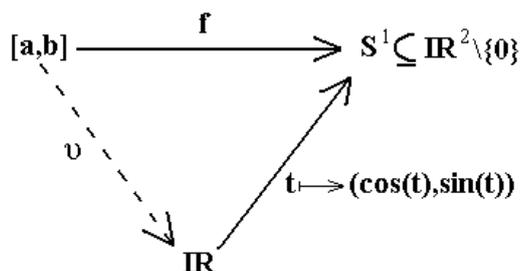
Falls $\theta, \bar{\theta}$ zwei solche Abbildungen sind, folgt:

$\theta - \bar{\theta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$\text{Für } t \in [a, b]: (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) = (\cos(\bar{\theta}(t)), \sin(\bar{\theta}(t))) \Rightarrow \theta(t) - \bar{\theta}(t) = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Damit ist $\theta - \bar{\theta}$ konstant.

$$\text{Sei etwa } \theta = \bar{\theta} + 2\pi n \Rightarrow \theta(b) - \theta(a) = \bar{\theta}(b) - \bar{\theta}(a)$$



$$H_1 : x_1 > 0$$

$$H_2 : x_2 > 0$$

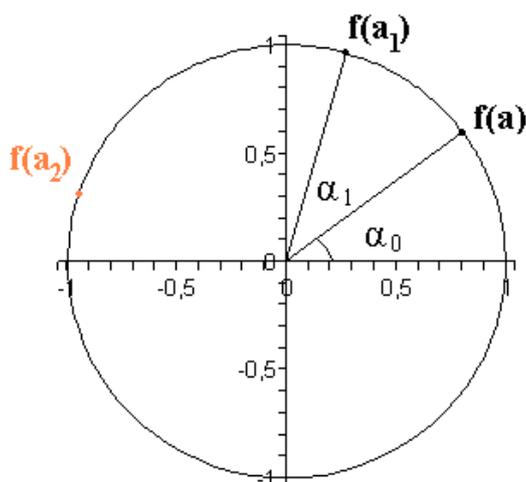
$$H_3 : x_1 < 0$$

$$H_4 : x_2 < 0$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S^1 \cap H_1 : t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ invertierbar durch \arcsin .

$\arcsin_n : S^1 \cap H_1 \rightarrow 2\pi n + (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : (x_1, x_2) \rightarrow 2\pi n + \arcsin(x_2)$

$\arcsin_n : C^\infty$ (d.h. \arcsin_n ist holomorph = durch Potenzreihen darstellbar)



Es gibt $a_1 > a = a_0$ so dass $f([a_0, a_1]) \subseteq S^1 \cap H_1$ ist.

$\theta_1(t) = \arcsin_n(f_2(t))$ mit $\alpha_0 - 2\pi n \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$t \in [a_0, a_1]$

$a_1 < a_2, f([a_1, a_2]) \subseteq H_2 \cap S^1$

$(0, \pi) \rightarrow S^1 \cap H_2$

$t \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$

$(x_1, x_2) \rightarrow \arccos(x_1)$

$\theta_2(t) = \arccos_2(f_1(x))$, wobei κ so gewählt wird, dass $t \in [a_1, a_2]$, $\theta_2(a_1) = \theta_1(a_1)$ ist.

3.6 Folgerung

f wie in Lemma 3.4. Zusätzlich $f(a) = f(b) \Rightarrow \theta(b) - \theta(a) \in \{2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$

Beweis:

$(\cos(\theta(b)), \sin(\theta(b))) = f(b) = f(a) = (\cos(\theta(a)), \sin(\theta(a))) \Rightarrow$ Behauptung.

3.7 Definition

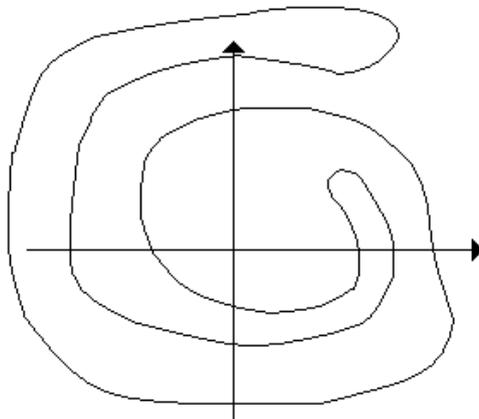
f wie oben, θ wie in Lemma 3.4. θ ist Polarwinkelfunktion von f . Wenn $f(a) = f(b)$ ist, heißt

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

die Windungszahl von f .

Geometrische Bedeutung:

Windungszahl = Umlaufszahl



$$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$w' : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ Tangentenbild.}$$

3.8 Satz

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguläre Kurve, θ Polarwinkelfunktion zu w' .

Sei $[a, b] \subseteq I \Rightarrow \theta(b) - \theta(a)$ ist die Totalkrümmung auf $[a, b]$.

Beweis:

O.E.: w ist normal parametrisiert.

$t \in [a, b] : e(t) = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))), n(t) = (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)))$

1. Frenet'sche Gleichung:

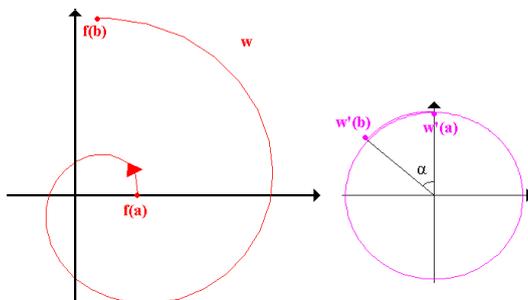
$e'(t) = \kappa(t)n(t)$.

$\theta'(t)(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) = \kappa(t)n(t) \Rightarrow \kappa(t) = \theta'(t)$

Totalkrümmung:

$\int_a^b \kappa(t) \|w'(t)\| dt = \int_a^b \kappa(t) dt = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a)$

($\|w'(t)\| = 1$ wegen Parametrisierung)



3.9 Definition

Sei w eine geschlossene Kurve mit Definitionsintervall $[a, b]$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa'(t) \|w'(t)\| dt$$

die Umlaufzahl von w .

Beispiel:

$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a \cos(t) + b \sin(t))$ mit $0 < a < b$

$w'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}^3}$$

Auf $[0, 2\pi]$ ist die Umlaufzahl von w :

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(t), b^2 \cos^2(t)}} dt.$$

Sei ϑ Polarwinkelfunktion für w' . Dann ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa'(t) \|w'(t)\| dt = \vartheta(2\pi) - \vartheta(0)$$

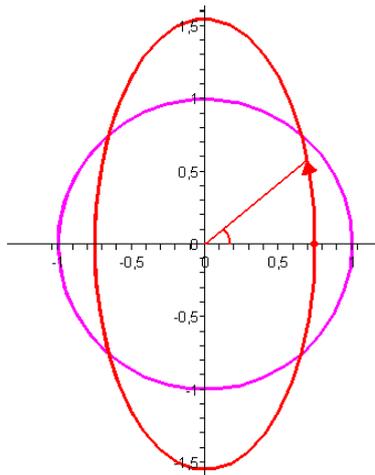
$$\begin{aligned} w'(0) &= (0, b) = w'(2\pi) \\ w'(\pi/2) &= (-a, 0) \\ w'(\pi) &= (0, -b) \\ w'(3\pi/2) &= (a, 0) \\ \vartheta(0) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_0 \\ \vartheta(\pi/2) &= \pi + 2\pi n_1 \\ \vartheta(\pi) &= \frac{3\pi}{2} + 2\pi n_2 \\ \vartheta(3\pi/2) &= 2\pi + 2\pi n_3 \\ \vartheta(2\pi) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n_4 \end{aligned}$$

Also ϑ wächst strikt monoton.

Wähle $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vartheta(\pi/2) = \pi, \vartheta(\pi) = \frac{3\pi}{2}, \vartheta(\frac{3\pi}{2}) = 2\pi, \vartheta(2\pi) = \frac{\pi}{2} + 2\pi$

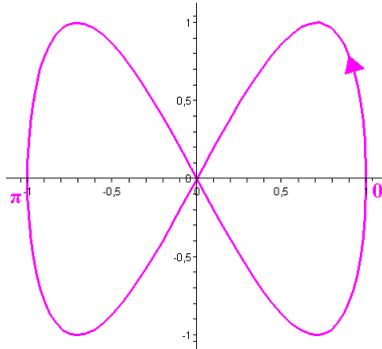
$\vartheta(2\pi) - \vartheta(0) = 2\pi \Rightarrow$ Umlaufzahl: 1

Normierung des Tangentialvektors auf 1 \Rightarrow Umlauf auf dem Einheitskreis



Beispiel:

$$w: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos(t), \sin(2t))$$



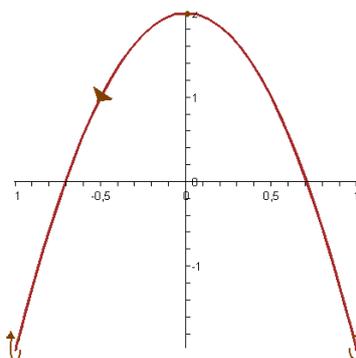
Wenn die \cos -Funktion eine halbe Periode durchläuft, durchläuft die \sin -Funktion eine ganze Periode.

$$w'(t) = (-\sin(t), 2\cos(2t))$$

$$w''(t) = (-\cos(t), -4\sin(2t))$$

$$\kappa(t) = \frac{4\sin(t)\sin(2t) + 2\cos(t)\cos(2t)}{\sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(2t)}^3}$$

damit ist die Umlaufzahl:
$$\int_0^{2\pi} \frac{4\sin(t)\sin(2t) + 2\cos(t)\cos(2t)}{\sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(2t)}} dt$$



$$w'(t) = \alpha(0, 1) \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = n\pi$$

$$\text{Dann ist } \alpha = 2\cos(2\pi n) = 2$$

$\frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}$ erreicht den Punkt $(0, -1)$ nicht!

Damit $\vartheta(t) \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ für alle t (*)

$$\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$$

Wegen Periodizität folgt: $\vartheta(2\pi) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Da ϑ stetig ist, werden nach Zwischenwertsatz (ZWS) alle Werte zwischen $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta(2\pi) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ angenommen. Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

Falls $n \geq 1$: folgt mit dem ZWS: $\exists t : \vartheta(t) = \frac{3\pi}{2}$ Widerspruch zu (*)

Falls $n \leq -1$: folgt mit dem ZWS: $\exists t : \vartheta(t) = -\frac{\pi}{2}$ Widerspruch zu (*)

Falls $n = 0$: ist die einzige Möglichkeit. Also folgt Umlaufzahl = 0

3.10 Lemma

Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine normal parametrisierte geschlossene Kurve. Dann gilt $\forall A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (Aw_1(t) + Bw_2(t) + C)\kappa'(t)dt = 0$$

Beweis:

Es wird gezeigt dass $\int_a^b Aw_1(t)\kappa'(t)dt$, $\int_a^b Bw_2(t)\kappa'(t)dt$ und $\int_a^b C\kappa'(t)dt$ alle Null sind. Dafür betrachten wir folgendes:

Sei $\vartheta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Polarwinkelfunktion für w'

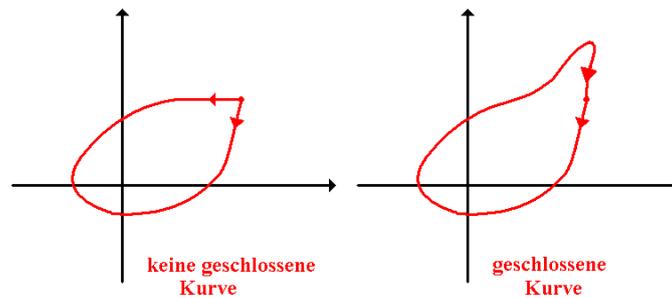
$$w'(t) = (\cos(\vartheta(t)), \sin(\vartheta(t)))$$

$$w''(t) = \kappa(t)n(t) = \kappa(t)(-\sin(\vartheta(t)), \cos(\vartheta(t)))$$

$$\text{oder auch } w''(t) = (w'(t))' = \vartheta'(t)(-\sin(\vartheta(t)), \cos(\vartheta(t)))$$

Damit folgt: $\kappa(t) = \vartheta'(t)$

$$\int_a^b C\kappa'(t)dt = C(\kappa(b) - \kappa(a)) = 0 \text{ wegen geschlossene Kurve (Periodizität)}$$

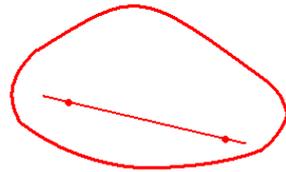


$$\int_a^b (\kappa(t)w_1'(t) + \kappa'(t)w_1(t))dt = \int_a^b (\kappa w_1)'(t)dt = 0$$

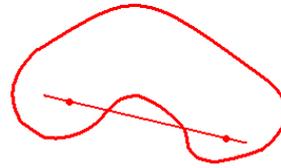
$$\int_a^b \kappa'(t)w_1(t)dt = -\int_a^b \kappa(t)w_1'(t)dt = -\int_a^b w_2''(t)dt = 0$$

Konvexe Kurve:

Eine konvexe Kurve ist eine reguläre Kurve und

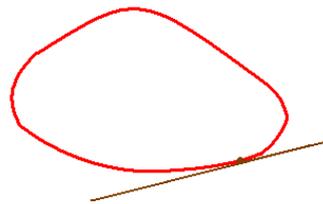


konvexe Kurve



keine konvexe Kurve

d.h. für jede zwei Punkte aus der Inneren der Kurve, liegt die Verbindungsstrecke zwischen diese beiden Punkte wieder in Inneren der Kurve. Äquivalent zu dieser Bedingung ist:



konvexe Kurve



keine konvexe Kurve

d.h. in jedem Punkt $w(t)$ liegt die Kurve vollständig in einer der beiden abgeschlossenen Halbebenen, die durch die Tangente bestimmt sind.

3.11 Satz (Vier-Scheitel-Satz)

Jede einfach geschlossene konvexe Kurve hat mindestens 4 Scheitel.

Beweis:

κ ist nicht konstant 0 (sonst verläuft w auf einem Geradensegment und ist nicht einfach)

κ konstant $\neq 0$ \Rightarrow alle Punkte sind Scheitel! κ nicht konstant

O.E.: w normal parametrisiert

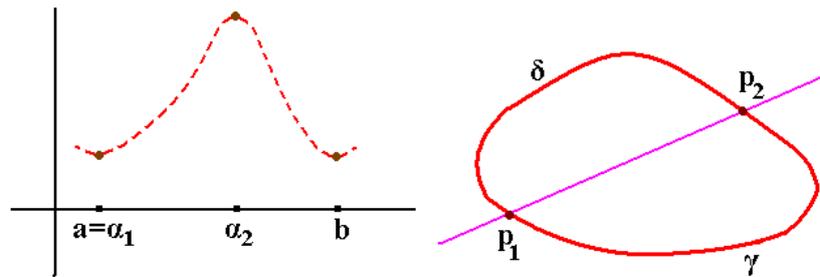
$[a, b]$ Definitionsintervall

$\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\kappa(a) = \kappa(b)$

κ hat absolutes Maximum und Minimum \Rightarrow 2 Scheitel

Seien $p_1 = w(\alpha_1)$, $p_2 = w(\alpha_2)$ die beiden Scheitel.

O.E. $\alpha_1 = a$



$$\gamma = w([\alpha_1 \alpha_2])$$

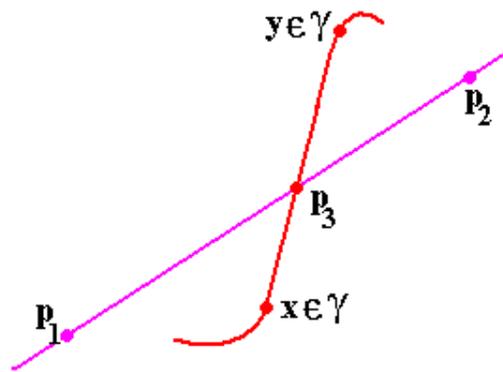
$$\delta = w([\alpha_2, b])$$

G : Gerade durch p_1 und p_2 , $p_1 \neq p_2$ (sonst wäre κ konstant nicht 0)

Behauptung: γ und δ liegen jeweils vollständig in einer abgeschlossenen Halbebene bzgl G

Beweis:

Annahme: dies ist falsch! O.E. γ enthält Punkte aus beiden offenen Halbebenen



Es gibt dann einen Punkt $\alpha_3 \in (\alpha_1, \alpha_2)$: $w(\alpha_3) = p_3 \in G$.

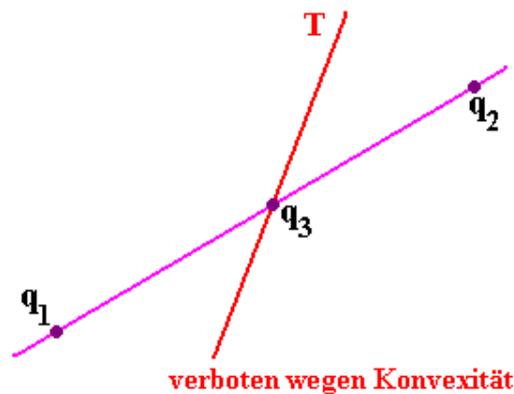
Einer der drei Punkte liegt zwischen beiden anderen:

Umnummerierung: $\{q_1, q_2, q_3\} = \{p_1, p_2, p_3\}$ so dass q_2 zwischen q_1 und q_3 liegt.

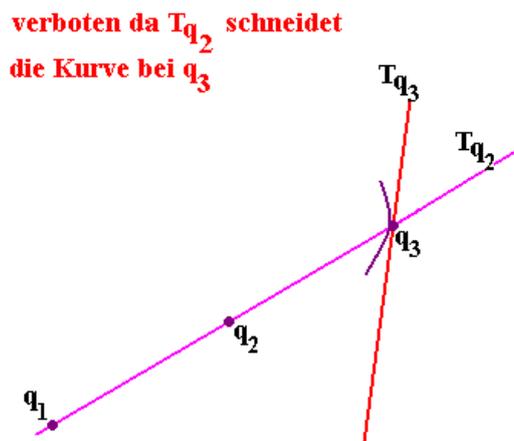
T : Tangente in q_2

wegen Konvexität: q_1, q_3 liegen in derselben abgeschlossenen Halbebenen \Rightarrow

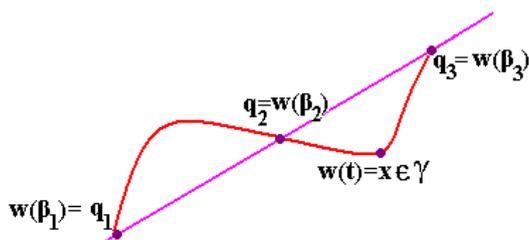
$T = G$



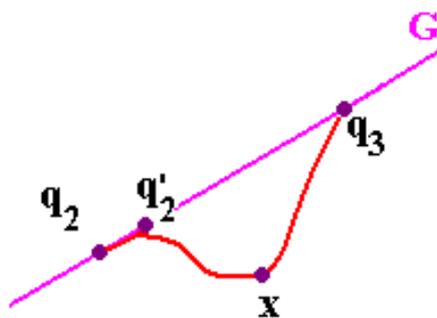
G ist Tangente auch in q_1 bzw. q_3



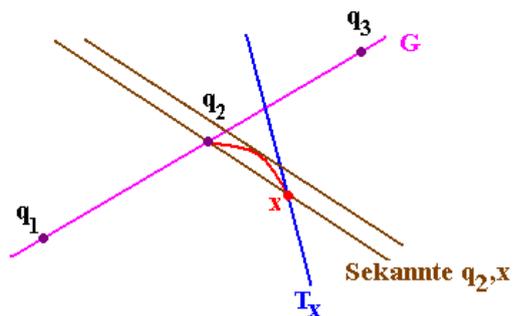
Falls $\gamma \subseteq G$: $\kappa|_{[\alpha_1, \alpha_2]} \equiv 0$ (konstant 0) aber $\kappa(\alpha_1), \kappa(\alpha_2)$ absolutes Maximum/Minimum $\Rightarrow \kappa$ überall konstant 0 Widerspruch
 Wenn $\kappa(t)$ für $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$ nicht konstant 0 ist, so ist $w'|_{[\alpha_1, \alpha_2]}$ nicht konstant.



x liegt auf γ zwischen q_1 und q_2 oder zwischen q_2 und q_3 .
 O.B.d.A.: x liegt zwischen q_2 und q_3 .



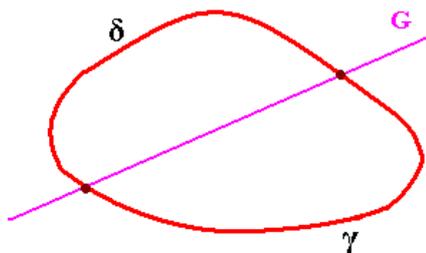
Sei q'_2 der letzte Punkt auf G , so daß x zwischen q'_2 und q_3 liegt.
 O.B.d.A.: $q'_2 = q_2$



für $x \rightarrow q_2$ geht $T_x \rightarrow T_{q_2} = G$

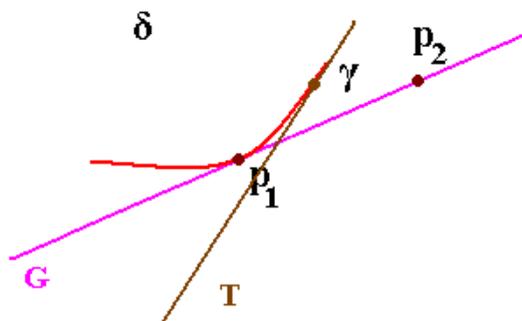
$T_x \cap G \rightarrow q_2$

Für x nahe bei $q_2, x \neq q_2$: $T_x \cap G$ zwischen q_2 und $q_3 \Rightarrow q_1$ und q_3 liegen auf verschiedenen Seiten von T_x Widerspruch zur Konvexität von w .



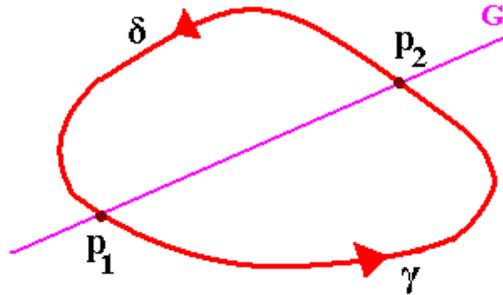
$\Rightarrow \delta$ und γ müssen in verschiedenen Halbebenen liegen.

Falls γ und δ in derselben Halbebene liegen:



dann liegen p_1 und p_2 auf verschiedenen Seiten von T Widerspruch zur Konvexität. Damit müssen γ und δ auf verschiedenen Seiten von G . Wir haben

also für die konvexe, einfach geschlossene Kurve $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf dem Intervall $[a, b]$ Scheitel bei $p_1 = w(\alpha_1)$ und $p_2 = w(\alpha_2)$ mit $\alpha_1 = a$ und $\alpha_2 \in (a, b)$ und $\gamma = w([\alpha_1, \alpha_2])$ und $\delta = w([\alpha_2, b])$ liegen in verschiedenen Halbebenen bzgl der Geraden G .



Seien $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax_1 + Bx_2 + C = 0\}$$

Annahme: κ hat Extrema nur bei α_1 und α_2 .

Daraus folgt: κ' hat außer α_1 und α_2 keine Nullstellen. κ' hat auf (α_1, α_2) und (α_2, b) konstantes Vorzeichen und wegen dem Verlauf sind die Vorzeichen entgegengesetzt.

$(Aw_1(t) + Bw_2(t) + C)\kappa'(t)$ hat überall konstantes Vorzeichen ≥ 0 oder ≤ 0

Nach Lemma 3.9 ist $\text{Integral}=0 \Rightarrow (Aw_1(t) + Bw_2(t) + C)\kappa'(t)$ konstant 0 \Rightarrow überall ist ein Faktor = 0.

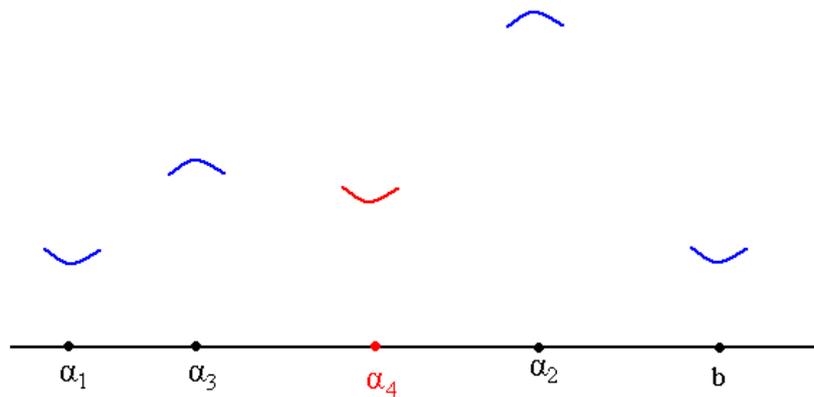
Falls $Aw_1(t) + Bw_2(t) + C$ auf einen Teilintervall (β_1, β_2) konstant 0 ist: w verläuft auf G in $(\beta_1, \beta_2) \Rightarrow$ An jeder Stelle $t \in (\beta_1, \beta_2)$ hat κ lokale Extrema.

Widerspruch zur Annahme

Also $\kappa'(t) = 0$ auf dem gesamten Intervall außer evtl. isolierten Mengen von Punkten.

κ' stetig $\Rightarrow \kappa'$ konstant 0 $\Rightarrow \kappa$ konstant \Rightarrow jeder Punkt ist lokales Extremum für κ . Widerspruch zur Annahme.

Also $\exists \alpha_3 \neq \alpha_1, \alpha_2$: κ hat bei α_3 lokales Extremum. (κ' hat Vorzeichenwechsel bei α_3)



Bei α_1 und b hat die Krümmung denselben Verlauf wegen Periodizitätsgründen.
 O.B.d.A. bei α_1 - lokales Minimum \Rightarrow bei α_2 - lokales Maximum.

Fall 1: bei α_3 - lokales Minimum $\Rightarrow \exists \alpha_4$ s.d. bei α_4 lokales Maximum; α_4 zwischen α_1 und α_3

Fall 2: bei α_3 - lokales Maximum $\Rightarrow \exists \alpha_4$ s.d. bei α_4 lokales Minimum; α_4 zwischen α_3 und α_2

4 Raumkurven

Zunächst: Kurven normal parametrisiert

$$w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\langle w'(t), w'(t) \rangle = 1 \Rightarrow 0 = 2 \langle w'(t), w''(t) \rangle \Rightarrow w'(t) \perp w''(t)$$

4.1 Definition

$\kappa(t) = \|w''(t)\|$ ist die Krümmung einer Raumkurve.

Wendepunkt: $\kappa(t) = 0$

Bemerkung:

Hier ist die Krümmung immer positiv. Bei ebenen Kurven hängt das Krümmungsvorzeichen von der Orientierung der Kurve ab.

4.2 Definition Frenet'sches 3-Bein (keine Wendepunkte)

ONS:

$e(t) = w'(t)$ Tangenteneinheitsvektor (wegen normale Parametrisierung)

$n(t) = \frac{w''(t)}{\|w''(t)\|}$ Hauptnormalenvektor

$b(t) = e(t) \wedge n(t)$ Binormalenvektor

Die Kurve $e : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Tangentenbild. Entsprechend heißen die Kurven $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Hauptnormalenbild und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Binormalenbild

4.3 Satz Frenet'sche Gleichungen

$$e'(t) = \kappa(t)n(t)$$

$$n'(t) = -\kappa(t)e(t) + \tau(t)b(t)$$

$$b'(t) = -\tau(t)n(t)$$

Beweis:

* $e'(t) = \kappa(t)n(t)$ klar!

* $n'(t) = -\kappa(t)e(t) + \tau(t)b(t)$

Bew:

$$n'(t) = \langle n'(t), e(t) \rangle e(t) + \langle n'(t), n(t) \rangle n(t) + \langle n'(t), b(t) \rangle b(t)$$

es gilt: $\langle n(t), e(t) \rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle n'(t), e(t) \rangle + \langle n(t), e'(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle n'(t), e(t) \rangle = -\langle n(t), e'(t) \rangle = -\kappa(t)$$

definiere $\tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle$

Damit folgt: $n'(t) = -\kappa(t)e(t) + \tau(t)b(t)$

* $b'(t) = -\tau(t)n(t)$ beweist man analog

4.4 Definition

$\tau(t)$ ist die Torsion einer Kurve w in t . (Diese gibt an wie stark die Kurve bei t abweicht in einer Ebene zu liegen)

Ableitungen von w :

$$w'(t) = e(t)$$

$$w''(t) = \kappa(t)n(t)$$

$$w'''(t) = -\kappa^2(t)e(t) + \kappa'(t)n(t) + \kappa(t)\tau(t)b(t)$$

Berechnung der Torsion einer Kurve w an der Stelle t :
 ACHTUNG: hier ist w normal parametrisiert!

$$\tau(t) = \frac{\det(w'(t), w''(t), w'''(t))}{\|w''(t)\|^2}$$

Bei nicht normal parametrisierten Kurven:

$$\tau(t) = \frac{\det(w'(t), w''(t), w'''(t))}{\|w'(t) \wedge w''(t)\|^2}$$

Bemerkung (Herleitung von $\tau(t)$)

3. Frenet'sche Gleichung:

$$\begin{aligned} b'(t) &= -\tau(t) \cdot n(t) \\ \tau(t) &= -\langle b'(t), n(t) \rangle = \langle b(t), n'(t) \rangle \\ \langle b(t), n(t) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \langle b(t), n(t) \rangle + \langle b(t), n'(t) \rangle \\ n(t) &= \frac{w''(t)}{\|w''(t)\|} \\ b(t) &= e(t) \wedge n(t) = w'(t) \wedge \frac{w''(t)}{\|w''(t)\|} \\ n'(t) &= \frac{w'''(t) \cdot \|w''(t)\| - w''(t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|w''(t)\|} \cdot 2 \cdot \langle w''(t), w'''(t) \rangle}{\|w''(t)\|^2} \\ &= \frac{\|w''(t)\|^2 w'''(t) - \langle w''(t), w'''(t) \rangle \cdot w''(t)}{\|w''(t)\|^3} \\ \Rightarrow \tau(t) &= \frac{1}{\|w''(t)\|^4} \langle w'(t) \wedge w''(t), \|w''(t)\|^2 \cdot w'''(t) - \langle w''(t), w'''(t) \rangle \cdot w''(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\|w''(t)\|^2} \det(w'(t), w''(t), w'''(t)) \end{aligned}$$

Bemerkung

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei $V(f)$ die Nullstellenmenge von f .

$x \in V(f) \Rightarrow (Df)(x) \neq 0$.

Sei $w: I \Rightarrow \mathbb{R}^3$

Berührungsordnung k bei t bedeutet:

$$\begin{aligned}(f \circ w)(t) &= 0 \\ (f \circ w)'(t) &= 0 \\ (f \circ w)''(t) &= 0 \\ &\vdots \\ (f \circ w)^{(k)}(t) &= 0\end{aligned}$$

Die Kurve w ist beliebig parametrisiert.

4.5 Satz

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ nicht konstant, affin-linear.

Sei $w: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $t \in I$ mit $w(t)$ kein Wendepunkt.

Die Berührungsordnung von w und $V(f)$ ist $2 \Leftrightarrow V(f) = w(t) + \mathbb{R}e(t) + \mathbb{R}n(t)$.

D.h. es gibt genau eine Ebene welche die Kurven von 2ter Ordnung bei t berührt.

Beweis:

- 1. Bedingung:

$$(f \circ w)(t) = 0 \Leftrightarrow w(t) \in V(f)$$

f lässt sich wie folgt darstellen:

$$f: x \rightarrow \langle a, x \rangle + c \text{ mit } a \in S^2$$

$$\text{Damit: } w(t) \in V(f) \Leftrightarrow \langle a, w(t) \rangle = -c$$

- 2. Bedingung:

$$(f \circ w)'(t) = 0$$

$$(f \circ w)'(t) = \langle (Df)(w(t), w'(t)) \rangle = \langle a, w'(t) \rangle = \langle a, e(t) \rangle$$

$$\text{Damit } (f \circ w)'(t) = 0 \Leftrightarrow a \perp e(t) \Leftrightarrow w(t) + \mathbb{R}e(t) \subseteq V(f)$$

- 3. Bedingung:

$$(f \circ w)''(t) = 0$$

$$(f \circ w)''(t) = \langle a, w' \rangle'(t) = \langle a, w'' \rangle(t) = \kappa(t) \langle a, n(t) \rangle$$

$$(f \circ w)''(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle a, n(t) \rangle = 0 \quad (\kappa(t) \neq 0, \text{ da } w(t) \text{ kein Wendepunkt})$$

$$\Leftrightarrow w(t) + \mathbb{R}e(t) + \mathbb{R}n(t) \subseteq V(f)$$

$$\Leftrightarrow w(t) + \mathbb{R}e(t) + \mathbb{R}n(t) = V(f) \text{ (wegen Dimensionsgründen beschreiben sowohl } V(f) \text{ als auch die Gleichung auf der linken Seite eine Ebene)}$$

4.6 Definition

Sei $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $t \in I$ mit $w(t)$ kein Wendepunkt bei t . Dann heißt die Ebene $w(t) + \mathbb{R}e(t) + \mathbb{R}n(t)$ Schmiegeebene bei t .

Die Ebene $w(t) + \mathbb{R}n(t) + \mathbb{R}b(t)$ heißt Normalebene.

Die Ebene $w(t) + \mathbb{R}e(t) + \mathbb{R}b(t)$ heißt rektifizierende Ebene oder Streckebene.

- Es gilt: $b(t) \perp$ Schmiegeebene.
- Änderungen des Binormalenvektors $b(t)$ entsprechen Änderungen der Schmiegeebene (Änderungen des Binormalenvektors entlang der Kurve).
- Die Ableitung von b bestimmt Änderungen von b . (Es ändert sich nur die Richtung von b , niemals seine Länge, d.h. die Änderungen von b sind Drehungen).
- $b'(t) = -\tau(t) \cdot n(t)$ - damit beschreibt die Torsion die Änderungen von b und damit die Änderungen in der Lage der Schmiegeebene.
- Konstante Schmiegeebene $\Leftrightarrow \tau(t) = 0$

4.7 Satz

$w : I \Rightarrow \mathbb{R}^3$ ohne Wendepunkte. $w(t)$ liegt in einer Ebene genau dann, wenn die Torsion konstant 0 ist. Diese Ebene ist die Schmiegeebene.

(Die Krümmung gibt an, wie stark die Kurve von einer Gerade abweicht, die Torsion gibt an, wie stark die Kurve von einer ebenen Kurve abweicht).

Beweis:

Sei $w(I) \subseteq E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, x \rangle = \langle a, w(t) \rangle, t \in I, a \in S^2\}$

Die Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R} : s \rightarrow \langle a, w(s) \rangle$ ist konstant $= \langle a, w(t) \rangle$.

$$0 = f'(s) = \langle a, w'(s) \rangle = \langle a, e(t) \rangle$$

$$\langle a, w(s) \rangle = \langle a, w(t) \rangle$$

$$\langle a, w(s) + \mathbb{R}e(s) \rangle = \langle a, w(t) \rangle \Rightarrow w(s) + \mathbb{R}e(s) \subseteq E$$

$$0 = f''(s) = \langle a, w'(s) \rangle' = \langle a, w''(s) \rangle = \kappa(s) \langle a, n(s) \rangle$$

$$w(s) + \mathbb{R}e(s) + \mathbb{R}n(s) \subseteq E$$

$\forall s : E$ ist die Schmiegeebene bei $s \Rightarrow$ Schmiegeebene konstant.

Die Gerade \perp zur Schmiegeebene entsteht aus $\mathbb{R} \cdot a$

$$\Rightarrow b(s) \in \mathbb{R} \cdot a \text{ mit } \|b(s)\| = 1$$

$$\Rightarrow b(s) = a \text{ oder } b(s) = -a$$

Wegen der Stetigkeit von $b \Rightarrow b$ konstant $= a$ oder $= -a$ und damit ist τ

konstant 0.

Sei τ konstant 0.

$b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s) = 0$ für alle $s \Rightarrow b(s)$ konstant $= a$.

$\langle a, w' \rangle (s) = \langle a, w'(s) \rangle = \langle b(s), w'(s) \rangle = \langle b(s), e(s) \rangle = 0$

Damit ist die Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R} : s \rightarrow \langle a, w(s) \rangle$ konstant.

Bemerkung

Sei $t \in I$ und $w(t)$ kein Wendepunkt.

OE:

$t = 0$

$\Rightarrow w(t) = 0$

(Umparametrisierung und Bewegung des euklidischen Raumes): $w'(t) = (1, 0, 0)$

$e(t) = w'(t) = (1, 0, 0)$

$n(t) = (0, 1, 0)$

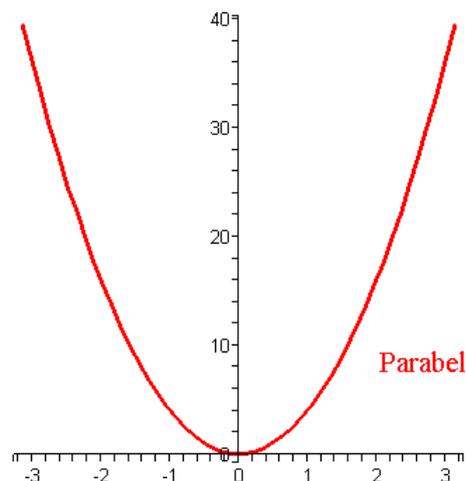
$b(t) = (0, 0, 1)$

Dann lässt sich $w(t)$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} w(t) &= w(0) + tw'(0) + \frac{t^2}{2}w''(0) + \frac{t^3}{6}w'''(0) + R(t) \\ &= te_1 + \frac{t^2}{2}\kappa(0)e_2 + \frac{t^3}{6}(-\kappa^2(0)e_1 + \kappa'(0)e_2 + \tau(0)e_3) + R(t) \end{aligned}$$

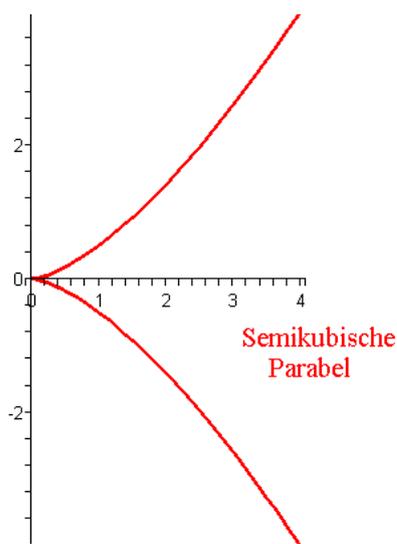
- Projektion in $x_3 = 0$ (also in die Schmiegeebene)

$t \rightarrow (t, \frac{\kappa(0)}{2} \cdot t^2) +$ Terme höherer Ordnung.



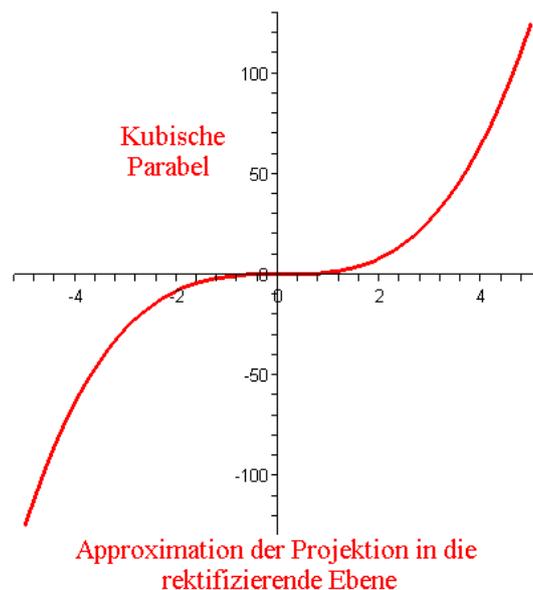
Approximation der Projektion in die
Schmiegebene

- Projektion in $x_1 = 0$ (Approximation der Projektion in die Normalebene)
 $t \rightarrow (\kappa(0)\frac{t^2}{2} + \kappa'(0)\frac{t^3}{6}, \kappa(0) \cdot \frac{t^3}{6})$



Approximation der Projektion in die
Normalebene

- Projektion in $x_2 = 0$ (Approximation der Projektion in die rektifizierende Ebene)
 $t \rightarrow (t - \kappa(0)^2\frac{t^3}{6}, \tau(0) \cdot \frac{t^3}{6}) + \text{Terme h\u00f6herer Ordnung.}$



Beispiel:

$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (c \cos(\alpha t), c \sin(\alpha t), at)$ mit $\alpha \neq 0$ und $0 < c$.

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cdot c^2 + a^2 &= 1 \Leftrightarrow \text{normale Parametrisierung} \\ e(t) &= \|w'(t)\| = (-\alpha c \sin(\alpha t), \alpha c \cos(\alpha t), a) \\ \|w'(t)\| &= \sqrt{\alpha^2 c^2 + a^2} \\ &= 1 (\Rightarrow \text{normal parametrisiert}) \\ w''(t) &= (-\alpha^2 c \cos(\alpha t), -\alpha^2 c \sin(\alpha t), 0) \\ w'''(t) &= (\alpha^3 c \sin(\alpha t), -\alpha^3 c \cos(\alpha t), 0) \end{aligned}$$

Keine Wendepunkte, da $w''(t) \neq 0 \forall t$.

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \|w''(t)\| \\ &= \alpha^2 c \\ \tau(t) &= \frac{\det(w'(t), w''(t), w'''(t))}{\|w''(t)\|^2} \\ &= \frac{a \alpha^5 c^2 \cdot \cos(\alpha t)^2 + a \alpha^5 c^2 \cdot \sin(\alpha t)^2}{\alpha^4 c^2} \\ &= \alpha a \end{aligned}$$

Die Krümmung und die Torsion bestimmen eindeutig eine Kurve. Deshalb ist jede Kurve mit konstanter Krümmung und konstanter Torsion eine Schraubenlinie. Die Lage der Kurve im \mathbb{R}^3 kann variieren.

Sei $0 < k \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Wähle α mit $\alpha^2 = \kappa^2 + \tau^2$.

Setze $c = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$.

Wähle a mit $a^2 = \frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2}$, $\alpha > 0$ und $\text{sign}(a) = \text{sign}(\tau)$ (denn $\alpha \cdot a$ muß gleiches Vorzeichen haben wie τ)

Mit α , c und a berechnet man κ und τ . Damit gibt es zu jeder Wahl von κ und τ eine Schraubenlinie mit den Parametern α , c und a wie oben, die diese Krümmung κ und diese Torsion τ hat.

Ab jetzt:

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulär.

$\varphi : J \rightarrow I$ positiver Parameterwechsel mit $v = w \circ \varphi$ normal.

4.8 Satz

Sei $s \in J$, $t = \varphi(s)$.

Dann hat v einen Wendepunkt bei $s \Leftrightarrow w'(t)$, $w''(t)$ linear unabhängig.

4.9 Satz

(a)

$$e_v(s) = \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|} =: e_w(t)$$

(b)

$$n_v(s) = \frac{\langle w'(t), w'(t) \rangle \cdot w''(t) - \langle w'(t), w''(t) \rangle \cdot w'(t)}{\|w'(t)\| \cdot \|w'(t) \wedge w''(t)\|} =: n_w(t)$$

(c)

$$b_v(s) = \frac{w'(t) \wedge w''(t)}{\|w'(t) \wedge w''(t)\|} =: b_w(t)$$

(d)

$$\kappa_v(s) = \frac{\|w'(t) \wedge w''(t)\|}{\|w'(t)\|^3} =: \kappa_w(t)$$

(e)

$$\tau_v(s) = \frac{\det(w'(t), w''(t), w'''(t))}{\|w'(t) \wedge w''(t)\|^2} =: \tau_w(t)$$

(f)

$$e'_w(t) = \|w'(t)\| \cdot \kappa_w(t) n_w(t)$$

(g)

$$n'_w(t) = -\kappa_w(t) \cdot \|w'(t)\| \cdot e_w(t) + \tau_w(t) \cdot \|w'(t)\| \cdot b_w(t)$$

(h)

$$b'_w(t) = -\|w'(t)\| \cdot \tau_w(t) n_w(t)$$

Beweis (a):

$$v'(s) = (w \circ \varphi)'(s) = w'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = w'(t) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t))$$

$$\Rightarrow \varphi'(\varphi^{-1}(t)) = \frac{1}{\|w'(t)\|}$$

Beweis (b):

$$n_v(s) = \frac{v'(s)}{\|v''(s)\|}$$

$$\begin{aligned} v''(s) &= w''(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)^2 + w'(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s) \\ &= w''(t) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t))^2 + w'(t) \cdot \varphi''(\varphi^{-1}(t)) = w''(t) \cdot \frac{1}{\|w'(t)\|^2} + w'(t) \cdot \varphi''(\varphi^{-1}(t)) \end{aligned}$$

$$(\varphi' \circ \varphi^{-1})'(t) = \varphi''(\varphi^{-1}(t)) \cdot (\varphi^{-1})'(t)$$

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

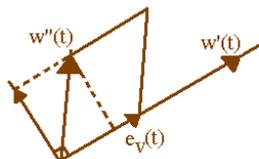
$$(\varphi' \circ \varphi^{-1})(t) = \frac{1}{\|w'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle w'(t), w'(t) \rangle}}$$

$$(\varphi' \circ \varphi^{-1})'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\langle w'(t), w''(t) \rangle}{\sqrt{\langle w'(t), w'(t) \rangle}^3} = -\frac{\langle w'(t), w''(t) \rangle}{\sqrt{\|w'(t)\|}^3}$$

$$\varphi''(\varphi^{-1}(t)) = \frac{(\varphi' \circ \varphi^{-1})'(t)}{(\varphi^{-1})'(t)} = -\frac{\varphi'(\varphi^{-1}(t)) \cdot \langle w'(t), w''(t) \rangle}{\|w'(t)\|^3} = -\frac{\langle w'(t), w''(t) \rangle}{\|w'(t)\|^4}$$

$$v''(s) = \frac{\langle w'(t), w'(t) \rangle \cdot w''(t) - \langle w'(t), w''(t) \rangle \cdot w'(t)}{\|w'(t)\|^4}$$

$$n_v(s) = \frac{\langle w'(t), w'(t) \rangle \cdot w''(t) - \langle w'(t), w''(t) \rangle \cdot w'(t)}{\|\langle w'(t), w'(t) \rangle \cdot (w''(t) - \langle \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}, w''(t) \rangle \cdot \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|})\|}$$

Situation: $\frac{w'(t)}{\|w'(t)\|} \wedge w''(t)$ 

Beispiel:

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \rightarrow (t, t^2, t^3)$$

$$w'(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

$$w''(t) = (0, 2, 6t)$$

(Wendepunkt-frei, $w'(t)$, $w''(t)$ linear unabhängig.)

$$w'''(t) = (0, 0, 6)$$

$$\kappa(t) = \frac{2 \cdot \sqrt{1+9t^2+9t^4}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}^3}$$

$$\tau(t) = \frac{3}{1+9t^2+9t^4}$$

4.10 Satz

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulär, $t_0 \in I$, $\kappa(t_0) \neq 0$, $\tau(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists!$ Kugel, die w bei t_0 mit 3. Ordnung berührt („Schmiegekugel“).

Beweis:

O.E.: w sei normal parametrisiert

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle x - a, x - a \rangle - r^2$ mit $0 < r$

Nullstellenmenge: $V(f)$ ist die Kugel um a mit Radius r

Berührung 0-ter Ordnung:

$(f \circ w)(t_0) = 0$ heißt $w(t_0) \in V(f)$, d.h. $w(t_0)$ liegt auf der Kugel

Berührung 1-ter Ordnung:

$$(f \circ w)'(t_0) = 0$$

$$(f \circ w)'(t_0) = 2 \langle w(t_0) - a, w'(t_0) \rangle$$

$$a = w(t_0) + \lambda e(t_0) + \mu n(t_0) + \nu b(t_0)$$

$$(f \circ w)'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Berührung 2-ter Ordnung:

$$(f \circ w)''(t_0) = 0$$

$$\begin{aligned} ((f \circ w)')'(t) &= 2 \langle w'(t), w'(t) \rangle + 2 \langle w(t) - a, w''(t) \rangle \\ &= 2 + 2 \langle w(t) - a, \kappa(t)n(t) \rangle \\ (f \circ w)''(t_0) = 0 &\Leftrightarrow 2 \langle w(t) - a, \kappa(t)n(t) \rangle = -2 \\ &\Leftrightarrow \langle -\mu n(t_0) - \nu b(t_0), \kappa(t)n(t) \rangle = -1 \\ &\Leftrightarrow \mu \kappa(t_0) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{\kappa(t_0)} \end{aligned}$$

Krümmungsachse: Gerade durch $w(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$ in Richtung $b(t_0)$ Der Kreis in der Schmiegeebene mit Mittelpunkt $w(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0)$, und Radius $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ heißt Krümmungskreis.

Berührung 3-ter Ordnung:

$$(f \circ w)'''(t_0) = 0$$

$$\begin{aligned} (f \circ w)'''(t_0) &= 2 \langle w'(t), k(t)n(t) \rangle + 2 \langle w(t) - a, \kappa'(t)n(t) \rangle + \\ &\quad + 2 \langle w(t) - a, \underbrace{\kappa(t)n'(t)}_{-\kappa(t)e(t) + \tau(t)b(t)} \rangle \\ &= 2 \langle w(t) - a, \kappa'(t)n(t) \rangle + 2 \langle w(t) - a, -\kappa^2(t)e(t) + \kappa(t)\tau(t)b(t) \rangle \\ (f \circ w)'''(t_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ 0 &= \left\langle -\frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0) - vb(t_0), -\kappa(t_0)^2e(t_0) + \kappa'(t_0)n(t_0) + \kappa(t_0)\tau(t_0)b(t_0) \right\rangle \\ &= -\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)} - v\kappa(t_0)\tau(t_0) \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } v = -\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}$$

Also der Mittelpunkt a ist gegeben durch:

$$a = w(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}n(t_0) - \frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}b(t_0)$$

a ist der Mittelpunkt des Schmiegekegels.

Der Teil $\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}$ ist zuständig für die Abweichung der Raumkurve von einer Ebenenkurve.

Beispiel:

$$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t^2, t^3)$$

Projektion in die Schmiegeebene: (t, t^2) normale Parabel

Projektion in die Normalebene: (t^2, t^3) neilsche Parabel

Projektion in die rektifizierende Ebene: (t, t^3) kubische Parabel

$$e(t) = \frac{(1, 2t, 3t^2)}{\sqrt{1+4t+9t^2}}$$

$$n(t) = \frac{(-2t+9t^3, 1-9t^4, 3t+6t^3)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$b(t) = \frac{(3t^2, -3t, 1)}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$\kappa(t) = 2 \frac{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

$$\tau(t) = 3 \frac{1}{1+9t^2+9t^4}$$

$$\left(\frac{1}{\kappa(t)}\right)'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)}$$

$$\Rightarrow -\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)} = \frac{3}{2} \frac{(1+24t^2+31t^4)\sqrt{1+4t^2+9t^4}}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}^3}$$

Damit ist $-\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)\tau(t)} = \frac{1}{2} \frac{(1+24t^2+31t^4)\sqrt{1+4t^2+9t^4}}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$

4.11 Satz

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}^>$ ist eine C^1 -Abbildung.

$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine C^0 -Abbildung, also stetig.

Seien $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$, (e_0, n_0, t_0) : positives ONS in \mathbb{R}^3 .

$\Rightarrow \exists!$ normal parametrisierte Kurve $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

- C^3
- $w(t_0) = x_0$
- $(e_w(t_0), n_w(t_0), b_w(t_0)) = (e_0, n_0, b_0)$
- $\kappa_w = \kappa$
- $\tau_w = \tau$

Beweis:

$w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist normal parametrisierte Kurve, Frenet'sches Dreibein (e_w, n_w, b_w)

Frenet'sche Gleichungen: $e'_w = \kappa_w \cdot n_w$

$n'_w = -\kappa_w \cdot e_w + \tau_w \cdot b_w$ $b'_w = -\tau_w \cdot n_w$

Sei w in Klasse C^k

Dann gilt:

$e_w = w'$ in C^{k-1}

$n_w = \frac{w''}{\|w''\|}$ in C^{k-2}

κ_w in C^{k-2}

b_w in C^{k-2}

b'_w in C^{k-3}

τ_w in C^{k-3}

Seien die 3×3 -Matrizen (e_w, n_w, b_w) und (e'_w, n'_w, b'_w) mit $e_w, n_w, b_w, e'_w, n'_w, b'_w$ als Spalten. Zwischen diesen Matrizen gilt die folgende Beziehung:

$$(e'_w, n'_w, b'_w) = (e_w, n_w, b_w) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_w & 0 \\ \kappa_w & 0 & -\tau_w \\ 0 & \tau_w & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $F' = F \cdot K$ ein System homogener linearer Differentialgleichungen.

$\Rightarrow \exists$ genau ein Lösung $(e, n, b) : I \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $(e, n, b)(t_0) = (e_0, n_0, b_0)$

Damit liegen die Krümmung und die Torsion des Frenet'schen Dreibeines fest. Damit (e_0, n_0, b_0) ein Frenet'sches Dreibein ist, ist noch zu zeigen: (e_0, n_0, b_0) ist ONS.

Beh: $(e, n, b)(s)$ ist ONS

$$F = (e, n, b)$$

$$\begin{aligned}(F^t \cdot F)'(s) &= (F^t)' \cdot F(s) + F^t \cdot F'(s) \\ &= (F')^t \cdot F(s) + F^t \cdot F'(s) \\ &= (F \cdot K)' \cdot F(s) + F^t \cdot (F \cdot K)(s) \\ &= K^t(F^t \cdot F)(s) + (F^t \cdot F) \cdot K(s)\end{aligned}$$

System von DGLn für $F^t \cdot F$, homogen, linear

$$(F^t \cdot F)(t_0) = (e_0, n_0, b_0)^t \cdot (e_0, n_0, b_0) = E$$

Eine Lösung des Systems von DGLn ist konstant E .

linke Seite: $E'(s) = 0$ rechte Seite: $(K^t \cdot E)(s) + (EK)(s) = K^t(s) + K(s)$ und weil K schief-symmetrisch ist, ist $K^t(s) + K(s) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen: $F^t \cdot F(s) = E \Rightarrow F(s)$ orthogonal.

(jetzt: Prüfen der Positivität einer Matrix/ONS mit der Determinante)

Weiter gilt: $\det \circ F : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $Bi(\det \circ F) \subseteq \{\pm 1\}$.

Mit Stetigkeit und Bild ist die Abbildung $\det \circ F$ konstant (sonst: nach ZWS muß 1x die 0 angenommen werden).

$$(\det \circ F)(t_0) = \det(e_0, n_0, b_0) = 1$$

und damit ist $(e, n, b)(s)$ positiv orientiert.

Definiere $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : s \rightarrow x_0 + \int_{t_0}^s e(\sigma) d\sigma$

$w' = e \in s^2 \Rightarrow w$ normal parametrisiert

$$(i) w'' = e' = \kappa \cdot n$$

$$(ii) n' = -\kappa \cdot e + \tau \cdot b$$

$$(iii) b' = -\tau \cdot n$$

(i) - (iii) ist aus DGL

$$(iv) w' = e_w = e$$

$$(v) e'_w = \kappa_w \cdot n_w = e' \Rightarrow n = n_w \quad (vi) n'_w = -\kappa_w \cdot e_w + \tau_w \cdot b_w \quad (vii) b'_w = -\tau_w \cdot n_w$$

(iv) - (vii) aus der Kurventheorie, aus (iv) und (v) folgt $b = b_w$

$$\kappa = \langle e', n \rangle = \langle e'_w, n_w \rangle = \kappa_w$$

$$\tau = -\langle b', n \rangle = -\langle b'_w, n_w \rangle = \tau_w \quad (\text{folgt aus } b = b_w)$$

Die Eindeutigkeit der normal parametrisierten Kurve folgt aus der Eindeutigkeit der DGLn.

Beispiel

Wenn eine Kurve konstante Krümmung und Torsion hat, dann ist sie eine Schraubenlinie. Die Lage im Raum kann verschieden sein. Der Radius des Zylinders bestimmt die Krümmung und die Torsion.

Teil II

Flächen

1 Der Begriff der Fläche

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen.

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ von der Klasse C^k , $k \geq 1$, $f = (f_1, f_2, f_3)$

Funktionalmatrix = Jakobi-Matrix Bei $u \in U$:

$$J_u(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$(Df)_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \rightarrow J_u(f) \cdot x$ ist Differential von f bei u , $Rg(Df)_u \leq 2$

(Falls f_1, f_2, f_3 als reelle Funktionen (also $U \rightarrow \mathbb{R}$) alle an der selben Stelle x ein Exremum haben, so sind die zugehörigen Gradienten an der Stelle x Null. Damit ist $Rg(Df)_x < 2$).

f ist eine Immersion bei u , falls $Rg(Df)_u = 2$.

f ist eine Immersion, falls es bei jeder Stelle eine Immersion ist.

(Es handelt sich um eine Immersion, falls zwei Zeilen der Jakobi-Matrix linear unabhängig sind.)

1.1 Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist ein parametrisiertes Flächenstück, wenn gilt:

- f injektiv
- f ist Homöomorphismus aufs Bild

- f ist diffbar und Immersion

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein Flächenstück, wenn es ein parametrisiertes Flächenstück $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit $M = f(U)$.

Definition

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück, $u \in U$, $a = f(u)$ und $M = f(U)$.

$T_a(M) = \text{Bi}((Df)_u)$ heißt Tangentialraum von M bei a .

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi : V \rightarrow U$ Diffeomorphismus (φ Diffeomorphismus: φ bijektiv, φ und φ^{-1} beide differenzierbar).

Dann ist auch $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück.

Frage

Ist $f \circ \varphi$ eine Immersion?

$v \in V$, $u = \varphi(v)$

$(Df \circ \varphi)_v = (Df)_u \circ (D\varphi)_v$ ($(D\varphi)_v$ ist bijektiv $\Rightarrow \text{Rg}(D\varphi)_v = 2$)

Also ist $f \circ \varphi$ eine Immersion.

Weiter liefern f und $f \circ \varphi$ denselben Tangentialraum bei $a = f(u) = (f \circ \varphi)(v)$.

Denn: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} (Df)_v \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} (Df)_u \mathbb{R}^2$

(Weil Df eine surjektive Abbildung ist, haben f und $f \circ \varphi$ dasselbe Bild.)

Bemerkung (Beschreibung des Tangentialraumes mit Hilfe von Kurven)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück und $a \in M$.

Sei $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$ Kurve von der Klasse C^1 .

$w(0) = a$

$w'(0) \in T_a(M)$ (Wenn man alle Kurven durch den Punkt a , die auf M verlaufen nimmt und deren Tangentialvektoren berechnet (im Punkt a), so spannen diese eine Ebene, die Tangentialebene auf.)

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Teilmenge.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$: Homöomorphismus aufs Bild und Immersion.

$M = f(U)$, $f(u) = a \in M$, $T_a(M) = \text{Bi}((Df)_u)$

$V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen.

$\varphi : V \rightarrow U$ Diffeomorphismus

$f \circ \varphi : V \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$

φ : Umparametrisierung

$J_u(\varphi) \in GL(2, \mathbb{R})$

$\det(J_u(\varphi)) \neq 0$, d.h. > 0 oder < 0

$\det(J_u(\varphi)) > 0$: φ ist positiv = orientierungserhaltend

$\det(J_u(\varphi)) < 0$: φ ist negativ = orientierungsumkehrend

Sei $U' \subseteq U$ offen

$\Rightarrow f|_{U'} : U' \rightarrow M' = f(U') \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück

Sei $f : U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$, $g : V \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$

Parametrisierungen des Flächenstückes M :

$\varphi : U \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g^{-1}} V$

$\varphi^{-1} : V \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f^{-1}} U$

zueinander inverse Homöomorphismen. $f \circ \varphi^{-1} = f \circ (f^{-1} \circ g) = g$

zu zeigen: φ , φ^{-1} sind Diffeomorphismen.

Es genügt zu zeigen (wegen dem Satz über inverse Funktionen): φ ist diffbar (oder: φ^{-1}) ist diffbar.

Sei $a \in M$, $a = f(u) = g(v)$

$J_u(f)$: Rang 2 \Rightarrow 2 Zeilen linear unabhängig.

etwa Zeilen:

$(\frac{\partial f_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial f_i}{\partial u_2}(u))$ $(\frac{\partial f_j}{\partial u_1}(u), \frac{\partial f_j}{\partial u_2}(u))$ linear unabhängig, $i \neq j$

$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Projektion auf die Komponenten (i, j)

$p \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ diffbar

$$J_u(p \circ f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_i}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_j}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

$J_u(p \circ f)$ invertierbar.

Satz über inverse Funktionen:

\exists offene Umgebungen $U' \subseteq U$ von u , $W \subseteq \mathbb{R}^2$ von $p \circ f(u) = p(a)$

$p \circ f|_{U'} : U' \rightarrow W$ ist Homöomorphismus.

$(p \circ f|_{U'})^{-1} : W \rightarrow U'$ ist diffbar,

$J_{p(a)}((p \circ f|_{U'})^{-1}) = J_u(p \circ f)^{-1}$

$p \circ f|_{U'} : U' \rightarrow W$ ist Diffeomorphismus.

$T_a(M) = T_a(M')$, $f(U) = M'$

Sei $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ Kurve mit $w(0) = u$

$\Rightarrow f \circ w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$, $f \circ w(0) = a$

$(f \circ w)'(t) = (Df)_{w(t)} \circ w'(t) = J_{w(t)}(f) \cdot w'(t)$

$$t = 0$$

$$Bi((Df)_n) = T_a(M) \Rightarrow (f \circ w)'(t) \in T_a(M).$$

Sei $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ Kurve mit $v'(0) = a$

$$\Rightarrow v = f \circ (p \circ f)^{-1} \circ p \circ v$$

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{v} M \xrightarrow{p} W \xrightarrow{(p \circ f)^{-1}} U \xrightarrow{f} M$$

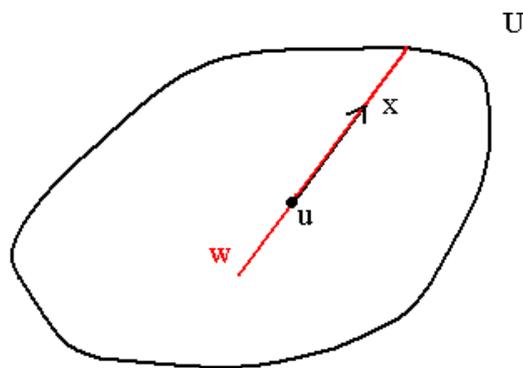
$(p \circ f)^{-1} \circ p \circ v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ ist diffbar, $0 \rightarrow u$

$$v'(0) = (Df)_u((p \circ f)^{-1} \circ p \circ v)'(0) \in T_a(M)$$

Sei $x \in \mathbb{R}$

$$w_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$$

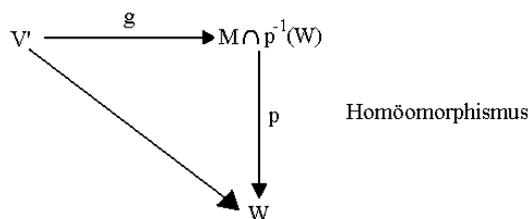
$$t \rightarrow u + tx$$



$$w \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, M \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$v \in V' = g^{-1}(M \cap p^{-1}(w)) \subseteq V \text{ offen.}$$

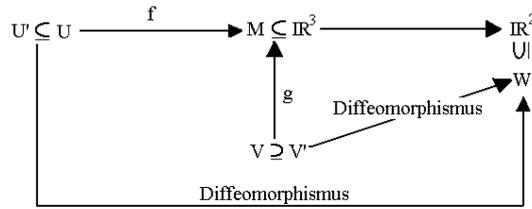


$p \circ g|_{V'}$ diffbar

$J_v(p \circ g|_{V'})$ invertierbar

denn: $J_v(g)$: Zeilen i, j linear unabhängig

Insgesamt folgt:



1.2 Beispiele

a) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$F : U \rightarrow \mathbb{R}^3 : u \mapsto (u, f(u))$ (Bild: Graph von f)

Flächenstück: Homöomorphismus aufs Bild: $Gr(f) \rightarrow U : (u, f(u)) \mapsto u$

Immersion: $J_u(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$ hat Rang 2

Tangentialebene bei $a = f(u)$: Erzeugnis der Spalten von $J_u(F)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\alpha, \beta) \mapsto (\cos(\alpha)\cos(\beta), \cos(\beta)\sin(\alpha), \sin(\beta))$ ist eine surjektive Abbildung auf die Sphäre, also $Bi(f) = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

f ist differenzierbar mit:

$$J_{(\alpha,\beta)}(f) = \begin{pmatrix} -\cos(\beta)\sin(\alpha) & -\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\beta)\cos(\alpha) & -\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Wann hat $J_{(\alpha,\beta)}(f)$ Rang 2? D.h. wann ist f eine Immersion?

– keine Immersion falls $\cos(\beta) = 0$; Falls $\cos(\beta) \neq 0 \Rightarrow$ Immersion

Also: keine Immersion $\Leftrightarrow \cos(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta \in \frac{\pi}{2} + \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Die Punkte $(\alpha, \frac{\pi}{2})$ werden auf Nordpol und $(\alpha, -\frac{\pi}{2})$ auf Südpol abgebildet.

Mögliche Parametrisierungen der Sphäre

Sei $U = (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f|_U : U \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist injektiv

Homöomorphismus auf $f(U)$?

β fest:

Breitenkreis fest und α variieren lassen \Rightarrow laufen auf dem Breitenkreis

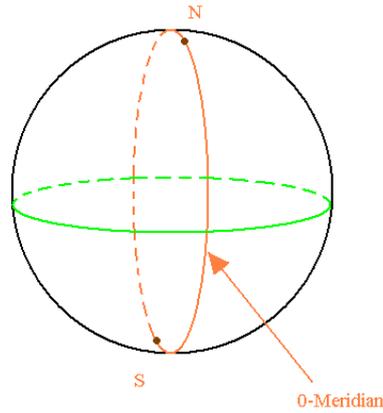
α fest:

Meridian fest und β variieren lassen \Rightarrow laufen auf dem Meridian

$f(U)$ ist die Sphäre ohne dem 180° Meridian und ohne Nord- und Südpol.

Für $V = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f(V)$ ist die Sphäre ohne dem 0° Meridian und ohne Nord- und Südpol.



Sowohl $f|_U$ als auch $f|_V$ beschreiben Flächenstücke in \mathbb{R}^3

Projektion in die (des Tangentialraumes):

$x_1 - x_2$ Ebene $\cos(\beta) \neq 0$ & $\sin(\beta) \neq 0$ (*)

$x_1 - x_3$ Ebene $\cos(\beta) \neq 0$ & $\sin(\alpha) \neq 0$ (**)

$x_2 - x_3$ Ebene $\cos(\beta) \neq 0$ & $\cos(\alpha) \neq 0$ (***)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2$ (p ist Projektionsabbildung)

$J_{(\alpha,\beta)}(p \circ f)$ hat Rang 2

$J_{(\alpha,\beta)}(p \circ f) = J_{(\alpha,\beta)}(p)J_{(\alpha,\beta)}(f)$

$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto (x_1, x_2)$, dann ist die Funktionalmatrix von p :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) $\sin(\beta) = 0$

Wir befinden uns auf dem Äquator und in jedem Punkt auf dem Äquator steht die Tangentialebene senkrecht auf die Ebene der ersten beiden Koordinaten. Also kann nicht bijektiv in der $x_1 - x_2$ Ebene abgebildet werden. Also $\sin(\beta) = 0$ muss ausgeschlossen sein.

(**) $\sin(\alpha) = 0$

Wir befinden uns auf dem 0° oder 180° Meridian, d.h. die Tangentialebene steht senkrecht auf der $x_1 - x_3$ Ebene. Also $\sin(\alpha) = 0$ muss ausgeschlossen sein. Denn die Tangentialebene wird auf eine Gerade und nicht auf eine Ebene durch die Projektionsabbildung abgebildet.

(***) $\cos(\alpha) = 0$

Wir befinden uns auf dem $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ Meridian, d.h. die Tangentialebene steht senkrecht auf die $x_2 - x_3$ Ebene

$$c) \sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$$

$$\sigma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\} : x \mapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2+1} \right)$$

$$J_x(\sigma^{-1}) \begin{pmatrix} \frac{-2x_1^2+2x_2^2+2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} & \frac{-4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \frac{-4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} & \frac{2x_1^2-2x_2^2+2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \frac{4x_1}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} & \frac{4x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

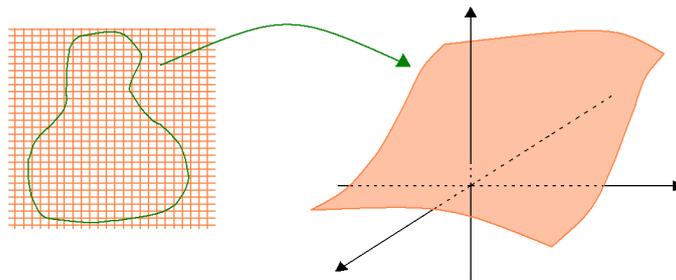
Frage: Sind $\begin{pmatrix} -x_1^2+x_2^2+1 \\ -2x_1x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2x_1x_2 \\ x_1^2-x_2^2+1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -x_1^2+x_2^2+1 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2-x_2^2+1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} &= -x_1^4+x_1^2x_2^2+x_1^2+x_1^2x_2^2-x_2^4-x_2^2-x_1^2+x_2^2+1-4x_1^2x_2^2 \\ &= -x_1^4-x_2^4-2x_1^2x_2^2+1 \\ &= 1-(x_1^2+x_2^2)^2 \end{aligned}$$

$$\det = 0 \Leftrightarrow (x_1^2+x_2^2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2 = 1 \Leftrightarrow \text{auf dem Einheitskreis}$$

Wenn wir uns nicht auf dem Einheitskreis befinden, ist immer eine Immersion (die 2 Vektoren sind linear unabhängig)

Die gesamte Sphäre ohne Nordpol ist ein Flächenstück. Ebenso ist die gesamte Sphäre ohne Südpol ein Flächenstück. Damit kann man die gesamte Sphäre durch 2 Flächenstücke überdecken.



Beispiel (b)

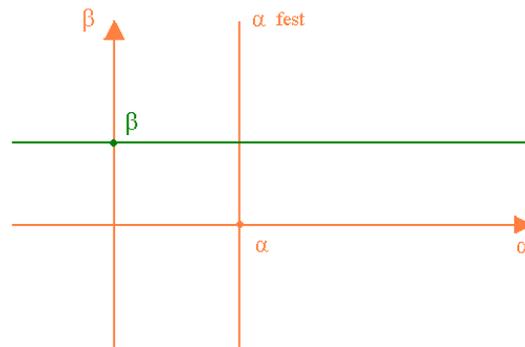
$$(\alpha, \beta) \mapsto (\cos(\alpha)\cos(\beta), \cos(\beta)\sin(\alpha), \sin(\beta))$$

β fest halten \Rightarrow Breitengrad fest halten

α fest halten \Rightarrow Längengrad fest halten

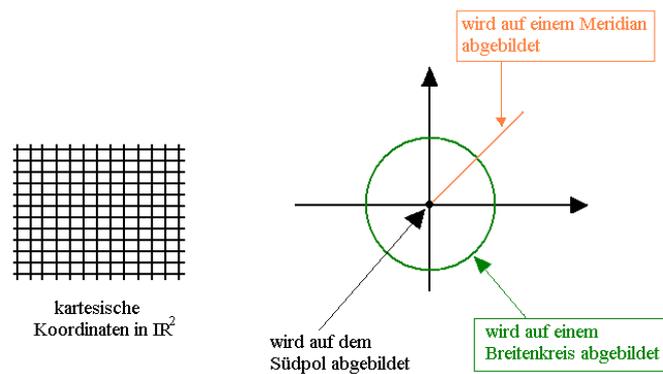
$\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ wird die Gerade auf einem einzigen Punkt: Nordpol abgebildet

$\beta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ wird die Gerade auf einem einzigen Punkt: Südpol abgebildet



Beispiel (c)

Durch die Abbildung σ^{-1} werden die Linien wie folgt abgebildet:



1.3 Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Teilmenge. M ist eine Fläche, wenn es eine offene Überdeckung durch Flächenstücke gibt.

Bei Kurven

Lokale Eigenschaften: Krümmung, Torsion, ... (charakterisieren die Kurven lokal)

Vier-Scheitel-Satz: spricht über eine globale Eigenschaft der Kurve.

Flächenstücke sind Flächen

Sei M eine Fläche und $M', M'' \subseteq M$ Flächenstücke.

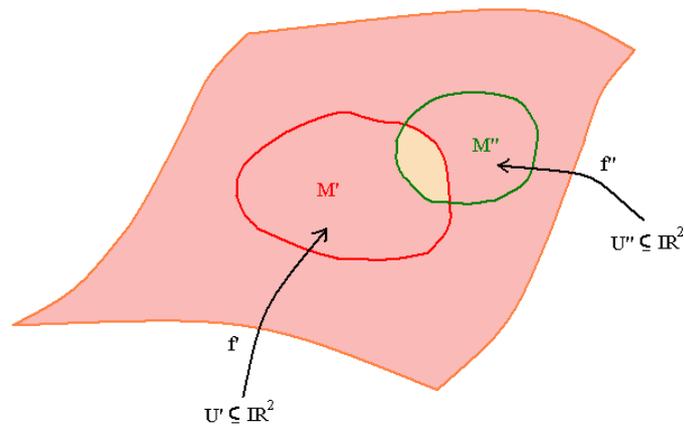
Falls $M' \cap M'' \neq \emptyset$:

$V' = (f')^{-1}(M' \cap M'') \subseteq U'$ offen

$$V'' = (f'')^{-1}(M' \cap M'') \subseteq U'' \text{ offen}$$

$$f' |_{V'}: V' \rightarrow M' \cap M''$$

$$f'' |_{V''}: V'' \rightarrow M' \cap M''$$



Parametertransformation

$\varphi: V'' \rightarrow V'$ (Diffeomorphismus) Übergangsabbildung mit: $f'' |_{V''} = f' |_{V'} \circ \varphi$

Beispiel:

S^2 ist kein Flächenstück.

Annahme: S^2 ist Flächenstück

Dann gibt es eine Parametrisierung $f: U \xrightarrow{\cong} S^2$ Homöomorphismus

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, nicht kompakt, aber S^2 kompakt \Rightarrow Widerspruch denn U und S^2 können dann nicht homöomorph sein.

Damit gibt es keine Parametrisierung

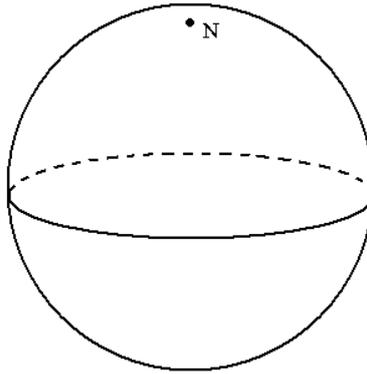
Überdeckung von S^2 durch offene Flächenstücke

- $S^2 \setminus \{N\}$ und $S^2 \setminus \{S\}$
- H_1 : nördliche Hemisphäre
- H_2 : südliche Hemisphäre
- H_3 : östliche Hemisphäre
- H_4 : westliche Hemisphäre
- H_5 : rechte Hemisphäre
- H_6 : linke Hemisphäre

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto (x_1, x_2)$$

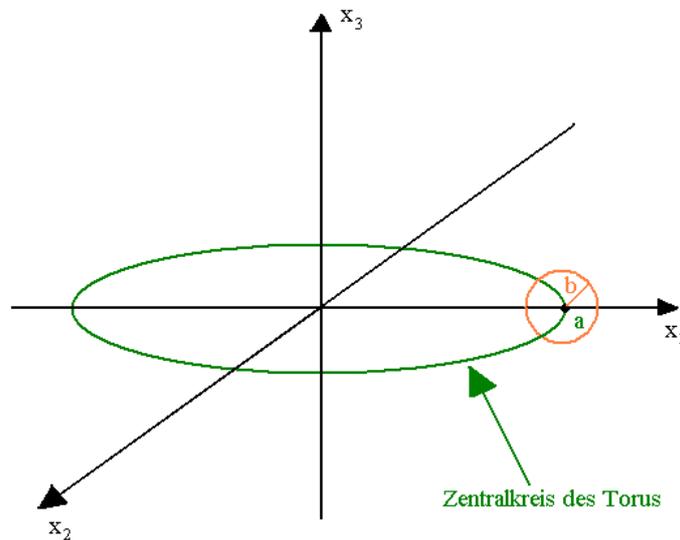
$$p |_{H_1}: H_1 \rightarrow \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

$$p^{-1} |_{H_1}: \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \rightarrow H_1: (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$$



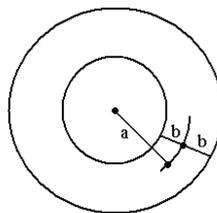
Beispiel: (Torus)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (u_1, u_2) \mapsto ((a + b\cos(u_1))\cos(u_2), (a + b\cos(u_1))\sin(u_2), b\sin(u_1))$ mit $0 < b < a$



Immersion aber nicht bijektiv aufs Bild

Die Projektion des Torus in der Ebene der ersten beiden Koordinaten:



Torus ist eine Rotationsfläche

Torus als Nullstellenmenge:

$$P = (a^2 - b^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$V(P)$ Nullstellenmenge von P

Damit kann man folgern, dass der Torus kompakt ist:

$V(P)$ ist abgeschlossen, denn P ist stetige Abbildung

Beschränktheit von $V(P)$:

$$(a^2 - b^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$$

ist beschränkt: linke Seite wächst in dem 4. Potenz; rechte Seite wächst nur in dem 2. Potenz.

1.4 Satz

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei $c \in f(U)$. Dann ist $M = \{x \in f^{-1}(c) \mid (Df)_x \neq 0\}$ eine Fläche

Beweis (mit Satz über implizite Funktionen):

Sei $a \in M$.

O.E. $\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) \neq 0$ (die dritte partielle Ableitung an der Stelle a ist $\neq 0$)

Es gibt offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (a_1, a_2) und V von a in \mathbb{R}^3 mit:

$$M \cap V \text{ ist Graph einer differenzierbaren Funktion } \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$$

Damit ist $M \cap V$ Flächenstück (als Graph einer differenzierbaren Funktion) und somit ist M eine Fläche.

Veranschaulichung:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, c \in \text{Bi}(f), f^{-1}(c)$$

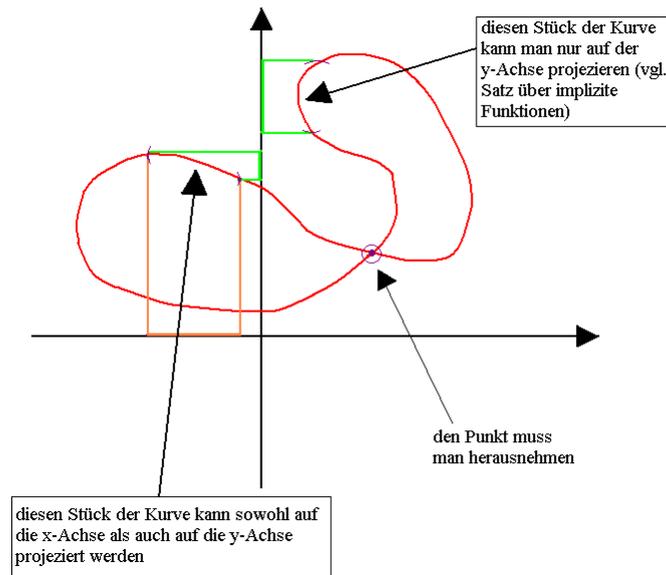
Beispiel

Torus ist Nullstellenmenge von:

$$P = (a^2 - b^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$$

$P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Polynomabbildung

Behauptung: $P^{-1}(0)$ ist eine Fläche!



Beweis (mit Hilfe von Satz 1.4)

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}(x) = 4x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}(x) = 4x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3}(x) = 4x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2)$$

Bemerkung: Der Gradient kann verschwinden, aber er darf nicht 0 sein, an den Stellen wo der Polynom (Funktion) verschwindet.

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}(x) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ oder} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}(x) = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ oder} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3}(x) = 0$$

$$x_3 = 0 \text{ oder} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2 = 0$$

Falls $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Dann ist $P = a^2 - b^2 \neq 0$, also $(0, 0, 0) \notin P^{-1}(0)$

Falls $x_1 \neq 0$

$$\text{Dann: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 - b^2 = 0(*)$$

$$\text{und } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2 = 2a^2 \neq 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$\text{und } P(x) = (a^2 - b^2 + x_1^2 + x_2^2)^2 - 4a^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a^2 - b^2 + x_1^2 + x_2^2)^2}_{2a^2} = 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$$

Also $4a^4 = 4a^2(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow a^2 = x_1^2 + x_2^2$ im Widerspruch zu (*), denn dann folgt: $b^2 = 0$ aber $b \neq 0$ nach Voraussetzung
u.s.w.

Bemerkung

Wegen Kompaktheit ist das eine Fläche und kein Flächenstück (Flächenstücke können nicht kompakt sein).

Beispiel:

$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ mit $r > 0$ (Kreiszyylinder)

Wir definieren das Polynom $P(x) = x_1^2 + x_2^2$ und betrachten die Menge $P^{-1}(r^2) \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktionalmatrix von P an der Stelle x ist gegeben durch:

$$J_x(P) = (2x_1, 2x_2, 0)$$

Es gilt: $J_x(P) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$. Da aber $(0, 0, x_3) \notin Z$, ist Z eine Fläche.

Bemerkung zum Torus

Mit Hilfe der Parametrisierung, stellt man der Torus als Nullstellenmenge eines Polynoms dar und mit Hilfe dieser 2-ten Darstellung, kann man leicht beweisen das der Torus eine Fläche ist. Falls man von der Parametrisierung ausgeht und direkt zeigen möchte, dass der Torus eine Fläche ist, kann dies sehr mühsam sein.

1.5 Satz

Sei M eine Fläche und $a \in M$. $T_a(M) = (Df)_a^\perp$ ist der Tangentialraum bei a von M (f wie im Satz 1.4)

Beweis

Sei $w \in (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $w(0) = a$. Dann ist:

$$f \circ w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

konstant mit Wert c . Es gilt also:

$$0 = (f \circ w)'(0) = (Df)_{w(0)} w'(0) \Rightarrow w'(0) \perp (Df)_a (w(0) = a)$$

Damit: $T_a(M) \subseteq (Df)_a^\perp$

Da $(Df)_a \neq 0 \Rightarrow \dim((Df)_a) = 2 = \dim(T_a(M))$ und damit ist $T_a(M) = (Df)_a^\perp$.

2 Differenzierbare Funktionen und Abbildungen

Frage: Welche sind die wichtige Abbildungen, wenn wir über eine Fläche sprechen?

2.1 Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion, wenn gilt:

$$\forall a \in M \exists \varphi : U \rightarrow M' \subseteq M \text{ (parametrisiertes Flächestück)}$$

φ heißt Parametrisierung von M mit $a \in M'$ und die Komposition $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Bemerkung

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

f ist differenzierbar, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ ein parametrisiertes Flächenstück $\varphi : U \rightarrow M'$ gibt mit: $a \in M'$, $f \circ \varphi$ differenzierbar.

2.2 Satz

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

f ist differenzierbar \Leftrightarrow Für jedes parametrisierte Flächenstück $\varphi : U \rightarrow M'$ ist $f \circ \varphi$ differenzierbar.

Beweis:

„ \Leftarrow “ trivial

„ \Rightarrow “ Sei $\varphi : U \rightarrow M'$ ein parametrisiertes Flächenstück.

Zu zeigen: $\forall u \in U : f \circ \varphi$ differenzierbar bei u .

Sei $u \in U$, $a = f(u) \in M' \subseteq M$

f differenzierbar $\Rightarrow \exists \psi : V \rightarrow M''$: Parametrisierung eines Flächenstücks mit $a \in M''$, $f \circ \psi$ differenzierbar.

Setze: $M_0 = M' \cap M'' \subseteq M$ offen.

$U_0 = \varphi^{-1}(M_0)$, $V_0 = \psi^{-1}(M_0) \subseteq V$ offen.

$\varphi : U_0 \rightarrow M_0$ und $\psi : V_0 \rightarrow M_0$ sind parametrisierte Flächenstücke.

$f \circ \psi$ ist differenzierbar. Dann gilt: $f \circ \varphi = f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ ist differenzierbar, wobei $f \circ \psi$ differenzierbar und $\psi^{-1} \circ \varphi$ ein Diffeomorphismus ist.

2.3 Satz

Sei $C^k(M, \mathbb{R})$ die Menge der C^k -Funktionen.
 $C^k(M, \mathbb{R})$ ist ein Ring (sogar eine \mathbb{R} -Algebra)

Bemerkung

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist eine differenzierbare Abbildung, wenn für alle $\kappa = 1, \dots, k$ gilt:

$$f_\kappa : p_\kappa \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow x_\kappa \text{ ist differenzierbar}$$

Bemerkung

Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^3$ Flächen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. f ist differenzierbar, wenn $M \xrightarrow{f} N \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar ist.

Beispiel

Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare (Abbildung) Funktion.
 $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche $\Rightarrow F|_M$ ist differenzierbare Funktion.

Begründung:

Sei $\varphi : U \rightarrow M' \subseteq M$ Parametrisierung eines Flächenstücks. Dann gilt: $F \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar (wegen der Kettenregel!).

Beispiel

$\varphi : U \rightarrow M$ parametrisiertes Flächenstück.

$\varphi^{-1} : M \rightarrow U$ ist differenzierbar, denn $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_U$ und id_U ist differenzierbar.

2.4 Satz

Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^3$ Flächen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist differenzierbar.

- (b) $\forall a \in M \exists \varphi : U \rightarrow M' \subseteq M$ mit $a \in M'$ und $\exists \psi : V \rightarrow N' \subseteq N : f(M') \subseteq N'$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ differenzierbar.

Beweis:

(a) \rightarrow (b)

$\varphi : U \rightarrow M' \subseteq M$ sei eine Parametrisierung mit $a \in M'$ und $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

Sei $\psi : V \rightarrow N'$ Parametrisierung mit $f(a) \in N'$.

Sei $M'' = f^{-1}(N')$, $U'' = f^{-1}(M'')$ dann: $f : U'' \rightarrow M''$ ist eine Parametrisierung, $a \in M''$, $f(M'') \subseteq N'$

O.E.: $U = U''$ und $M' = M''$

Wahl von ψ :

$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3 : (v_1, v_2) \rightarrow (v_1, v_2, g(v_1, v_2))$ mit $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Die inverse Abbildung ψ^{-1} ist die Einschränkung von $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$. Damit ist ψ^{-1} auf ganz \mathbb{R}^3 definiert. Dann:

$$\psi^{-1} \circ f|_M \circ \varphi = p \circ f|_M \circ \varphi$$

mit $f|_M \circ \varphi$ differenzierbar von $U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und p differenzierbar von $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Komposition differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar).

(b) \rightarrow (a)

Zu zeigen: $\forall a \in M \exists \varphi : U \rightarrow M' \subseteq M$ mit $a \in M'$: $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

$$f \circ \varphi = \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

mit ψ differenzierbar von $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ differenzierbar von $U \rightarrow V$ nach Vorauss. in (b).

Also $f \circ \varphi$ ist differenzierbar nach der Kettenregel.

2.5 Satz

Sei $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar.

Beweis:

Seien $\varphi : U \rightarrow M'$, $\psi : V \rightarrow N'$, $\tau : W \rightarrow P'$ Parametrisierungen mit $a \in M'$, $f(M') \subseteq N'$ und $g(N') \subseteq P'$

$$(g \circ f) \circ \varphi = g \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi$$

mit $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist differenzierbar nach Satz 2.4 von $U \rightarrow V$, $g \circ \psi$ ist differenzierbar von $V \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Damit folgt mit der Kettenregel: $g \circ f$ ist differenzierbar.

3 Tangentialräume und Normalenräume

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche und $a \in M$. Dann ist $T_a(M) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene und $N_a(M) = T_a(M)^\perp$ ist der Normalenraum bei a .

Beispiel

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Graph $Gr(f)$ ist ein Flächenstück.

Parametrisierung: $F : U \rightarrow Gr(f) : u \rightarrow (u, f(u))$ (mit $u = (u_1, u_2)$ und $(u, f(u)) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$).

$$J_u(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

Die Spalten von $J_u(F)$ bilden eine Basis von $T_{F(u)}(Gr(f))$

$$(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u_1}(u)) \wedge (0, 1, \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)) = (-\frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \frac{\partial f}{\partial u_2}(u), 1)$$

$$= (\det(\text{Zeile2}, \text{Zeile3}), \det(\text{Zeile1}, \text{Zeile3}), \det(\text{Zeile1}, \text{Zeile2}))$$

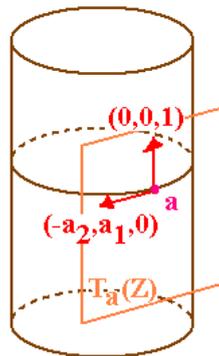
ist der Normalenvektor.

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_1^2 + x_2^2 - r^2$ mit $0 < r$.

$f^{-1}(0)$ ist ein Kreiszyylinder Z mit Achse e_3 und Radius r .

Sei $a \in Z$ dann ist $(Df)_a \perp T_a(Z)$. Damit ist (weil $(Df)_a \neq 0 \forall a$): $N_a(Z) = \mathbb{R} \cdot (Df)_a$ und $T_a(Z) = (Df)_a^\perp$



$(Df)_a = (2a_1, 2a_2, 0)$. Dann sind $(0, 0, 1)$ und $(-a_2, a_1, 0)$ orthogonal zu $(Df)_a$.
Damit sind $(0, 0, 1)$ und $(-a_2, a_1, 0) \in T_a(Z)$ linear unabhängig.

Bemerkung

- Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind:

$$J_u(f) \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

$$(Df)_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ linear}$$

- Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $a \in M$.
Seien $\varphi : U \rightarrow M'$, $a \in M'$, $a = \varphi(u)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar.
Dann gilt:

$$- (D\varphi)_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$- (D\varphi)_u : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} T_a(M) \text{ (Isomorphismus)}$$

$$- \exists (D\varphi)_u^{-1} : T_a(M) \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

3.1 Definition

$(Df)_a : T_a(M) \xrightarrow{(D\varphi)_u^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(Df \circ \varphi)_u} \mathbb{R}^n$ ist das Differential von f bei a .

3.2 Lemma

Seien $\varphi : U \rightarrow M'$ mit $a \in M'$, $a = \varphi(u)$ und $\psi : V \rightarrow M''$ mit $a \in M''$, $a = \psi(v)$ Parametrisierungen. Dann gilt:

$$T_a(M) \xrightarrow{(D\varphi)_u^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(Df \circ \varphi)_u} \mathbb{R}^n$$

und

$$T_a(M) \xrightarrow{(D\psi)_v^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(Df \circ \psi)_v} \mathbb{R}^n$$

sind gleich.

Beweis:

O.E.: $M' = M''$

$\psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$ ist Diffeomorphismus mit $(\psi^{-1} \circ \varphi)(u) = v$

$\varphi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$ ist differenzierbar und

$$(D\varphi)_u = (D\psi)_v \circ (D\psi^{-1} \circ \varphi)_u$$

$$\text{Also } (D\psi^{-1} \circ \varphi)_u = (D\psi)_v^{-1} \circ (D\varphi)_u$$

$$f \circ \varphi = f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi$$

mit $f \circ \psi$ differenzierbar von $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi^{-1} \circ \varphi$ Diffeomorphismus von $U \rightarrow V$.

$$(Df \circ \varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1} = (Df \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1}$$

$$= (Df \circ \psi)_v \circ (D\psi^{-1} \circ \varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1}$$

$$= (Df \circ \psi)_v \circ (D\psi^{-1})_v \circ (D\varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1}$$

$$\text{mit } (D\varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1} = id.$$

3.3 Lemma

Seien M, N Flächen und $f : M \rightarrow N$ differenzierbar

$$(Df)_a : T_a(M) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Dann ist $Bi((Df)_a) \subseteq T_{f(a)}(N)$.

Beweis:

$$\varphi : U \rightarrow M', \quad a \in M', \quad a = f(u)$$

$$\psi : V \rightarrow N', \quad f(M') \subseteq N', \quad f(a) = \psi(v)$$

$f = \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ ist differenzierbar mit $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist differenzierbar nach Satz 2.4.

$$(Df)_a = (Df \circ \varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1} : T_a(M) \xrightarrow{(D\varphi)_u^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(Df \circ \varphi)} \mathbb{R}^3$$

$$(Df)_a = (D\psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1} : T_a(M) \xrightarrow{(D\varphi)_u^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(D\psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi)} \mathbb{R}^3$$

$$(D\psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_u = (D\psi)_v \circ (D\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_u$$

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \text{ mit } X, Y, Z \text{ Vektorräume, } \alpha, \beta \text{ lineare Abbildungen: } Bi(\beta \circ \alpha) \subseteq Bi(\beta)$$

Damit folgt:

$$Bi((Df)_a) \subseteq Bi((D\psi)_v) = T_{f(a)}(N)$$

3.4 Satz (Kettenregel)

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ differenzierbare Abbildungen zwischen Flächen. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar (nach Satz 2.5) und $(Dg \circ f)_a = (Dg)_{f(a)} \circ (Df)_a$

Berechnung von Differentialen

Sei $f : M \rightarrow N$ mit $a \in M$ und $(Df)_a : T_a(M) \rightarrow T_{f(a)}(N)$ linear.

Sei $\varphi : U \rightarrow M'$ mit $a \in M'$ in der Nähe von a eine Parametrisierung eines Flächenstücks, $a = \varphi(u)$.

Dann gilt:

$$(Df)_a = (Df \circ \varphi)_u \circ (D\varphi)_u^{-1} \Rightarrow (Df \circ \varphi)_u = (Df)_a \circ (D\varphi)_u$$

$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)$ und $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$ sind die Spalten der $(Df)_u$ und bilden eine Basis von $T_a(M)$.

$(Df)_a\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)\right) = (Df)_a \circ (D\varphi)_u(e_1) = (Df \circ \varphi)_u(e_1) = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u_1}(u)$ ist die erste Spalte von $(Df \circ \varphi)_u$

Beispiele

(a) $S^2 \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Projektion.

Sei $a \in S^2$ und $(Dp)_a : T_a(S^2) \rightarrow T_{p(a)}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

$(Dp)_a$ sei die Einschränkung der Projektion von $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$T_a(S^2)$ erzeugt von

$(-a_2, a_1, 0)$

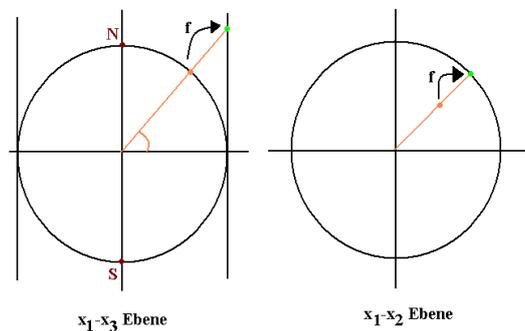
$(-a_3, 0, a_1)$

$(0, -a_3, a_2)$

(b) Seien $S^2 \setminus \{N, S\}, Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

Sei $f : S^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow Z : x \rightarrow \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)$ differenzier sogar in C^∞ ,

denn f sogar analytisch.



Diese Abbildung spielt eine wichtige Rolle in der Kartographie. Die Erdoberfläche

wird durch eine Kugel modelliert. Mit f wird diese auf einen Zylinder projiziert und weiter kann man diesen Zylinder abrollen um eine Karte zu bekommen.

3.5 Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche. Sei $a \in M$ und $T_a(M)$ der Tangentialraum und $N_a(M)$ der Normalenraum.

$$TM = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in M \& y \in T_x(M)\}$$

heißt Tangentialbündel. Entsprechend:

$$NM = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid x \in M \& y \in N_x(M)\}$$

heißt Normalenbündel.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto x \\ \cup & \nearrow \text{Proj. } p & \\ TM & & \end{array}$$

$$p^{-1}(x) = T_x(M)$$

Bemerkung

Sei $f : M \rightarrow N$ differenzierbar. Dann ist:

$$Tf : TM \rightarrow TN : (x, y) \rightarrow (f(x), (Df)_x(y))$$

Bemerkung (Kettenregel)

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

$$Tg \circ Tf : TM \xrightarrow{Tf} TN \xrightarrow{Tg} TP : (x, y) \rightarrow (f(x), (Df)_x(y)) \rightarrow (gf(x), (Dg)_{f(x)}((Df)_x(y))) \text{ mit } (Dg)_{f(x)}((Df)_x(y)) = (Dg \circ f)_x(y)$$

Bemerkung

$\varphi : U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisiertes Flächenstück.

$f : U \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TM : (u, y) \rightarrow (\varphi(u), (D\varphi)_u(y))$ Falls φ eine C^2 -Abbildung ist, so ist f eine

differenzierbare Abbildung. Mannigfaltigkeiten sind höher dimensionale Gebilde. Sie sind nicht komplizierter als die Flächen (2-dim Gebilde). Die Sätze und Bemerkungen lassen sich leicht von den Flächen auf Mannigfaltigkeiten übertragen.

3.6 Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Fläche und sei $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf Graph $Gr(X) \subseteq M \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

Tangentenfeld, falls $X(a) \in T_a(M)$

Normalenfeld, falls $X(a) \in N_a(M)$

Sei $\varphi : U \rightarrow M'$, $a \in M'$. Dann bilden die Spalten von $J_u(\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

eine Basis von $T_a(M)$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$$

bildet eine Basis von $N_a(M)$.

Dann bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$$

eine Basis des Vektorfelds.

$$(X \circ \varphi)(u) = \alpha(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) + \beta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) + \gamma(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$$

Für alle u : falls $\gamma(u) = 0 \Rightarrow$ Tangentenfeld, falls $\alpha(u) = \beta(u) = 0 \Rightarrow$ Normalenfeld.

X ist differenzierbar, falls α , β und γ differenzierbar sind.

Beispiel

$f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen.

Sei $c \in \mathbb{R}$ regulärer Wert (d.h. $c \in f(V)$ und für alle $x \in f^{-1}(c)$ ist $(Df)_x \neq 0$).

Also $f^{-1}(c)$ ist eine Fläche.

$(Df)_x \in N_x(f^{-1}(c))$ Normalenfeld.

Normalenfeld als Abbildung:

$$f^{-1}(c) \rightarrow Nf^{-1}(c) : x \rightarrow (x, (Df)_x)$$

Bemerkung

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$

$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ Tangentefeld und $a \in M$.

Gesucht:

Kurve $w : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M$

$w(0) = a$

$w'(t) \in T_{w(t)}(M)$

$w'(t) = X(w(t)) \forall t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$

w : Trajektorie oder Lösungskurve

OE: M Flächenstück

$\varphi : U \rightarrow M$ Parametrisierung

$v = \varphi^{-1} \circ w : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow U$

$v(0) = \varphi^{-1}(a) = u$

$(D\varphi^{-1} \circ w)_t = (D\varphi^{-1})_{w(t)} \cdot w'(t) = (D\varphi^{-1})_{w(t)} \cdot X(w(t)) = (D\varphi^{-1})_{w(t)} \cdot (X \cdot \varphi) \cdot (\varphi^{-1} \cdot w)(t)$

mit $(D\varphi^{-1})_{w(t)} \cdot (X \cdot \varphi) = y, y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $(\varphi^{-1} \cdot w) = v$

Suche $v : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow U$

$v(0) = 0$

$v'(t) = y(v(t))$

4 Orientierung**Erinnerung**

Sei V ein reeller Vektorraum.

$(v_1, \dots, v_n) = B$ und $(w_1, \dots, w_n) = C$ sind Basen von V .

$B \sim C$ (B ist äquivalent zu C) wenn eine Basistransformation eine positive Determinante hat.

\sim ist eine Äquivalenzrelation mit 2 Äquivalenzklassen (Orientierungen): Determinante positiv oder Determinante negativ.

Seien (V, B) und (W, D) orientierte Vektorräume und $\dim V = \dim W$.

$f : V \rightarrow W$ ist orientierungserhaltend = positiv, wenn $f(B) \sim D$

$f : V \rightarrow W$ ist orientierungsumkehrend = negativ, wenn $f(B) \approx D$

Bemerkung

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$, $a \in M$. Dann hat jeder Tangentialraum $T_a(M)$ zwei Orientierungen.

Sei $\varphi : U \rightarrow M'$, $a \in M$ ist Parametrisierung in der Nähe von a .

$$(D\varphi)_u : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\subseteq} T_{\varphi(u)}(M) : (e_1, e_2) \rightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right)$$

(e_1, e_2) ist Orientierung auf \mathbb{R}^2

$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right)$ ist Orientierung auf $T_{\varphi(u)}(M)$

Die Orientierung wird also auf $T_{\varphi(u)}(M)$ übertragen.

Sei $\psi : V \rightarrow M'$ eine andere Parametrisierung.

$$(D\psi)_v : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\subseteq} T_{\psi(v)}(M)$$

$$\varphi(u) = a = \psi(v)$$

$(e_1, e_2) \rightarrow \left(\frac{\partial \psi}{\partial v_1}(v), \frac{\partial \psi}{\partial v_2}(v) \right)$ ist eine andere Orientierung.

$\psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$ ist Diffeomorphismus.

$$(D\psi^{-1} \circ \varphi)_u = (D\psi^{-1})_{\psi^{-1}(\varphi(u))} \circ (D\varphi)_u$$

$$b_i = (D\psi^{-1} \circ \varphi)(e_i)$$

(b_1, b_2) ist Basis des \mathbb{R}^2

(e_1, e_2) ist Basis des \mathbb{R}^2

Orientierungserhaltend: $\det(D\psi^{-1} \circ \varphi)_u > 0$

Orientierungsumkehrend: $\det(D\psi^{-1} \circ \varphi)_u < 0$

$U \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow \det(D\psi^{-1} \circ \varphi)_u$ ist stetig.

Fazit: Falls U zusammenhängend ist, sind die Orientierungen mittels φ , ψ überall gleich oder überall entgegengesetzt.

4.1 Definition

M ist orientierbar, wenn es eine offene Überdeckung von M durch zusammenhängende Flächenstücke M_i und es auf jedem Flächenstück eine durch eine Parametrisierung definierte Orientierung gibt, so dass gilt: Ist $a \in M_i \cap M_j$, so sind die durch M_i und M_j auf $T_a(M)$ gegebenen Orientierungen gleich.

4.2 Satz

M orientierbar \Leftrightarrow Es gibt ein stetiges Einheitsnormalenfeld.

Beweis:

\Rightarrow

$M = \bigcup_{i \in I} M_i$ sind offene zusammenhängende Flächenstücke.

$\varphi_i : U_i \rightarrow M_i$ ist Parametrisierung.

In $T_a(M)$: Falls $a \in M_i, M_j$ dann definieren φ_i, φ_j dieselbe Orientierung.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u) \Rightarrow n_i(u) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2}(u) \Rightarrow n_j(u) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2}(u)$$

$$n_i(u), n_j(u) \in T_a(M)^\perp \setminus \{0\}$$

$$n_i(u) = \alpha_{ij} n_j(u)$$

$\alpha_{ij} > 0$, da Orientierungen gleich sind.

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u), n_i(u)\right) > 0$$

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2}(u), n_j(u)\right) > 0$$

$$\frac{n_i(u)}{\|n_i(u)\|} = \frac{n_j(u)}{\|n_j(u)\|}$$

Sei $a \in M, a \in M_i$ mit M_i Flächenstück.

$\varphi_i : U_i \rightarrow M_i, \varphi_i(u) = a$ ist eine Parametrisierung.

$\frac{n_i(u)}{\|n_i(u)\|}$ ist der Einheitsnormalenvektor in u und hängt nicht von M_i ab.

$$n : M \rightarrow \mathbb{R}^3 : a \rightarrow \frac{n_i(u)}{\|n_i(u)\|}$$

\Leftarrow

Sei $n : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetiges Einheitsnormalenfeld.

Seien $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ offene zusammenhängende Flächenstücke.

$\varphi_i : U_i \rightarrow M_i$ ist Parametrisierung.

$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u)$ ist Basis des Tangentialraums.

$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u), n(\varphi_i(u))\right) > 0$, dann wird φ_i nicht verändert.

$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u), n(\varphi_i(u))\right) < 0$, dann wird φ_i verändert wie folgt:

$\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist Spiegelung an der 1. Achse.

$$\sigma(U_i) \xrightarrow{\sigma} U_i \xrightarrow{\varphi_i} M_i$$

$$(D\varphi_i \circ \sigma)_u = (D\varphi_i)_{\sigma(u)} \cdot (D\sigma)_u \quad (D\varphi_i)_{\sigma(u)} \cdot (D\sigma)_u(e_1) = (D\varphi_i)_{\sigma(u)}(e_1)$$

$$(D\varphi_i)_{\sigma(u)} \cdot (D\sigma)_u(e_2) = (D\varphi_i)_{\sigma(u)}(-e_2)$$

Durch geeignete Wahl der φ_i gilt:

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u), n(\varphi_i(u))\right) > 0$$

Sei $a \in M_i \cap M_j$, dann gilt:

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u)\right) \sim \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2}(u)\right) \text{ mit } \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}(u) := b_1, \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}(u) := b_2, \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_1}(u) :=$$

$$c_1, \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_2}(u) := c_2$$

$$c_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2$$

$$c_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ ist Transformation des Basisübergangs } C \rightarrow B$$

$$0 < \det(c_1, c_2, n(a))$$

$$\begin{aligned}
&= \det(a_{11}b_1 + a_{12}b_2, a_{21}b_1 + a_{22}b_2, n(a)) \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \det(b_1, b_2, n(a)) \\
&\text{Da } (b_1, b_2, n(a)) > 0 \text{ folgt:} \\
&\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0
\end{aligned}$$

4.3 Satz

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar mit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. c sei regulärer Wert von f . Dann gilt: $M = f^{-1}(c)$ ist orientierbare Fläche.

Beweis:

Sei $a \in M$

$(Df)_a^\perp = T_a(M)$, d.h. $(Df)_a \in N_a(M)$

d.h. $N_a(M) = \mathbb{R} \cdot (Df)_a$

$\Rightarrow \frac{(Df)_a}{\|(Df)_a\|}$ ist Einheitsnormalenvektor.

Beispiele

von orientierbaren Flächen:

- Rotationsflächen
- Sphären
- Zylinder
- Tori
- Flächenstücke

von nicht orientierbaren Flächen:

- das Möbiusband ist nicht orientierbar
 $\varphi : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u_1, u_2) \rightarrow ((1 + u_2 \cdot \cos(\frac{u_1}{2})) \cdot \cos(u_1), (1 + u_2 \cdot \cos(\frac{u_1}{2})) \cdot \sin(u_1), u_2 \sin(\frac{u_1}{2}))$
 $0 < \varepsilon < 1$
(Das Normalenfeld dreht sich um auf dem Möbiusband, deshalb ist das Möbiusband nicht orientierbar.)

Seien:

$$\varphi_1 : (0, 2\pi) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M_1$$

$$\varphi_2 : (\pi, 3\pi) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow M_2$$

zwei Flächenstücke (überschneiden sich in nicht zusammenhängendem Bereich) die das Möbiusband überdecken

$$(\pi, 2\pi) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \xrightarrow{\varphi_1} N_1$$

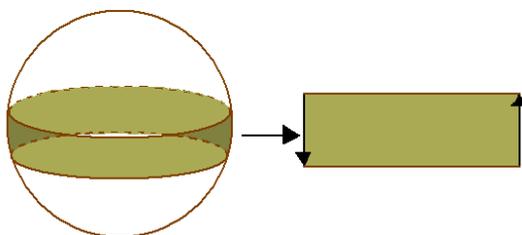
$$(\pi, 2\pi) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \xrightarrow{\varphi_2} N_1$$

$$(0, 2\pi) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \xrightarrow{\varphi_1} N_2$$

$$(2\pi, 3\pi) \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \xrightarrow{\varphi_2} N_2$$

Aber der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ ist nicht zusammenhängend.

- die reelle projektive Ebene ist nicht orientierbar.

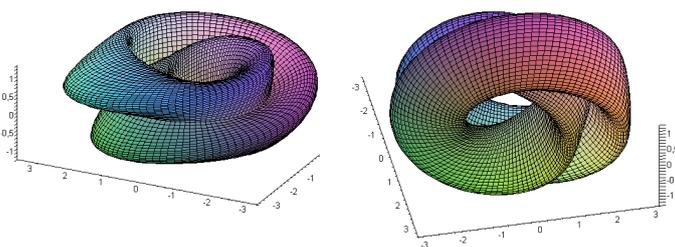


(Man nimmt die Sphäre im \mathbb{R}^3 und identifiziert diametral liegende Punkte miteinander.)

- Kleinsche Flasche:

$$KF(u, v) = \left(\begin{aligned} & \left(a + \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(v) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(2v) \right) \cos(u), \\ & \left(a + \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(v) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(2v) \right) \sin(u), \\ & \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(v) + \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(2v) \end{aligned} \right)$$

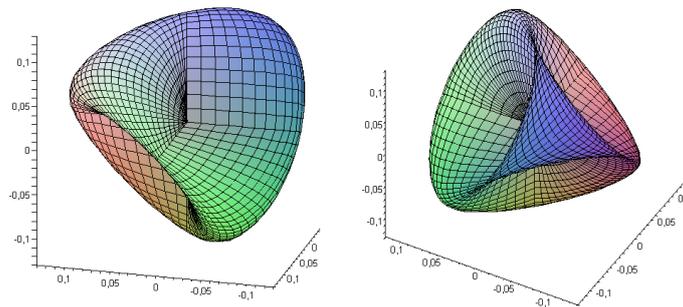
ist nicht orientierbar



- Steinersche römische Fläche:

$$SRF(u, v) = \frac{a^2}{2} (\sin(2u)(\cos(v))^2, \sin(u)\sin(2v), \cos(u)\sin(2v))$$

ist nicht orientierbar



5 Die erste Fundamentalform

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und $a \in M$

5.1 Definition

Die Einschränkung des Standardskalarprodukts von \mathbb{R}^3 auf $T_a(M)$ ist die erste Fundamentalform von M bei a . (Bezeichnung: I_a)

Bemerkung

- I_a ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
- $(T_a(M), I_a)$ ist euklidischer Raum.
- Sei $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^3$ (TM : Tangentialbündel von M)
 $TM \xrightarrow{Proj.} \mathbb{R}^3$
 und seien $(a, x), (a, y) \in TM$ (a Punkt der Fläche und $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $(a, x), (a, y) \in TM$)
 dann ist $I_a(x, y) = \langle x, y \rangle$
- Matrix zu I_a
 Basis von $T_a(M)$: (b_1, b_2) , dann folgt: $\begin{pmatrix} I_a(b_1, b_1) & I_a(b_1, b_2) \\ I_a(b_2, b_1) & I_a(b_2, b_2) \end{pmatrix}$
 Sei $\varphi : U \rightarrow M', a \in M', a = \varphi(u)$ eine Parametrisierung.
 Dann ist $(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u))$ eine Basis von $T_a(M)$.

Bemerkung

Die erste Fundamentalform ist unabhängig von der Einbettung und von der Parametrisierung, sie hängt nur von der Fläche ab.

Bemerkung

Mit $(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u))$ Basis von $T_a(M)$ ist die Matrix zu I_a :

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \rangle & \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \rangle \\ \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \rangle & \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u) & F(u) \\ F(u) & G(u) \end{pmatrix}$$

Sie ist von der Parametrisierung abhängig und heißt Maßtensor.

Diese Darstellung (Maßtensor) zeigt, dass alle Einträge der Matrix stetig partiell diffbar und abhängig von dem Flächenpunkt sind. Und es gilt:

$$E(u) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \right\|^2$$

$$G(u) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \right\|^2$$

Bemerkung

Sei $w : I \rightarrow U$ Kurve mit $t \in I$

$(D\varphi)_u(w'(t)) \in T_a(M)$ mit $w(t) = u \in U$, $\varphi(u) = a \in M$

Dann ist:

$$\begin{aligned} & I_a((D\varphi)_u(w'(t)), (D\varphi)_u(w'(t))) \\ &= I_a((D\varphi)_u((w'_1(t))e_1 + (w'_2(t))e_2), (D\varphi)_u((w'_1(t))e_1 + (w'_2(t))e_2)) \\ &= I_a(w'_1(t)(D\varphi)_u(e_1) + w'_2(t)(D\varphi)_u(e_2), w'_1(t)(D\varphi)_u(e_1) + w'_2(t)(D\varphi)_u(e_2)) \\ & \text{mit } (D\varphi)_u(e_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \text{ und } (D\varphi)_u(e_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) \\ &= E(u)w'_1(t)^2 + 2F(u)w'_1(t)w'_2(t) + G(u)w'_2(t)^2 \end{aligned}$$

Beispiel

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ affine Ebene (Bild einer affinen linearen Abbildung).

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$ affin-lineare Abbildung.

$$\varphi(x_1, x_2) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

Damit sind:

$$E(x) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2$$

$$F(x) = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}$$

$$G(x) = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2$$

Man kann die Parametrisierung φ so einrichten, dass man die Einheitsmatrix bekommt.

Man wählt für A eine orthogonale Matrix.

Beispiel

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $\varphi : U \rightarrow Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^3 : u \rightarrow (u, f(u))$

$$\text{Dann ist } \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

und somit:

$$E(u) = 1 + \frac{\partial f}{\partial u_1}(u)^2$$

$$G(u) = 1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)^2$$

$$F(u) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$$

Beispiel

$\varphi : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$u \rightarrow (\cos(u_2)\cos(u_1), \cos(u_2)\sin(u_1), \sin(u_2))$

Eine Parametrisierung der Kugel ohne N- und S-Pol und dem Meridian bei π

somit:

$$E(u) = \cos^2(u_2)$$

$$F(u) = 0$$

$$G(u) = 1$$

Bemerkung

Sei $w : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve.

Sei $[a, b] \subseteq I$, dann gilt:

$$\int_a^b \|w'(t)\| dt$$

Parameterbereich = Zeitintervall

Momentane Geschwindigkeit = $w'(t)$

Die Größe der Geschwindigkeit = $\|w'(t)\|$

Dann ist die Länge der Kurve von a nach b gegeben durch $\int_a^b \|w'(t)\| dt$

Bemerkung

Sei $Bi(w) \subseteq M$ und $w'(t) \in T_{w(t)}(M)$

Dann ist die Größe der Geschwindigkeit gegeben durch $\|w'(t)\| = \sqrt{I_a(w'(t), w'(t))}$

Bemerkung

Sei M Flächenstück und $\varphi : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung.

Setze $v = \varphi^{-1} \circ w : I \rightarrow U : t \rightarrow u$

Damit ist $w = \varphi \circ v$ und

$$\|w'(t)\| = \sqrt{v'_1(t)^2 E(u) + 2v'_1(t)v'_2(t)F(u) + v'_2(t)^2 G(u)}$$

Beispiel

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $0 < b < a$

$$(s, t) \mapsto ((a + b\cos(t))\cos(s), (a + b\cos(t))\sin(s), b\sin(t))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = \begin{pmatrix} -(a + b\cos(t))\sin(s) \\ (a + b\cos(t))\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = \begin{pmatrix} -b\sin(t)\cos(s) \\ -b\sin(t)\sin(s) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$E(s, t) = (a + b\cos(t))^2$$

$$F(s, t) = 0$$

$$G(s, t) = b^2$$

Längenberechnung mit Hilfe der ersten Fundamentalform:

Sei $v : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $w = \varphi \circ v : I \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^3$ (hier ist T ein Torus)

Seien $\alpha < \beta$ in I

$\int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{\|w'(\tau)\|}_{\sqrt{\langle w'(\tau), w'(\tau) \rangle}} d\tau$ ist die Länge von w zwischen $w(\alpha)$ und $w(\beta)$

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle w'(\tau), w'(\tau) \rangle} &= \sqrt{\langle \varphi \circ v(\tau), \varphi \circ v(\tau) \rangle} \\ &= \sqrt{(v'_1(\tau)v'_2(\tau)) \begin{pmatrix} E(u) & F(u) \\ F(u) & G(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1(\tau) \\ v'_2(\tau) \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{(a + b \cos(w_2(\tau)))^2 v'_1(\tau)^2 + b^2 v'_2(\tau)^2} \end{aligned}$$

Sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau \mapsto (\tau, \frac{1}{3}\tau)$

Dann: $v'_1(\tau) = 1$ und $v'_2(\tau) = \frac{1}{3}$

Winkelberechnung mit Hilfe der ersten Fundamentalform:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a, b \neq O$, dann ist $\cos(\angle(a, b)) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$

Falls $M \subset \mathbb{R}^3$ Fläche mit $x \in M$ und $a, b \in T_x(M)$, so ist:

$$\cos(\angle(a, b)) = \frac{I_x(a, b)}{\sqrt{I_x(a, a)} \sqrt{I_x(b, b)}}$$

Seien weiter:

$$v : I \rightarrow M, v(s_0) = x$$

$$w : J \rightarrow M, w(t_0) = x$$

Dann sind $v'(s_0)$ und $w'(t_0)$ in $T_x(M)$.

Es gilt dann: $\angle(v, w) = \angle(v'(s_0), w'(t_0))$

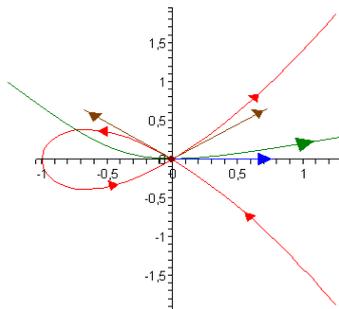


Abbildung 11: diese Konstruktion ist nicht zulässig

Die Parameterbereiche werden soweit eingeschränkt so, dass sich die Kurven nicht selber schneiden, bzw. sich nicht mehrmals im selben Punkt schneiden.

Bemerkung

Sei $\varphi : U \rightarrow M$ und $u \in U$

$v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U, \tau \mapsto (u_1 + \tau e_1, u_2)$ eine Parametrisierung in der Nähe des Punktes u auf die 1-te Koordinatenlinie

$w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U, \tau \mapsto (u_1, u_2 + \tau e_2)$ eine Parametrisierung in der Nähe des Punktes u auf die 2-te Koordinatenlinie

$\varphi \circ v, \varphi \circ w$ und $\varphi(u) = a$

$$\cos(\angle(\varphi \circ v, \varphi \circ w)) = \frac{I_a((\varphi \circ v)'(0), (\varphi \circ w)'(0))}{\sqrt{I_a((\varphi \circ v)'(0), (\varphi \circ v)'(0))} \sqrt{I_a((\varphi \circ w)'(0), (\varphi \circ w)'(0))}}$$

$$(\varphi \circ v)'(0) = (D\varphi)_u e_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)$$

$$(\varphi \circ w)'(0) = (D\varphi)_u e_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$$

damit ist $\cos(\angle(\varphi \circ v, \varphi \circ w)) = \frac{F(u)}{\sqrt{E(u)}\sqrt{G(u)}}$ der Cosinus des Winkels zwischen den Koordinatenlinien

Falls $F(u) = 0$ ist, so stehen die Koordinatenkurven senkrecht aufeinander.

Beispiel:

Sei $\varphi : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S^2 \setminus \{N, S\}$ Parametrisierung der Sphäre

$$\varphi(\alpha, \beta) = (\cos(\beta)\cos(\alpha), \cos(\beta)\sin(\alpha), \sin(\beta))$$

Koordinatenkurven:

Längenkreise(Meridiane)(α konst.)

Breitenkreise(β konst.)

Die Koordinatenkurven stehen senkrecht aufeinander.

Beispiel:

Sei $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus N$ eine andere Parametrisierung der Sphäre

$$x \mapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

Auch hier stehen die Koordinatenkurven senkrecht aufeinander.

Beispiel:

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Z$ Parametrisierung eines Krieszylinders

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha), \beta)$$

Koordinatenlinien: Breitenkreise

Linien auf dem Zylindermantel

Die Koordinatenlinien stehen senkrecht aufeinander.

Beispiel:

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$\varphi : U \rightarrow Gr(f) : u \mapsto (u, f(u))$ Parametrisierung

$$F(u) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$$

Sei $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) = 0 \forall u \in U \Rightarrow F(u) = 0$

Falls $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) = 0 \forall u \in U$, dann ist $Gr(f)$ eine Regelfläche

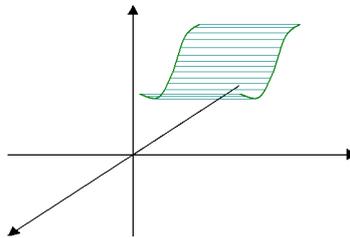


Abbildung 12: Geradenstück entlang einer Kurve bewegen = Regelfläche

5.2 Definition

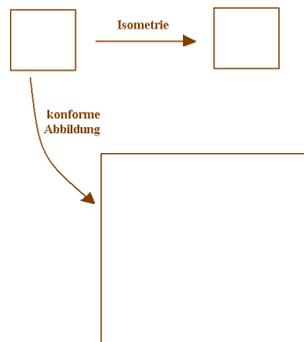
Sei $f : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung mit M, N Flächen im \mathbb{R}^3 .

- f ist eine lokale Isometrie, wenn für alle $a \in M$ und $x, y \in T_a(M)$ gilt: $I_a^M(x, y) = I_{f(a)}^N((Df)_a(x), (Df)_a(y))$ (Interpretation: Unter eine lokale Isometrie bleiben die Messungen (wie Winkel, Länge), die die erste Fundamentalform benötigen unverändert)
- f ist eine Isometrie, wenn es sich zusätzlich um einen Diffeomorphismus handelt
- f ist eine konforme Abbildung, wenn für $x, y \in T_a(M)$ gilt: $\angle(x, y) = \angle((Df)_a(x), (Df)_a(y))$

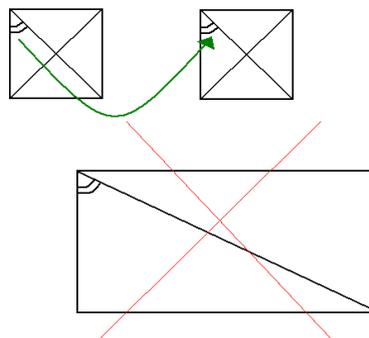
Bemerkung

Unter Isometrie bleiben die Winkeln und die Längen gleich. Unter konformer Abbildung nur die Winkeln werden erhalten.

Beispiel:



Jedoch es gibt keine konforme Abbildung die ein Quadrat in einen Rechteck überführt (die Winkeln müssen erhalten bleiben)



Beispiel:

$$\varphi : \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow S^2 \setminus \{N, S\}$$

$$\varphi(\alpha, \beta) = (\cos(\beta)\cos(\alpha), \cos(\beta)\sin(\alpha), \sin(\beta))$$

Behauptung: φ ist nicht konform

Beweis:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -\cos(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta)\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ -\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$E(\alpha, \beta) = \cos(\beta)^2$$

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

$$G(\alpha, \beta) = 1$$

Sei $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und seien $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\cos(\angle(a, b)) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\underbrace{(D\varphi)_{(\alpha, \beta)}(a)}_{=c}, \underbrace{(D\varphi)_{(\alpha, \beta)}(b)}_{=d} \in T_{\varphi(\alpha, \beta)}(S^2) \text{ (Tangentialraum)}$$

$$\cos(\angle(c, d)) = \frac{\cos(\beta)^2 a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{\cos(\beta)^2 a_1^2 + a_2^2} \sqrt{\cos(\beta)^2 b_1^2 + b_2^2}}$$

Falls $\cos(\beta) = 1$ (d.h. wir befinden uns auf dem Äquator), dann sind die Winkel gleich: $\angle(c, d) = \angle(a, b)$.

Mit $a = (1, 1)$ und $b = (1, 0)$ ist $\cos(\angle(a, b)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und

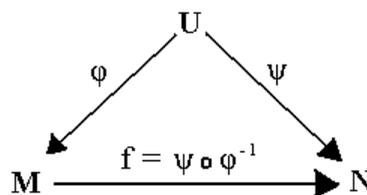
$$\cos(\angle(c, d)) = \frac{\cos(\beta)^2}{\sqrt{\cos(\beta)^2 + 1} |\cos(\beta)|} = \sqrt{\frac{\cos(\beta)^2}{1 + \cos(\beta)^2}} \stackrel{\cos(\beta) \neq 1}{\neq} \cos(\angle(a, b))$$

Bemerkung

Die stereographische Projektion ist eine konforme Abbildung. Die Winkel bleiben erhalten aber die Längen nicht. Betrachte Geraden durch den 0-Punkt: sie haben unendliche Länge und werden auf Meridiane auf der Sphäre abgebildet. Die Meridiane der Sphäre haben aber die Länge 2π . Somit werden die Längen nicht erhalten.

5.3 Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, φ, ψ Parametrisierungen



$$f \text{ ist Isometrie} \Leftrightarrow \forall u \in U: \begin{pmatrix} E_\varphi(u) & F_\varphi(u) \\ F_\varphi(u) & G_\varphi(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\psi(u) & F_\psi(u) \\ F_\psi(u) & G_\psi(u) \end{pmatrix}$$

Beweis:

f ist ein Diffeomorphismus da φ^{-1} und ψ Diffeomorphismen sind.

„ \Rightarrow “

Sei f Isometrie

$$\psi = f \circ \varphi$$

$$(D\psi)_u = (Df)_{\varphi(u)}(D\varphi)_u$$

Mit e_1, e_2 in \mathbb{R}^2 die kanonische Basis, gilt: $(D\psi)_u(e_1) = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u)$

$$(D\psi)_u(e_2) = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u)$$

und damit:

$$\begin{aligned} E_\psi(u) &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u) \right\rangle \\ &= \left\langle (Df)_{\varphi(u)} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), (Df)_{\varphi(u)} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \right\rangle \\ &\stackrel{f \text{ Isometrie}}{=} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \right\rangle \\ &= E_{\varphi(u)}(u) \end{aligned}$$

$$F_\psi(u) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u) \right\rangle = F_\varphi(u)$$

$$G_\psi(u) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \psi}{\partial u_2}(u) \right\rangle = G_\varphi(u)$$

„ \Leftarrow “

zu zeigen: $(Df)_{\varphi(u)}$ ändert die erste Fundamentalform nicht.

Sei $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ die kanonische Basis

Sei $a \in \mathbb{R}^2$, $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$

$$I_{\varphi(u)}((D\varphi)_u(a), (D\varphi)_u(a)) = a_1^2 E_\varphi(u) + 2a_1 a_2 F_\varphi(u) + a_2^2 G_\varphi(u)$$

$$I_{f(\varphi(u))}(\underbrace{(Df)_{\varphi(u)}}_{\psi(u)} \underbrace{(D\varphi)_u(a)}_{(D\psi)_u(a)}, \underbrace{(Df)_{\varphi(u)}}_{\psi(u)} \underbrace{(D\varphi)_u(a)}_{(D\psi)_u(a)}) = a_1^2 E_\psi(u) + 2a_1 a_2 F_\psi(u) +$$

$$a_2^2 G_\psi(u)$$

Nach Koeffizientenvergleich folgt:

$$E_\varphi(u) = E_\psi(u)$$

$$F_\varphi(u) = F_\psi(u)$$

$$G_\varphi(u) = G_\psi(u)$$

Bemerkung

Seien b, c Bilinearformen von den Vektorräume V bzw. W mit $\dim V = \dim W$ und $f : V \rightarrow W$, dann gilt:

$$\forall v \in V : b(v, v) = c(f(v), f(v))$$

Betrachten wir weiter:

$$b(v+w, v+w) = b(v, v) + 2b(v, w) + b(w, w) \text{ und } c(f(v+w), f(v+w)) = c(f(v), f(v)) + 2c(f(v), f(w)) + c(f(w), f(w))$$

mit $b(v, v) = c(f(v), f(v))$ und $b(w, w) = c(f(w), f(w))$ folgt:

$$b(v, w) = c(f(v), f(w))$$

Dies gilt unter die Voraussetzung dass $2 \neq 0$, d.h. der Skalarkörper hat nicht Charakteristik 2.

Bemerkung

Seien M, N Flächen und seien zwei numerische Funktionen:

$$A_M : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_N : N \rightarrow \mathbb{R}$$

Wenn $\varphi : U \rightarrow M' \subseteq M$ und $\psi : V \rightarrow N' \subseteq N$ lokale Parametrisierungen sind, ist $A_M(\varphi(u)) = B(E_\varphi(u), F_\varphi(u), G_\varphi(u))$ und $A_N(\psi(v)) = B(E_\psi(v), F_\psi(v), G_\psi(v))$, wobei $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist und $f : M \rightarrow N$ eine lokale Isometrie ist. Dann ist $A_M = A_N \circ f$.

Bedeutung:

Gibt es zwischen zwei Flächen eine lokale Isometrie und zwei Abbildungen die numerische Werte annehmen, dann hängen diese zwei Abbildungen unter die obigen Voraussetzungen nur von den Koeffizienten des Maßensors und der Isometrie ab. Die numerische Werte stimmen dann überein. Numerische Größen, die nur von der Koeffizienten des Maßensors abhängen bleiben unverändert unter eine lokale Isometrie.

5.4 Satz

$f : M \rightarrow N$ ist konform \Leftrightarrow

$\exists \lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit: $\forall a \in M \forall x, y \in T_a(M) : I_{f(a)}((Df)_a(x), (Df)_a(y)) = \lambda^2(a) I_a(x, y)$

Beweis:

„ \Leftarrow “: (konform \cong Winkelgleichheit)

$$\text{für } a \in M \text{ und } x, y \in T_a(M) : \cos(\angle(x, y)) = \frac{I_a(x, y)}{\sqrt{I_a(x, x)} \sqrt{I_a(y, y)}}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\angle((Df)_a(x), (Df)_a(y))) &= \frac{I_{f(a)}((Df)_a(x), (Df)_a(y))}{\sqrt{I_{f(a)}((Df)_a(x), (Df)_a(x))} \sqrt{I_{f(a)}((Df)_a(y), (Df)_a(y))}} \\
&= \frac{\lambda^2(a) I_a(x, y)}{|\lambda(a)| \sqrt{I_a(x, x)} |\lambda(a)| \sqrt{I_a(y, y)}} \\
&= \frac{I_a(x, y)}{\sqrt{I_a(x, x)} \sqrt{I_a(y, y)}} \\
&= \cos(\angle(x, y))
\end{aligned}$$

„ \Rightarrow “:

Sei $g : V \rightarrow W$ ein winkelerhaltenden Isomorphismus zwischen euklidischen Vektorräume derselben Dimension

Sei (v_1, \dots, v_n) ONB von V . Diese ONB wird durch g auf eine Orthogonalbasis von W abgebildet, also $w_i = g(v_i)$

Für $v \in V \setminus \{O\}$: $\lambda_v = \frac{\|g(v)\|}{\|v\|} > 0$

Behauptung

$$\lambda_{v_i} = \lambda_{v_j} \quad \forall i, j$$

Vergleiche $\cos(\angle(v_i, v_i + v_j))$ mit $\cos(\angle(g(v_i), g(v_i + v_j)))$.

Sie sind gleich und $\Rightarrow \lambda_{v_i} = \lambda_{v_j} \quad \forall i, j$

Setze $\lambda = \lambda_{v_1} = \dots = \lambda_{v_n}$

Sei $v \in V \setminus \{O\} \Rightarrow \lambda_v = \lambda$

Stelle v als Linearkombination der Basisvektoren dar:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$$

$$\begin{aligned}
\lambda_v &= \frac{\left\| \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle g(v_i) \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i \right\|} \\
&= \frac{\left\| \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle^2 \langle g(v_i), g(v_i) \rangle \right\|}{\left\| \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle^2 \langle v_i, v_i \rangle \right\|} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\text{denn } \lambda^2 \|v_i\|^2 = \lambda^2 \langle v_i, v_i \rangle = \lambda$$

Bemerkung

Sei $a \in M$. $(Df)_a : T_a M \xrightarrow{\cong} T_{f(a)} N$ ist winkelerhaltenden Isomorphismus

Es gibt $\lambda_a > 0$: $\|(Df)_a(x)\|^2 = \lambda_a^2 \|x\|^2$

Daraus folgt:

$$\langle (Df)_a(x), (Df)_a(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$

Noch zu zeigen: $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}: a \mapsto \lambda_a$ differenzierbar

Sei $\varphi : U \rightarrow M' \subseteq M$ parametrisiertes Flächenstück.

$$\lambda_a^2 = \frac{I_{f(a)}((Df)_a(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)), (Df)_a(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)))}{I_a(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u))}$$

damit ist λ_a^2 differenzierbar von u abhängig

λ_a^2 ist positiv und reell $\Rightarrow \lambda_a$ ist differenzierbar

Bei Isometrien zwischen zwei Tangentialräume bleiben Winkeln und Längen erhalten.

Bei konforme Abbildungen ist eine Streckung zugelassen, jedoch derselbe Streckfaktor in allen Richtungen, so dass die Winkeln erhalten bleiben.

6 Gauß-Abbildung und Krümmung

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare zusammenhängende Fläche.

Wähle eine Orientierung: (d.h. wähle ein Einheitsnormalenfeld) $N : M \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

6.1 Definition

N ist die Gauß-Abbildung. N ist differenzierbar, mit:

$$(DN)_a : T_a(M) \rightarrow T_{N(a)}(S^2)$$

6.2 Satz

$(DN)_a$ ist ein Endomorphismus von $T_a(M)$

Beweis:

$$T_a(M) = N(a)^\perp = T_{N(a)}(S^2)$$

6.3 Definition

$L_a = -(DN)_a : T_a(M) \rightarrow T_a(M)$ heißt Weingarten-Abbildung oder Form-Operator.

6.4 Satz

L_a ist selbstadjungiert bzgl. I_a .

Beweis:

zu zeigen: $\forall x, y \in T_a(M): I_a(L_a(x), y) = I_a(x, L_a(y))$

Es genügt zu prüfen für x, y Basisvektoren von $T_a(M)$.

Sei $x = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)$ und $y = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)$ (Behauptung ist klar für $x = y$)

$$\langle N(\varphi(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \rangle = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_j} \langle N \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \rangle (u) = \langle \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u_j}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \rangle + \langle (N \circ \varphi)(u), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial u_i}(u) \rangle$$

$$\text{wobei: } \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u_j}(u) = (DN)_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u)) = -L_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u))$$

$$\Rightarrow \langle L_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \rangle = \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial u_i}(u) \rangle$$

Sei $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \langle L_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \rangle &= \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j \partial u_i}(u) \rangle \\ &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}(u) \rangle \\ &\stackrel{\text{Indizes vertauschen}}{=} \langle L_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u) \rangle \\ &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u), L_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u)) \rangle \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung

6.5 Definition

$II_a : T_a(M) \times T_a(M) \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto I_a(L_a(x), y)$ heißt zweite Fundamentalform. Sie ist nach vorherigen Satz symmetrisch.

$III_a : T_a(M) \times T_a(M) \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto I_a(L_a(x), L_a(y)) = I_a(L_a^2(x), y)$ heißt dritte Fundamentalform.

Matrixdarstellung von II bzgl. φ :

$\begin{pmatrix} e(u) & f(u) \\ f(u) & g(u) \end{pmatrix}$ wobei:

$$\begin{aligned} e(u) &= II_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)) \\ &= I_{\varphi(u)}(L_{\varphi(u)}(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)), \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u)) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Satz 10.4}}{=} \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}(u) \rangle$$

$$f(u) = \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \rangle$$

$$g(u) = \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2}(u) \rangle$$

Damit ist:

$$\begin{pmatrix} e(u) & f(u) \\ f(u) & g(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}(u) \rangle & \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \rangle \\ \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \rangle & \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2}(u) \rangle \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \rangle = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\|}$$

$$\langle N(\varphi(u)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \rangle = \frac{\det(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}(u))}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\|}$$

In diese letzte Formel kommt die Gauß-Abbildung nicht mehr vor und damit kann man die Matrixdarstellung von II bzgl. φ direkt aus der Parametrisierung berechnen.

Sei $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ die Matrix der Weingarten-Abbildung $L_{\varphi(u)}$ bzgl. $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$. Diese Matrix ist symmetrisch und es gilt:

$$\begin{aligned} II_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\right) &= I_{\varphi(u)}\left(\alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) + \alpha_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\right) \\ &= \alpha_{11} I_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\right) + \alpha_{21} I_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\right) \\ &= \alpha_{11} F(u) + \alpha_{21} G(u) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}}_{\text{transponierte Matrix der Weingarten-Abbildung}} \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{Maßtensor}}$$

$$\text{Also: } \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Die Matrix der Weingarten-Abbildung hängt nur von u mit der Klasse C^{k-2} ab, wenn φ eine C^k -Abbildung ist.

Hauptachsentransformation:

ONB: (v_1, v_2) von $T_a(M)$ mit: v_1, v_2 Eigenvektoren von L_a .

6.6 Definition

Die Eigenwerte von L_a sind die Hauptkrümmungen von M bei a , $\kappa_1(a)$, $\kappa_2(a)$. Die Eigenvektoren v_1 und v_2 sind Hauptkrümmungsrichtungen zu $\kappa_1(a)$ und $\kappa_2(a)$.

Das Produkt $\kappa(a) = \kappa_1(a)\kappa_2(a)$ heißt Gaußsche Krümmung und die arithmetische Mittel $H(a) = \frac{1}{2}(\kappa_1(a) + \kappa_2(a))$ heißt Mittlere Krümmung.

Bemerkung

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind immer zueinander orthogonal. Dies ist durch die Hauptachsentransformation gegeben.

Bemerkung

Die Gaußsche Krümmung bleibt unverändert unter isometrische Abbildungen. Minimalflächen haben mittlere Krümmung Null.

Bemerkung

L_a Matrix: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \chi_{L_a} &= \det \begin{pmatrix} X - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & X - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X - \kappa_1(a) & 0 \\ 0 & X - \kappa_2(a) \end{pmatrix} \\ &= (X - \kappa_1(a))(X - \kappa_2(a)) \\ &= X^2 - 2H(a)X + \kappa(a) \end{aligned}$$

D.h. falls man Gaußsche und Mittlere Krümmung kennt, stellt man das charakteristische Polynom χ_{L_a} auf und die Nullstellen von χ_{L_a} sind die Hauptkrümmungen:

$$\kappa_{1,2}(a) = H(a) \pm \sqrt{H(a)^2 - \kappa(a)}$$

$$\begin{aligned} H^2 - \kappa = 0 &\iff \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}{4} - \kappa_1 \kappa_2 = 0 \\ &\iff \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} = 0 \\ &\iff \kappa_1 = \kappa_2 \end{aligned}$$

Falls $\kappa_1 \neq \kappa_2$ haben wir differenzierbare Abhängigkeit.

6.7 Definition

Sei M eine Fläche und a ein Punkt aus M . a ist:

- elliptisch, wenn $\kappa(a) > 0$ ist
- parabolisch, wenn $\kappa(a) = 0$ ist und $H(a) \neq 0$ ist
- hyperbolisch, wenn $\kappa(a) < 0$ ist
- Nabelpunkt, wenn $\kappa_1(a) = \kappa_2(a)$
 - eigentlich, wenn $\kappa_1(a) = \kappa_2(a) \neq 0$
 - Flachpunkt, wenn $\kappa_1(a) = \kappa_2(a) = 0$

Beispiel

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $(Df)_0 = 0$
 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: u \mapsto (u, f(u))$

Dann gilt: $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$

$$N(\varphi(u)) = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u_2}(u) & -\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial u_1}(u)^2 + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)^2}}$$

$$E(u) = 1 + \frac{\partial f}{\partial u_1}(u)^2 \quad e(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(u) \frac{1}{n(u)}$$

$$F(u) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \quad f(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \frac{1}{n(u)}$$

$$G(u) = 1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)^2 \quad g(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}(u) \frac{1}{n(u)}$$

$$\text{wobei } n(u) = \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial u_1}(u)^2 + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u)^2}$$

Dann ist:

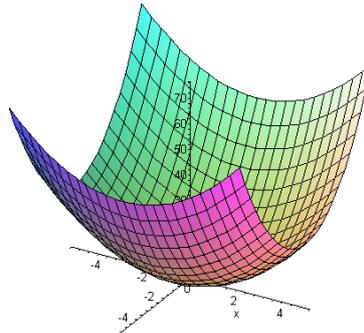
$$\begin{pmatrix} e(u) & f(u) \\ f(u) & g(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{n(u)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(u) & \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(u) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(u) & \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{n(u)} \text{Hesse}(f)_u$$

Die Matrix der Weingarten-Abbildung ist:

$$\begin{pmatrix} e(u) & f(u) \\ f(u) & g(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u) & F(u) \\ F(u) & G(u) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n(u)^3} \text{Hesse}(f)_u \begin{pmatrix} 1 + (\frac{\partial f}{\partial u_2}(u))^2 & -\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \\ -\frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) & 1 + (\frac{\partial f}{\partial u_1}(u))^2 \end{pmatrix}$$

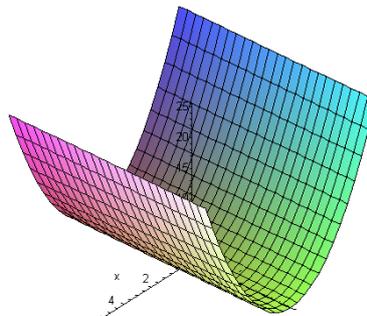
Bei 0: Die Matrix der Weingarten-Abbildung ist $\text{Hesse}(f)_0$

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x_1^2 + 2x_2^2$
 $\text{Hesse}(f)_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ also 0 ist elliptischer Punkt

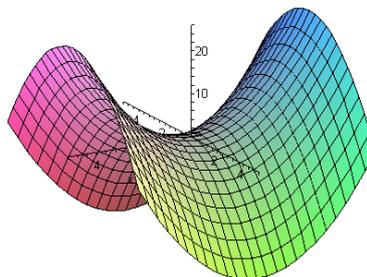


Es handelt sich hier nicht um eine Rotationsfläche. Die Hauptkrümmungsrichtungen sind e_1 und e_2 , die kanonischen Basisvektoren.

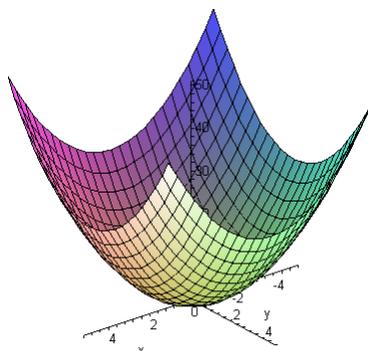
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2$
 $Hesse(f)_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ also 0 ist parabolischer Punkt



- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2 - x_2^2$
 $Hesse(f)_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ also 0 ist hyperbolischer Punkt

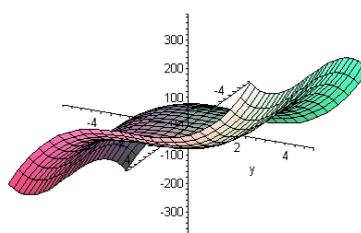


- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^2 + x_2^2$
 $Hesse(f)_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ also 0 ist eigentlicher Nabelpunkt (spezieller elliptischer Punkt)



Hier handelt es sich um eine Rotationsfläche

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1^3 + 2x_2^3$
 $Hesse(f)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ also 0 ist Flachpunkt

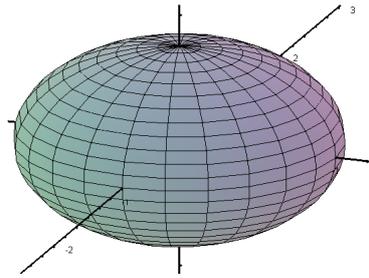


Bemerkung

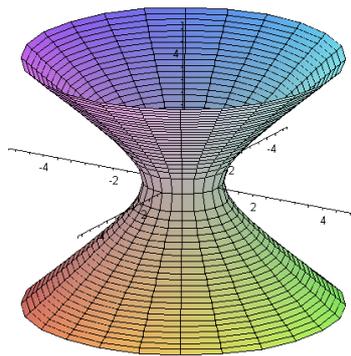
Flächen die elliptische und hyperbolische Punkte besitzen, besitzen nach dem Zwischenwertsatz auch parabolische Punkte.

Beispiele

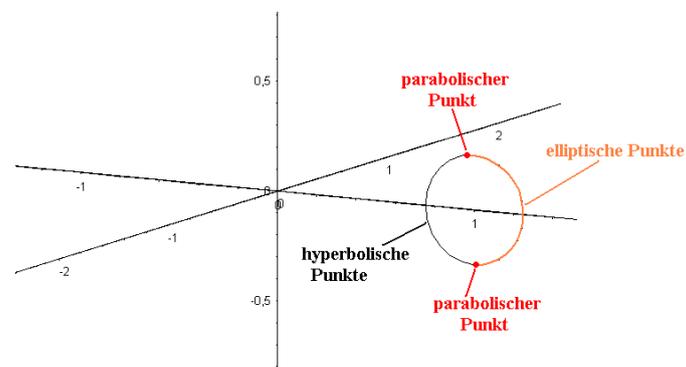
- Ellipsoid: besteht nur aus elliptische Punkte

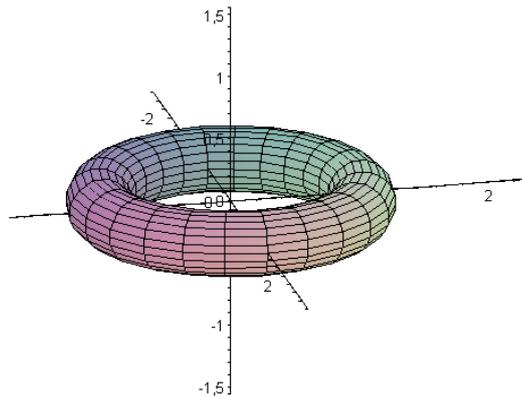


- Hyperboloid: besteht nur aus hyperbolische Punkte



- Torus: besitzt elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte





Interpretation

Elliptische Punkte: die Fläche liegt auf einer Seite der Tangentialebene

Hyperbolische Punkte: die Tangentialebene wird die Fläche schneiden

Parabolische Punkte: die Tangentialebene enthält eine Gerade der Fläche

Bemerkung

Sei M Flächenstück mit $0 \in M$, $T_0(M) = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. $M = Gr(h)$ mit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Umgebung von 0 . Sei weiter $\varphi : U \rightarrow M: u \mapsto (u, h(u))$. Es gilt: $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(0) = e_1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(0) = e_2$ und $N(0) = e_3$.

Sei $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $w(0) = 0$, regulär, $w = \varphi \circ v$, wobei $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ mit $v(0) = 0$.
Es gilt weiter:

$$e_w(0) = \frac{w'(0)}{\|w'(0)\|}$$

$$e'_w(0) = \kappa(0)n_w(0)$$

Mit $e_w \perp N(w(t))$, beide normiert ist $N(w(t)) \wedge e_w(t) = s_w(t)$ der Seitenvektor von w bei t . Der Seitenvektor $s_w(t)$ steht senkrecht auf dem Vektor $N(w(t))$. Damit befindet sich $s_w(t)$ in der Tangentialebene und der Seitenvektor und der Tangenteneinheitsvektor bilden zusammen ein ONS der Tangentialebene.

Damit ist $(\underbrace{e_w(t), s_w(t)}_{=0}, N(w(t)))$ ein ONS der \mathbb{R}^3 .

$$e'_w(t) = \underbrace{\langle e'_w(t), e_w(t) \rangle}_{=0} e_w(t) + \langle e'_w(t), s_w(t) \rangle s_w(t) + \langle e'_w(t), N(w(t)) \rangle N(w(t))$$

$\langle e'_w(t), e_w(t) \rangle = 0$ denn $\langle e_w(t), e_w(t) \rangle = 1$ und durch ableiten: $\frac{1}{2} \langle e'_w(t), e_w(t) \rangle = 0$

6.8 Definition

$\kappa_{w,n}(t) = \langle e'_w(t), N(w(t)) \rangle$ heißt Normalkrümmung von w bei t

$$\begin{aligned} \kappa_{w,g}(t) &= \langle e'_w(t), s_w(t) \rangle \\ &= \langle e'_w(t), N(w(t)) \wedge e_w(t) \rangle \\ &= \det(e'_w(t), N(w(t)), e_w(t)) \\ &= \det(e_w(t), e'_w(t), N(w(t))) \end{aligned}$$

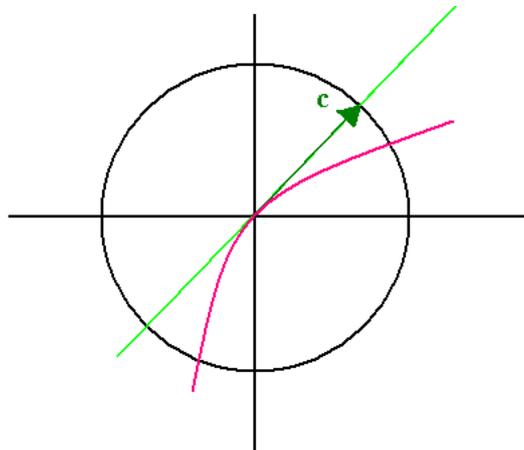
$\kappa_{w,g}$ heißt geodätische Krümmung von w bei t

6.9 Satz von Meusnier

Die Normalkrümmung hängt nur von der Tangente der Kurve ab.

Bemerkung

Sei $c \in T_0(M)$, $\|c\| = 1$



$$E_c = \mathbb{R}c + \mathbb{R}e_3$$

$$E_c \cap M = \text{Bild der Kurve } \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M : t \xrightarrow{\beta} ct \xrightarrow{\varphi} \varphi(ct)$$

$$\begin{aligned}
\alpha'(0) &= (\varphi \circ \beta)'(0) \\
&= (D\varphi)_0 \underbrace{\beta'(0)}_{=c} \\
&= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(0) \right) c \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} c \\
&= c (\in \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

$\kappa_{c,n}(0)$:

$Bi(\alpha) \subseteq E_c \Rightarrow \alpha$ ist ebene Kurve

6.10 Satz

Betrag der Krümmung der ebenen Kurve ist gleich der Betrag der Normalkrümmung

$$|\kappa_\alpha(0)| = |\kappa_{c,n}(0)|$$

Beweis:

ONS in E_c : c, e_3

$$\alpha'(0) = c$$

$$e'_\alpha(0) = \kappa_\alpha(0)e_3 \Rightarrow \kappa_\alpha(0) = \langle e'_\alpha(0), e_3 \rangle$$

$$\kappa_{c,n}(0) = \langle e'_\alpha(0), e_3 \rangle$$

Damit $\kappa_\alpha(0) = \kappa_{c,n}(0)$

Mit einer anderen Orientierung des ONS, ändert sich das Vorzeichen von $\kappa_\alpha(0)$. Damit $|\kappa_\alpha(0)| = |\kappa_{c,n}(0)|$

Satz

Die Normalkrümmung kann mit Hilfe der zweiten Fundamentalform ausgedrückt werden

$$\kappa_{c,n}(0) = II_0(c, c)$$

Beweis:

Sei $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ normal parametrisiert mit $w'(0) = c$ und $w(0) = 0$

$$\kappa_{c,n}(0) = \langle w''(0), N(0) \rangle = \langle w''(0), e_3 \rangle$$

Es gilt: $\langle w'(0), N \circ w(0) \rangle = 0$. Damit:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w''(0), N(w(0)) \rangle + \langle w'(0), (DN)_{w(0)}(w'(0)) \rangle \\ &= \langle w''(0), N(0) \rangle + \langle c, -L_0(c) \rangle \\ &= \kappa_{c,n}(0) - II_0(c, c) \end{aligned}$$

Also $\kappa_{c,n}(0) = II_0(c, c)$

Bemerkung: Satz 6.9 und Satz 6.10

Sei M ein Flächenstück und $0 = a \in M$. Sei weiter $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $w(0) = a$ und $c = \frac{w'(0)}{\|w'(0)\|}$. Der Normalschnitt mit der Ebene ist durch $N(0)$ und c gegeben. Sei v eine Ebene Kurve mit $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ und $v(0) = 0$. Dann nach Satz 6.9 und Satz 6.10 gilt:

$$|\kappa_{c,n}| = |\kappa_v(0)| = II_0(c, c)$$

6.11 Definition

Die Menge

$$\{c \in T_a(M) \mid II_a(c, c) = \pm 1\}$$

heißt Dupin'sche Indikatrix. Diese Menge ist die Vereinigung von 2 Kegelschnitten.

6.12 Satz

Die Dupin'sche Indikatrix ist:

- Ellipse, falls a elliptischer Punkt
- 2 Hyperbeln, falls a hyperbolischer Punkt
- 2 parallele Geraden, falls a parabolischer Punkt
- \emptyset , falls a Flachpunkt

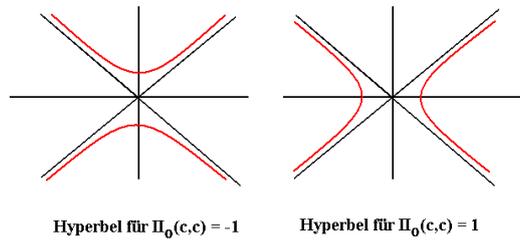
Beweis:

Seien c_1 und $c_2 \in T_a(M)$ die Hauptkrümmungsrichtungen.

Die Matrix von II_a bzgl. c_1 und c_2 ist: $\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$

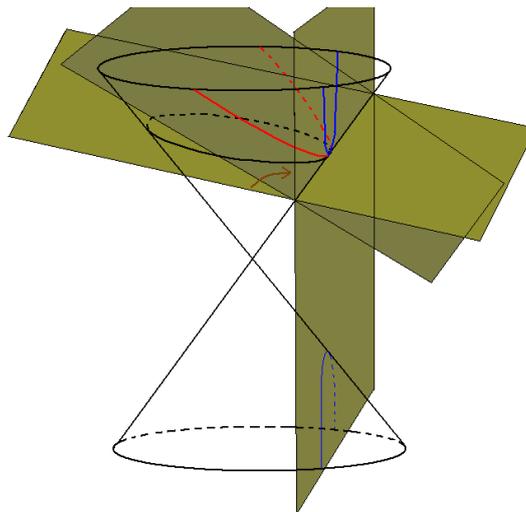
Für $c \in T_a(M)$ ist $c = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2$ und damit $II_a(c, c) = \gamma_1^2 \kappa_1 + \gamma_2^2 \kappa_2$

- $\kappa_1, \kappa_2 \stackrel{>}{<} 0 \Rightarrow II_a(c, c)$ ist Ellipse
- $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 < 0$ (oder umgekehrt) $\Rightarrow II_a(c, c)$ ist Hyperbel



- a parabolisch $\Rightarrow \kappa_1 = 0$ oder $\kappa_2 = 0 \Rightarrow II_a(c, c) = \gamma_2^2 \kappa_2$ oder $II_a(c, c) = \gamma_1^2 \kappa_1$ also 2 parallele Geraden
- a Flachpunkt $\Rightarrow II_a(c, c) = 0 \Rightarrow$ Dupin'sche Indikatrix $= \emptyset$

Übergang von Ellipsen zu Hyperbeln durch Parabeln (Veranschaulichung mit Kegelschnitte)



Bemerkung

Sei $0 \in M$ und $T_a(M) = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Sei $h : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\varphi : U \rightarrow M : u \mapsto (u, h(u))$ und $M = Gr(h)$.

Die Matrix von II_0 ist:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial u_1^2}(0) & \frac{\partial^2 h}{\partial u_1 \partial u_2}(0) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial u_2 \partial u_1}(0) & \frac{\partial^2 h}{\partial u_2^2}(0) \end{pmatrix}$$

Falls e_1 und $e_2 \in \mathbb{R}^2$ die Hauptkrümmungsrichtungen sind, dann ist die Matrix von II_a :

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

Weiter gilt: $h(x) = \underbrace{h(0)}_{=0} + \underbrace{(Dh)_0 x}_{=0} + \frac{1}{2} x^{tr} \text{Hesse}(h)_0 x + R(x)$, wobei $\deg(R(x)) > 2$ und

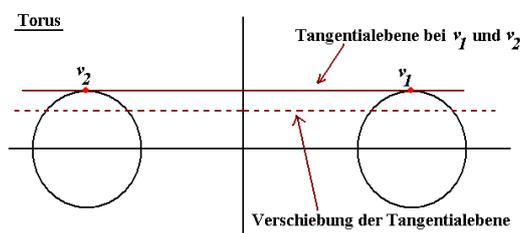
$$R(x) \rightarrow 0$$

$$\text{Damit: } h(x) = \frac{1}{2} x^{tr} \text{Hesse}(h)_0 x + R(x) = \frac{1}{2} II_0(x, x) + R(x)$$

Für ε klein betrachten wir die Menge $h^{-1}(\varepsilon)$

$x \in h^{-1}(\varepsilon) \Leftrightarrow II_0(x, x) = 2(\varepsilon - R(x))$ und damit, weil $R(x) \rightarrow 0$, folgt: $II_0(x, x) = 2\varepsilon$

Beispiel:



Man erhält also 2 konzentrische Kreise, die in 2 parallele Ebenen liegen (also 2 parallele Geraden, denn Kreise sind spezielle Geraden). Damit sind die Punkte v_1 und v_2 parabolische Punkte

7 Das Theorema Egregium

Sei $\varphi : U \rightarrow M$ ein parametrisiertes Flächenstück.

$$\text{Bei } \varphi(u): \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u), N(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(u)\|}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \alpha N(\varphi(u))$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2 \partial u_1} = \Gamma_{21}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \beta N(\varphi(u))$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \gamma N(\varphi(u))$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \delta N(\varphi(u))$$

$$\frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial u_1} = -\alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - \alpha_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial^2(N \circ \varphi)}{\partial u_2} = -\alpha_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - \alpha_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$$

7.1 Definition

$\Gamma_{i,j}^k$ heißen Christoffel-Symbole.

$\alpha = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, N(\varphi(u)) \rangle = e$ (erste Koeffizient der zweiten Fundamentalform II_a)

Analog $\beta = \gamma = f$ und $\delta = g$

Weil alles 2-mal stetig partiell differenzierbar ist, folgt aus:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2 \partial u_1} \Rightarrow \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 \text{ und } \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$$

7.2 Satz

Die Christoffel-Symbole hängen nur von den Koeffizienten des Maßtensors: E, F, G ab.

Beweis:

$$\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle = \Gamma_{11}^1 \underbrace{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle}_{=E} + \gamma_{11}^2 \underbrace{\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle}_{=F} = \Gamma_{11}^1 E + \gamma_{11}^2 F$$

$$\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \gamma_{11}^2 G$$

usw...

Weiter ist:

$$\frac{\partial E}{\partial u_1} = 2 \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle$$

$$\frac{\partial E}{\partial u_2} = 2 \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \underbrace{\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \rangle}_{\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_1}} + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} \rangle$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_1} = \Gamma_{11}^1 E + \gamma_{11}^2 F$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_2} = \Gamma_{11}^1 F + \gamma_{11}^2 G$$

Analog für $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$.

Bemerkung

Numerische Größen die nur von den Koeffizienten des Maßtensors und Christoffel-Symbolen abhängen, hängen nur von Maßtensor Koeffizienten ab und sind somit invariant unter lokalen Isometrien.

7.3 Satz: Theorema Egregium

Sei M eine Fläche der Klasse C^3 . Die Gaußsche Krümmung κ ist invariant unter lokalen Isometrien.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass κ allein von E, F, G und $\Gamma_{i,j}^k$ abhängt!

$$\kappa = \det(-(DN)_a) = \frac{\det(II_a)}{\det(I_a)} \quad (-(DN)_a \text{ ist die Weingarten-Abbildung})$$

Sei $\varphi : U \rightarrow M$ eine C^3 -Parametrisierung

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u_2 \partial u_1^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_1} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u_2 \partial u_1 \partial u_2} = 0$$

$$\frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial u_2 \partial u_1} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + e(N \circ \varphi) (*)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} = \Gamma_{21}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + f(N \circ \varphi) (**)$$

Nochmal ableiten ergibt die Gleichung:

$$A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + C_1(N \circ \varphi) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, (N \circ \varphi) \text{ linear unabhängig} \Rightarrow A_1, B_1, C_1 = 0$$

(*) partiell nach u_2 ableiten

(**) partiell nach u_1 ableiten

Dann zusammenfassen zu dem Ausdruck

$$A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + C_1(N \circ \varphi) = 0$$

Schaut man sich nur der Koeffizient B_1 an, so hat man:

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \alpha_{22} e + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - \alpha_{21} f + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1}$$

weiter:

$$-\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} = *$$

Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

$$* = \alpha_{22} e - \alpha_{21} f$$

$$= E \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= E \frac{\det(II_a)}{\det(I_a)}$$

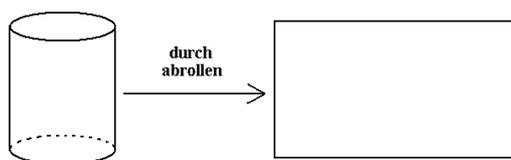
$$= E \kappa$$

Da auf der linken Seite nur Christoffel-Symbole stehen, hängt die Krümmung nur von E, F, G und $\Gamma_{i,j}^k$

Bemerkung

Das Theorema Egregium begründet, warum es nicht möglich ist, eine Sphäre Maßstabgetreu in der Ebene abzubilden. Eine Sphäre besitzt nur elliptische Punkte und damit hat Gaußsche Krümmung $\kappa \neq 0$ aber die Ebene besteht nur aus Flachpunkten, also $\kappa = 0$. Aus der Tatsache, dass die Gaußsche Krümmung invariant unter lokale Isometrien bleibt, folgt, dass es keine Isometrie zwischen einer Sphäre und einer Ebene geben kann.

Andere ist die Situation bei einem Zylinder. Der Zylinder besteht aus parabolischen Punkten, also $\kappa = 0$ und die Ebene besitzt nur Flachpunkte, damit auch $\kappa = 0$. Also ein Zylinder kann Maßstabgetreu in der Ebene abgebildet werden (ACHTUNG: Dies folgt nicht aus dem Theorema Egregium)



Mercator Projektion wird für die Navigation verwendet. Bei der Mercator Projektion schneidet eine gerade Linie alle Breitengrade und Längengrade unter demselben Winkel.

Geodätische sind kürzeste Verbindungslinien auf einer Fläche. Sie lassen sich durch Differentialgleichungen mit Christoffel-Symbolen beschreiben.