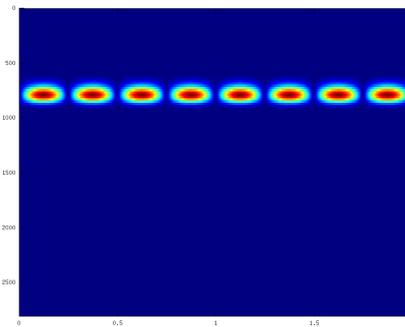
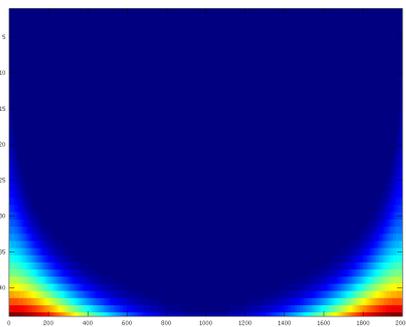


Wavelets

Vorlesung, zuerst gehalten im Wintersemester 2011/12

Tomas Sauer

Version 1.0
 Letzte Änderung: 26.5.2012



Statt einer Leerseite . . .

0

Daß doch die Menschen immer meinen, eine Tatsache erklärt zu haben,
wenn sie nur ein recht fremdartiges Wort dafür gefunden haben.

F. Glausner, *Der Tee der drei alten Damen*

Die wahren Analphabeten sind schließlich diejenigen, die zwar lesen können,
es aber nicht tun. Weil sie gerade fernsehen.

L. Volkert, *SZ-Online*, 11.7.2009

I always found it shameful that mere technologists should have arrogated to
themselves the right to be called that, scientists, men of knowledge.

S. Rushdie, *Grimus*

The most incredible thing about miracles is that they happen.

C. K. Chesterton, *The Innocence of Father Brown*

Tomas Sauer
Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Justus-Liebig-Universität Gießen
Heinrich-Buff-Ring 44
D-35392 Gießen

Inhaltsverzeichnis

0

1	Wavelets – was und wofür überhaupt?	3
1.1	Die Wavelettransformation zum Ersten	3
1.2	Musik und Zeit-/Frequenz–Analyse	5
1.3	Ecken, Kanten, Features	10
2	Grundlagen & Theorie	13
2.1	Fourier & Fourier	13
2.2	Topologie, Algebra & Maße	15
2.3	Die modulare Funktion & „besondere“ Gruppen	26
2.4	Faltungen & Gruppenalgebra	28
2.5	Charaktere & duale Gruppen	34
2.6	Wo die Charaktere wirklich herkommen	40
3	Wavelets – die stetige Transformation	45
3.1	Die Fouriertransformation als technisches Vehikel	45
3.2	Die Wavelettransformation und ihre Inverse	46
3.3	Die Implementierung der Wavelettransformation	51
3.4	Die inverse Transformation	62
3.5	Die inverse Transformation?	65
3.6	Wavelets als Mikroskop	66
3.7	Warum die Dinge nicht so sind, wie sie sein sollten	74
3.8	Momentanfrequenzen, Fourierfenster und Waveletdesign	78
4	Frames und Gruppen	83
4.1	Basen und Frames	83
4.2	Wavelet–Frames	91
4.3	Wavelets und Gruppen	102
5	Filterbänke & Wavelets	107
5.1	Signale & Filter	107
5.2	Filterbänke	110
5.3	Downsampling und ganzzahlige Matrizen	111
5.4	Filterbänke im Symbolkalkül	117
5.5	Tiefpass, Subdivision & Interpolation	122
5.6	Interpolation & perfekte Rekonstruktion	124

5.7	Kaskaden & Pyramiden	127
6	Verfeinerbare Funktionen, Subdivision und Wavelets	129
6.1	Subdivision & Konvergenz	129
6.2	Multiresolution	140
6.3	Filterbank–Wavelets	143
7	Multiple Filterbänke und Shearlets	146
7.1	Multiple Filterbankkaskaden & Bäume	146
7.2	Mehrfach–Wavelets	150
7.3	Shearlets	153
7.4	Shearlets der Codimension 1	155
	Literatur	158

... the world's always movin', and if
you wanna stay ahead, you gotta
dance.

T. Pratchett, *The amazing Maurice
and his educated rodents*

Wavelets – was und wofür überhaupt?

1

Beginnen wir das Ganze doch mit einer etwas untechnischen Einführung in die Welt der Wavelets und wofür man sie verwenden kann. Wenn in diesem Kapitel einige Begriffe unklar oder vage bleiben sollten, so ist das durchaus Absicht, es geht erst einmal um Ideen.

1.1 Die Wavelettransformation zum Ersten

Die *Wavelettransformation* zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einem *Wavelet* ψ ist ungefähr¹ definiert als

$$W_\psi f(x, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

wobei sich das Wavelet ψ dadurch auszeichnet, daß es *mittelwertfrei* ist, daß also $\int f = 0$ ist. Tatsächlich werden wir später von Wavelets noch ein klein wenig mehr verlangen, aber alles zu seiner Zeit.

Anschaulich gesehen ist die Wavelettransformation eine *Korrelation* zwischen der Funktion f und einer gestauchten und um x verschobenen Version von ψ . Die Korrelation „ \star “ ist ein inneres Produkt und damit ein Maß für die Ähnlichkeit²:

$$f \star g = \int f(t) g(t - \cdot) \alpha \|f\|_2 \|g\|_2, \quad \alpha \in [-1, 1],$$

wobei $\alpha = 1$ genau dann gilt, wenn die beiden Funktionen f und das entsprechend verschobene g übereinstimmen. So gesehen testet also (1.1) die Funktion f mittels einer

¹Eine ungefähre Definition klingt in der Mathematik erst mal nach einem ziemlich komischen Konzept. Aber wenn man genau hinsieht, dann merkt man recht schnell, daß hier noch einiges an Voraussetzungen und „Allgemeinheiten“ fehlt, weswegen die Definition halt eben nur eine ungefähre ist.

²Wer sich hier durch die Hilbert-Normen der Funktionen überfordert fühlt, darf gerne an ganz „normale“ innere Produkte im \mathbb{R}^n denken und sich $n > 1$ auch selbst aussuchen.

Korrelation gegen eine verschobene und *gestauchte* Kopie des Wavelets ψ . Das „Stau-chen“, vornehm spricht man von einer *Dilatation*, erfolgt über den *Skalenparameter* s . Je größer dieser Wert ist, desto mehr wird ψ auseinandergezogen, je kleiner er ist, desto mehr wird ψ gestaucht. Nun ist ψ aber ein Wavelet, das heisst, ψ hat positive und negative Teile³ und Nullstellen. Interpretiert man nun die Anzahl der Nullstellen von ψ in einem Intervall geteilt durch die Länge des Intervalls als Frequenz von ψ , so sieht man sehr einfach, daß der Faktor s diese Frequenz mit s^{-1} skaliert. Das legt es nahe, s ebenfalls als eine Art Frequenz, genauer gesagt, als eine reziproke Frequenz, anzusehen. Als nächstes sehen wir uns den einfachsten Vertreter der großen Familie von Wavelets an.

Definition 1.1 (Haar–Wavelet) *Das Haar–Wavelet ist die Funktion*

$$\psi_H(x) = \chi_{[-1,0)} - \chi_{(0,1]},$$

wobei χ_I für die charakteristische Funktion des Intervalls I steht,

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$$

Diese offensichtlich mittelwertfreie Funktion geht auf A. Haar (Haar, 1918) zurück und wurde von diesem eingeführt lange bevor das Wort „Wavelets“ überhaupt bekannt war.

Bemerkung 1.2 *Wavelets heissen deswegen Wavelets weil sie eigentlich Ondelettes heissen! Die klassischen Wellen sind natürlich Sinus und Cosinus oder eben die komplexen Funktionen $e^{i\xi t}$. Die sind, wie wir sehen werden, zwar ideal zur Bestimmung von Frequenzspektren, aber völlig ungeeignet für zeitabhängige Phänomene, da sie völlig ungebremst über die ganze reelle Achse oszillieren. Nimmt man nun eine Funktion, bei der diese Oszillationen gedämpft sind, beispielsweise $e^{-t^2} e^{i\xi t}$, dann ist es keine Welle (Onde) mehr, sondern nur noch ein Wellchen, ein Ondelette. Diese Terminologie wurde von der Gruppe um Y. Meyer geprägt, siehe (Meyer, 1993).*

Das Haar–Wavelet aus Definition 1.1 hat ein paar gute und schlechte Eigenschaften:

1. Es ist einfach!
2. Es hat kompakten Träger $[-1, 1]$, so daß $\psi_H\left(\frac{t-x}{s}\right)$ nur dann $\neq 0$ ist, wenn

$$t - x \in s[-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad t \in x + s[-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad t \in [x - s, x + s]$$

ist.

³Muss man wirklich extra erwähnen, daß die Nullfunktion zwar viele Voraussetzungen an ein Wavelet erfüllt, aber keine besonders spannende oder aussagekräftige Analysefunktion darstellt?

3. Es ist (leider) nicht stetig und liefert (auch) deswegen nur eine sehr schlechte *Frequenzlokalisierung*⁴

Soweit soll es erst mal gut sein! Wir haben eine vage Idee, was die Wavelet-Transformation ist und kennen einen ganz einfachen Prototypen eines Wavelets. Zeit also, damit ein wenig zu spielen.

Übung 1.1 Implementieren Sie das Haar-Wavelet in `Octave` und realisieren Sie eine Funktion zur Bestimmung der Wavelet-Transformation (1.1) für vorgegebene Vektoren von Skalen- und Ortswerten.

1.2 Musik und Zeit-/Frequenz-Analyse

Musik- oder Audioanalyse im Allgemeinen befasst sich mit Tönen bzw. mit Tonfolgen. Lokal definieren wir Töne folgendermaßen.

Definition 1.3 Ein Ton⁵ ist ein sich periodisch wiederholendes Ereignis, also eine Funktion mit der Eigenschaft $f(\cdot + \omega^{-1}) = f$. Die Größe ω bezeichnet man als Frequenz des Tons, sie wird normalerweise in Hertz ($1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$) angegeben, also der Anzahl der Schwingungen pro Sekunde.

Für periodische Funktionen kennen wir aus der Analysis eine Darstellungsmethode, nämlich die *Fourierreihe*. Setzen wir die Periodenlänge $1/\omega$ auf 2π , so erhalten wir die folgende Aussage.

Proposition 1.4 Jede 2π -periodische Funktion f kann eindeutig durch ihre Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\cdot) \quad (1.2)$$

dargestellt werden, wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (1.3)$$

ist.

Bemerkung 1.5 Proposition 1.4 ist mit ein wenig Vorsicht zu geniessen!

⁴Was auch immer das ist. Es wird noch ein wenig dauern, bis wir wissen, was das ist und warum das Ergebnis leider zu erwarten ist.

⁵Es sei darauf hingewiesen, daß beispielsweise Perkussionsinstrumente keinen Ton erzeugen, sondern lediglich ein Geräusch!

1. *Zwar sind alle Koeffizienten der Fourierreihe durch (1.3) für „brave“ Funktionen wohldefiniert, endlich und eindeutig⁶, aber über die Konvergenz der Fourierreihe (1.2) ist hier **nichts** gesagt, ebensowenig, ob und wo dieser Grenzwert wirklich mit f übereinstimmt.*
2. *Generell ist die Antwort auch tatsächlich recht enttäuschend! Wie DuBois–Reymond 1873 zeigte, gibt es sogar stetige Funktionen, deren Fourierreihe an einer Stelle divergiert, siehe (Sauer, 2002).*
3. *Andererseits ist es aber auch nicht so schlimm: Normalerweise konvergiert die Fourierreihe braver Funktionen fast überall, siehe (Hardy & Rogosinsky, 1956), aber das wird dann mathematisch schon ein wenig aufwendiger.*

Natürlich haben es alle aufmerksamen Leser⁷ schon gemerkt, daß eigentlich Definition 1.3 einen Ton auf ziemlich realitätsferne Art und Weise einführt, denn als periodisches Signal müsste ein Ton ja wieder über alle Zeiten konstant klingen und das passiert ja doch eher selten in der Realität, wo ein Ton natürlich nur eine gewisse endliche Dauer hat. Daher ein paar Annahmen an einen realistischen Ton:

1. Die Dauer des Tons ist wesentlich größer als die Zeit, die für eine Schwingung benötigt wird⁸. Damit ist das Signal zumindest über eine gewisse Zeit periodisch.
2. Die Lautstärke des Tons bleibt über die Dauer seines Erklingens konstant.

Wenn diese beiden Voraussetzungen⁹ erfüllt sind, dann können wir zumindest lokal annehmen, wir hätten es mit einer periodischen Funktion zu tun und dann können wir die Fourierreihe (1.2) auch akustisch interpretieren:

Jeder Ton lässt sich in Partialtöne zerlegen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache des Tons selbst sind. Die Fourierkoeffizienten zu diesen Partialtönen werden als Spektrum des Tons bezeichnet und beschreiben die Klangfarbe des Tons.

Dieser Klangfarben–Effekt ist in Abb. 1.1 zu sehen. Über das Spektrum kann man tatsächlich Klänge sichtbar machen – deswegen werden derartige Methoden auch zur Stimm- und Spracherkennung genutzt.

Das alles funktioniert aber nur für *Dauertöne*, denn in dem Augenblick, wo zwischen zwei Frequenzen (also zwei Tönen) gewechselt wird, ändert sich ja die Länge der Periodisierung. Man braucht also das Konzept einer *Momentanfrequenz* bzw. der *Zeit-/Frequenz–Analyse*. Eine Zeit-/Frequenz–Analyse ist demnach eine Transformation

⁶Das bedeutet, daß zwei unterschiedliche Funktionen auch unterschiedliche Fourierreihen haben.

⁷Und gibt es überhaupt andere?

⁸Das bedeutet insbesondere, daß tiefe Töne länger gespielt werden müssen als hohe, weswegen es unmöglich ist, einen Jig auf dem Bassregister einer Orgel zu spielen.

⁹Die nun auch noch viele Saiteninstrumente, insbesondere Klavier und Konsorten, ausschließen.

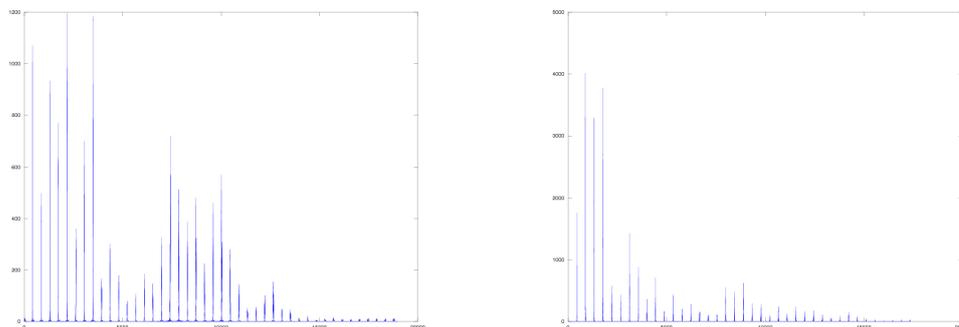


Abbildung 1.1: Spektren zweier Musikinstrumente für denselben Ton (a 440Hz). Der höhere Anteil hochfrequenter Partialtöne links zeigt, daß dieses Instrument sich durch einen „schärferen“ Klang auszeichnet.

$$f(t) \rightarrow Zf(t, \omega)$$

wobei t die Zeit, ω hingegen die Frequenz angibt. Gerne plottet man dann ein sogenanntes *Skalogramm*, in dem $|Zf|$ als Funktion dieser beiden Parameter dargestellt wird. Lässt man die Amplitude weg, so ist eigentlich Abb. 1.2 ja nichts anderes als ein derartiges Skalogramm. Zeit-/Frequenzanalyse ist also das Mittel der Wahl zur Beschreibung von Musik oder generell von allen zeitlokalen Effekten. Hier kann man entweder die Wavelettransformation (1.1) verwenden, oder aber die *Gaborttransformation*

$$Gf(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t-x)e^{-i\omega t} dt, \quad (1.4)$$



Abbildung 1.2: Eine Zeit-/Frequenz-Darstellung. Die Lage der „Punkte“ gibt die Tonhöhe, also die Frequenz an, die Form der Punkte die Tondauer und damit auch die Zeit, zu der der Ton zu klingen hat.

bei der es sich um eine *gefensterte Fouriertransformation* handelt, wobei die *Fensterfunktion* g normalerweise kompakten Träger hat und symmetrisch um 0 ist¹⁰.

Den Unterschied zwischen der reinen Frequenzanalyse und der Zeit-/Frequenz-Analyse kann man sehr schön an einem weiteren akustischen Phänomen aufzeigen, den sogenannten *Schwebungen*. Schwebungen sind die akustische Realisierung des Additionstheorems

$$\cos \omega + \cos \omega' = 2 \cos \frac{\omega + \omega'}{2} \cos \frac{\omega - \omega'}{2}, \quad (1.5)$$

wobei man nun aber die beiden Seiten von (1.5) akustisch/musikalisch interpretiert. Die linke Seite sind zwei gleichzeitig gespielte Töne mit den Frequenzen ω und ω' , auf der rechten Seite hat man einen Ton der mittleren Frequenz $(\omega + \omega')/2$, der aber mit der Differenzfrequenz $(\omega - \omega')/2$ amplitudenmoduliert wird. Und je nach verwendeter

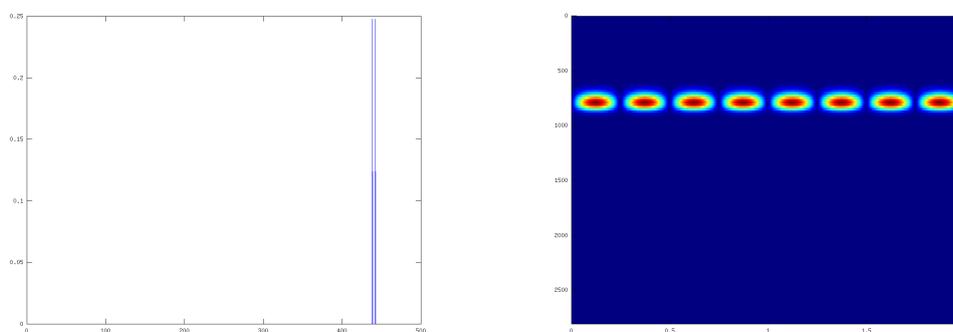


Abbildung 1.3: Spektrum und Wavelettransformierte des Ausdrucks aus (1.5). Das Spektrum reflektiert die linke Seite, die Wavelettransformierte zeigt einen amplitudenmodulierten „verschmierten“ Ton.

Transformation bekommt man, siehe Abb. 1.3, nun auch die linke oder die rechte Seite von (1.5) geliefert. Nett ist das Ganze auch bei der Gabortransformation, denn hier kann man dann auch den Einfluss der Fenstergröße sehen wie in Abb. 1.3. Ist das Fenster sehr klein, so schlägt die linke Seite von (1.5) zu, ist bei wachsendem Fenster verschmiert die Frequenz mehr und mehr, und die Schwebung benimmt sich wie die rechte Seite von (1.5). Auch ist zu beachten, daß sich zwischen dem mittleren und rechten Bild in Abb. 1.3 die Phase der Schwebung verschiebt, die Frequenz aber konstant bleibt.

Ein weiteres bisschen Zeit-/Frequenz kann an der Betrachtung einer einfachen Melodie, genauer, eines einfachen „Dreiklangs“ erkennen, der in Abb 1.5 zu sehen ist. Die

¹⁰Die Symmetrie um Null ist nicht wirklich notwendig, aber sinnvoll.

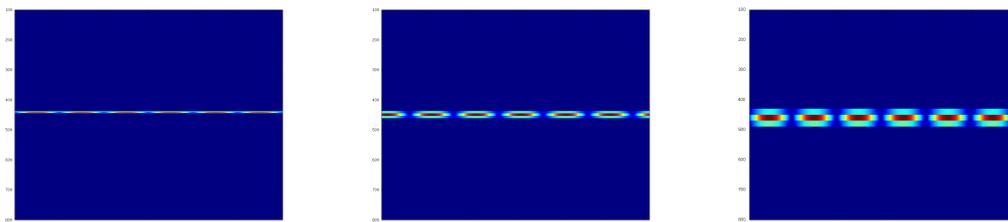


Abbildung 1.4: Drei Gabortransformation der Schwebung mit verschiedenen Fenstergrößen. Links ein sehr großes Fenster, also fast eine Fouriertransformation, rechts das kleinste Fenster.

drei individuellen Töne erscheinen eigentlich alle recht sauber abgegrenzt¹¹, aber im Dreiklang „verschmieren“ der höchste und der mittlere Ton. Dies ist ein weiterer unvermeidbarer Effekt der Wavelettransformation:

Je höher die Frequenz ist, desto höher wird die Zeitauflösung der Wavelettransformation um den Preis einer schlechteren Frequenzauflösung.

Wavelets versuchen immer, die Frequenz mit einer *relativen* Genauigkeit anzunähern, im Gegensatz dazu versucht es die Gabortransformation mit einer *absoluten* Genauigkeit, wobei das genau die Konzepte von absolutem und relativem Fehler sind, die man auch aus der Numerik kennt, (Sauer, 2000a).

Zum „krönenden“ Abschluss noch ein kleiner Ausschnitt aus einem Stück echter Musik mit einem Borduninstrument. Den Bordun, also den konstanten Dauerton, erkennt man sehr schön den waagerechten blauen Streifen. Auch die Melodiefolge und die Obertöne sind gut zu sehen, ebenso die Tatsache, daß manche der Partialtöne des Melodieinstrumentes sich mit Partialtönen der Bordune treffen und so hervorgehoben werden, siehe Abb. 1.7. Dieser Effekt tritt nur dann auf, wenn bei dem Instrument eine *reine Stimmung* verwendet wird, bei der die Frequenzen rationale Vielfache des Grundtons sind, was, im Gegensatz zur heute normalerweise verwendet gleichschwebend oder gleichstufig temperierten Stimmung zu leicht unterschiedlich großen Halbtonintervallen führt. Der Nachteil der reinen Stimmung besteht darin, daß sie nicht transponieren kann, das Instrument also auf eine oder zwei Tonarten festgelegt ist.

¹¹Daß die „Streifen“ immer eine gewisse Ausdehnung haben, ist eine Konsequenz der Heisenbergschen Unschärferelation – wer Zeit- **und** Frequenzauflösung will, muss ein gewisses Maß an Ungenauigkeit in Kauf nehmen.

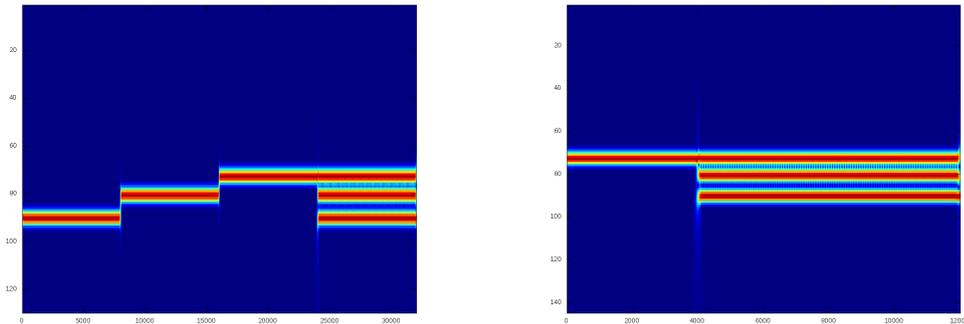


Abbildung 1.5: Eine ganz einfache Melodie, ein aufgelöster und dann unisono gespielter Dreiklang, alles in der Wavelettransformation. Rechts ist nur ein Zoom in die Stelle, an der der Dreiklang beginnt.

1.3 Ecken, Kanten, Features

Nach diesem kleinen Ausflug in die Welt der Musik wollen wir uns noch eine andere Anwendung ansehen, bei der Wavelets einen echten Mehrwert gegenüber der Gabortransformation liefern. Es ist bekannt, siehe z.B. (Sauer, 2003; Sauer, 2008), daß die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

für $\xi \rightarrow \pm\infty$ umso schneller abfällt je glatter die Funktion f ist, wobei Glattheit im Sinne von Differenzierbarkeit zu verstehen ist. Das liegt an der Tatsache, daß $(f')^\wedge(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$ ist und daß generell immer $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow \pm\infty$ gelten muss. Allerdings sind diese Glattheitsachen natürlich immer globaler Natur und die Abfallrate wird sozusagen durch die „unglatteste“ Stelle von f bestimmt.

Wavelets erlauben hier ein ungleich detaillierteres Vorgehen bei der Analyse wie das folgende Resultat von Jaffard zeigt, siehe (Mallat, 1999). Die Formulierung ist wortwörtlich aus (Sauer, 2008) übernommen.

Satz 1.6 Sei ψ ein Wavelet mit n verschwindenden Momenten und schnell abklingenden Ableitungen der Ordnung $\leq n$.

1. Ist $f \in L_2(\mathbb{R})$ Lipschitz-stetig von der Ordnung $\alpha < n$ an $x \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Konstante C , so daß

$$|W_\psi f(u, s)| \leq C s^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u-x}{s} \right|^\alpha \right), \quad (u, s) \in \Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (1.6)$$

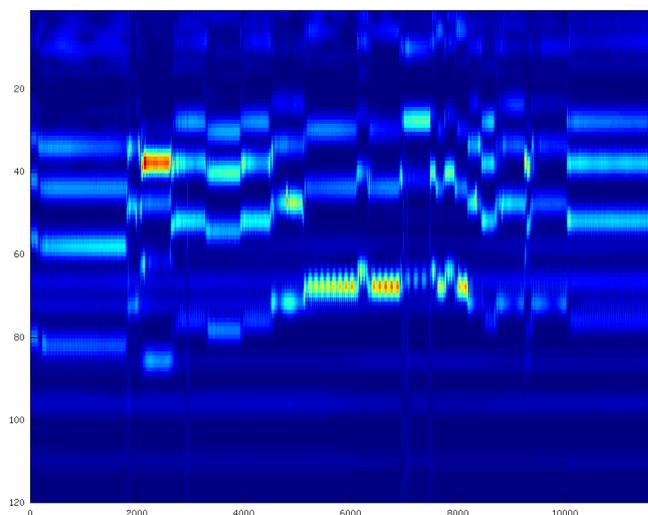


Abbildung 1.6: Wavelettransformation eines Stücks „echter“ Musik mit einem Borduninstrument.

2. Ist umgekehrt $\alpha \notin \mathbb{N}$ und existieren C sowie $\alpha' < \alpha$, so daß

$$|W_\psi f(u, s)| \leq C s^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u-x}{s} \right|^{\alpha'} \right), \quad (u, s) \in \Gamma, \quad (1.7)$$

dann ist f Lipschitz–stetig von der Ordnung α an x .

Anschaulich bedeutet Satz 1.6, daß man die *lokale* Regularität, und Lipschitz–Stetigkeit ist eine Art reelle Erweiterung der Differenzierbarkeit, durch die Abfallrate der Waveletkoeffizienten an dieser Stelle entlang der Skalen im wesentlichen sogar charakterisieren kann. Das schränkt zwar das Wavelet ein wenig ein, das dann n verschwindende Momente haben muss, das heisst,

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

aber solche Wavelets gibt es durchaus.

Übung 1.2 Wieviele verschwindende Momente hat das Haar–Wavelet? \diamond

Da ein Bild ja ohnehin mehr als die berühmten 1000 Worte sagt, sehen wir uns einfach Abb. 1.8 an, aus dem deutlich erkennbar ist, daß die Wavelettransformierte die drei

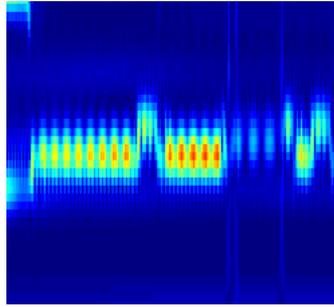


Abbildung 1.7: Ausschnitt aus Abb. 1.6, der zeigt, wie die reine Dur-Sexte sich mit den Partialtönen des Grundtons trifft und so massiv verstärkt wird.

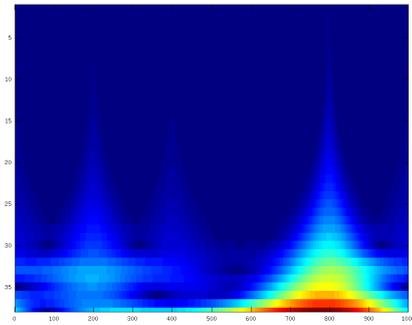
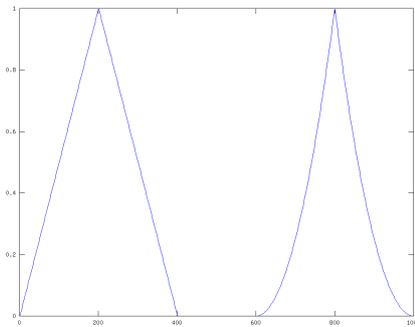


Abbildung 1.8: Eine einfache Testfunktion und ihre Wavelettransformierte

Ecken durch „Pfeile“ markiert und daß die Deutlichkeit dieser „Pfeile“ wohl offensichtlich etwas mit dem Öffnungswinkel der Ecken zu tun. Denn je spitzer so eine Ecke ist, desto geringer ist ja die Lischitz-Stetigkeit.

If your wish is to become really a man of science and not merely a petty experimentalist, I should advise you to apply to every branch of natural philosophy, including mathematics.

M. Shelley, *Frankenstein*

Grundlagen & Theorie

2

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den Grundlagen der *harmonischen Analysis* befassen. Dies mag zwar „nur für Wavelets“ ein wenig überdimensioniert erscheinen, aber es soll in dieser Vorlesung nicht nur darum gehen, Resultate vorzustellen und zu beweisen, sondern auch Zusammenhänge aufzuzeigen. Und das verlangt halt ein klein wenig mehr Abstraktion.

2.1 Fourier & Fourier

Beschäftigt man sich mit der Fouriertransformation, so stellt sich immer die Frage, ob man sie in einer oder mehreren Variablen betrachtet. Aber eigentlich ist das gar keine wirkliche Frage, denn die *Charaktere*¹² $\xi \mapsto e^{i\alpha^T \xi} = e^{i\alpha_1 \xi_1} \dots e^{i\alpha_d \xi_d}$, $\alpha, \xi \in \mathbb{R}^d$, sind ja nur Produkte univariater Charaktere.

Definition 2.1 Der Torus \mathbb{T} ist definiert als Quotientenmenge $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, das d -dimensionale Analogon als $\mathbb{T}^d = \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$.

Bemerkung 2.2 (Torus) Die üblichen Bemerkungen:

1. Man kann \mathbb{T} sehr schön mit dem Intervall $[-\pi, \pi]$ oder $[0, 2\pi]$ identifizieren, allerdings sind die Rechenregeln in \mathbb{T} andere als bei einem Teilintervall von \mathbb{R} , denn alle Operationen sind immer nur modulo 2π definiert. Das hat allerdings auch zur Folge, daß auf \mathbb{T} Addition und Multiplikation **immer** definiert sind.
2. \mathbb{T} hat keinen Rand! Die beiden Endpunkte der Intervalldarstellung sind miteinander identifiziert, weswegen Funktionen auf \mathbb{T} immer 2π -periodisch sein müssen.
3. \mathbb{T} ist also eigentlich so eine Art Kreis¹³, was man durch Komplexifizierung auch

¹²Es ist gut, sich schon einmal an den Begriff zu gewöhnen.

¹³Das ist durchaus sinnvoll, denn der eindimensionale Torus im \mathbb{R}^2 ist schließlich ein Kreis.

erreichen kann und was zum „komplexen Torus“

$$\mathbb{T} \simeq \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{T}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

bzw.

$$\mathbb{T}^d \simeq \{e^{i\theta} = (e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_d}) : \theta \in \mathbb{T}^d\} = \{z \in \mathbb{C}^d : |z| = 1\}$$

führt.

Nachdem wir nun geklärt haben, was unter einem Torus zu verstehen ist, definieren wir zwei verschiedene Fouriertransformationen, eine für auf \mathbb{T} und eine für auf \mathbb{R} definierte Funktionen.

Definition 2.3 (Fouriertransformationen)

1. Zu $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ist die Fouriertransformation $\widehat{f} : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definiert als

$$\widehat{f}(\alpha) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\theta) e^{-i\alpha^T \theta} d\theta, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.1)$$

2. Zu $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ergibt sich die Fouriertransformierte $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ als

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2)$$

Einerseits sehen (2.1) und (2.2) ja schon sehr ähnlich aus¹⁴, aber was doch etwas seltsam erscheint, sind die unterschiedlichen Definitionsbereiche der beiden Fouriertransformationen. Gibt es keine Fouriertransformation auf \mathbb{T}^d , die ebenfalls wieder eine Funktion liefert, die auf \mathbb{T}^d definiert ist? Gibt es eine auf \mathbb{Z}^d definierte Fouriertransformation auf \mathbb{R}^d ? Gibt es eine gemeinsame Theorie, die beide als Spezialfälle beinhaltet? Das alles sind ganz natürliche und vor allem mathematisch ausgesprochen interessante Fragen, die wir in diesem Kapitel beantworten wollen. Aber zuerst einmal, zum langsamen Aufwärmen, eine der üblichen Eigenschaften der Fouriertransformation und wie sie sich in den beiden Spezialfällen auswirken. Dazu setzen wir \mathbb{X} als „universellen“ Platzhalter für \mathbb{T}^d bzw. \mathbb{R}^d und¹⁵ $\widehat{\mathbb{X}}$ entsprechend für \mathbb{Z}^d bzw. \mathbb{R}^d .

Lemma 2.4 (Phasenverschiebung) Für $f \in L_1(\mathbb{X})$ und $y \in \mathbb{X}$ gilt

$$(f(\cdot + y))^\wedge = e^{i(\cdot)^T y} \widehat{f}. \quad (2.3)$$

¹⁴Auf unterschiedliche Buchstaben in den Formeln wie auch auf unterschiedliche Normierung der Ausdrücke sollte man nicht allzu viel geben.

¹⁵Diese Notation ist schon ein Vorgriff auf die allgemeine Theorie. Ja: Das Warten wird sich lohnen.

Beweis: Für $y \in \mathbb{X}$ und $\xi \in \widehat{\mathbb{X}}$ ergibt eine einfache Variablentransformation, daß

$$\begin{aligned} & (f(\cdot + y))^\wedge(\xi) \\ &= C_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} f(x + y) e^{-i\xi^T x} dx = C_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}+y} f(x) e^{-i\xi^T(x-y)} dx = e^{i\xi^T y} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.5

1. In „technischer“ Sprache bedeutet (2.3), daß sich jeder Verschiebung der Funktion in einer Phasenverschiebung der Transformation, also der Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Absolutbetrag 1, ausdrückt.
2. Es ist eine banale Beobachtung, daß dieser Beweis nur deswegen funktioniert, weil \mathbb{R} und \mathbb{T} unter Translationen abgeschlossen sind: $\mathbb{X} + y = \mathbb{X}$. Aber genau diese einfache Beobachtung wird sich bald als fundamentale Struktureigenschaft erweisen, von der die gesamte Verallgemeinerung leben wird.

Aufbauend auf dieser zweiten Beobachtung werden wir jetzt in etwas allgemeinere Gefilde einsteigen und dabei die Tatsache ausnutzen, daß \mathbb{R} und \mathbb{T} beide bezüglich der Addition eine Gruppenstruktur besitzen und sich topologisch anständig verhalten.

2.2 Topologie, Algebra & Maße

Ein Großteil der Darstellung in diesem Kapitel folgt dem sehr empfehlenswerten Buch von Loomis (Loomis, 1953), ergänzt um ein paar Punkte aus (Katznelson, 1976)¹⁶. Die ganz grundlegende Definition von Topologien¹⁷ sparen wir uns an dieser Stelle¹⁸, das sollte aus den Analysis-Grundvorlesungen bekannt sein. Darüberhinaus empfiehlt sich generell ein Blick in (Steen & Seebach, 1970), wie immer bei den „Counterexample“-Büchern.

Definition 2.6 (Lokal kompakter Hausdorff-Raum) Ein topologischer Raum \mathbb{X} heißt

1. Hausdorff-Raum, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, x' \in X$, $x \neq x'$, disjunkte Umgebungen¹⁹ U, U' , $U \cap U' = \emptyset$, mit $x \in U$ und $x' \in U'$ gibt.
2. lokal kompakt, wenn jeder Punkt $x \in \mathbb{X}$ eine kompakte Umgebung besitzt.

¹⁶Ein mindestens ebenso empfehlenswertes Standardwerk über Fouriertransformationen.

¹⁷Im Sinne von Systemen von offenen Mengen mit bestimmten Eigenschaften.

¹⁸Man kann alles übertreiben. Ausser natürlich Fußnoten.

¹⁹Um es ganz klar zu machen: *Umgebung* bedeutet hier, daß der Punkt x im Inneren der Umgebung liegt.

Jeder lokal kompakte Raum erlaubt eine *Ein-Punkt-Kompaktifizierung*, kann also durch Hinzunahme eines einzigen Punktes x_∞ zu einer kompakten Menge \mathbb{X}^∞ ergänzt werden. Die Notation ist kein Zufall, x_∞ ist der Punkt „Unendlich“. Die offenen Mengen von \mathbb{X}^∞ sind die offenen Mengen von \mathbb{X} sowie die Mengen

$$\{x_\infty\} \cup X, \quad \mathbb{X} \supset X \text{ kompakt.}$$

Übung 2.1 Zeigen Sie, daß \mathbb{X}_∞ kompakt ist. ◇

Auch das Konzept einer abelschen²⁰ Gruppe müssen wir an dieser Stelle nicht wirklich im Detail einführen. Wir werden die Gruppe G *additiv* schreiben, d.h. $x, y \in G$ bedeutet $x + y \in G$, es gibt ein *neutrales Element* namens „0“ und die Inverse zu $g \in G$ heisst $-g$ – alles nicht übermäßig neu und aufregend.

Als nächstes „verheiraten“ wir die beiden Konzepte „Topologie“ und „Gruppe“ miteinander und so etwas ist immer nur dann sinnvoll, wenn es einen gewissen „Mehrwert“ gibt, wenn also die Strukturen auf sinnvolle Art und Weise miteinander interagieren²¹.

Definition 2.7 (Topologische Gruppe) *Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe mit einer Topologie, unter der die Gruppenoperation stetig ist.*

In unserer Situation können wir die Tatsache, daß wir es mit einer topologischen Gruppe zu tun haben, also als

$$\lim_{y \rightarrow 0} x + y = x \tag{2.4}$$

schreiben – dabei ist der Grenzwert eine topologische Eigenschaft, die 0, gegen die sich y bewegt, hingegen durch die Gruppeneigenschaft eindeutig definiert. Und ja, das ist alles einfach, elementar, aber eben nicht trivial, denn dda steckt bereits eine ganze Menge an Konzeption dahinter.

Beispiel 2.8 (Topologische Gruppen)

1. $\mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{R}^d$ und \mathbb{T}^d sind lokal kompakte topologische Gruppen. \mathbb{T} und \mathbb{T}^d sind sogar kompakt, \mathbb{R} und \mathbb{R}^d müssten durch Hinzunahme von „ ∞ “ kompaktifiziert werden.
2. Die invertierbaren, reellen $n \times n$ -Matrizen, $GL_n(\mathbb{R})$, bilden ebenfalls eine topologische Gruppe²², allerdings keine abelsche.

²⁰Also kommutativen.

²¹Das klingt alles ziemlich nach Softskills und ähnlichem „Bullshit Bingo“, ist es aber nicht! Ganz im Gegenteil: Beim Zusammenführen von Strukturen besteht die wesentliche Aufgabe darin, klar und konsistent festzuhalten, wie diese Strukturen zusammenspielen. Sonst erhält man mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit nur eine ziemlich triviale Verallgemeinerung.

²²Unter allen vernünftigen Topologien, beispielsweise solchen, die durch eine Matrixnorm erzeugt werden.

3. Ein bisschen witziger ist die (nichtabelsche) Gruppe der linearen Transformationen $\mathbb{R} \ni x \mapsto ax + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit dem neutralen Element $(1, 0)$ und den²³ Gruppenoperationen

$$(a, b) \oplus (a', b') = (aa', ab' + b), \quad \ominus(a, b) = (a^{-1}, -b/a).$$

Wie die Beispiele schön zeigen, ist im nichtabelschen Fall die additive Schreibweise nicht wirklich intuitiv. Nachdem wir diesen Fall schon mit einschließen wollen²⁴, verwenden wir jetzt eine *multiplikative* Schreibweise für die Gruppen, also gg' für $g, g' \in G$, g^{-1} für die Inverse und 1 für das neutrale Element. Natürlich könnte man das alles auch additiv schreiben, aber „ $ab \neq ba$ “ wird normalerweise leichter akzeptiert als „ $a + b \neq b + a$ “.

Fassen wir mal ein paar einfache Beobachtungen zusammen: Da wir es mit einer topologischen Gruppe zu tun haben²⁵, ist für jedes $g \in G$ die Abbildung f_g mit $f_g(x) = gx$ ein *Homomorphismus*, von G auf sich selbst, ebenso wie $f'_g(x) = xg$. Auch die Inverse $x \mapsto x^{-1}$ ist ein Homöomorphismus. Jede Umgebung U des neutralen Elements 1 wird durch $U \mapsto gU$ auf eine Umgebung von g abgebildet und jede Umgebung U von g durch $U \mapsto g^{-1}U$ auf eine Umgebung von 1. In der additiven Schreibweise wären das gerade die „normalen“ Umgebungen der Null oder eines Punktes.

Dann beweisen wir mal was, um ein bisschen zu lernen, mit dieser Terminologie umzugehen ...

Proposition 2.9 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Jede stetige Funktion $f \in C(G)$ mit kompaktem Träger ist von links²⁶ gleichmäßig stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung U der 1, so daß*

$$|f(ux) - f(x)| < \varepsilon, \quad u \in U, x \in G, \quad (2.5)$$

oder, äquivalent, es ist $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ wann immer $x'x^{-1} \in U$.

Beweis: Sei $H \subset G$ eine kompakte Menge, so daß $f \in C_H(G)$, das heisst, $f(G \setminus H) = 0$ und sei V eine *symmetrische* Umgebung der 1, d.h. $1 \in V$ und $V = V^{-1}$. Sowas gibt es immer, man muss nur V durch $V \cup V^{-1}$ ersetzen.

Die Menge

$$V_\varepsilon := \{u \in G : |f(ux) - f(x)| < \varepsilon, x \in VH\}$$

²³Eigentlich multiplikativen!

²⁴Für abelsche Gruppen gelten alle Resultate dann ja auch.

²⁵Das sagen wir jetzt nicht mehr jedesmal extra, gehen aber natürlich davon aus, daß G eine topologische Gruppe ist.

²⁶Dasselbe gilt sinngemäß von rechts.

ist offen²⁷ und enthält 1. Ausserdem verschwinden $f(ux)$ und $f(x)$ für $u \in V$ und beliebiges $x \notin VH \supset C$. Setzen wir jetzt also $U := V \cap V_\epsilon$, so ist dies eine offene Umgebung der 1, für die (2.5) erfüllt ist. \square

Als nächstes verknüpfen wir Algebra und Topologie für eine *Quotientengruppe* der Form G/H , wobei H eine Untergruppe von G ist. Zur Erinnerung: In *multiplikativer Schreibweise* ist

$$G/H = \{[x] : x \in G\}, \quad [x] \simeq xH,$$

die Menge aller Äquivalenzklassen modulo H , die mit den üblichen Gruppenoperationen wieder eine Gruppe bildet. Zum Zwecke der Topologie brauchen wir aber ein klein wenig mehr:

1. Die *kanonische Abbildung* $\varphi : G \rightarrow G/H$, die jedem Element der Gruppe seine Äquivalenzklasse zuordnet, soll stetig sein. Das heisst, daß die Urbilder offener Mengen unter φ ebenfalls wieder offen sein müssen.
2. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine *stetige* Funktion, die konstant modulo H ist²⁸, dann soll die Funktion $F : G/H \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch²⁹ $F = f(\varphi(\cdot))$ ebenfalls stetig sein.

Die zweite Forderung, eine Art *Kompatibilität* zwischen der Quotientenbildung und der Topologie, kann man dadurch erreichen, indem man eine starke Topologie von G auf G/H vererbt: Eine Menge $A \subset G/H$ heisst offen, wenn $\varphi^{-1}(A)$ offen ist – dadurch wird φ automatisch stetig. Ein paar einfache Eigenschaften der Topologie von Quotientengruppen ergeben sich nun folgendermaßen.

Proposition 2.10 (Topologie von Quotientengruppen) *Für eine Untergruppe H von G gilt mit der obigen starken Topologie*

1. Die *kanonische Abbildung* φ ist offen, d.h. $\varphi(A)$ ist offen für alle offenen $A \subset G$.
2. Ist G lokal kompakt, so ist für jeder Untergruppe H von G auch G/H lokal kompakt.
3. Ist G lokal kompakt und $B \subset G/H$ kompakt, dann gibt es eine kompakte Menge $A \subset G$ mit $B = \varphi(A)$.

Beweis: Sei $A \subset G$ offen, dann ist

$$\varphi^{-1}(\varphi(A)) = AH := \bigcup_{x \in H} Ax$$

²⁷Das ist „nur Topologie“.

²⁸Sonst kann man sie nicht auf G/H betrachten, denn sie sollte ja für die ganze Äquivalenzklasse nur einen Wert haben.

²⁹Das ist „im wesentlichen“ $F = f(\varphi^{-1}(\cdot))$, nur ist φ natürlich nicht invertierbar.

Vereinigung offener Mengen, also offen. Wegen der Stetigkeit von φ ist auch deren Urbild, $\varphi(A)$, offen und schon ist 1) bewiesen. 2) folgt aus der Tatsache, daß stetige Funktionen kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbilden und für 3) wählen wir eine kompakte Umgebung C der Einheit und Punkte $x_1, \dots, x_n \in G$, so daß

$$B \subset \bigcup_{j=1}^n \varphi(x_j C) = \varphi \left(\bigcup_{j=1}^n x_j C \right).$$

Dann ist $\varphi^{-1}(B) \cap (\bigcup x_j C)$ aber eine kompakte Teilmenge von G , deren Bild nichts anderes als B sein kann. \square

Diese Vererbung von Eigenschaften auf die Quotientengruppe ist beispielsweise nützlich für den Übergang von \mathbb{R} zu \mathbb{T} . Zum mehr oder weniger guten Ende betreiben wir jetzt noch ein wenig Integrationstheorie, wobei wir aber bei den Details etwas großzügig sein werden. Worum es uns gehen wird, ist zu zeigen, daß es zu jeder Gruppe ein mehr oder weniger eindeutiges *natürliches Maß* gibt, das mit der Gruppenstruktur harmoniert. Das wird dann ein Gegenstück zum *Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R} sein. Aber immer der Reihe nach, zuerst eine Menge von Funktionen, die die Basis für die Definition eines Integrals bilden. Die Feinheiten finden sich in (Loomis, 1953), von wo dieses Kapitel auch entnommen ist.

Definition 2.11 Mit $C_{00}^+(G)$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten, stetigen Funktionen³⁰ von G nach \mathbb{R} mit nichtnegativen Werten und kompaktem Träger. Für die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf G verwenden wir $C_{00}(G)$.

Zu $f, g \in C_{00}^+(G)$ existieren Punkte $x_j \in G$ und Werte $c_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \dots, n$, so daß³¹

$$f \leq \sum_{j=1}^n c_j g(x_j \cdot),$$

und natürlich sind weder n noch die Punkte x_j oder die Gewichte c_j eindeutig.

Definition 2.12 (Haar-Überdeckungsfunktion) Die Haar-Überdeckungsfunktion von $f, g \in C_{00}^+(G)$ ist definiert als

$$(f : g) := \max \left\{ c \leq \sum_{j=1}^n c_j : f \leq \sum_{j=1}^n c_j g(x_j \cdot) \right\} \quad (2.6)$$

und misst, wie „groß“ g im Vergleich zu f ist.

³⁰Um genau zu sein: Die Menge aller nichtnegativen Funktionen in L , wobei L aus beschränkten Funktionen besteht, die noch ein paar Extra-Eigenschaften haben sollen, mit deren Hilfe man ein Integral definieren kann und das auch tut. Details in (Loomis, 1953).

³¹Nur zur Erinnerung: Von links und von rechts zu multiplizieren macht hier einen Unterschied! Aber natürlich geht das alles auch „von rechts“.

Die Haar-Überdeckungsfunktion hat eine Menge schöner Eigenschaften wie die Sublinearität $(f + f' : g) \leq (f : g) + (f' : g)$, $(cf : g) = c(f : g)$, Monotonie und noch einiges mehr.

Lemma 2.13 (Eigenschaften der Haar-Überdeckung)

1. $(f : g)$ ist linksinvariant, d.h.

$$(f(u \cdot) : g) = (f : g), \quad u \in G. \quad (2.7)$$

2. Für $f, g \in C_{00}^+(G)$ gilt

$$(f : g) \geq \frac{\max_{x \in G} f(x)}{\max_{x \in G} g(x)}. \quad (2.8)$$

3. Für $f, g, h \in C^+(G)$ gilt

$$(h : f) \leq (g : f) (h : g). \quad (2.9)$$

Beweis: (2.7) ist ganz einfach, denn schliesslich ist

$$f(ux) \leq \sum_{j=1}^n c_j g(x_j ux) = \sum_{j=1}^n c_j g(x'_j x), \quad x'_j := x_j u.$$

Für (2.8) wählen wir, zu $\varepsilon > 0$, einen Punkt x so, daß $f(x) \geq \max_G f - \varepsilon$ und erhalten für alle passenden x_j und c_j , daß

$$\max_G f - \varepsilon \leq f(x) \leq \sum_{j=1}^n c_j g(x_j x) \leq \max_G g \sum_{j=1}^n c_j,$$

also $\sum c_j \leq (\max_G f - \varepsilon) / \max_G g$ und da ε beliebig war, muss (2.8) gelten.

(2.9) erfordert auch nicht viel mehr Aufwand: Für $x \in G$ impliziert setzen wir $g(x) \leq \sum c_j f(x_j x)$ in $h(x) \leq \sum c'_k g(x'_k x)$, beides mit „optimalen“ Koeffizienten, ein und erhalten, daß

$$h(x) \leq \sum_{k=1}^{n'} c'_k \sum_{j=1}^n c_j f(x'_k x_j x) = \sum_{j,k=1}^{n,n'} c_{jk} f(x_{jk} x).$$

Also ist

$$(h : f) \leq \sum_{jk=1}^{n,n'} \underbrace{c_{jk}}_{=c_j c'_k} = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{k=1}^{n'} c'_k = (g : f) (h : g).$$

□

Beliebige Haar-Überdeckungen sind aber eher zu allgemein. Die Idee einer Überdeckung in der Integrationstheorie besteht ja auch immer darin, diese Überdeckungen immer „feiner“ zu wählen, also die „Vergleichsfunktion“ immer besser zu lokalisieren. Dazu fixieren wir eine „Ausgangsfunktion“ f_0 und definieren die Werte

$$I_\psi(f) := \frac{(\psi : f)}{(\psi : f_0)}, \quad \psi \in C_U^+(G) := \{g \in C^+(G) : g(x) = 0, x \notin U\}, \quad (2.10)$$

wobei U noch geeignet zu wählen sein wird. Die Funktion f_0 ist dabei absolut beliebig und stellt nichts anderes dar als eine Normalisierung des resultierenden Maßes. Nun aber zum zentralen technischen Hilfsmittel, das zeigt, daß man immer subadditiv lokalisieren kann.

Lemma 2.14 Zu $f_1, f_2 \in C^+(G)$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U der Einheit, so daß

$$I_\psi(f_1) + I_\psi(f_2) \leq I_\psi(f_1 + f_2) + \varepsilon, \quad \psi \in C_U^+(G). \quad (2.11)$$

Beweis: Sei $g \in C^+(G)$ so, daß $g(x) = 1$ ist, wann immer $f_1(x) + f_2(x) > 0$ ist, $x \in X$, und $f := f_1 + f_2 + \delta g$ für ein $\delta > 0$. Dann setzen wir $h_{1/2} := f_{1/2}/f$ mit der Konvention, daß $h_j = 0$ ist, wann immer $f = 0$ ist. Diese h_j sind stetig und nach Proposition 2.9 dann auch *lokal gleichmäßig stetig*, es gibt also eine sogar symmetrische Umgebung U der 1, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung $|h_j(x) - h_j(y)| < \varepsilon$ gilt, solange nur $x^{-1}y \in U$ erfüllt ist.

Sei nun $\psi \in C_U^+(G)$ und $f(x) \leq \sum c_j \psi(x_j x)$. Nun bedeutet $\psi(x_j x) \neq 0$ ja, daß $x_j x \in U$ ist, also auch $x^{-1}x_j^{-1} \in U^{-1} = U$ und somit

$$|h(x) - h(x_j^{-1})| < \varepsilon \quad (2.12)$$

und somit, für $j = 1, 2$ und $x \in G$

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f(x) h_j(x) \leq \sum_{k=1}^n c_k \psi(x_k x) h_j(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^n c_k \psi(x_k x) (h_j(x_k^{-1}) + \varepsilon) \end{aligned}$$

und damit

$$(\psi : f_j) \leq \sum_{k=1}^n c_k (h_j(x_k^{-1}) + \varepsilon)$$

bzw.

$$(\psi : f_1) + (\psi : f_2) \leq \sum_{k=1}^n c_k \underbrace{((h_1 + h_2)(x_k^{-1}) + 2\varepsilon)}_{\leq 1} \leq \sum_{k=1}^n c_k (1 + 2\varepsilon).$$

Da die Funktion $\sum c_j$ beliebig nahe an $(\psi : f)$ herankommt, erhalten wir also, daß

$$I_\psi(f_1) + I_\psi(f_2) \leq I_\psi(f)(1 + 2\varepsilon) \leq (I_\psi(f_1) + I_\psi(f_2) + \delta I_\psi(g))(1 + 2\varepsilon)$$

und daraus folgt (2.11) unmittelbar. \square

Definition 2.15 Ein Integral $\int_G f d\mu$ auf einer Gruppe G und einem Funktionenraum ist ein durch die üblichen Methoden³² definiertes lineares Funktional.

Das Integral heißt linksinvariant, wenn

$$\int_G f(g \cdot) d\mu = \int_G f d\mu, \quad g \in G, \quad (2.13)$$

für alle Funktionen aus diesem Funktionenraum gilt.

Beispiel 2.16 (Invariante Maße) Auf \mathbb{R} ist das „ganz normale“ Lebesgue–Maß invariant unter der Gruppenoperation Addition, auf \mathbb{R}_+ das Maß $\frac{dt}{t}$ mit der Multiplikation als Gruppenoperation.

Übung 2.2 Zeigen Sie, daß $\frac{dt}{t}$ auf \mathbb{R}_+ invariant ist. \diamond

Wir werden nun die Existenz des Haar–Maßes in einer relativ schwachen Form zeigen, nämlich, daß ein solches Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger existiert. Das ist allerdings auch der interessante Teil, denn bekanntlich liegen die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger *dicht* in allen Mengen von integrierbaren Funktionen, siehe z.B. (Forster, 1984). Die Erweiterung auf ein Lebesgue–Maß, auf Borelmaße und all diese Wunderdinge der Maß- und Integrationstheorie sind dann ein Standardprozess, der beispielsweise in (Loomis, 1953) detailliert beschrieben ist.

Satz 2.17 (Haar–Maß, Existenz) Auf $C_{00}(G)$ existiert ein nichttriviales linksinvariantes Integral.

Beweis: Letztendlich läuft der Beweis darauf hinaus, einen „Grenzwert“ bezüglich ψ zu bestimmen, der mit beliebig kleinen kompakten Trägern funktioniert.

Zu $0 \neq f \in C_{00}^+(G)$ folgt direkt aus (2.9), daß

$$(\psi : f) \leq (f_0 : f)(\psi : f_0) \quad \text{und} \quad (\psi : f_0) \leq (f : f_0)(\psi : f)$$

und daher ist

$$I_\psi(f) \in [(f : f_0)^{-1}, (f_0 : f)] =: S_f. \quad (2.14)$$

³²Borel–Menge, σ –Algebren und so weiter, also alles das, was zum Lebesgue–Maß führt.

Nun betrachten wir den *unendlichdimensionalen aber kompakten*³³ Hausdorffraum $S = \otimes_f S_f$ und stellen fest, daß für jedes $I_\psi \in S$ mit den *Koordinatenprojektionen* $I_\psi f \in S_f$. Zu jeder Umgebung U der 1 sei nun

$$S_U := \overline{\{I_\psi : \psi \in C_U^+(G)\}}$$

der *S-Abschluss* der Funktionale zu allen Funktionen mit kompaktem Träger in U . Für diese Mengen gilt nun, daß

$$S_{U_1} \cap \cdots \cap S_{U_n} = S_{U_1 \cap \cdots \cap U_n}, \quad U_j \subset G \text{ kompakt, } j = 1, \dots, n.$$

Sei nun I im Durchschnitt³⁴ aller S_U , dann ist I ein Funktional mit der Eigenschaft, daß es zu beliebigen $f_1, \dots, f_n \in C_{00}^+(G)$, $U \subset G$ kompakt und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\psi \in C_U^+(G)$ gibt, so daß

$$|I(f_j) - I_\psi(f_j)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n,$$

erfüllt ist. Damit ist unser I aber genau so ein gesuchtes linksinvariantes Integral! Linksinvarianz gab's in Lemma 2.13 und die Sublinearität, der „schwerste“ Teil, ergibt sich aus Lemma 2.14 und Grenzübergängen $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Satz 2.18 *Das Integral aus Satz 2.17 ist eindeutig bis auf Normalisierung.*

Definition 2.19 *Das linksinvariante Integral auf G wird als Haar-Integral $\int_G d\mu$ bezeichnet, das zugehörige Maß μ als Haar-Maß.*

Beweis von Satz 2.18: Seien I und J zwei linksinvariante Integrale und $f \in C_{00}^+(G)$. Ausserdem wählen wir eine kompakte Menge $U \subset G$ mit $f \in C_U^+(G)$, eine offene Menge $U' \supset U$ mit kompaktem Abschluss³⁵ und $f' \in C_{00}^+(G)$ mit $f'(U') = 1$. Das ist eine lange Liste, aber alles kein Problem.

Als nächstes fixieren wir $\varepsilon > 0$ und wählen eine *symmetrische* Umgebung V der 1 mit der Eigenschaft, daß $UV \cup VU \subset U'$ und

$$\max_{x \in G} |f(vx) - f(xv')| < \varepsilon, \quad v, v' \in V. \quad (2.15)$$

³³Das ist der *Satz von Tychonov*, siehe (Loomis, 1953, Theorem 5B). Aber wie immer ist Vorsicht angesagt: Bei diesen ganzen topologischen Zauberkunststückchen steckt beispielsweise das Auswahlaxiom mit drin.

³⁴Daß dieser nicht leer ist, ist eine Konsequenz der Kompaktheit von S_U , die in (Loomis, 1953, Theorem 5B) sogar dadurch bewiesen wird, daß man genau das zeigt: *Aus der endlichen Durchschnittseigenschaft folgt, daß der Durchschnitt nichtleer ist.*

³⁵Sowas bezeichnet man übrigens als *präkompakt*.

Da $UV \cup VU \subset U'$, ist sowohl³⁶ $f(xv) = f(xv) f'(x)$ als auch $f(vx) = f(vx) f'(x)$, $v \in V$ und zusammen mit (2.15) ergibt sich

$$|f(xv) - f(vx)| = |f(xv) - f(vx)| f'(x) < \varepsilon f'(x), \quad x \in G, \quad v \in V. \quad (2.16)$$

Schließlich sei $0 \neq h \in C_V^+(G)$ noch eine symmetrische Funktion, $h(x) = h(x^{-1})$, mit kompaktem Träger in der symmetrischen Menge V . Dann liefert die Invarianz des Integrals, daß

$$\begin{aligned} I(h)J(f) &= I(hJ(f)) = \int_G \int_G h(y)f(x) d\mu_J(x) d\mu_I(y) \\ &= \int_G \int_{y^{-1}G=G} h(y)f(yx) d\mu_J(x) d\mu_I(y) \end{aligned}$$

und mit der Symmetrie von h und dem Satz von Fubini³⁷ erhalten wir außerdem, daß

$$\begin{aligned} J(h)I(f) &= \int_G \int_G h(y^{-1})f(x) d\mu_J(x) d\mu_I(y) = \int_G \int_G h(x^{-1}y)f(y) d\mu_I(y) d\mu_J(x) \\ &= \int_G \int_{x^{-1}G} h(y)f(xy) d\mu_I(y) d\mu_J(x) = \int_G \int_G h(y)f(xy) d\mu_J(x) d\mu_I(y), \end{aligned}$$

und somit, unter Verwendung von (2.16), daß

$$\begin{aligned} |I(h)J(f) - J(h)I(f)| &= \int_V \int_G h(y)(f(yx) - f(xy)) d\mu_J(x) d\mu_I(y) \\ &\leq \int_G \int_G h(y)|f(yx) - f(xy)| d\mu_J(x) d\mu_I(y) \leq \varepsilon \int_G \int_G h(y) d\mu_J(x) d\mu_I(y) \\ &= \varepsilon I(h)J(f') = \varepsilon I(h)J(f'). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wir können (2.17) noch ein wenig umformen, wenn wir berücksichtigen, daß $I(f)I(h) \neq 0$ ist und dann durch diesen Wert teilen und den Betrag explizit schreiben:

$$-\varepsilon \frac{J(f')}{I(f)} \leq \frac{J(f)}{I(f)} - \frac{J(h)}{I(h)} \leq \varepsilon \frac{J(f')}{I(f)} \quad (2.18)$$

Ist nun $g \in C_{00}^+(G)$ irgendeine andere Funktion, dann können wir das ganze Spiel nochmal durchführen, müssen möglicherweise V ein wenig verkleinern³⁸ und erhalten so

³⁶Ist nämlich $xv \notin U$, dann ist $f(xv) = 0$ und das alles gilt trivialerweise.

³⁷Eine weitere „Standardeigenschaft“ des Integrals. Details wieder mal in (Loomis, 1953), denn will man das alles beweisen, muss man im wesentlichen das ganze Kapitel über Integrationstheorie reproduzieren.

³⁸ V hing ja ursprünglich von f ab, aber das letztendliche V wäre dann einfach $V = V_f \cap V_g$, was immer noch eine symmetrische Umgebung der 1 wäre.

(2.18) für g mit einem passenden g' , aber *demselben* h . Subtrahieren wir nun die Versionen von (2.18) mit f und g voneinander, so erhalten wir, daß

$$\left| \frac{J(f)}{I(f)} - \frac{J(g)}{I(g)} \right| \leq \varepsilon \left| \frac{J(f')}{I(f)} + \frac{J(g')}{I(g)} \right|,$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, die linke Seite aber nicht von ε abhängt, muss

$$\frac{J(f)}{I(f)} = \frac{J(g)}{I(g)}, \quad f, g \in C_{00}^+(G), \quad (2.19)$$

gelten, die beiden Integrale I und J also unabhängig vom Argument Vielfache voneinander sein. \square

Zum Abschluss noch die einfache und klare Beschreibung, wann das Haar-Maß endlich ist.

Satz 2.20 *G ist genau dann kompakt wenn $\mu(G) < \infty$ ist.*

Beweis: Ist G kompakt, dann ist $1 \in C_{00}^+(G)$ und damit ist $\mu(G) = I(1)$ wohldefiniert und endlich.

Ist hingegen G nicht kompakt, dann gilt für jede kompakte Umgebung U der 1, daß G nicht mit endlichen Translaten $x_j U$, $x_j \in G$, $j = 1, \dots, n$, überdeckt werden kann³⁹. Daher existiert eine Folge $x_j \in G$, $j \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, daß

$$x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} x_j U, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Ist nun V eine offene, symmetrische Umgebung der 1, die zusätzlich $V^2 \subset U$ erfüllt, dann müssen die offenen Mengen $x_j V$ disjunkt sein, denn wäre, für $j < k$

$$\emptyset \neq x_j V \cap x_k V = x_j V \cap x_k V^{-1} = (x_j V^2 \cap x_k) V^{-1},$$

also $x_k \in x_j V^2 \subset x_j U$, im Widerspruch zu (2.20). Da die Mengen $x_j V$ also disjunkt sind, ist

$$\mu(G) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(x_j V) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\mu(V)}_{>0} = \infty.$$

\square

Fazit: Auf jeder topologischen Gruppe gibt es ein natürliches Maß, das bis auf Konstante auch eindeutig ist, und das mit der Gruppenoperation kompatibel ist, also ein *invariantes Maß* darstellt. Dieses natürliche Maß bezeichnen wir als Haar-Maß, wenn G kompakt und damit $\mu(G) < \infty$ ist, dann wollen wir immer annehmen, daß das Haar-Maß so normiert ist, daß $\mu(G) = 1$ ist. Im Falle von \mathbb{T}^d ist beispielsweise $d\mu = (2\pi)^{-d} dt$.

³⁹Denn sonst wäre G ja kompakt.

2.3 Die modulare Funktion & „besondere“ Gruppen

Nun sind \mathbb{R} und \mathbb{T} natürlich nicht „irgendwelche“ Gruppen, sondern additive und als solche zumeist kommutativ, das heisst, *abelsche Gruppen*. Und die werden natürlich eine besondere Rolle spielen.

In einer nichtkommutativen Gruppe brauchen wir nicht davon auszugehen, das ein linksinvariantes Integral auch rechtsinvariant ist, es wird im allgemeinen $I(f) \neq I(f(\cdot v))$ für das eine oder andere f und $v \in G$ gelten. Fixieren wir hingegen ein $v \in G$, so ist natürlich $f \mapsto I_v(f) := I(f(\cdot v))$ nach wie vor ein linksinvariantes Ideal, d.h. $I_v(f(u \cdot)) = I_v(f)$. Nach Satz 2.18 muss es daher eine Konstante $m(v)$ geben, so daß $I_v = m(v)I$.

Definition 2.21 (Modulare Funktion)

1. Die Funktion $m_G = m : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft $m(v) = I_v/I$ heisst modulare Funktion von G . Sie hängt nur von der Gruppe G ab, nicht von der gewählten Normalisierung von I .
2. Die Gruppe G heisst unimodular, wenn $m_G \equiv 1$ und abelsch, wenn sie kommutativ ist, also wenn $xy = yx$, $x, y \in G$, gilt.

Lemma 2.22 Ist G abelsch oder kompakt, so ist G unimodular.

Beweis: Für abelsche Gruppen ist das sehr einfach:

$$I_v(f) = I(f(\cdot v)) = I(f(v \cdot)) = I(f) \quad \Rightarrow \quad m \equiv 1,$$

aber auch der kompakte Fall ist nicht schwerer, denn da wählen wir einfach $f \equiv 1$ und erhalten, weil $I(1) < \infty$ ist, daß

$$m(v) = \frac{I_v(1)}{I(1)} = 1, \quad v \in G.$$

□

Da wir nur stetige Funktionen mit kompaktem Träger integrieren⁴⁰ und diese Funktionen gleichmäßig stetig sind, ist die Abbildung $v \mapsto I_v$ stetig und damit auch m . Da ausserdem für $v, v' \in G$ und $f \neq 0$

$$m(vv')I(f) = I_{vv'}(f) = I(f(\cdot vv')) = I_{v'}(f(\cdot v)) = m(v')I_v(f) = m(v)m(v')I(f),$$

ist

$$m_G(vv') = m_G(v)m_G(v'), \quad (2.21)$$

m ist also ein stetiger *Homomorphismus* von G nach \mathbb{R}_+ , beide wieder als multiplikative Gruppen geschrieben.

Zum Abschluss dieses Kapitels noch eine Formel zu „Variablentransformation“.

⁴⁰Manchmal hat so ein billiges Integral auch seine Vorteile

Satz 2.23

$$\int_G f(x^{-1}) m(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f d\mu. \quad (2.22)$$

Beweis: Wir definieren

$$f^*(x) := \overline{f(x^{-1})} m(x^{-1}) \quad (2.23)$$

gleich für komplexwertige Funktionen f , ist f „nur“ reellwertig, kann man die Konjugation ja einfach weglassen. Nach (2.21) ist dann⁴¹

$$f^*(v^{-1}x) = f(x^{-1}) m(x^{-1}) m(v) = m(v) (f(\cdot v))^*(x)$$

sowie

$$f^*(xv^{-1}) = m(v) (f(v \cdot))^*(x).$$

Das Integral $J(f) = I(f^*)$ gehört auch wieder zur großen Familie der linksinvarianten Maße:

$$\begin{aligned} J(f(v \cdot)) &= I((f(v \cdot))^*) = m(v^{-1}) I((f(\cdot v))^*) = I_{v^{-1}}((f(\cdot v))^*) \\ &= I((f(\cdot vv^{-1}))^*) = I(f^*) = J(f), \end{aligned}$$

und wieder einmal Satz 2.18 liefert uns die Existenz einer Konstanten $C > 0$ so daß $J(f) = C I(f)$. Da m eine stetige Funktion mit $m(1) = 1$ ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine symmetrische Umgebung U der 1, so daß

$$|1 - m(v)| < \varepsilon, \quad v \in U,$$

und für jedes symmetrische $f \in C_V^+(G)$, $V \subset U$ kompakt und symmetrisch, mit $I(f) = 1$ erhalten wir, daß

$$\begin{aligned} |1 - C| &= |(1 - C)I(f)| = |I(f) - J(f)| \\ &= \left| \int_G f(x) d\mu(x) - \int_G \underbrace{f(x^{-1})}_{=f(x)} m(x^{-1}) d\mu(x) \right| \leq \int_G |1 - m(x^{-1})| f(x) d\mu(x) \\ &= \int_U |1 - m(x^{-1})| f(x) d\mu(x) \leq \varepsilon \int_U f d\mu \leq \varepsilon I(f) = \varepsilon \end{aligned}$$

und da wieder einmal ε beliebig war, ist $C = 1$ und damit (2.22) bewiesen. \square

Korollar 2.24 *Das Haar-Maß ist genau dann invers-invariant, wenn die Gruppe G unimodular ist.*

⁴¹Ohne das komplexe Zeugs, aber wer will kann gerne Querstriche drübermalen.

Die bisher hergeleitete Theorie zeigt, daß unimodulare Gruppen, also insbesondere abelsche und kompakte Gruppen, besonders angenehm strukturiert sind. Trotzdem sind das natürlich nicht alle Gruppen, und eine interessante Ausnahme erhält man mit dem folgenden „Kochrezept“.

Definition 2.25 (Semidirektes Produkt) G und H seine lokalkompakte Gruppen mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jedes $g \in G$ einen Automorphismus auf H , definiert, d.h. $g(h) \in H$ und $g(h h') = g(h) g(h')$. Ein semidirektes Produkt von G und H ist $G \times H$ mit der Gruppenoperation

$$(g, h) (g', h') = (g g', g'(h) h'). \quad (2.24)$$

Solche semidiskreten Produkte kennen wir schon von der Gruppe der affinen Abbildungen. Ist die Abbildung $(g, h) \rightarrow g(h)$ stetig (in beiden Variablen), so ist $G \times H$ mit der Gruppenoperation aus (2.24) auch wirklich eine lokalkompakte Gruppe, wenn auch eben keine abelsche. Das Haar-Maß auf $G \times H$ ist „einfach“ das Produkt der individuellen Haar-Maße. Bezeichnen wir diese mit μ_G und μ_H , so ist

$$\mu_{G \times H}(A \times B) = \mu_G(A) \mu_H(B), \quad A \subset G, B \subset H.$$

Um die *modulare Funktion* auf dem semidirekten Produkt berechnen zu können, müssen wir das Maß von

$$(A \times B) (g, h) = (Ag, g(B)h)$$

betrachten, was über das Produktmaß zu dem Wert

$$\mu_{G \times H}((A \times B) (g, h)) = m_G(g) m_H(h) \mu_G(A) \mu_H(g(B))$$

führt. Selbst wenn G und H an sich also unimodulare Gruppen sind, ist das semidirekte Produkt nur dann unimodular, wenn

$$\frac{\mu_H(g(B))}{\mu_H(B)} = 1, \quad g \in G,$$

ist, was natürlich eine recht starke Forderung darstellt.

2.4 Faltungen & Gruppenalgebra

In diesem Kapitel lernen wir eine Methode kennen, auf dem Raum von integrierbaren Funktionen eine Multiplikation einzuführen, die uns dann auch in die Welt der *Banachalgebren* bringen wird.

Definition 2.26 (Faltung) Die Faltung zweier Funktionen $f, g \in C_{00}^+(G)$ ist als

$$f * g = \int_G f(\cdot y) g(y^{-1}) d\mu(y) = \int_G f(y) g(y^{-1} \cdot) d\mu(y) \quad (2.25)$$

definiert.

Daß die beiden Integrale in (2.25) übereinstimmen, liegt natürlich wieder einmal an der Linksinvarianz des Haar-Maßes. Jetzt packen wir auf unser abstraktes Brimborium auch noch etwas Funktionalanalysis mit drauf.

Definition 2.27 (Banachräume)

1. Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum.
2. Der Banachraum $L_1(G)$ der absolut integrierbaren Funktionen ist definiert als Menge aller Funktionen mit der Eigenschaft⁴²

$$\infty > \|f\|_1 := \int_G |f| d\mu$$

3. Eine Banachalgebra ist ein Banachraum zusammen mit einer Multiplikation \odot , die mit der Norm verträglich sein muss:

$$\|f \odot g\| \leq \|f\| \|g\|. \quad (2.26)$$

Bei den drei Definitionen, die hier zusammen auftauchen, dürfte es nicht mehr allzusehr überraschen, was nun kommt: Mit der Faltung als Multiplikation wird $L_1(G)$ tatsächlich zur Banachalgebra und in der Tat ist diese Konstellation auch so ein bisschen ein „Prototyp“ für Banachalgebren.

Satz 2.28 Mit der Multiplikation $f \odot g := f * g$ bildet $L_1(G)$ eine Banachalgebra.

Beweis: Daß „ \odot “ $L_1(G) \times L_1(G)$ auf $L_1(G)$ abbildet, ergibt sich⁴³ aus

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \int_G \int_G |f(y) g(y^{-1}x)| d\mu(y) d\mu(x) \\ &= \int_G |f(y)| \int_G |g(y^{-1}x)| d\mu(x) d\mu(y) = \int_G |f(y)| \int_G |g(x)| d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_G |f(y)| d\mu(y) \int_G |g(x)| d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

⁴²Achtung: Hier möge ich! Spätestens jetzt bräuchten wir eine vernünftige Erweiterung der Integrierbarkeit auf eine Art Lebesgue-Integral, denn natürlich gibt es Folgen von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, die in der L_1 -Norm gegen integrierbare Sprungfunktionen konvergieren. Und dann wäre die Vollständigkeit erst einmal dahin.

⁴³Wenn die Integrierbarkeitsfrage einmal zufriedenstellend geklärt ist.

mit ein bisschen Dreiecksungleichung und der ubiquitären Linksinvarianz des Haar-Integrals. Die anderen Eigenschaften einer Multiplikation, Assoziativität und Distributivität⁴⁴ rechnet man leicht nach ... \square

Definition 2.29 (Involution) Eine Operation $*$ auf einer Algebra \mathcal{A} über \mathbb{C} heisst Involution, wenn

1. $a^{**} = a, a \in \mathcal{A}$.
2. $(a_1 + a_2)^* = a_1^* + a_2^*, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$.
3. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$.
4. $(a_1 a_2)^* = a_2^* a_1^*, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$.

Satz 2.30 Die Operation $*$ aus (2.23) ist eine Involution auf der Faltungsalgebra von $L_1(G)$.

Beweis: Die ersten drei Eigenschaften einer Involution werden von (2.23) recht offensichtlich erfüllt, interessant ist lediglich die Betrachtung von

$$\begin{aligned}
 (f * g)^*(x) &= \int_G \overline{f(x^{-1}y) g(y^{-1})} m(x^{-1}) d\mu(y) \\
 &= \int_G \overline{g(y^{-1})} m(y^{-1}) \overline{m(y) f((y^{-1}x)^{-1})} \underbrace{m((y^{-1}x)^{-1})}_{=m(x^{-1})} m(y^{-1}) d\mu(y) \\
 &= \int_G \underbrace{\overline{g(y^{-1})} m(y^{-1})}_{=g^*(y)} \underbrace{\overline{f((y^{-1}x)^{-1})} m((y^{-1}x)^{-1})}_{=f^*(y^{-1}x)} d\mu(y) \\
 &= (g^* * f^*)(x),
 \end{aligned}$$

bei der wir beide Seiten von (2.25) verwendet haben. \square

Der weentliche Teil des Beweises von Satz 2.30 ist die Identität

$$(f * g)^* = g^* * f^*, \quad f, g \in L_1(G), \quad (2.27)$$

bei der, wie es sich ja auch für eine anständige Involution gehört, die Reihenfolge im Produkt vertauscht wird. Das ist natürlich nur dann relevant, wenn bei dem Produkt die Reihenfolge auch wirklich eine Rolle spielt. Und das lässt sich leicht beschreiben.

Satz 2.31 Das Faltungsprodukt auf $L_1(G)$ ist genau dann kommutativ, wenn G abelsch ist.

⁴⁴Aber **nicht** Kommutativität!

Beweis: Ist G abelsch, dann ist G auch unimodular und (2.22) aus Satz 2.23 führt sofort zu

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_G f(xy) g(y^{-1}) d\mu(y) = \int_G f(xy^{-1}) g(y) d\mu(y) \\ &= \int_G f(y^{-1}) g(yx) d\mu(y) = \int_G f(y^{-1}) g(xy) d\mu(y) \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt die Faltung kommutativ auf $L_1(G)$, dann verschwindet der *Kommutator* $f * g - g * f$ und daher ist

$$\begin{aligned} 0 &= (f * g)(x) - (g * f)(x) = \int_G (f(xy)g(y^{-1}) - g(y)f(y^{-1}x)) d\mu(y) \\ &= \int_G f(xy^{-1}) g(y) m(y^{-1}) d\mu(y) - \int_G g(y)f(y^{-1}x) d\mu(y) \\ &= \int_G g(y) (f(xy^{-1}) m(y^{-1}) - f(y^{-1}x)) d\mu(y), \end{aligned}$$

und das für alle $f, g \in L_1(G)$. Das geht aber nur, wenn

$$f(xu) m(u) = f(ux), \quad u, x \in G. \quad (2.28)$$

Speziell für $x = 1$ ergibt das $f(u)m(u) = f(u)$, also $m \equiv 1$, so daß G auf alle Fälle schon mal unimodular sein muss. Dann heisst (2.28) aber, daß $f(ux) = f(xu)$ für alle $u, x \in G$ sein muss und da die Algebra $L_1(G)$ *punktetrennend* ist, muss G auch abelsch sein. \square

Faltungen spielen in der Signalverarbeitung als *digitale Filter* eine ganz besondere Rolle und besonders schön sind Faltungsalgebren, bei denen es eine *Identität* gibt, also ein Element $e \in L_1(G)$, für das $f * e = f$ ist, die also nichts anderes als ein Einselement bezüglich des Faltungsprodukts sind. Und auch hier gibt es ein abstraktes Resultat. Allerdings brauchen wir erst noch ein klein wenig Terminologie, siehe (Yosida, 1965).

Definition 2.32 *Ein diskreter topologischer Raum basiert auf einer Topologie, bei der alle Teilmengen offen sind. Insbesondere ist jeder Punkt seine eigene Umgebung und liegt im Inneren⁴⁵ derselben*

Die *diskrete Topologie* und ihr Gegenstück, *indiskrete Topologie*, bei der nur \emptyset und G offen sind, sind zwei besonders extreme und in gewissem Sinne auch triviale Topologien, die sich ganz besonders als Gegenbeispiele für naiv-intuitive Vorstellungen

⁴⁵Zur Erinnerung: Das *Innere* einer Menge ist die Vereinigung aller in dieser Menge enthaltenen offenen Mengen.

von Topologie eignen, siehe (Steen & Seebach, 1970). Dort findet man auch einige der wesentlichen Eigenschaften der diskreten Topologie, beispielsweise, daß alle Funktionen (trivialerweise) stetig sind, jeder Punkt eine Umgebung seiner selbst ist. Aber die schönste Eigenschaft ist sicherlich, daß kein diskreter topologischer Raum dicht in sich selbst liegt, siehe nochmals (Steen & Seebach, 1970).

Satz 2.33 Die Algebra $L_1(G)$ besitzt genau dann eine Identität, wenn G diskret ist.

Beweis: Ist G diskret, so muss jedes linksinvariante Maß punktweise definiert sein⁴⁶ und

$$\mu(x) = \mu((xy^{-1})y) = \mu(y), \quad x, y \in G \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \#A\mu(1), \quad A \subseteq G, \quad (2.29)$$

erfüllen. Dann ist $f \in L_1(G)$ wenn $f(x) \neq 0$ nur für eine abzählbare Folge $x_k, k \in \mathbb{N}$, gilt und $\sum_k |f(x_k)| < \infty$ ist. Die Funktion

$$e(x) = \delta_{1x} = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1, \end{cases}$$

ist die gesuchte Identität:

$$(f * e)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) \underbrace{e(x_k^{-1}x)}_{=\delta_{x_k, x}} = \begin{cases} 0 = f(x), & x \notin \{x_k : k \in \mathbb{N}\}, \\ f(x_\ell) = f(x), & x = x_\ell. \end{cases}$$

Sei nun $e \in L_1(G)$ eine Einheit, also $e * f = f$. Dann existiert eine *positive* untere Schranke für das Maß von offenen Mengen. Wäre das nämlich nicht der Fall, gäbe es für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung 0 der 1 , so daß

$$\int_U |e| d\mu < \varepsilon.$$

Sei ausserdem V symmetrisch mit $V^2 \subset U$ und $f = \chi_V$, dann ist für fast alle⁴⁷ $x \in V$

$$\begin{aligned} 1 &= f(x) = (e * f)(x) = \int_G e(y) \chi_V(y^{-1}x) d\mu(y) = \int_{xV} e d\mu \\ &\leq \int_U |e| d\mu < \varepsilon, \end{aligned}$$

was einen offensichtlichen Widerspruch darstellt. Daher gibt es eine Zahl $a > 0$ mit $a \leq \mu(U)$ für alle offenen Teilmengen U von G , weswegen jede offene Menge mit

⁴⁶Die Punkte sind ja offene Mengen!

⁴⁷So ist das mit den L_1 -Geschichten. *Punktweise* gelten die nur *fast überall*.

kompaktem Abschluss nur endlich viele Punkte enthalten kann, da für Kompakta ja $\mu(K) < \infty$ gilt, siehe Satz 2.20. Damit müssen aber die einpunktigen Mengen offen und die Topologie diskret sein. \square

Die Faltung ist also nur auf diskreten⁴⁸ Topologien invertierbar, ein Prozess, der als *Deconvolution*⁴⁹ bezeichnet wird und beispielsweise unter dem Stichwort *gefilterte Rückprojektion* zur Invertierung der Radontransformation in der Computertomographie genutzt wird, siehe z.B. (Natterer & Wübbeling, 2001; Sauer, 2008). Aber auch wenn es exakt nur im Spezialfall funktioniert, so klappt es approximativ dennoch für *alle* Gruppen.

Satz 2.34 (Approximative Identitäten) Zu $f \in L_1(G)$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung U der 1, so daß

$$\|f - e * f\|_1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|f - f * e\|_1 < \varepsilon \quad (2.30)$$

für jedes $e \in L_1^+(G)$ mit $e(G \setminus U) = 0$ und $\int e \, d\mu = 1$ erfüllt sind.

Beweis: Die erste Abschätzung in (2.30) ist relativ einfach:

$$\begin{aligned} \|f - e * f\|_1 &= \int_G \left| f(x) \underbrace{\int_G e(y) \, d\mu(y)}_{=1} - \int_G e(y) f(y^{-1}x) \, d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &\leq \int_G e(y) \int_G |f(x) - f(y^{-1}x)| \, d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_G e(y) \|f - f(y^{-1}\cdot)\|_1 \, d\mu(y). \end{aligned}$$

Da die Abbildung $y \mapsto f(y^{-1}\cdot)$ stetig ist, siehe Übung 2.3, gibt es nun zu jedem $\varepsilon > 0$ eine symmetrische Umgebung U der 1, so daß $\|f - f(y^{-1}\cdot)\|_1 < \varepsilon$ für alle $y \in U$ erfüllt ist. Mit diesem U ist dann aber auch

$$\|f - e * f\|_1 \leq \int_U e(y) \underbrace{\|f - f(y^{-1}\cdot)\|_1}_{\leq \varepsilon} \, d\mu(y) \leq \varepsilon \underbrace{\int_U e \, d\mu}_{=1} = \varepsilon.$$

Die zweite Gleichung wird durch das Auftreten der modularen Funktion ein klein wenig verkompliziert. Mit $m := \int_G e(x^{-1}) \, d\mu(x)$ erhalten wir wie oben, daß

$$\begin{aligned} \|f - e * f\|_1 &= \int_G \left| f(x) - \int_G f(xy) e(y^{-1}) \, d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &\leq \int_G e(y^{-1}) \int_G |m^{-1}f(x) - f(xy)| \, d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_G \frac{e(y^{-1})}{m} \|f - m f(\cdot y)\|_1 \, d\mu(y). \end{aligned}$$

⁴⁸Und damit im wesentlichen trivialen.

⁴⁹Entfaltung ist im Deutschen schon anders belegt.

Je kleiner nun der Träger U von e wird, desto mehr geht $m \rightarrow 1$, denn schliesslich ist

$$|m - 1| = \left| \int_G (e(x^{-1}) - e(x)) d\mu(x) \right| \leq \int_G e(x) |m(x^{-1}) - 1| d\mu(x),$$

was wie im Beweis von Satz 2.23 auf der rechten Seite für „kleine“ U gegen Null konvergiert. Damit können wir aber m durch die Abschätzung $1 - \varepsilon' < m < 1 + \varepsilon'$ mit einem ε' ersetzen, das sich ebenfalls *gleichzeitig mit ε* beliebig klein machen lässt, und erhalten, daß

$$\begin{aligned} & \|f - e * f\|_1 \\ & \leq \frac{1}{1 - \varepsilon'} \int_G e(y^{-1}) \underbrace{\|f - f(\cdot y)\|_1}_{< \varepsilon} d\mu(y) + \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} \int_G e(y^{-1}) \underbrace{\|f(\cdot y)\|_1}_{=m(y)\|f\|_1} d\mu(y), \end{aligned}$$

und die rechte Seite lässt sich durch Wahl von U beliebig klein bekommen. \square

Übung 2.3 . Zeigen Sie: Ist $f \in L_p(G)$, dann sind die Abbildungen $y \mapsto f(y \cdot)$ und $y \mapsto f(\cdot y)$ stetige Abbildungen von G nach $L_p(G)$. \diamond

Satz 2.34 mag ein wenig wie unnötiger Aufwand erscheinen, aber die approximative Invertierbarkeit der Faltung ist ein Konzept, dessen Bedeutung, auch und gerade für praktische Zwecke, eigentlich kaum überschätzt werden kann.

Um das noch ein bisschen konkreter zu fassen: Die Umgebungen der 1 bilden unter der Inklusion „ \subset “ ein sogenanntes *gerichtetes System*⁵⁰ \mathcal{U} , und wenn $e_U \in C_U^+(G)$, $U \in \mathcal{U}$, eine Folge von Funktionen zu so einer absteigenden Folge von Umgebungen der 1 mit $\int e_U d\mu = 1$ sind⁵¹, dann konvergieren nach Satz 2.34 die Faltungen $f * e_U$ und $e_U * f$ gleichmäßig gegen f .

Definition 2.35 *Ein gerichtetes System von Funktionen $e_U \in C_U^+(G)$, $U \in \mathcal{U}$, heisst approximative Identität.*

2.5 Charaktere & duale Gruppen

So, nun wird es aber wirklich langsam Zeit, in unserem allgemeinen Überblick zu den Fouriertransformationen, bzw. zu deren Gegenstück, zu kommen. Dazu aber zuerst die generelle Annahme bzw. Vereinfachung:

Von nun an betrachten wir nur noch lokal kompakte abelsche Gruppen, die wir *additiv* schreiben. Und diese Gruppen sollen *nichttriviale Gruppen* sein, also nicht nur aus den neutralen Element, also 0, bestehen.

⁵⁰Als Analogie denke man an reelle Zahlen und „ $<$ “.

⁵¹Um in der Analogie zu bleiben: Das ist genau das Gegenstück zu den allseits beliebten $\lim_{\delta \rightarrow 0^-}$ -Betrachtungen, die aus der Analysis bekannt und vor allem beliebt sind.

Die additive Schreibweise der Gruppe ergibt sich nicht aus Bemühungen, möglichst verwirrend zu sein, sondern um zu zeigen, daß die Exponentialfunktionen ebenfalls auf ganz natürliche Art und Weise auftauchen.

Definition 2.36 (Charaktere)

1. Mit $\mathbb{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \simeq \mathbb{T}$ bezeichnen wir den komplexen Einheitskreis. Offensichtlich ist \mathbb{C}_1 eine multiplikative Gruppe.
2. Ein Charakter ξ auf G ist ein Gruppenhomomorphismus $\xi : G \rightarrow \mathbb{C}_1$, also eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$|\xi(x)| = 1, \quad \xi(x + x') = \xi(x)\xi(x'), \quad x, x' \in G. \quad (2.31)$$

3. Die Interaktion zwischen Gruppenelement und Charakter wird auch gerne als $\langle x, \xi \rangle$ geschrieben, siehe (Katznelson, 1976).
4. Die duale Gruppe \widehat{G} zu G ist die Menge aller Charaktere von G .

Übung 2.4 Zeigen Sie: Aus (2.31) folgen $\xi(0) = 1$ und $\xi(-x) = \xi(x)^{-1} = \overline{\xi(x)}$. \diamond

Beispiel 2.37 (Charaktere) Für die „klassischen“ lokalkompakten abelschen Gruppen kann man die Charaktere explizit angeben:

1. Für $G = \mathbb{R}$ sind die einzigen Lösungen von $\xi(x + x') = \xi(x)\xi(x')$ Funktionen der Form $\xi(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{C}$, und wegen der Beschränktheit muss a rein imaginär sein, so daß $\xi(x) = e^{i\theta x}$, $\theta \in \mathbb{R}$, sein muss. Kommt uns bekannt vor ...
2. Jeder Charakter von $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muss nach Lemma 2.38 ein Charakter von \mathbb{R} , also von der Form $e^{i\theta \cdot}$ sein, und auf $2\pi\mathbb{Z}$ konstant sein, was nichts anderes als $\theta \in \mathbb{Z}$ ist. Also sind die Charaktere von der Form $e^{in \cdot}$, $n \in \mathbb{Z}$, trigonometrische Polynome in komplexer Schreibweise.
3. Analog hat der ganzzahlige Torus $\mathbb{T}' := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Charaktere $e^{2\pi in \cdot}$.
4. Die Charaktere von \mathbb{Z} sind bereits durch $\xi(1) =: e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C}_1$, $\theta \in [0, 1)$ komplett definiert, der Rest ergibt sich aus (2.31): $\xi(k) = \xi(1)^k = e^{2\pi ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$. Umgekehrt definiert auch jedes $\theta \in [0, 1) = \mathbb{T}'$ auf diese Weise einen Charakter, also sind die Charaktere von \mathbb{Z} gerade von der Form $\xi = e^{2\pi i\theta \cdot}$.

Lemma 2.38 Ist H eine Untergruppe von G , so bestehen die Charaktere von G/H aus allen Charakteren von G , die auf H konstant sind.

Beweis: Ist $\eta \in \widehat{G/H}$, dann ist $\xi := \eta(\cdot + H)$ eine stetige Funktion von G nach \mathbb{C}_1 und erfüllt

$$\xi(x + x') = \eta((x + H) + (x' + H)) = \eta(x + H) \eta(x' + H) = \xi(x) \xi(x'),$$

so daß ξ in der Tat ein Charakter ist – und natürlich per definitionem auf H konstant. Ist umgekehrt ξ ein auf H konstanter Charakter von G , dann definiert er natürlich auf der Äquivalenzklasse zu x in G/H auch wieder einen Charakter. \square

Übung 2.5 Zeigen Sie: $(G \times H)^\wedge = \widehat{G} \times \widehat{H}$ mit $\xi(x_1, x_2) = \xi_G(x_1) \xi_H(x_2)$. \diamond

Bemerkung 2.39

1. Bezüglich der punktweise Multiplikation, also $(\xi \xi')(x) = \xi(x) \xi'(x)$, $x \in G$, $\xi, \xi' \in \widehat{G}$, bilden die Charaktere in der Tat ein multiplikative abelsche Gruppe, der Name „duale Gruppe“ für \widehat{G} ist also vollauf gerechtfertigt.
2. Die zweite Eigenschaft von (2.31) zeigt schon, daß die Charaktere „irgendwie“ Exponentialfunktionen sein müssen.
3. Die Topologie auf \widehat{G} ist die der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G : Eine Basis für die Umgebungen⁵² der 1 in \widehat{G} sind alle Mengen der Form

$$U_\varepsilon = \left\{ \xi \in \widehat{G} : \max_{x \in K} |\xi(x) - 1| < \varepsilon, K \subset G \text{ kompakt} \right\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.32)$$

Der Name „dual“ legt normalerweise in der Mathematik nahe, daß die Rollen der Objekte vertauschbar sind. Und in der Tat ist das auch hier der Fall und erklärt und rechtfertigt die Schreibweise $\langle x, \xi \rangle$ für die Charaktere.

Satz 2.40 Die duale Gruppe zu \widehat{G} ist G .

Beweis: Wir bemerken zuerst, daß für jedes feste $x \in G$ die Abbildung $\xi \rightarrow \xi(x)$ einen Charakter auf \widehat{G} definiert: Offensichtlich ist $|\xi(x)| = 1$ und⁵³ trivialerweise ist $(\xi \xi')(x) = \xi(x) \xi'(x)$, es handelt sich also wirklich um einen Gruppenhomomorphismus. Damit gehört also zu jedem $x \in G$ ein Charakter von \widehat{G} , daß man so wirklich alle Charaktere erhält, das ist der Inhalt des Dualitätssatzes von Pontryagin, den wir an dieser Stelle einfach mal glauben müssen⁵⁴. \square

⁵²Da \widehat{G} nach wie vor *multiplikativ* geschrieben wird, interessieren wir und nach wie vor für Umgebungen der 1!

⁵³Wir betrachten ja nun einen Homomorphismus von der *multiplikativen* Gruppe \widehat{G} in die ebenfalls multiplikative Gruppe \mathbb{C}_1 .

⁵⁴Was wir daraus erkennen ist, daß uns definitiv noch der Hintergrund für die Definition der Charaktere fehlt – irgendeinen wichtigen Zusammenhang haben wir offenbar verpasst.

Lemma 2.41 Für $\xi \neq \xi' \in \widehat{G}$ gilt

$$\sup_{x \in G} |\xi(x) - \xi'(x)| \geq \sqrt{3}. \quad (2.33)$$

Beweis: Für $x \in G$, $\xi, \xi' \in \widehat{G}$ ist

$$|\xi(x) - \xi'(x)|^2 = \underbrace{|\xi(x)|^2}_{=1} - 2\Re\left(\overline{\xi(x)}\xi'(x)\right) + \underbrace{|\xi'(x)|^2}_{=1} = 2(1 - \Re\eta(x)),$$

mit $\eta = \bar{\xi}\xi' \in \widehat{G}$. Da $\xi \neq \xi'$ ist, ist auch $\eta = \xi^{-1}\xi' \neq 1$, es gibt also $0 \neq x \in G$ mit $\eta(x) \neq 1$. Sei nun $\eta(x) =: e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, dann ist

$$\eta(kx) := \eta(\underbrace{x + \dots + x}_k) = \eta(x) \cdots \eta(x) = e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Zahlen $e^{ik\theta}$ laufen nun um den Einheitskreis und kommen sogar beliebig nahe an -1 heran, wenn $\theta \notin \pi/\mathbb{N}$ ist. Im Allgemeinen ist aber

$$\inf_{x' \in G} \Re\eta(x') \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \Re\eta(kx) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \Re e^{ik\theta} \leq \Re e^{\pi/3} = -\frac{1}{2},$$

also $\sup_x |\xi(x) - \xi'(x)|^2 \leq 3$ und somit ist (2.33) bewiesen. \square

Natürlich ist dieses seltsame Lemma 2.41 für sich erst mal nicht so spannend, aber es hat eine wichtige Konsequenz.

Satz 2.42 Ist G kompakt, so ist \widehat{G} diskret.

Beweis: Dank Lemma 2.41 ist der Beweis einfach. Ist nämlich G kompakt, so ist die Topologie auf \widehat{G} eine der gleichmäßigen Konvergenz auf ganz G und dann liefern (2.32) und (2.33) sofort, daß $U_\varepsilon = \{1\}$ wann immer $\varepsilon < \sqrt{3}$ ist. \square

Definition 2.43 (Fouriertransformation) Die Fouriertransformation von $f \in L_1(G)$ ist definiert als

$$\widehat{f}(\xi) = \int_G \overline{\xi(x)} f(x) d\mu(x). \quad (2.34)$$

Das Zusammenspiel von Fouriertransformation und Faltung ist nun auch wieder wie gewohnt.

Proposition 2.44 Für $f, g \in L_1(G)$ ist

$$(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}. \quad (2.35)$$

Beweis: Wir berechnen einfach⁵⁵ für $\xi \in \widehat{G}$

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_G \overline{\xi(x)} (f * g)(x) d\mu(x) = \int_G \int_G \overline{\xi(x)} f(x-y) g(y) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_G \int_G \underbrace{\overline{\xi(x+y)}}_{=\overline{\xi(x)} \overline{\xi(y)}} f(x) g(y) d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int_G \overline{\xi(x)} f(x) d\mu(x) \int_G \overline{\xi(y)} g(y) d\mu(y) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

also alles wie von der Fouriertransformation bekannt. \square

Satz 2.45 (Stetigkeit der Fouriertransformation) *Ist $f \in L_1(G)$, so ist \widehat{f} gleichmäßig stetig auf \widehat{G} .*

Beweis: Die Funktion $(x, \xi) \mapsto \langle x, \xi \rangle = \xi(x)$ ist stetig in x und ξ und erfüllt

$$\langle 0, \xi \rangle = \langle x, 1 \rangle = 1.$$

Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Kompaktum $U \subset G$ eine Umgebung $\widehat{U} \subset \widehat{G}$ der 1, so daß

$$\max_{x \in U} |\langle x, \xi \rangle - 1| < \varepsilon, \quad \xi \in \widehat{U},$$

und somit ist für alle $f \in C_U(G)$ und $\xi^{-1}\xi' \in \widehat{U}$

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi')| &\leq \int_G |\langle x, \xi \rangle - \langle x, \xi' \rangle| |f(x)| d\mu(x) \\ &= \int_G |\langle x, \xi^{-1}\xi' \rangle| |f(x)| d\mu(x) \leq \varepsilon \|f\|_1 \end{aligned}$$

und da die $C_{00}(G)$ dicht in $L_1(G)$ liegt, folgt die Behauptung. \square

Und schliesslich noch, ohne Beweis, die *inverse Fouriertransformation*. Ein Beweis findet sich in (Loomis, 1953) und verwendet den Satz von Bochner über positiv definite Funktionen, was deutlich zu weit führen würde. Elementare Beweise für die „normale“ Fouriertransformation auf der Basis von approximativen Identitäten wie in (Katznelson, 1976; Sauer, 2003; Sauer, 2008) lassen sich leider nicht direkt anwenden.

⁵⁵Wenn man es genau nimmt, haben wir für das zweite Gleichheitszeichen bereits die Definition (2.25) der Faltung und die Unimodularität der abelschen Gruppe nach Lemma 2.22 benutzt. Also nur so am Rande ...

Satz 2.46 Ist $f \in L_1(G)$ eine positiv definitive Funktion⁵⁶, so ist, bei passender Normierung des Haar-Maßes $\mu_{\widehat{G}}$,

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \xi(x) \widehat{f}(\xi) d\mu_{\widehat{G}}(\xi), \quad x \in G. \quad (2.36)$$

Eine kleine Bemerkung erscheint trotzdem angemessen. Wir können die Fouriertransformation (2.34) ja auch als einen Operator $F : L_1(G) \rightarrow L(\widehat{G})$ auf einen Funktionenraum $L(\widehat{G}) \subset C_u(\widehat{G})$ betrachten. Führen wir nun in $L(\widehat{G})$ das Skalarprodukt

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\widehat{G}} := \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\mu_{\widehat{G}}(\xi)$$

und analog auf G das Skalarprodukt

$$(f, g)_G := \int_G f(x) \overline{g(x)} d\mu_G(x)$$

ein⁵⁷, dann ist für passende $f \in L(G)$ und $\widehat{g} \in L(\widehat{G})$

$$\begin{aligned} (Ff, \widehat{g})_{\widehat{G}} &= \int_{\widehat{G}} Ff(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\mu_{\widehat{G}}(\xi) = \int_{\widehat{G}} \overline{\widehat{g}(\xi)} \int_G f(x) \langle x, \xi \rangle d\mu_G(x) d\mu_{\widehat{G}}(\xi) \\ &= \int_G f(x) \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\xi) \langle x, \xi \rangle d\mu_{\widehat{G}}(\xi) d\mu_G(x) =: (f, F^*\widehat{g})_G, \end{aligned}$$

wobei F^* als *adjungierter Operator* zu F bezeichnet wird und nichts anderes als der Operator in (2.36) ist. Satz 2.46 über die *inverse Fouriertransformation* besagt also, daß für gewisse „gutartige“ Funktionen die Relation $F^{-1} = F^*$ besteht.

Solche Operatoren kennen wir übrigens als lineare Operatoren von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n sehr gut: In diesem Fall ist $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine *Matrix*, der adjungierte Operator $F^* = F^T$ und eine Matrix mit $F^* = F^{-1}$ bezeichnet man bekannterweise als *orthogonale Matrix*, zumindest im quadratischen Fall $m = n$. Bei nichtquadratischen Matrizen geht das im Prinzip auch, allerdings muss man dann einen der beiden Räume einschränken⁵⁸. Eine

⁵⁶Eine positiv definite Funktion ist die Transformierte eines Borelmaßes,

$$f = \int_{\widehat{G}} \langle \cdot, \xi \rangle d\beta(\xi),$$

wobei β ein positives Maß ist.

⁵⁷Wie ignorieren einmal für einen Moment die Frage, ob und für welche Funktionen dieses Skalarprodukt wirklich existiert.

⁵⁸Ist beispielsweise $m < n$, dann bedeutet Orthogonalität Orthogonalität der Spalten und die Invertierbarkeitsrelation klappt auf dem Bild $F\mathbb{R}^m$ des linearen Operators.

orthogonale Matrix ist aber immer eine *Isometrie*, das heisst, $\|Fx\|_2 = \|x\|_2$ für alle x , und damit besonders gut für Hilberträume geeignet.

Rein formal erhalten wir die Isometrie für die Fouriertransformation in $L_2(G)$ sehr einfach, vorausgesetzt natürlich, wir können die Fouriertransformation auf $L_2(G)$ erweitern. Das ist aber nun wieder relativ einfach: Ist nämlich G kompakt, so ist $L_2(G) \subset L_1(G)$, ist G hingegen nicht kompakt, so betrachte man eine Folge $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset G$ mit $K_n \rightarrow G$ und betrachtet die Funktionen $f_n := \chi_{K_n} f$, die wegen des kompakten Trägers in $L_1(G) \supset L_1(K_N) \supset L_2(K_N)$ liegen und deren Fouriertransformationen existieren und eine Cauchyfolge in $L_2(\widehat{G})$ bilden. Bleibt noch die L_2 -Isometrie, aber auch diese benötigt wieder positiv definite Funktionen in halbeinfachen Banachalgebren⁵⁹

Satz 2.47 (Plancherel) *Für positiv definite $f \in L_1(G)$ ist*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2. \quad (2.37)$$

2.6 Wo die Charaktere wirklich herkommen

Irgendwie ist das mit den Charakteren aber jetzt doch fast ein wenig enttäuschend: Da betreiben wir den ganzen abstrakten Aufwand und dann fallen die Charaktere einfach so vom Himmel und mit ihnen die Fouriertransformation. Aber wer sagt uns denn, daß die in (2.31) eingeführten Objekte auch wirklich „natürliche“ Objekte sind, mal ganz abgesehen davon, daß wir in Satz 2.40 bei der Bidualität ohnehin feststellen mussten, daß wir eigentlich gar nicht so ganz genau wissen, womit wir da herumhantieren.

Die Antwort auf die Frage und die Lösung des Problems ist ein schönes und interessantes Zusammenspiel von Funktionalanalysis und Algebra, das wir zumindest skizzieren wollen, ohne uns aber allen Beweisdetails in der vollen Ausführlichkeit zu widmen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Tatsache, daß in einer Algebra bzw. in einem *Ring* Ideale eine bedeutende Rolle spielen, also Mengen, die bezüglich der Ringoperationen Addition und Multiplikation abgeschlossen sind.

Definition 2.48 (Ideale) *Sei \mathcal{A} eine Algebra, also abgeschlossen unter Addition und Multiplikation.*

1. Ein Ideal \mathcal{I} in \mathcal{A} ist eine Teilmenge von \mathcal{A} mit den Eigenschaften $\mathcal{I} + \mathcal{I} = \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$.
2. Ein maximales Ideal ist ein Ideal mit der Eigenschaft, daß es kein Ideal \mathcal{J} mit der strikten Inklusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ gibt.

⁵⁹Das mag nun erschreckend klingen, ist aber der richtige abstrakte Rahmen für derartige Resultate.

Bemerkung 2.49 (Maximale Ideale)

1. Jedes Ideal \mathcal{I} hat ein maximales Oberideal. Das klingt einfach und einleuchtend, indem man einfach die Menge aller Ideale \mathcal{J} betrachtet, die $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ erfüllen, aber die Existenz eines maximalen Elements in dieser Menge ist wieder einmal eine Anwendung des Zornschen Lemmas alias Wohlordnungssatz alias Auswahlaxiom⁶⁰.
2. Sehr einfache maximale Ideale für $C_{00}(G)$ mit punktweiser Multiplikation⁶¹ sind die der Form

$$\mathcal{I}_x = \{f \in C_{00}(G) : f(x) = 0\}, \quad x \in G. \quad (2.38)$$

Daß es sich hierbei um Ideale handelt ist wirklich leicht nachzurechnen und auch die Maximalität ist nicht schwer: Ist nämlich $g \in C_{00}(G) \setminus \mathcal{I}_x$ irgendeine Funktion mit $g(x) \neq 0$, so gehört für jedes $f \in C_{00}(G)$ die Funktion $f - f(x)/g(x)g$ zu \mathcal{I}_x . Das bedeutet aber, daß das Ideal, das von \mathcal{I}_x und irgendeinem $g \notin \mathcal{I}_x$ erzeugt wird, bereits $C_{00}(G)$ sein muss – \mathcal{I}_x ist maximal.

3. Ein einfaches Beispiel für ein nichtmaximales Ideal ist

$$\mathcal{I}_{x,x'} = \{f \in C_{00}(G) : f(x) = f(x') = 0\} = \mathcal{I}_x \cap \mathcal{I}_{x'}, \quad x, x' \in G,$$

das in den beiden maximalen Idealen \mathcal{I}_x und $\mathcal{I}_{x'}$ enthalten ist.

Das Ideal \mathcal{I}_x aus (2.38) hat eine interessante Eigenschaft: Es ist der Kern eines stetigen linearen Funktionals, das auch mit der Multiplikation in $C_{00}(G)$ verträglich ist, oder, wie die Algebraiker sagen würden, der Kern eines stetigen Homomorphismus⁶² von $C_{00}(G)$ nach \mathbb{R} oder \mathbb{C} , je nachdem, ob wir reell- oder komplexwertige Funktionen betrachten. Und genau das ist die zentrale Beobachtung:

Es besteht eine Beziehung zwischen maximalen Idealen und den Kernen stetiger Homomorphismen.

Lemma 2.50 Sei $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Homomorphismus, dann ist $\ker E$ ein maximales Ideal.

⁶⁰Und wer unter so vielen unterschiedlichen Namen unterwegs ist, der **muss** einfach Dreck am Stecken haben.

⁶¹Also **nicht** unsere Faltungsalgebra $L_1(G)$, da funktioniert so eine punktweise Geschichte nicht, trotzdem werden wir gleich sehen, daß uns (2.38) die wesentliche *Idee* zum Verständnis dieses Ansatzes liefert.

⁶²In diesem Fall dann auch wirklich von Algebra nach Algebra!

Beweis: $\ker E$ ist ein Ideal, da für $f, g \in \ker E$ und $h \in \mathcal{A}$ die Beziehungen

$$E(f + g) = E(f) + E(g) = 0 \quad \text{und} \quad E(fh) = E(f)E(h) = 0 \cdot E(h) = 0$$

gelten und die Maximalität folgt wie oben aus der Tatsache, daß sich mittels $g \notin \ker E$ jedes $f \in \mathcal{A}$ als $f = \frac{E(f)}{E(g)}g + \ker E$ schreiben lässt. \square

Ein bisschen Vorsicht ist natürlich schon geboten, denn ob ein Funktional „passt“ oder nicht, hängt natürlich von der Struktur der Algebra ab.

Beispiel 2.51 Das Funktional E_x mit $E_x(f) = f(x)$, ist ein stetiger Homomorphismus auf $C_0(G)$, aber **nicht** auf $L_1(G)$. Weder ist es dort stetig, noch verträgt es sich mit der Multiplikation.

Das andere Konzept ist das der *Dualität* aus der Funktionalanalysis, siehe (Kreyszig, 1978; Taylor & Lay, 1980). Ist X ein normierter linearer Raum⁶³, dann wird der Raum X^* aller linearen Funktionalen auf X als *algebraischer Dualraum* von X . Der Unterschied zwischen dem algebraischen Dualraum und dem Dualraum X' besteht darin, daß letzterer nur die *beschränkten* linearen Funktionalen auf X enthält. Mit anderen Worten: $\lambda \in X^*$ wenn $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $\lambda(ax + bx') = a\lambda(x) + b\lambda(x')$. Nun definiert aber X auch wieder lineare Funktionalen⁶⁴ auf X^* , nämlich via $\lambda \mapsto \lambda(x)$, denn trivialerweise gilt $(a\lambda + b\lambda')(x) = a\lambda(x) + b\lambda'(x)$. Mit anderen Worten: $X \subset X^{**}$, dem algebraischen Dual des algebraischen Duals. Übrigens: Ein linearer Raum⁶⁵ heisst *reflexiv*, wenn $X = X^{**}$ ist; Hilberträume, bei denen die Norm von einem Skalarprodukt abgeleitet ist, sind Beispiele für reflexive lineare Räume.

Im Fall einer Algebra haben wir aber wieder mehr Struktur! Ein *Ringhomomorphismus* $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Algebra \mathcal{A} überträgt nun Addition **und** Multiplikation von \mathcal{A} nach \mathbb{C} , das heisst, $E(ab) = E(a)E(b)$ und $E(a + b) = E(a) + E(b)$, $a, b \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist jeder Ringhomomorphismus ein Funktional und daher ist die Menge \mathcal{A}^b der stetigen Ringhomomorphismen in \mathcal{A}^* enthalten. Für die Definition von \mathcal{A}^* genügt es, \mathcal{A} als linearen Raum anzusehen. Und nun spielen wir wieder Dualität: Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung $\hat{a} : \mathcal{A}^b \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\hat{a}(h) = h(a)$, $h \in \mathcal{A}^b$ auch wieder ein Ringhomomorphismus:

$$\hat{a}(hh') = h(a)h'(a) = \hat{a}(h)\hat{a}(h') \quad \text{und} \quad \hat{a}(h + h') = h(a) + h'(a) = \hat{a}(h) + \hat{a}(h').$$

Eine erste Beobachtung, siehe (Loomis, 1953, 19B Theorem), ist nun, daß \mathcal{A}^b in der *schwachen Topologie*⁶⁶ lokal kompakt ist und daß jedes Element aus dem Abschluss $\overline{\mathcal{A}^b}$ als Grenzwert von Homomorphismen ebenfalls ein Homomorphismus sein muss.

⁶³Gut, wir können auch gleich Vollständigkeit annehmen, dann ist es ein *Banachraum*.

⁶⁴Diese Prozedur sollte uns eigentlich bekannt vorkommen.

⁶⁵Wer aufgepasst hat: Um von X zu X^* zu kommen, braucht man **keine** Norm, erst die Definition von X' setzt eine Norm voraus.

⁶⁶Was auch immer das ist, wir wollen uns jetzt nicht auch noch in den Tiefen der Funktionalanalysis verlieren, so schön es dort auch ist, siehe z.B. (Kreyszig, 1978; Yosida, 1965).

Satz 2.52 Entweder ist \mathcal{A}^b kompakt oder $\widehat{a}(\infty) = 0$ für alle a .

Beweis: \mathcal{A}^b ist genau dann kompakt, wenn $\overline{\mathcal{A}^b} = \mathcal{A}^b$, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn der Nullhomomorphismus h_0 nicht zu $\overline{\mathcal{A}^b}$ gehört. Andernfalls haben wir eine *Einpunkt-Kompaktifizierung* $\overline{\mathcal{A}^b} = \mathcal{A}^b \cup \{h_0\}$ und daher für alle $a \in \mathcal{A}$ die Identität $\widehat{a}(\infty) = h_0(a) = 0$. \square

Der nächste Schritt besteht darin, die stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum⁶⁷ mit den maximalen Idealen zu verknüpfen. Im Fall eines Kompaktums ist dies erstaunlich einfach.

Proposition 2.53 Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{I} \neq C(X)$ ein Ideal in $C(X)$.

1. Es gibt ein $x \in X$ mit $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_x$.
2. Ist \mathcal{I} maximal, so ist $\mathcal{I} = \mathcal{I}_x$.

Beweis: Die zweite Aussage folgt offensichtlich aus der ersten, denn wenn \mathcal{I} maximal und in \mathcal{I}_x enthalten ist, dann kann da nur Gleichheit gelten.

Um die erste Aussage zu beweisen, nehmen wir an, es gäbe für jedes $x \in X$ ein $f_x \in \mathcal{I}$ mit $f_x(x) \neq 0$. Dann ist

$$|f_x|^2 = \underbrace{f_x}_{\in \mathcal{I}} \underbrace{\overline{f_x}}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{I}, \quad |f_x|^2 \geq 0$$

und $|f_x|^2 > 0$ in einer offenen Umgebung U_x von x . Da $X \subset \bigcup_x U_x$ kompakt ist, reicht eine endliche Überdeckung $\bigcup_{x \in I} U_x$, $I \subset X$, $\# < \infty$ und

$$f := \sum_{x \in I} |f_x|^2 \in \mathcal{I} \quad \text{und} \quad f > 0.$$

Damit gehört aber f^{-1} zu $C(X)$ und somit $f f^{-1} = 1$ zu \mathcal{I} , weswegen $\mathcal{I} = C(X)$ sein müsste. Fazit: Es gibt mindestens ein $x \in X$, so daß $f(x) = 0$, $f \in \mathcal{I}$, also $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_x$. \square

Für unsere Zwecke müssen wir Proposition 2.53 so verstehen, daß es eine 1–1–Beziehung zwischen X und den maximalen Idealen gibt, nämlich daß jedes maximale Ideal \mathcal{I} von der Form \mathcal{I}_x sein muss⁶⁸.

So, und nun wird es interessant! Wir betrachten die Algebra⁶⁹ \mathcal{A} als Dual von \mathcal{A}^b , also die $\mathcal{A} \subset C(\mathcal{A}^b)$. Nach Satz 2.52 ist \mathcal{A}^b kompakt oder kompaktifizierbar und

⁶⁷Und dieser Hausdorffraum wird nicht G sein, sondern \mathcal{A}^b !

⁶⁸Wenn X nicht kompakt ist, ist das natürlich alles wieder nicht so einfach.

⁶⁹Zur Erinnerung: **Das** ist unsere Banachalgebra $L_1(G)$ oder so.

daher besteht eine Beziehung zwischen \mathcal{A} als Teilmenge von $C(\mathcal{A}^b)$ und den maximalen Idealen in \mathcal{A}^b , und zwar dergestalt, daß diese alle von der Form \mathcal{I}_h , $h \in \mathcal{A}^b$ sein müssen⁷⁰. Sei also \mathcal{I} so ein maximales Ideal bzw. h der Homomorphismus aus \mathcal{A}^b mit $\mathcal{I} = \mathcal{I}_h$, dann ist

$$\mathcal{I}_h = \{a \in C(\mathcal{A}^b) : a(h) = 0\} = \{a \in \mathcal{A} : 0 = a(h) = h(a)\} = \ker h,$$

das maximale Ideal ist also bidualerweise⁷¹ nichts anderes als der Kern eines Homomorphismus $h \in \mathcal{A}^b$ und nach Lemma 2.50 selbst wieder ein maximales Ideal \mathcal{M} in \mathcal{A} . Dann sagt die Algebra (Gröbner, 1968; Loomis, 1953), daß \mathcal{A}/\mathcal{M} ein Körper ist und als *normierter Körper*⁷² isomorph zu \mathbb{C} . Ist also e die Eins in \mathcal{A}/\mathcal{M} , dann gibt es für jedes $a \in \mathcal{A}$ einen eindeutigen Wert $\langle \mathcal{M}, a \rangle \in \mathbb{C}$ so daß

$$a + \mathcal{M} =: [a] = \langle \mathcal{M}, a \rangle e$$

ist. Variieren wir⁷³ nun \mathcal{M} , dann ist

$$\widehat{a} ::= \mathcal{M} \mapsto \langle \mathcal{M}, a \rangle$$

eine stetige Funktion, die auf den maximalen Idealen. Betrachtet man nun auch noch die Normen aller beteiligten Abbildungen⁷⁴, so stellt sich heraus, daß $\widehat{\cdot} : a \mapsto \widehat{a}$ ein *normreduzierender Homomorphismus* von \mathcal{A} auf eine (ziemlich wilde) Algebra $\widehat{\mathcal{A}}$ von Funktionen ist, die auf maximalen Idealen definiert sind.

Trotzdem ist das die Fouriertransform und ein *Charakter* ist in diesem allgemeinen Kontext der Homomorphismus $\langle \mathcal{M}, a \rangle$, der a in \widehat{a} „verwandelt“. Und spielt man dieses Spiel nun in der Faltungsalgebra $L_1(G)$, so landet man auch genau bei den Charakteren, die wir in (2.31) definiert haben. Also eigentlich alles ganz einfach und natürlich.

⁷⁰Ich will niemanden langweilen oder erschrecken, aber hier werden einige topologische Aspekte ignoriert, die für einen „richtigen“ Beweis natürlich unerlässlich wären.

⁷¹Dies ist natürlich ein Phantasieneologismus.

⁷²Die Norm überträgt sich von der Algebra \mathcal{A} !

⁷³Das ist doch mal was: eine Funktion mit **maximalen Idealen** als Argument.

⁷⁴An alle erbleichenden Leser und Zuhörer: Das kann man machen und sollte es auch machen, aber wir verzichten hier darauf und verweisen nur zum wiederholten Male auf (Loomis, 1953). Also tief Luft holen, nicht hyperventilieren und langsam wieder das Bewusstsein erlangen.

*Das ist die perfekte Welle,
das ist der perfekte Tag,
es gibt mehr als du weißt ...*

Juli, Die perfekte Welle

Wavelets – die stetige Transformation

3

Geschafft! Wir kommen endlich zum Objekt der Begierde, nämlich den Wavelets, genauer, zur stetigen Wavelettransformation. Bevor wir damit aber loslegen können, brauchen wir eine kurze Referenz auf die „klassische“ Fouriertransformation und deren Eigenschaften.

3.1 Die Fouriertransformation als technisches Vehikel

Als erstes zur Klarstellung nochmal die Definition.

Definition 3.1 (Fouriertransformation) Für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformation als

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx, \quad \xi \in \widehat{\mathbb{R}}^d = \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

definiert.

Bemerkung 3.2 Wenn man ganz genau sein will, erfolgt in (3.1) die Identifizierung zwischen \mathbb{R}^d und $\widehat{\mathbb{R}}^d$ durch $\xi \leftrightarrow e^{i\xi}$, siehe auch Beispiel 2.37.

Eigenschaften der Fouriertransformation, die für das Rechnen mit selbiger wichtig und hilfreich sind, sind im nächsten Satz zusammengestellt, der aus (Sauer, 2008) kopiert ist, wo sich auch die (sehr elementaren) Beweise finden. Zuvor aber zwei Begrifflichkeiten.

Definition 3.3 Der Translationsoperator τ_y , $y \in \mathbb{R}^d$ ist als $\tau_y f = f(\cdot + y)$, der Dilationsoperator σ_A , $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ als $\sigma_A f = f(A \cdot)$ definiert.

Satz 3.4 (Eigenschaften der Fouriertransformierten) Für $f \in L_1$ gelten die folgenden Aussagen:

1. Für $y \in \mathbb{R}^d$ ist

$$(\tau_y f)^\wedge(\xi) = e^{iy^T \xi} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.2)$$

Translationen werden also zu Phasenverschiebungen.

2. Für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist

$$(\sigma_A f)^\wedge(\xi) = \frac{\widehat{f}(A^{-T}\xi)}{|\det A|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.3)$$

3. Für $g \in L_1$ ist $f * g \in L_1$ und es gilt für $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad (3.4)$$

4. Sind außerdem $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in L_1$, $j = 1, \dots, d$, dann gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^\wedge(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi), \quad j = 1, \dots, d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.5)$$

5. Sind $(\cdot)_j f \in L_1$, $j = 1, \dots, d$, dann ist \widehat{f} differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{f}(\xi) = (-i(\cdot)_j f)^\wedge(\xi), \quad j = 1, \dots, d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.6)$$

6. Ist $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, dann ist

$$f(x) = \left(\widehat{f} \right)^\vee(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi \quad (3.7)$$

Die Operation $f \mapsto f^\vee := \frac{1}{(2\pi)^d} f^\wedge(-\cdot)$ bezeichnet man als inverse Fouriertransformation⁷⁵.

3.2 Die Wavelettransformation und ihre Inverse

So, nun aber endlich zur Definition eines Wavelets, wobei man wieder einmal ein wenig aufpassen muss, weil die Begriffe in der „Standardliteratur“ (Daubechies, 1992; Holschneider, 1995; Mallat, 1999) nicht immer zu 100% konsistent verwendet werden. Noch ein Wort zur Literatur: Ein günstiges deutsches Buch zum Thema ist (Louis *et al.*, 1998), eine Einführung und Übersicht ohne tiefere Details findet sich in (Meyer, 1993) und ein komplett fouilletonisch-wissenschaftsjournalistischer Zugang in (Hubbard, 1996). Jetzt aber zu den Begrifflichkeiten.

⁷⁵Die Gründe dafür sind ja wohl offensichtlich.

Definition 3.5 (Wavelets und Zulässigkeit) Eine möglicherweise komplexwertige Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ heisst Wavelet⁷⁶, wenn sie mittelwertfrei ist, d.h., wenn

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (3.8)$$

gilt. Ein Wavelet heisst normalisiert, wenn $\|\psi\|_2 = 1$.

Die Mittelwertfreiheit (3.8) ist eine Mindestbedingung an ein Wavelet, oftmals fordert man mehr, nämlich daß das Wavelet zulässig sein soll, aber dazu in Kürze mehr.

Definition 3.6 Zu einem normalisierten Wavelet⁷⁷ ψ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist die Wavelettransformation als

$$W_{\psi}f(s, u) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt, \quad (s, u) \in \Gamma = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

definiert.

Der etwas sperrige⁷⁸ Term $1/\sqrt{s}$ sorgt dafür, daß auch das skalierte Wavelet

$$\psi_s := \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(s^{-1}\cdot), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

normiert ist:

$$\|\psi_s\|_2 = \frac{1}{|s|} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t/s)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = \|\psi\|_2 = 1.$$

Schauen wir uns nun zuerst einmal die “klassischen” Beispiele für Wavelets an.

Beispiel 3.7 (Wavelets)

1. Das Haar–Wavelet ist die unstetige Funktion

$$\psi := \chi(\cdot + 1) - \chi = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0), \\ -1, & x \in (0, 1], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wieder $\chi = \chi_{[0,1]}$ ist. Das Haar–Wavelet ist das einzige unter den “klassischen” Wavelets, das kompakten Träger hat.

⁷⁶Ursprünglich “Ondelette”, was auch nichts anderes als “Wellchen” bedeutet.

⁷⁷Die Definition eines Wavelets beinhaltet automatisch $\psi \in L_2(\mathbb{R})$.

⁷⁸Naja, so schlimm ist der nun wirklich nicht, da sind wir aus dem vorhergehenden Kapitel ja wohl inzwischen deutlich heftigeres gewohnt.

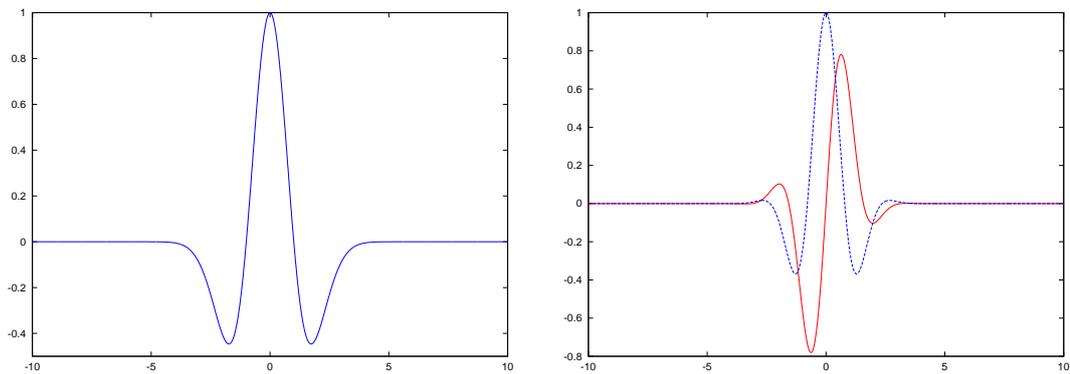


Abbildung 3.1: Der Mexican-Hat (links) und das Morlet-Wavelet (rechts), wobei Real- und Imaginärteil separat geplottet sind.

2. Das Mexican-Hat⁷⁹-Wavelet ist als

$$\psi(t) := (1 - t^2) e^{-t^2/2} = -\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

definiert. Es hat keinen kompakten Träger mehr, klingt aber für $x \rightarrow \infty$ exponentiell ab und verfügt daher immer noch über gute Zeitlokalisierung. Die zugehörige Fouriertransformation ist

$$\widehat{\psi}(\xi) = \sqrt{2\pi} \xi^2 e^{-\xi^2/2}$$

und stimmt damit im wesentlichen mit dem Wavelet selbst überein. Daß diese Funktion nicht willkürlich sondern systematisch gewählt ist, sieht man daran, daß die „Basisfunktion“ $e^{-(\cdot)^2}$ optimale Zeit-/Frequenzlokalisierung im Kontext der Heisenbergschen Unschärferelation hat (Sauer, 2008, Bemerkung 5.15). Aber wir kommen noch dazu.

3. Das Morlet-Wavelet bzw. „Morlet’s Gaussian wavelet“, siehe (Holschneider, 1995), ist der komplexe Bruder des Mexican Hat und kombiniert dessen Abklingrate mit einer Phasenmodulation:

$$\psi(t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Die Oszillationsfrequenz ω ist dabei ein Parameter, den man frei wählen kann und den man in Anwendungen sorgfältig an den zu untersuchenden Frequenzbereich

⁷⁹Ins Deutsche auch gerne als „Mexikanischer Hut“ übersetzt, obwohl im Deutschen eigentlich dann der spanisch/mexikanische Begriff *Sombrero* angemessener wäre. Das kommt davon, wenn man weder Englisch noch seine eigene Sprache so richtig spricht.

anpassen sollte. Genau genommen ist das Morlet–Wavelet, so wie es hier steht gar kein Wavelet, da $\int \psi \neq 0$ ist⁸⁰, aber das lässt sich relativ einfach durch einen passenden Korrekturterm beheben, siehe (Mallat, 1999).

Eine erste und wesentliche Frage, die man sich bei einer Transformation stellen muss, ist, ob diese auch eine Inverse hat, denn nur dann funktioniert diese Transformation ohne Informationsverlust. Für die Wavelettransformation ist die Frage beinahe positiv zu beantworten, zumindest, wenn das Wavelet einer Bedingung genügt.

Definition 3.8 Ein Wavelet ψ heisst zulässig, wenn

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} < \infty. \quad (3.11)$$

Satz 3.9 („Schwache“ Umkehrformel) Für ein normalisiertes, zulässiges Wavelet ψ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{\cdot - u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}. \quad (3.12)$$

Beweis: Zuerst bemerken wir noch schnell, daß die Konjugation einer komplexwertigen Funktion f die Fouriertransformation

$$(\overline{f})^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{-i\xi t} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\xi t} dt} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$$

hat.

Im ersten “richtigen” Schritt unseres Beweises bestimmen wir eine Fouriertransformierte der Wavelettransformation, nämlich

$$\begin{aligned} (W_\psi f(s, \cdot))^\wedge(\xi) &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_s(t - \cdot)} dt \right)^\wedge(\xi) \\ &= \left(f * \overline{\psi_s(-\cdot)} \right)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}_s(\xi) \end{aligned}$$

also

$$(W_\psi f(s, \cdot))^\wedge(\xi) = \sqrt{|s|} \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}(s\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad (3.13)$$

⁸⁰Hier sind wir schon wieder in der Welt der Sprechweisen, denn in (Holschneider, 1995) heißt es, es wäre kein “progressives Wavelet”.

und somit, für $s \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f(s, \cdot))^{\wedge}(\xi) (\psi_s(t - \cdot))^{\wedge}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |s| \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}(s\xi) e^{i\xi t} \overline{\widehat{\psi}(s\xi)} d\xi = \frac{|s|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \widehat{f}(\xi) \left| \widehat{\psi}(s\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Mit einer Integrationsvertauschung und der Variablentransformation⁸¹ $\omega = s\xi$ bekommen wir so für das volle Integral

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \\ &= \frac{1}{2\pi C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \widehat{\psi}(s\xi) \right|^2}{|s|} ds d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi C_{\psi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi}_{=(\widehat{f})^{\vee}(t)=f(t)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^2}{|\omega|} d\omega}_{=C_{\psi}} = f(t), \end{aligned}$$

genau wie behauptet. □

Ist ψ reell, dann ist $\widehat{\psi}$ symmetrisch und somit ist

$$\frac{1}{2} C_{\psi} := \int_{\mathbb{R}_+} |\xi|^{-1} \left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 d\xi$$

eine Zulässigkeitskonstante, die die modifizierte Invertierungsformel

$$f = \frac{2}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{\cdot - u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}. \quad (3.14)$$

erlaubt, in der nur die „natürlichen“ s -Werte aus \mathbb{R}_+ verwendet werden.

Viel interessanter ist aber die Tatsache, daß man die Wavelettransformation auch mit einem möglicherweise anderen *Rekonstruktionswavelet* invertieren kann, zumindest im schwachen Sinne.

⁸¹Diese Variablentransformation ist schuld daran, daß wir auch über die eher kontraintuitiven *negativen* s -Werte integrieren müssen, denn selbst wenn s nur positive Werte durchlaufen würde, so name ω wegen der Multiplikation mit ξ auch negative Werte an.

Definition 3.10 (Zulässigkeit) Zwei Wavelets $\psi, \phi \in L_2(\mathbb{R})$ heißen (gemeinsam) zulässig, wenn

$$C_{\psi, \phi} := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\widehat{\psi}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)}}{\xi} < \infty \quad (3.15)$$

erfüllt ist.

Satz 3.11 („Schwache“ Umkehrformel mit Rekonstruktionswavelet) Für ein normiertes, zulässiges Waveletpaar ψ, ϕ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$f = \frac{1}{C_{\psi, \phi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{\cdot - u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}. \quad (3.16)$$

Beweis: Man kann eigentlich den Beweis von Satz 3.9 kopieren⁸², nur ist „ $|\widehat{\psi}|^2$ “ gelegentlich durch „ $\widehat{\psi} \overline{\widehat{\phi}}$ “ zu ersetzen. \square

Die Umkehrformel in Satz 3.9 ist genau wie die in Satz 3.11 eine sogenannte *schwache Umkehrformel*, die „nur“ in einem **globalen** L_2 -Sinne gilt. Grund ist die Verwendung der inversen Fouriertransformation, die eben auf L_2 auch keine punktweise Gültigkeit hat⁸³. Es gibt auch punktweise gültige Umkehrformeln, die natürlich genauso aussehen, aber stärkere Forderungen an ψ stellen – und eben auch anders bewiesen werden, siehe z.B. (Daubechies, 1992). Aber die meisten der „klassischen“ Wavelets erfüllen diese Voraussetzungen mit Leichtigkeit.

3.3 Die Implementierung der Wavelettransformation

Nach so viel Theorie gehen wir jetzt in eine ganz andere Richtung und sehen uns einmal genauer an, wie eine Wavelettransformation eigentlich numerisch berechnet wird, wie man also zu den schönen Bildern kommt. Dazu bemerken wir zuerst einmal, daß die zu transformierende Funktion eigentlich nie als eine solche vorliegt, sondern nur in Form einer *Abtastung*

$$f(t_j), \quad t_0 < \dots < t_N, \quad N \in \mathbb{N},$$

und daß diese Abtastung aus begreiflichen praktischen Gründen **endlich** ist. In vielen Fällen

1. sind, meist aufgrund technischer Gegebenheiten, diese Stellen t_j *äquidistant*, das heisst, $t_j = t_0 + jh$, $h > 0$,

⁸²Was wir an dieser Stelle aber nicht tun wollen, das wäre ja dann doch ein klein wenig zu langweilig, ausserdem lässt sich der so eingesparte Platz wunderbar für Fußnoten nutzen.

⁸³Das ist der Preis dafür, daß man L_2 als Definitionsbereich **und** Bildbereich der Fouriertransformation nutzen kann.

2. steht die Zahl N der Abtastungen a priori gar nicht genau fest,
3. kann man die Abtastpunkte weder vorschreiben noch in irgendeiner Form beeinflussen.

Ein naiver Ansatz zur Berechnung der Wavelettransformation könnte nun einfach diese Punkte t_j verwenden und das Integral durch eine Summe

$$W_\psi(s, u) \sim \sum_{j=0}^N w_j f(t_j) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t_j - u}{s}\right)}, \quad w_j > 0, \quad (3.17)$$

als eine *Quadraturformel*, siehe (Isaacson & Keller, 1966; Gautschi, 1997; Sauer, 2000a) ersetzen. Im Falle der *Rechtecksregel* ist beispielsweise $w_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, \dots, N-1$, und w_N passend eine vernünftige Wahl, oder bei äquidistanten Knoten gerne auch $w_j = h$, $j = 0, \dots, N$. Für festes s haben wir dann für jedes u einen Rechenaufwand von $O(N)$ und wenn wir, was intuitiv naheliegend ist, die Wavelettransformation für die Stellen $u_j = t_j$, $j = 0, \dots, N$, auf diese Art und Weise bestimmen, dann kostet uns das $O(N^2)$ Rechenoperationen.

Ausserdem müssen wir dafür das Wavelet an den Stellen $\frac{t_j - t_k}{s}$, $j, k = 0, \dots, N$, auswerten. Das ist einerseits nicht so schlimm, denn die Wavelets sind in vielen Fällen *explizit* bekannt, siehe Beispiel 3.7, macht es aber zumindest empfehlenswert, das Wavelet wegen der Lage dieser Auswertungspunkte um den Ursprung zu zentrieren⁸⁴. Etwas mehr Vorsicht benötigt schon die Tatsache, daß diese fixe Auswertung bereits den Skalenbereich einschränkt! Wavelets fallen normalerweise sehr schnell ab, und das in Zeit und Frequenz:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \psi(\xi) = 0,$$

wobei die Abklingrate gerne auch mal exponentiell ist, beispielsweise bei den Wavelets aus Beispiel 3.7⁸⁵. Ist bei so einem Wavelet nun aber s klein genug, dann hat die Quadraturformel (3.17) die Form

$$W_\psi(s, t_j) \sim w_j f(t_j) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi(0)}, \quad (3.18)$$

und das ist nicht unbedingt das, was man haben möchte.

Um zu einer besseren und schnelleren Methode zur Berechnung der Wavelettransformation zu kommen, müssen wir ein wenig ausholen. Zuerst widmen wir uns einmal der Frage, wann man Funktionen überhaupt aus diskreten Abtastungen rekonstruieren kann, also wieder einmal dem *Abtastsatz* von *Shannon*. Dazu erst eine Definition.

⁸⁴Das ist natürlich überhaupt kein Problem und damit etwas, das man bestenfalls falsch machen kann.

⁸⁵Eigentlich haben alle „praxisrelevanten“ Wavelets diese Eigenschaft, da sie unerlässlich für eine gute Zeit-/Frequenz-Lokalisierung ist, siehe z.B. (Sauer, 2008).

Definition 3.12 Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ heißt bandbeschränkt, wenn es eine kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gibt, so daß $\text{supp } \hat{f} \subseteq \Omega$.

Bemerkung 3.13 Bandbeschränktheit sieht zuerst einmal so einfach aus, hat aber ganz automatisch einige sehr direkte Konsequenzen an die Funktion f :

1. In einer technischen Interpretation sind bandbeschränkte Funktionen eigentlich etwas sehr natürliches: Jede Aufnahmehardware, beispielsweise für Töne oder Elektroenzephalogramme, hat nur einen endlichen Frequenzgang und in vielen Fällen sind in die Hardware sogar explizite Bandpassfilter integriert, die dafür sorgen sollen, daß überhaupt nur ein endlicher Frequenzbereich „durchkommt“.
2. Jede bandbeschränkte Funktion hat unendlichen Träger, wie die Heisenbergsche Unschärferelation lehrt. Eine Funktion kann immer nur **entweder** im Zeit- **oder** im Frequenzbereich kompakten Träger haben⁸⁶, aber niemals in beiden gleichzeitig.
3. Die vorhergehende Bemerkung zeigt nun aber wieder, daß es in der Realität gar keine bandbeschränkten Signale geben kann, denn diese müssten unendlichen Träger haben und wären somit ausgesprochen unhandlich zu speichern.
4. Jede bandbeschränkte Funktion gehört zu $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ist also beliebig oft differenzierbar.
5. Die Glattheitseigenschaften, genauer Analytizität und dergleichen, lassen sich im Rahmen der Paley–Wiener–Sätze noch genauer beschreiben und untersuchen, siehe (Sauer, 2008) und vor allem (Hille, 1982).

Jetzt noch zwei Operatoren, die wir später ohnehin noch brauchen und genauer untersuchen werden.

Definition 3.14

1. Der Skalierungsoperator oder Dilatation σ_h , $h > 0$, operiert auf f als $\sigma_h f = f(h \cdot)$ und der Translationsoperator oder Shift τ_x als $\tau_x f = f(\cdot + x)$.
2. Die Abtastung von f mit Schrittweite $h > 0$ ist die Folge

$$S_h f := \sigma_h f|_{\mathbb{Z}} = (f(h\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}^d). \quad (3.19)$$

3. Die Faltung zwischen einer Folge $c : \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{R}$ und einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist als

$$c * f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} c(\alpha) f(\cdot - \alpha)$$

definiert.

⁸⁶Oder natürlich weder noch.

4. Die Sinc-Funktion ist $\text{sinc } x := \sin x/x$ und entsprechend $\text{sinc } \pi := \sigma_\pi \text{sinc}$.

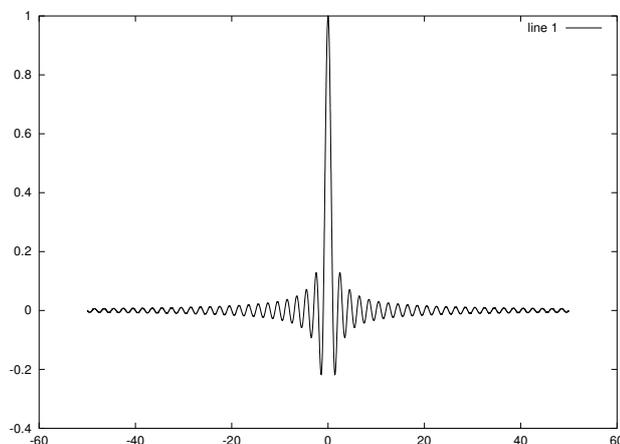


Abbildung 3.2: Die Funktion $\text{sinc } x$.

Bemerkung 3.15 1. Die Faltungsgeschichte 3) können wir natürlich auch Gruppentheoretisch betrachten: Ist H eine Untergruppe von G und schreiben wir alles der Einfachheit halber abelsch und additiv, so können wir eine Faltung auf $H \times G$ als

$$(h * g)(x) = \int_H h(y) g(x - y) d\mu_H(y), \quad x \in G,$$

definieren, also eine Faltung in H komplett nach G erweitern. Natürlich sind die Rollen hier nicht vertauschbar, denn $h \in L_1(H)$ ist ja auf ganz G gar nicht definiert.

2. Die Sinc-Funktion hat bekanntlich die schöne Eigenschaft, daß sie (inverse) Fouriertransformierte einer charakteristischen Funktion ist. Genau gilt

$$\chi_{[-1,1]^d}^\vee(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^d \text{sinc } x, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.20)$$

Ausserdem ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sinc } x = 0$, allerdings fällt die Sinc-Funktion nur wie x^{-1} , also recht langsam, ab. Das führt zu praktischen Schwierigkeiten.

3. Der Name „Sinc“ kommt von Sinus Cardinalis, denn der Sinc ist eine kardinale Funktion⁸⁷, das heisst, $\text{sinc } k\pi = \delta_{k0}$.

⁸⁷Eigentlich bedeutet „kardinale Funktion“ ja eine Eigenschaft an den ganzen Zahlen, also den Kardinalzahlen, nämlich $f(k) = \delta_{0k}$, und so gesehen ist nicht sinc die kardinale Funktion, sondern $\text{sinc } \pi$, weswegen die Konstante π auch gerne in die Definition der Sinc-Funktion integriert wird.

4. Um die Sprechweise etwas interessanter zu machen und unnötiges Verständnis zu vermeiden, wird die Sinc-Funktion bei Ingenieuren auch gerne als Si-Funktion bezeichnet.

Und nun zum Hauptsatz der Signalverarbeitung, dem Shannonschen Abtastsatz (Shannon, 1948; Shannon, 1949), der allerdings bereits deutlich früher von Whittaker (Whittaker, 1915) aufgestellt und bewiesen wurde. Die unbestreitbare Leistung von Shannon besteht aber mindestens darin, die Bedeutung dieses Resultats für die aufkommende Signalverarbeitung erkannt zu haben, ob ihm Whittakers Resultat bekannt war, ist unklar.

Satz 3.16 (Abtastsatz von Shannon) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine bandbeschränkte Funktion mit $\text{supp } \hat{f} \in [-T, T]^d$ und ist $h < h^* = \frac{\pi}{T}$, dann ist

$$f = \sigma_{h^{-1}}(S_h f * \text{sinc } \pi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi(x_j/h - \alpha_j)}{\pi(x_j/h - \alpha_j)}. \quad (3.21)$$

Die Rekonstruktion ist also **exakt**.

Wir wollen den Satz hier nur zitieren, der Beweis findet sich beispielsweise in (Sauer, 2008) und im Anhang, sondern uns die Konsequenzen klarmachen. Es gibt zu jeder bandbeschränkten Funktion f eine von deren *Bandbreite* T abhängige *kritische Abtastrate* oder (reziproke) *Nyquist-Frequenz* h^* , so daß sich für jede **feinere**⁸⁸ Abtastung die Funktion aus den abgetasteten Daten **exakt** rekonstruieren lässt. Allerdings:

Der Shannonsche Abtastsatz setzt **unendlich viele** Abtastwerte voraus.

Dennoch ist der Abtastsatz ein wichtiger erster Schritt, der uns sagt, daß wir in Abhängigkeit von der Abtastrate bzw. der Schrittweite h der Abtastung nur einem gewissen Frequenzbereich „trauen“ dürfen, und damit auch nur einem gewissen Skalenbereich der Wavelettransformation. Das relativiert dann auch (3.18) und zeigt daß es sich dabei um die Konsequenz eines prinzipiellen Problems handelt, nämlich um unzureichende Abtastung, die auch als *Undersampling* bekannt ist.

Nun taucht aber auch schon das nächste wichtige Konzept, die *diskrete Fouriertransformation* alias *DFT*, die durch die *schnelle Fouriertransformation*, die *FFT* realisiert wird. Dazu nehmen wir einen Vektor $f = [f_0, \dots, f_{N-1}] \in \mathbb{R}^N$ und betten diesen in $L_1(\mathbb{Z})$, indem wir ihn ausserhalb des bekannten Bereiches durch Null fortsetzen,

$$f(j) = \begin{cases} f_j, & j \in \mathbb{Z}_N, \\ 0, & j \notin \mathbb{Z}_N, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}_N, \quad (3.22)$$

⁸⁸Das „<“ steht völlig zu recht in Satz 3.16, mit $h = h^*$ funktioniert das Ganze nicht.

wobei $\mathbb{Z}_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq \{0, \dots, N-1\}$. Die duale Gruppe zu \mathbb{Z} ist nun \mathbb{T} und die Charaktere sind die Funktionen⁸⁹ $j \mapsto e^{\pm ij}$, eine Fouriertransformation von $f \in L_1(\mathbb{Z})$ ist also

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Z}} f(x) e^{i\xi x} d\mu_{\mathbb{Z}}(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) e^{ij\xi} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{ij\xi}.$$

Diskretisieren wir diese Fouriertransformierte nun wieder, und zwar an den N gleichverteilten Punkten $\frac{2\pi k}{N} \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}_N$, dann erhalten wir wieder einen N -Vektor, nämlich

$$\widehat{f} = \left[\widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) : k \in \mathbb{Z}_N \right] = \left[\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{2\pi ijk/N} : k \in \mathbb{Z}_N \right],$$

und genau das ist die diskrete Fouriertransformation unseres Vektors f .

Definition 3.17 Die diskrete Fouriertransformation zu einem Vektor $f \in \mathbb{R}^N$ ist der Vektor

$$\widehat{f} = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f_k e^{2\pi ijk/N} : j \in \mathbb{Z}_N \right]. \quad (3.23)$$

Bemerkung 3.18 Zur DFT gäbe es eine Menge zu sagen, aber im Moment wollen wir uns auf ein paar wesentliche Aspekte beschränken:

1. Die Schreibweise „ \mathbb{Z}_N “ in der DFT war nicht nur Bequemlichkeit, die DFT beinhaltet immer eine implizite Periodisierung, was zumindest in \widehat{f} durch die Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ja auch sichtbar ist.
2. Die DFT kann durch die schnelle Fouriertransformation FFT⁹⁰ mit einem ziemlich optimalen Rechenaufwand von $O(N \log N)$ realisiert werden. Die Idee ist einfach, die Details sind es nicht, siehe (Sauer, 2003; van Loan, 1992).
3. Die DFT ist mit ein bisschen linearer Algebra auch als

$$\widehat{f} = F_N f, \quad F_N = [e^{2\pi ijk/N} : j, k \in \mathbb{Z}_N]$$

darstellbar, deren Einträge Potenzen der (primitiven) Einheitswurzel $\omega = e^{2\pi i/N}$ sind, die offenbar symmetrisch ist und beinahe selbstinvers: $V^T V = V^2 = N$. Die Fouriermatrix F_N , beziehungsweise deren Verallgemeinerungen⁹¹, wird uns später noch beschäftigen, wenn wir beim diskreten Fall angelangt sind.

⁸⁹„ \pm “ deswegen weil ja für jeden Charakter ξ auch $\bar{\xi} = \xi^{-1}$ ein Charakter ist, was die Auswahl des Vorzeichens zu einer reinen Willkürentscheidung macht.

⁹⁰Fast Fourier Transform

⁹¹Oder bildet sich irgendjemand immer noch ein, daß bei der Vorlesung irgendetwas einfach bleibt?

Nun ist die DFT zwar eine feine Sache, aber sie ist **nicht** die Diskretisierung der Fouriertransformation der Funktion f , aus der wir den Vektor f_h durch Diskretisierung gewonnen haben:

$$f_h = [f(hj) : j \in \mathbb{Z}_N] \in \mathbb{R}^N, \quad \text{d.h.} \quad t_j = hj.$$

Um diese Beziehung darzustellen müssen wir etwas mehr Aufwand betreiben. Dazu wählen wir eine beliebige Funktion $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ und setzen, wie in (3.21), einen sogenannten *Quasiinterpolant* an⁹², der dann die Form

$$f_\varphi := \sigma_{h^{-1}}(f * \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_h(k) \varphi(\cdot/h - k) \quad (3.24)$$

hat, wobei wir f_h hier wieder wie in (3.22) durch *zero padding* nach $L_1(\mathbb{Z})$ fortgesetzt haben. f_φ ist nun eine Funktion in $L_1(\mathbb{R})$, die eine Fouriertransformierte hat, und zwar

$$\begin{aligned} \widehat{f_\varphi}(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_h(k) (\sigma_{h^{-1}} \tau_k \varphi)^\wedge(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_h(k) e^{ik\xi} (\sigma_{h^{-1}} \varphi)^\wedge(\xi) \\ &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_h(k) e^{ik\xi} \widehat{\varphi}(h^{-1}\xi) = h \widehat{f_h}(\xi) \widehat{\varphi}(h^{-1}\xi). \end{aligned}$$

Setzen wir nun wie bei der Definition der DFT wieder $\xi = \frac{2\pi k}{N}$, $k \in \mathbb{Z}_N$, so erhalten wir, daß

$$\widehat{f_\varphi}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = h \widehat{f_h}(k) \widehat{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{hN}\right), \quad k \in \mathbb{Z}_N, \quad (3.25)$$

siehe (Schüßler, 1992). Das gibt uns nun eine korrekte und begründete Interpretation der DFT einer Diskretisierung: Nach Multiplikation mit dem *Maskierungsvektor* $\widehat{\varphi}\left(\frac{2\pi \cdot}{hN}\right)$ und geeigneter Normierung beschreibt die DFT die Fouriertransformation des Quasiinterpolanten.

Bemerkung 3.19 (DFT) 1. Der Wert $\widehat{f_\varphi}\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ stellt, wie man leicht nachrechnet, den Anteil von f_φ zur Frequenz $\frac{2\pi k}{Nh}$, gewichtet mit h , dar, siehe (Sauer, 2003). Das führt zu der einfachen Faustregel

Die Abtastrate h^{-1} bestimmt den dargestellten Frequenzbereich, die Anzahl N der Abtastungen hingegen die Frequenzauflösung.

2. Der Quasiinterpolant f_φ aus (3.24) sollte natürlich in irgendeiner Form die Funktion f wiederherstellen, zumindest approximativ. Daher ist ein kardinaler B-Spline eigentlich ein guter Kandidat für φ , da der zugehörige Schoenberg-Operator gegen f konvergiert, siehe (Sauer, 2007). Bei derartigen Approximation ist $\widehat{\varphi}$ eine Potenz des Sinc-Funktion, was zu einer Dämpfung im Spektrum bei den **hohen** Frequenzen führt.

⁹²Im Fall der kardinalen Sinc-Funktion können wir uns das „Quasi“ auch schenken, in (3.21) handelt es sich wirklich um einen Interpolanten.

3. Im Geiste von Satz 3.16 könnten wir auch annehmen, daß die Funktion f bandbeschränkt wäre⁹³ und $\varphi = \text{sinc}_\pi$ wählen. Dann ist $\hat{\varphi}$ eine charakteristische Funktion und die DFT kann nun direkt als Frequenzanteil interpretiert. Allerdings ist das zu schön um wahr zu sein, denn zum einen gibt es eben keine bandbeschränkten Funktionen mit endlichem Träger und zum anderen ist die Sinc-Funktion aufgrund ihrer langsamen Abklingrate ein ziemlich schlechter Approximant, bei dem die nur aus Unkenntnis zu Null gesetzten Werte ausserhalb der Abtastung die Werte zwischen den Abtaststellen noch ziemlich stark beeinflussen müssten, was natürlich zu recht starken Fehlern führen kann.

Die Realisierung der Wavelettransformation ist nun eigentlich sehr einfach, wir müssen nur die Faltungsstruktur ausnutzen und aus daraus ein Produkt der Fouriertransformierten machen. Dazu setzen wir nur noch (3.25) in (3.13) ein und erhalten

$$(W_\psi f(s, \cdot))^\wedge \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \sim (W_\psi f_\varphi(s, \cdot))^\wedge \left(\frac{2\pi k}{N} \right) = \sqrt{s} h \hat{f}_h(k) \hat{\varphi} \left(\frac{2\pi k}{hN} \right) \hat{\psi} \left(\frac{2\pi ks}{N} \right),$$

bzw.

$$\text{DFT}(\sigma_h W_\psi f(s, \cdot)) \sim \sqrt{s} h \hat{f}_h(k) \hat{\varphi} \left(\frac{2\pi k}{hN} \right) \hat{\psi} \left(\frac{2\pi ks}{N} \right), \quad (3.26)$$

und durch eine *inverse DFT* bzw. *inverse FFT* erhalten wir aus (3.26) die Berechnungsvorschrift

$$[W_\psi(s, t_j) : j \in \mathbb{Z}_N] \leftarrow \sqrt{sh} \text{IDFT} \left[\hat{f}_h(k) \hat{\varphi} \left(\frac{2\pi k}{hN} \right) \hat{\psi} \left(\frac{2\pi ks}{N} \right) : k \in \mathbb{Z}_N \right], \quad (3.27)$$

die man als *schnelle Wavelettransformation* bezeichnen könnte, auch wenn der Begriff später im Filterbank-Kontext noch für etwas anderes benutzt werden wird. Diese Berechnungsmethode hat zwei direkte Konsequenzen:

1. Die Berechnung der Wavelettransformation kostet nur noch $O(N \log N)$ pro Skala, wobei die $\hat{\varphi}$ -Werte vorberechnet und unabhängig von s verwendet werden können⁹⁴
2. Die Fouriertransformierte $\hat{\psi}$ des Wavelets müssen wir hingegen für jedes s unterschiedlich abtasten, aber diese ist bei vielen praxisrelevanten Wavelets ja sogar explizit bekannt. Das hat sogar die Konsequenz, daß man Wavelets eigentlich eher im Fourier- denn im „Zeit“-Bereich entwirft.

⁹³Was sie als Funktion mit kompaktem Träger natürlich eigentlich nicht sein kann, aber wen interessieren schon Fakten?

⁹⁴Und selbst $\hat{\varphi} \equiv 1$ ist möglich, wenn auch nicht besonders empfehlenswert, siehe Bemerkung 3.19, 3).

Bei der Wahl der „Frequenzen“, genauer der Skalen, an denen die Wavelettransformation berechnet werden soll, sind wir hingegen noch völlig frei und könnten da nun prinzipiell jede aufsteigende Folge s_j , $j \in \mathbb{Z}_M$, verwenden. Dennoch gibt es aber eine natürliche Skalenwahl, die man mit ein klein wenig Theorie auch gut begründen kann.

Definition 3.20 (Zeit-/Frequenzlokalisierung) Die Zeitlokalisierung einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist als

$$\mu = \mu(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt, \quad (3.28)$$

definiert, die Frequenzlokalisierung von f entsprechend als

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(f) = \frac{1}{\|\hat{f}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi \|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.29)$$

Die Zeitvariation und die Frequenzvariation sind schließlich

$$\sigma^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2\pi \|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \hat{\mu})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (3.30)$$

Bemerkung 3.21 Der Name „Lokalisierung“ für (3.28) erklärt sich ganz einfach: Ist $f \sim \delta_x$ für ein $x \in \mathbb{R}$, also konzentriert sich die ganze Masse von f um den Punkt x , sagen wir $\text{supp } f \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} |\mu - x| &= \frac{1}{\|f\|_2^2} \left| \int_{\mathbb{R}} (t - x) |f(t)|^2 dt \right| \leq \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |t - x| |f(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\mu_t \sim x$. Generell könnte man μ_t und μ_ξ auch als Zeitschwerpunkt bzw. Frequenzschwerpunkt von f bezeichnen.

Eine Funktion hat also ihren Schwerpunkt in Zeit/Frequenz an der Stelle (μ_t, μ_ξ) und die Variationen σ_t, σ_ξ geben an, wie gut konzentriert oder eben lokalisiert die Funktion in Zeit und Frequenz ist. Den Bereich

$$H(f) := [\mu(f) - \sigma(f), \mu(f) + \sigma(f)] \times [\hat{\mu}(f) - \hat{\sigma}(f), \hat{\mu}(f) + \hat{\sigma}(f)]$$

nennt man *Heisenberg-Box* zu f , und er beschreibt, wie stark die Funktion in Zeit und Frequenz streut oder verschmiert. Daß diese Bereiche nicht beliebig klein werden können, besagt der folgende Klassiker, dessen kurzen Beweis wir uns gleich mit ansehen können.

Satz 3.22 (Heisenbergsche Unschärferelation) Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$\sigma(f) \widehat{\sigma}(f) \geq \frac{1}{2}. \quad (3.31)$$

Insbesondere ist sowohl $\sigma_t(f) = 0$ als auch $\sigma_\xi(f) = 0$ unmöglich.

Beweis: Der Beweis aus (Mallat, 1999) folgt einem “Original” von H. Weyl und macht die etwas stärkere Annahme, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} f(t) = 0$$

ist. Da diese Funktionen aber dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegen, ist das keine wirkliche Einschränkung. Ersetzt man ausserdem f durch $g := e^{-i\widehat{\mu} \cdot} f(\cdot + \mu)$, dann ist $\|g\| = \|f\|$ und $\mu_t(g) = \widehat{\mu}(g) = 0$ ist, was wir eigentlich auch gleich von f annehmen können.

Dann gilt mit ein bisschen Manipulationen an den Fouriertransformierten und der Schwarzschen Ungleichung, daß⁹⁵

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(f) \widehat{\sigma}^2(f) &= \frac{1}{2\pi \|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|\xi \widehat{f}(\xi)|^2}_{=|i\xi \widehat{f}(\xi)|^2} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |(f')^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{\|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \\ &\geq \frac{1}{\|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} |t f(t) f'(t)| dt \right)^2 \geq \frac{1}{\|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{2} (f^2(t))' dt \right)^2 \\ &= \frac{1}{4 \|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} t (f^2(t))' dt \right)^2 = \frac{1}{4 \|f\|_2^4} \left([t f^2(t)]_{t=0}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2 \\ &= \frac{1}{4 \|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ganz wie in (3.31) behauptet. □

Was all das ganz konkret für die Wavelets bedeutet, lässt sich nun leicht nachrechnen, siehe (Sauer, 2008).

Proposition 3.23 Sei ψ ein zentriertes Wavelet, d.h. $\mu(\psi) = 0$. Das Heisenberg–Rechteck

$$H(\psi_{u,s}) = H\left(\psi\left(\frac{\cdot - u}{s}\right)\right)$$

hat den Mittelpunkt $(u, s^{-1}\widehat{\mu}(\psi))$ sowie die Seitenlängen $s\sigma(\psi)$ und $\widehat{\sigma}(\psi)/s$.

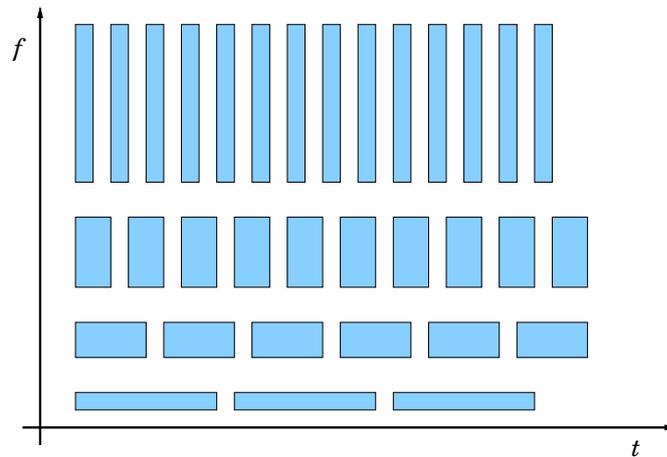


Abbildung 3.3: Die (schematische) Darstellung der Heisenberg-Boxen zu einem Wavelet. Nach „oben“, also zu höheren Frequenzen und damit *kleineren* Skalen werden die Rechtecke schmäler, also die Zeitauflösung höher, nach unten ist es umgekehrt.

Übung 3.1 Beweisen Sie Proposition 3.23. ◇

Abb 3.3 zeigt die Heisenberg-Boxen zu einem Wavelet. Diese haben nach Proposition 3.23 alle dieselbe Fläche

$$s\sigma(\psi) \frac{\widehat{\sigma}(\psi)}{s} = \sigma(\psi) \widehat{\sigma}(\psi),$$

sind aber im niederfrequenten Bereich, also für große Skalen, eher flach und breit, im hochfrequenten Bereich niedriger Skalen⁹⁶ dagegen sind die Heisenberg-Boxen⁹⁷ hoch und schmal. Man kann das eigentlich sehr schön in der folgenden Faustregel zusammenfassen:

Wavelets bieten eine *relative Genauigkeit* in der Zeit- und Frequenzlokalisierung.

Um nun eine möglichst gleichmäßige Überdeckung der Ebene mit solchen Rechtecken zu erhalten, ist es naheliegend die Skalen *geometrisch* zu wählen, also

$$s_j = s_0 \sigma^j, \quad j \in \mathbb{Z}_M, \quad \sigma > 1, \quad (3.32)$$

⁹⁵Wir nehmen hier stillschweigend an, daß f reell ist, dann sparen wir uns in den Rechnungen einiges an komplexer Konjugation.

⁹⁶Um's mal wieder gruppentheoretisch zu sagen: Eigentlich liegen die Skalen ja in \mathbb{R}_+ und da ist der Mittelpunkt das neutrale Element 1.

⁹⁷Das nach neuer „Rechtschreibung“ zumindest zulässige, wenn nicht angeratene *Heisenberg Boxen* liest sich eher wie eine Kampfsportart.

für eine *Ausgangsskala* s_0 und eine *Skalenprogression* σ zu setzen. Das hat einen Menge von Vorteilen, die sich auch tatsächlich numerisch begründen lassen, siehe (Klein, 2011). Als nette Randbemerkung ist (3.32) übrigens auch als die temperierte Skala musikalischer Intervalle interpretierbar.

Bleibt noch die Frage, wie wir s_0 , σ und M wählen sollten. Dazu folgende Faustregeln:

1. Die untere Skala s_0 entspricht der höchsten auftretenden Frequenz. Diese Frequenz sollte entsprechend dem Shannonschen Abtastatz, Satz 3.16, so niedrig sein, daß die Abtastung noch die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dabei ist zu beachten, daß die numerische Stabilität natürlich umso mehr leidet, je mehr man sich der kritischen Frequenz annähert. Zumindest das Zentrum der Heisenberg-Box zu s_0 sollte also noch im zulässigen Frequenzbereich liegen, besser noch die ganze Box.
2. Die obere Skala $s_{M-1} = s_0\sigma^{M-1}$ sollte so klein bleiben, daß der „wesentliche“ Teil des Wavelets immer noch im abgetasteten Bereich liegt, denn sonst hängt der wirkliche Wert der Wavelettransformation (3.9) signifikant von Werten ausserhalb des Abtastbereichs ab. Es sollte also wenigstens eine Heisenberg-Box zu s_{M-1} ganz im Abtastbereich liegen.
3. Der Rest ist ein Zusammenspiel zwischen σ und M . Hält man die Progression σ fest, so ist M durch die Skaleneinschränkungen nach oben beschränkt, hält man umgekehrt die Skalenzahl M fest, so muss man halt σ entsprechend fein wählen.

Die Bedeutung dieser Faustregeln ist in Abb 3.4 dargestellt. Durch die Abtastung wird ein Zeit-/Frequenzfenster vorgegeben, in dem diese sinnvoll ist. Das Zeitfenster wird dabei durch den Abtastbereich $[t_0, t_{N-1}]$ bestimmt, das Frequenzfenster ergibt sich über den Shannonschen Abtastatz aus der Schrittweite h . Und die Wahl der Skalen sollte nun so erfolgen, daß alle Heisenberg-Boxen innerhalb dieses Zeit-/Frequenzfensters liegen, denn alle Parameterwerte (s, u) , die zu Wavelets führen, deren Heisenberg-Boxen das Fenster verlassen, verwenden Information, die in der Abtastung nicht entalten ist.

3.4 Die inverse Transformation

Wenn wir nun schon die Wavelettransformation schnell realisieren können, wie sieht es dann mit der inversen Wavelettransformation aus? Dazu werfen wir nochmals einen Blick auf die Invertierungsformel (3.12),

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{W_\psi f(s, u) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{\cdot - u}{s}\right) du}_{=W_\psi f(s, \cdot) * \psi_s = (\widehat{W_\psi f(s, \cdot)} \widehat{\psi_s})^\vee} \frac{ds}{s^2}$$

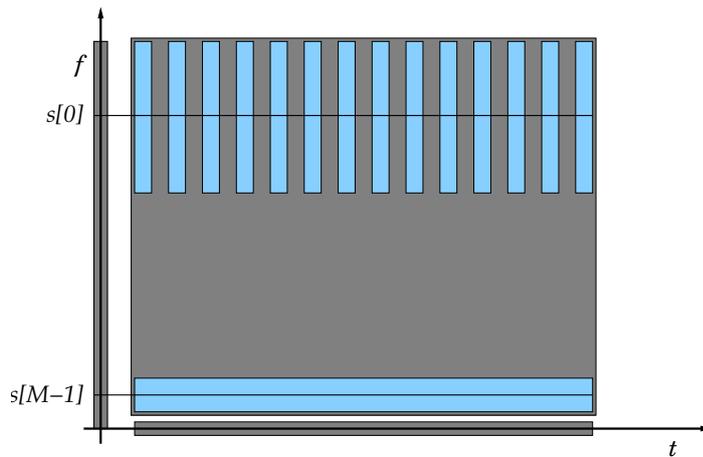


Abbildung 3.4: Die Einschränkungen an die Skalen in schematischer Darstellung. Die „unterste“ und breiteste Heisenberg–Box sollte noch komplett im Inneren des Abtastbereichs liegen, die „obersten“ und schmalsten aber höchsten Boxen hingegen im zulässigen Frequenzbereich.

und berechnen, einem numerischen Grundprinzip folgend⁹⁸, diese wieder über eine FFT. Es bleibt also nur noch das Integral $\int \frac{ds}{s^2}$, bei dem wir um eine Quadratur nicht herumkommen. Die *Knoten* dieser Quadraturformel sind nun die Skalen s_j an denen wir eine Wavelettransformation berechnet haben – letztendlich gehen wir bei der inversen Transformation ja immer davon aus, daß wir nur die diskreten Werte

$$W_\psi f(s_j, t_k), \quad j \in \mathbb{Z}_M, k \in \mathbb{Z}_N, \quad (3.33)$$

kennen. Diese Invertierung, die erstmals in (Domes, 2007) untersucht wurde und in (Sauer, 2011c) zu finden ist, bestimmt nun wieder zuerst eine Matrix⁹⁹ im Sinne von (3.26), und zwar

$$F := \sqrt{sh} \left[\text{IDFT} \left((W_\psi f(s_j, \cdot))_h^\wedge \widehat{\varphi} \left(\frac{2\pi \cdot}{hN} \right) \widehat{\psi} \left(\frac{2\pi \cdot s_j}{hN} \right) \right) (k) : \begin{array}{l} j \in \mathbb{Z}_M \\ k \in \mathbb{Z}_N \end{array} \right].$$

Das sind die Werte, die nun bezüglich s integriert bzw. bezüglich der s_j summiert werden müssen, um letztendlich den Vektor der Funktionswerte zu liefern, was wir als

$$f(t_k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_M} w_j F_{jk} = w^T F$$

⁹⁸Dies mag manchen Leuten banal vorkommen, aber die einfache Idee, Faltungsstrukturen durch die FFT schnell zu berechnen, spielt in vielen Anwendungen bis hin zur Berechnung des Produkts großer ganzer Zahlen eine fundamentale Rolle, siehe (Knuth, 1998; Sauer, 2001).

⁹⁹Oder eine Vektor von Vektoren.

schreiben können und wofür wir natürlich noch die *Gewichte* w_j der Quadraturformel bestimmen müssen. Der einfachste Fall wäre hier eine (zusammengesetzte) *Rechtecksregel*, bei der wir

$$w_j = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{ds}{s^2}, \quad j \in \mathbb{Z}_M,$$

setzen und ein irgendwie passendes s_M festlegen müssen und die konstante Funktionen exakt reproduziert. Jetzt erweist sich die natürliche Wahl (3.32) der Skalen auch wieder als hilfreich, denn damit ergibt sich

$$w_j = \int_{s_0 \sigma^j}^{s_0 \sigma^{j+1}} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{s} \Big|_{s_j}^{s_{j+1}} = \frac{1}{s_j} (1 - \sigma^{-1}),$$

also

$$w = \frac{\sigma - 1}{\sigma} [s_j^{-1} : j \in \mathbb{Z}_M]. \quad (3.34)$$

Entsprechend liessen sich natürlich auch andere Quadraturformeln höherer Ordnung adaptieren.

Übung 3.2 Bestimmen Sie den Gewichtsvektor w für das Analogon der zusammengesetzten Trapezregel. \diamond

Eigentlich haben wir es uns aber viel zu schwer gemacht, denn wenn wir uns (3.13) noch einmal ansehen, so können wir diese Formel in

$$\hat{f}(\xi) = \frac{(W_\psi f(s, \cdot))^\wedge(\xi)}{\sqrt{s} \hat{\psi}(s\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

umformen und demzufolge \hat{f} und damit f aus **einer einzigen Skala** $s > 0$ der Wavelettransformierten rekonstruieren, solange nur $\hat{\psi}(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \neq 0$ erfüllt ist. Dieselbe Idee würde ausgehend von (3.26) die „einfache“ Invertierungsformel

$$\hat{f}_h = \left[\frac{(W_\psi f(s, \cdot))^\wedge\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{\sqrt{s} h \hat{\varphi}\left(\frac{2\pi k}{hN}\right) \hat{\psi}\left(\frac{2\pi ks}{hN}\right)} : k \in \mathbb{Z}_N \right]$$

liefern, die allerdings alles andere als praktisch oder praktikabel ist. Man kann nämlich recht leicht nachrechnen (Sauer, 2011c), daß die Struktur der Invertierungsformel (3.12) dafür sorgt, daß lokale Effekte auf der Waveletseite auch lokal auf der Signalseite sind. Allerdings zeigt sich eines ganz deutlich:

Die Wavelettransformation ist hochgradig redundant, eigentlich ist fast alle Information über f bereits in einer Skala von $W_\psi f$ enthalten.

3.5 Die inverse Transformation?

Die inverse Wavelettransformation (3.12) kann ja im Prinzip auf *jede* Funktion in den zwei Variablen s und u angewendet werden und liefert dann als Ergebnis eine Funktion in einer Variablen. Würde man allerdings nun wieder die Wavelettransformation dieser Funktion bestimmen, so ergibt sich nicht wieder die originale bivariate Funktion. Mit anderen Worten,

$$W_\psi^{-1}W_\psi = I, \quad W_\psi W_\psi^{-1} \neq I. \quad (3.35)$$

Das sollte man sich dann doch ein wenig genauer ansehen. Dazu bemerken wir zuerst, daß die Wavelettransformation $W_\psi f$ als bivariate Funktion in s, u die *Kompatibilitätsbedingung*

$$\frac{(W_\psi f(s, \cdot))^\wedge(\xi)}{(W_\psi f(s', \cdot))^\wedge(\xi)} = \sqrt{\frac{s \widehat{\psi}(s\xi)}{s' \widehat{\psi}(s'\xi)}}, \quad s, s' \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.36)$$

erfüllt.

Definition 3.24 1. Eine bivariate Funktion $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ψ -kompatibel, wenn sie (3.36) erfüllt.

2. Zwei Funktionen $g, g' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißen *verwandt*, wenn $W_\psi^{-1}g = W_\psi^{-1}g'$ gilt.

Die Wavelet-Transformation ist natürlich eine ψ -kompatible Funktion, so ist die Eigenschaft ja gerade gebaut. Andererseits sind die Wavelettransformationen aber auch die einzigen kompatiblen Funktionen und kommen ausserdem in den besten Familien vor.

Lemma 3.25 Zu jeder Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es eine ψ -kompatible Verwandte g' , die außerdem ihrerseits eine Wavelettransformierte ist.

Beweis: Wir setzen einfach $g' = W_\psi W_\psi^{-1}g$, dann ist

$$W_\psi^{-1}(g - g') = W_\psi^{-1}g - \underbrace{W_\psi^{-1}g W_\psi W_\psi^{-1}}_{=I}g = W_\psi^{-1}g - W_\psi^{-1}g = 0.$$

Damit sind g und g' verwandt und g' ist offensichtlich eine Wavelettransformierte. \square

Das erklärt dann auch schon die Mehrdeutigkeit der inversen Wavelettransformation: Wenn wir Äquivalenzklassen modulo W_ψ^{-1} in $L_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ bilden und damit verwandte Funktionen identifizieren, dann enthält nach Lemma 3.25 jede solche Äquivalenzklasse genau¹⁰⁰ eine Wavelettransformation und $W_\psi W_\psi^{-1}$ ist der Projektor auf diese Repräsentanten. Und dieser Repräsentant ist dann natürlich auch das einzige Element der Äquivalenzklasse, das von $W_\psi W_\psi^{-1}$ reproduziert wird.

¹⁰⁰Wären $W_\psi f$ und $W_\psi f'$ in derselben Äquivalenzklasse, dann wäre $0 = W_\psi^{-1}(W_\psi f - W_\psi f') = f - f'$, was die Eindeutigkeit so einfach macht, daß man sie wirklich in einer Fußnote verstecken muss.

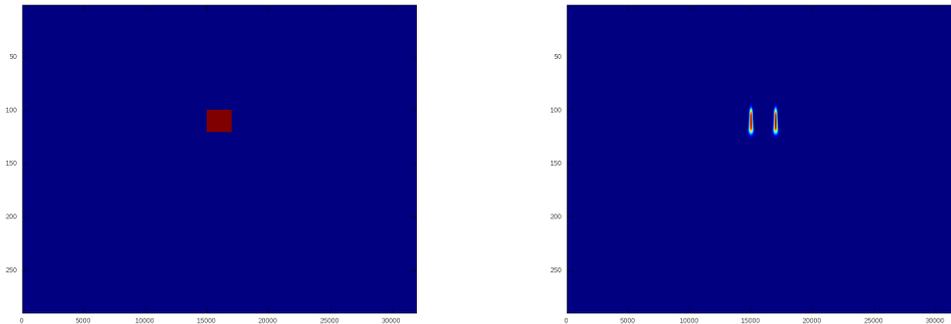


Abbildung 3.5: Ein zweidimensionales Signal (*links*) und dessen verwandte Wavelettransformation (*rechts*). Schon ein kleiner Unterschied.

3.6 Wavelets als Mikroskop

Eine wichtige Eigenschaft der Wavelets, fast wichtiger als ihre Fähigkeit zur Darstellung eines Signals im Zeit-/Frequenzraum, ist ihr Nutzen bei der Erkennung *lokaler* Regularität von Funktionen. Dazu müssen wir natürlich erst einmal klarstellen, was wir unter *Regularität* verstehen wollen. Das wird Lipschitz–Stetigkeit sein, und zwar im Kontext der Signalverarbeitung (Mallat, 1999), in der Approximationstheorie ist das ein klein wenig anders, siehe (DeVore & Lorentz, 1993; Lorentz, 1966).

Definition 3.26 (Lipschitz–Stetigkeit)

1. Für $0 < \alpha < 1$ heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz–stetig von der Ordnung α mit Lipschitz–Konstante K_f an der Stelle $u \in \mathbb{R}$ wenn

$$|f(t) - f(u)| \leq K_f |t - u|^\alpha, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

Offensichtlich ist jede Lipschitz–stetige Funktion auch stetig an u .

2. Eine Funktion heißt Lipschitz–stetig, wenn es eine Lipschitz–Konstante K_f gibt, so daß (3.37) für alle $u \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
3. Eine Funktion heißt Lipschitz–stetig von der Ordnung $n + \alpha$, $n \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha < 1$, wenn es K_f und ein Polynom $p \in \Pi_n$ gibt, so daß

$$|f(t) - p_u(t)| \leq K_f |t - u|^{n+\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

gilt, wobei normalerweise¹⁰¹

$$p_u = T_{n,u}f = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}}{j!} (\cdot - u)^j$$

das Taylorpolynom der Ordnung n ist.

4. Die Klasse der Lipschitz–stetigen Funktionen der Ordnung $n + \alpha$ bezeichnen wir mit $\text{Lip}_{n+\alpha}$.

Um mit Wavelets Regularitätsanalyse betreiben und die lokale Lipschitz–Stetigkeit beschreiben zu können, benötigen wir zwei wichtige Eigenschaften von Wavelets.

Definition 3.27 Sei ψ ein zulässiges Wavelet. Die Momente von ψ sind die Werte

$$\mu_n := \int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das Wavelet ψ hat n verschwindende Momente, wenn

$$\mu_k = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

erfüllt ist.

Nach der Definition (3.8) hat jedes Wavelet mindestens ein verschwindendes Moment, für “brave” Wavelets¹⁰² kann man die Eigenschaft, verschwindende Momente zu haben, recht schön charakterisieren. Aber erst noch ein weiteres Konzept.

Definition 3.28 Eine Funktion f heißt schnell abklingend, wenn

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^n f(t)| < \infty, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.39)$$

oder, equivalent, wenn es Konstanten C_n , $n \in \mathbb{N}_0$, gibt, so daß

$$|f(t)| \leq \frac{C_n}{1 + |t|^n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.40)$$

gilt.

Satz 3.29 Ein schnell abklingendes Wavelet ψ hat genau dann n verschwindende Momente, wenn es eine schnell abklingende Funktion ϕ gibt, so daß

$$\psi = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \phi \quad (3.41)$$

ist.

¹⁰¹Nämlich wenn $f \in C^n(\mathbb{R})$ ist.

¹⁰²Und dazu gehören alle unsere Beispiele.

Beweis: Nehmen wir an, ψ habe n verschwindende Momente. Nach (3.6) ist für $k < n$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = ((\cdot)^k \psi)^\wedge(0) = (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \widehat{\psi}(0),$$

also ist $\widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ für $k < n$ und damit können wir die immer noch beschränkte¹⁰³ Funktion

$$\widehat{\phi}(\xi) := \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{(-i\xi)^n}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

eingeführen, für die, wieder wegen (3.6), $\psi = \phi^{(n)}$ gilt, wie in (3.41) gefordert. Bleibt zu zeigen, daß ϕ schnell abklingt. Für $n = 1$, also $\psi = -\phi'$, ist

$$\phi(t) = - \int_{-\infty}^t \psi(u) du = \int_t^{\infty} \psi(u) du.$$

Also ist für $t > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$t^k |\phi(t)| \leq t^k \int_t^{\infty} |\psi(u)| du \leq \int_t^{\infty} u^k |\psi(u)| du \leq C_{k+2} \int_0^{\infty} \frac{u^k}{1+u^{k+2}} du < \infty,$$

da sich für u hinreichend groß der Integrand wie u^{-2} verhält. Für $n \geq 1$ betrachten wir eine Folge $\phi_0 = \phi$, $\phi_k = -\phi'_{k-1}$, $\phi_n = \psi$, und wenden das obige Argument sukzessive auf ϕ_k , $k = n, \dots, 1$, an, um das schnelle Abklingen von ϕ_{k-1} zu erhalten.

Ist umgekehrt ϕ eine schnell abklingende Funktion, dann können wir partiell integrieren ohne Ränder berücksichtigen zu müssen und erhalten sofort, daß für $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} t^k \phi^{(n)}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{d^n}{dt^n} (t^k)}_{=0} \phi(t) dt = 0$$

sein muss. □

Jetzt können wir auch schon die Beschreibung der *lokalen* Lipschitz–Stetigkeit über das Abklingverhalten der Wavelettransformierten, die bereits als Satz 3.30 zitiert worden ist, in Angriff nehmen. Das geht allerdings nicht für alle Wavelets, sondern nur für gewisse „gutartige“ Wavelets. Zur Illustration reproduzieren wir Abb. 1.8 hier nochmals als Abb. 3.6.

Satz 3.30 Sei ψ ein Wavelet mit n verschwindenden Momenten und schnell abklingenden Ableitungen der Ordnung $\leq n$.

¹⁰³Das ist L'Hospital!

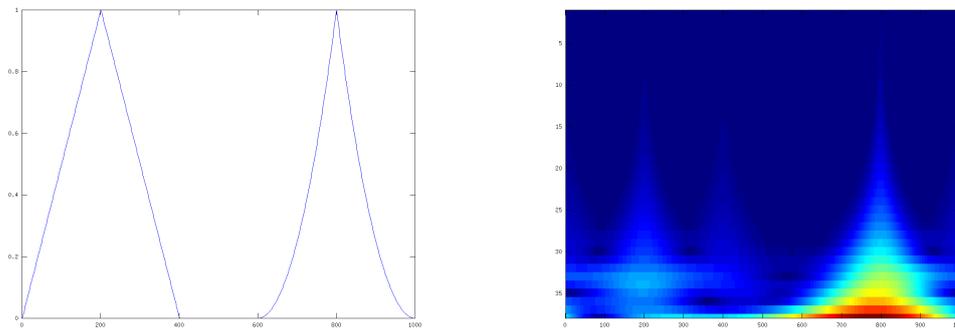


Abbildung 3.6: Eine einfache Testfunktion und ihre Wavelettransformierte, aus Abb. 1.8 ja bereits bekannt.

1. Ist $f \in L_2(\mathbb{R})$ Lipschitz-stetig von der Ordnung $\alpha < n$ an $x \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Konstante C , so daß

$$|W_\psi f(u, s)| \leq C s^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u - x}{s} \right|^\alpha \right), \quad (u, s) \in \Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (3.42)$$

2. Ist umgekehrt $\alpha \notin \mathbb{N}$ und existieren C sowie $\alpha' < \alpha$, so daß

$$|W_\psi f(u, s)| \leq C s^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u - x}{s} \right|^{\alpha'} \right), \quad (u, s) \in \Gamma, \quad (3.43)$$

dann ist f Lipschitz-stetig von der Ordnung α an x .

Bemerkung 3.31

1. Satz 3.30 sagt uns also, daß die lokale Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion durch die Abklingrate der Wavelettransformation bezüglich des Skalierungsparameters s für $s \rightarrow 0$ vollständig charakterisiert wird. Der Zusatzterm $(1 + \dots)$ in (3.42) und (3.43) dient lediglich der Lokalisierung.
2. Das obige Resultat ist fast eine Charakterisierung, wäre da nicht das $\alpha' < \alpha$ in (3.43).

Beweis von Satz 3.30: An dieser Stelle gönnen wir uns einmal einen schönen, langen, technisch aufwendigen „analytischen“ Beweis.

Beginnen wir mit dem Beweis von (3.42). Dazu nehmen wir das “magische” p_x aus (3.38) und berücksichtigen, daß das Wavelet n verschwindende Momente hat, um zusammen mit (3.50) auf

$$\begin{aligned}
|W_\psi f(u, s)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - p_x(t)) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f(t) - p_x(t)|}_{\leq K_f |t-x|^\alpha} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} \right| dt \leq K_f \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} |st + u - x|^\alpha |\psi(t)| dt \\
&\leq 2^\alpha K_f \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} (|st|^\alpha + |u - x|^\alpha) |\psi(t)| dt \\
&\leq 2^\alpha K_f \sqrt{s} \left(s^\alpha \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^\alpha) |\psi(t)| dt + |u - x|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt \right) \\
&= 2^\alpha K_f C s^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{|u - x|^\alpha}{s^\alpha} \right), \quad C := \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^\alpha) |\psi(t)| dt}_{< \infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt}_{< \infty}
\end{aligned}$$

zu kommen, was genau (3.42) ist.

Die Umkehrung, also der Beweis der Lipschitz–Stetigkeit von f , ist etwas aufwendiger. Indem wir die Umkehrformel (3.12) in Stücke hacken, erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \\
&= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{C_\psi} \int_{\epsilon[2^j, 2^{j+1}]} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \frac{ds}{s^2} du \\
&= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{\epsilon, j}(t)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Der Gag bei einer solchen *Littlewood–Summe*¹⁰⁴ besteht darin, daß die Integrationsintervalle um den Ursprung herum immer dichter werden, für $t \rightarrow \infty$ hingegen immer größer – das ist wie bei den Heisenberg–Rechtecken der Wavelets wieder ein Konzept von *relativer Genauigkeit*. Aber zurück zum Beweis: Unter Verwendung der Voraussetzungen (3.43) und (3.40) ist¹⁰⁵ für $j > 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$|f_{\epsilon, j}(t)|$$

¹⁰⁴Solche Zerlegungen gabe es schon lange vor den Wavelets, die Technik wurde also nicht erst mit den Wavelets erfunden.

¹⁰⁵Wir folgen nun der schönen Tradition, daß “ C ” für eine Konstante steht, die sich in jedem Schritt der Abschätzung ändern darf.

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon^{[2^j \cdot 2^{j+1}]}} \underbrace{|W_\psi f(u, s)|}_{\leq C |s|^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(1 + \left|\frac{u-x}{s}\right|^{\alpha'}\right)} \frac{1}{\sqrt{|s|}} \underbrace{\left|\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)\right|}_{\leq C_m (1 + |s^{-1}(t-u)|^m)^{-1}} \frac{ds}{s^2} du \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon^{[2^j \cdot 2^{j+1}]}} \underbrace{|s|^\alpha}_{\leq 2^{(j+1)\alpha}} \underbrace{\left(1 + \left|\frac{u-x}{s}\right|^{\alpha'}\right)}_{\leq 1 + \left|\frac{u-x}{2^j}\right|^{\alpha'}} \underbrace{\left(1 + \left|\frac{t-u}{s}\right|^m\right)^{-1}}_{\leq (1 + \left|\frac{t-u}{2^{j+1}}\right|^m)^{-1}} \underbrace{s^{-2}}_{\leq 2^{-2j}} ds du \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} 2^{\alpha j} \left(1 + \left|\frac{u-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right) \left(1 + \left|\frac{t-u}{2^j}\right|^m\right)^{-1} \frac{du}{2^j},
\end{aligned}$$

und nachdem sich alle Entscheidungen $j > 0$ bzw. $j < 0$ und die daraus resultierende Wahl von 2^j oder 2^{j+1} in die Konstante schieben lässt, gilt die Abschätzung für $\epsilon \in \{\pm 1\}$ und $j \in \mathbb{Z}$. Nochmal mit¹⁰⁶ (3.50) ist

$$|u-x|^{\alpha'} = |(u-t) + (t-x)|^{\alpha'} \leq 2^{\alpha'} \left(|u-t|^{\alpha'} + |t-x|^{\alpha'}\right).$$

Also¹⁰⁷:

$$\begin{aligned}
|f_{\epsilon,j}(t)| &\leq C \int_{\mathbb{R}} 2^{\alpha j} \left(1 + 2^{\alpha'} \left|\frac{u-t}{2^j}\right|^{\alpha'} + 2^{\alpha'} \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right) \left(1 + \left|\frac{u-t}{2^j}\right|^m\right)^{-1} \frac{du}{2^j} \\
&= C 2^{\alpha j} 2^{\alpha'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |u|^{\alpha'} + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}}{1 + |u|^m} du \\
&= C 2^{\alpha j} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |u|^{\alpha'}}{1 + |u|^m} du + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |u|^m} du\right) \\
&\leq C 2^{\alpha j} \left(1 + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right),
\end{aligned}$$

mit einer letztendlich von m abhängigen Konstante C , die aber endlich bleibt, solange wir nur $m > \alpha' + 2$ wählen. Mit analogen Methoden¹⁰⁸ erhalten wir, daß

$$\left|f_{\epsilon,j}^{(k)}(t)\right| \leq C_k 2^{(\alpha-k)j} \left(1 + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right), \quad 0 \leq k < \alpha, \quad (3.45)$$

und insbesondere

$$\left|f_{\epsilon,j}^{(k)}(x)\right| \leq C_k 2^{(\alpha-k)j}, \quad 0 \leq k < \alpha, \quad (3.46)$$

¹⁰⁶Was einmal klappt, klappt garantiert auch ein zweites Mal.

¹⁰⁷Unter Verwendung einer Variablentransformation $u \mapsto 2^j u + t$.

¹⁰⁸In (Mallat, 1999): "The same derivations applied to the derivatives ...".

Damit haben wir schnelle Konvergenz dieser Ausdrücke für $j \rightarrow -\infty$, da ja α eben keine ganze Zahl ist. Für $j \rightarrow +\infty$ verwenden wir zuerst die einfache Abschätzung $|W_\psi f(u, s)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2 = \|f\|_2$, $(u, s) \in \Gamma$, die direkt aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung folgt, und dann die alternative Abschätzung

$$\begin{aligned} |f_{\epsilon, j}^{(k)}(t)| &\leq \frac{\|f\|_2}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon[2^j, 2^{j+1}]} \frac{1}{|s|^{k+\frac{1}{2}}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right| \frac{ds}{s^2} du \\ &= \frac{\|f\|_2}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \psi(u) \right| du \int_{\epsilon[2^j, 2^{j+1}]} |s|^{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

also auch

$$|f_{\epsilon, j}^{(k)}(t)| \leq C 2^{-j(k+\frac{1}{2})}, \quad 0 \leq k < \alpha. \quad (3.47)$$

Wegen (3.46) und (3.47) konvergieren die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{\epsilon, j}^{(k)}(x) \quad \text{und} \quad \sum_{j=-\infty}^0 f_{\epsilon, j}^{(k)}(x) \quad \text{also auch} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{\epsilon, j}^{(k)}(x)$$

absolut und damit ist das (Taylor–)Polynom

$$p_x(t) := \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \left(\sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{\epsilon, j}^{(k)}(x) \right) \frac{(t-x)^k}{k!} \quad (3.48)$$

wohldefiniert, das nun genau die in der Definition (3.38) vorgesehene Rolle spielen wird.

Unter Verwendung von (3.44) ist somit

$$|f(t) - p_x(t)| = \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \left(f_{\epsilon, j}(t) - \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} f_{\epsilon, j}^{(k)}(x) \frac{(t-x)^k}{k!} \right) \right|.$$

Nun suchen wir uns dasjenige $j^* \in \mathbb{Z}$, so daß $2^{j^*} \geq |t-x| \geq 2^{j^*-1}$ und spalten die Summe über j genau an dieser Stelle in zwei Teile. Für den ersten Teil erhalten wir unter Verwendung des Taylor–Restglieds, daß es $x_{\epsilon, j} \in [t, x]$, also mit $|x_{\epsilon, j} - t| \leq 2^{j^*}$, gibt, was zusammen mit (3.45)

$$\begin{aligned} &\sum_{\epsilon=\pm 1} \left| \sum_{j=j^*}^{\infty} \left(f_{\epsilon, j}(t) - \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} f_{\epsilon, j}^{(k)}(x) \frac{(t-x)^k}{k!} \right) \right| \\ &\leq \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=j^*}^{\infty} \left| f_{\epsilon, j}^{[\alpha]+1}(x_{j, \epsilon}) \frac{(t-x)^{[\alpha]+1}}{([\alpha]+1)!} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C_k}{([\alpha] + 1)!} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=j^*}^{\infty} 2^{(\alpha-[\alpha]-1)j} \left(1 + \left| \frac{x_{\epsilon,j} - t}{2^j} \right|^{\alpha'} \right) |t - x|^{[\alpha]+1} \\
&\leq C |t - x|^{[\alpha]+1} \sum_{j=j^*}^{\infty} 2^{-j([\alpha]+1-\alpha)} \underbrace{\left(1 + 2^{(j^*-j)\alpha'} \right)}_{\leq 2} \\
&\leq C |t - x|^{\alpha} \underbrace{|t - x|^{[\alpha]+1-\alpha}}_{\leq 2^{j^*([\alpha]+1-\alpha)}} 2^{-j^*([\alpha]+1-\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j([\alpha]+1-\alpha)} \\
&\leq K_+ |t - x|^{\alpha}
\end{aligned}$$

ergibt. Für die andere Hälfte der Summe verwenden wir demokratisch einmal (3.45) und einmal (3.46) und landen damit bei

$$\begin{aligned}
&\sum_{\epsilon=\pm 1} \left| \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(f_{\epsilon,j}(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \frac{(t-x)^k}{k!} \right) \right| \\
&\leq C \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(2^{\alpha j} \left(1 + \left| \frac{t-x}{2^j} \right|^{\alpha'} \right) + \sum_{k=0}^{[\alpha]} 2^{(\alpha-k)j} \frac{|t-x|^k}{k!} \right) \\
&\leq C \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(\underbrace{2^{(j^*-1)\alpha}}_{\leq |t-x|^{\alpha}} + \underbrace{2^{(j^*-1)(\alpha-\alpha')}}_{\leq |t-x|^{\alpha-\alpha'}} |t-x|^{\alpha'} + \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{|t-x|^k}{k!} \underbrace{2^{(\alpha-k)(j^*-1)}}_{\leq |x-t|^{\alpha-k}} \right) \\
&\leq C |t-x|^{\alpha} \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(2 + \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{1}{k!} \right) =: K_- |t-x|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Ingesamt ist somit

$$|f(t) - p_x(t)| \leq \underbrace{(K_+ + K_-)}_{=: K_f} |t - x|^{\alpha} \quad (3.49)$$

was gerade die gewünschte Lipschitzstetigkeit von f ist. \square

Übung 3.3 Beweisen Sie die Identität

$$|a + b|^{\alpha} \leq 2^{\alpha} (|a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}), \quad \alpha \geq 1, \quad (3.50)$$

die im ersten Teil des Beweises von Satz 3.30 verwendet wurde.

Hinweis: Höldersche Ungleichung! \diamond

Zusammenfassend kann man hier ein kurzes Fazit ziehen: Wavelets sind ausgesprochen nützlich und hilfreich bei der Erkennung von Singularitäten bzw. der Charakterisierung,

allerdings müssen sie dazu ausreichend viele verschwindende Momente haben. Verschwindende Momente sind also gut und in der Tat erklärt das zusammen mit Satz 3.29 auch, warum der *Mexican hat* so ist wie er ist: Er ist die zweite Ableitung der optimalen Zeit-/Frequenzlokalierung und Sinn und Zweck dieser Ableitung ist die Generierung von entsprechenden verschwindenden Momenten.

3.7 Warum die Dinge nicht so sind, wie sie sein sollten

Soweit zur Theorie der Waveletpraxis. Wir wissen nun, wie wir die $FCWT^{109}$ implementieren können, wir verstehen, warum die Inverse nur in eine Richtung eine Inverse ist und haben gelernt, daß verschwindende Momente eine gute Sache sind.

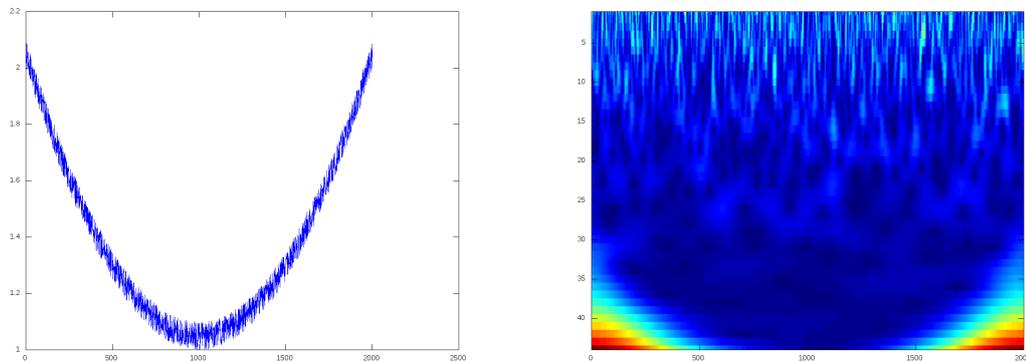


Abbildung 3.7: Eine verrauschte Parabel (*links*) und deren Wavelettransformation (*rechts*).

Also schauen wir uns die Sache mal an einem ganz einfachen Beispiel aus (Sauer, 2011c), siehe auch (Sauer, 2011d), an, und zwar einer verrauschten Parabel. In Abb. 3.7 sind diese Parabel und ihre Wavelettransformation zu sehen. Dabei fällt zuerst einmal der „gelb–rote“, U-förmige Bereich am unteren Ende der Wavelettransformation auf. Das sind hohe Werte der Wavelettransformierten, für die es eigentlich in den Daten keine Begründung gibt.

Naja, das stimmt nicht ganz, eigentlich ist die Erklärung für diese *Artefakte* ganz einfach: Das sind die Bereiche, in denen beim Waveletintegral (3.9) Bereiche von f verwendet wurden, die nicht bekannt sind. Und da die Implementierung der Wavelettransformation via FFT „automatisch“ periodisiert, das Signal aber nicht periodisch ist, ist mit großen Werten der Wavelettransformation zu rechnen.

¹⁰⁹Fast Continuous Wavelet Transform

Der Wavelettransformation ist nur ein U-förmigen Bereich zu trauen, deren Größe vom effizienten Träger des Wavelets und den verwendeten Skalen abhängt.

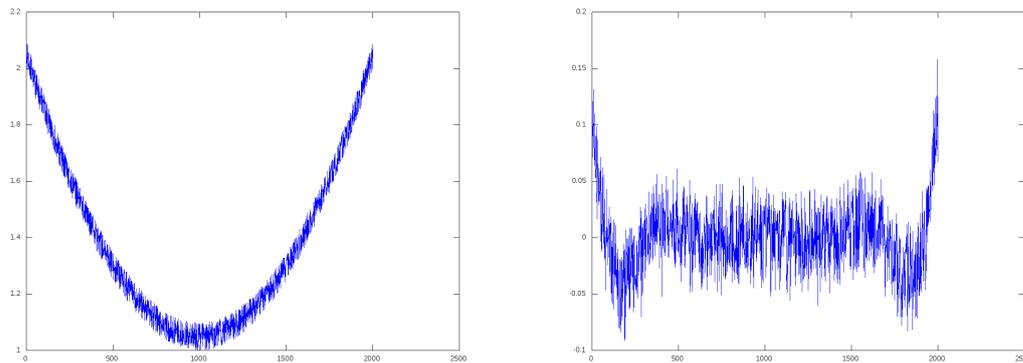


Abbildung 3.8: Die Parabel aus Abb. 3.7 (*links*) und ihre Rekonstruktion aus der Wavelettransformierten (*rechts*). Nicht wirklich das, was man von einer Identität erwarten würde.

Sehen wir uns nun aber die Rekonstruktion der Parabel f aus ihrer Wavelettransformierten an, also $W_{\psi}^{-1}W_{\psi}f$, dann zeigt uns Abb. 3.8, daß wir – entgegen aller Theorie – nun wirklich gar keine Identität erhalten. Und sehen wir uns die Rekonstruktion rechts an, dann sehen wir an der Skala, daß wir hier im Wesentlichen das Rauschen wiederbekommen haben, während die Parabel bis auf die kleinen Wackler am Anfang und Ende verschwunden ist. Vielleicht ist es ja mal ganz interessant, wie das alles ohne Rauschen aussieht. Zuerst einmal stellen wir fest, siehe Abb. 3.9, daß die Rekonstruktion wieder nicht das liefert, was wir von ihr erwarten und daß die rekonstruierte Signal wieder eine relativ kleine Amplitude hat. Wenn wir uns nun allerdings die Wavelettransformation dazu in Abb. 3.10 ansehen, dann fällt auf, daß die eigentlich Null ist und das identifiziert den Schuldigen: *verschwindende Momente*. Offensichtlich annihiliert unser Wavelet¹¹⁰ die quadratische Parabel, hat also mindestens drei verschwindende Momente und die Rekonstruktion in Abb. 3.9 (rechts) ist eben nur ein Effekt des niederfrequenten Artefakts.

¹¹⁰Bei dem es sich um ein Morlet-Wavelet handelt.

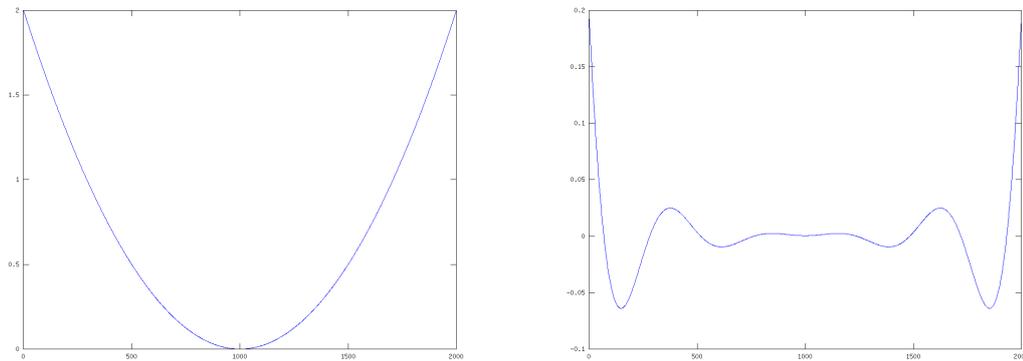


Abbildung 3.9: Hier nur die Parabel und deren Rekonstruktion. Letztere ist genau die Kurve, die in Abb. 3.8 vom Rauschen überlagert wurde. Man beachte die kleine Amplitude.

Die verschwindenden Momente eines Wavelets können die Daten nach Rekonstruktion erheblich verändern. Insbesondere können sich Daten und Rekonstruktion immer um einen konstanten Wert unterscheiden.

Dieser Effekt ist natürlich dann besonders heftig und unangenehm, wenn man die Wavelettransformation benutzt, um Daten zu modifizieren, indem man, um im musikalischen Analogon zu bleiben, beispielsweise einen falschen Ton aus einer Aufnahme entfernt. Eine realistische Anwendung eines derartigen Verfahrens ist in (Franz, 2011) zu finden. Das führt dann sogar zu zwei Problemen:

1. Bei der Modifikation der Wavelettransformierten wird normalerweise eine nicht kompatible zweidimensionale Funktion erzeugt, deren verwandte Wavelettransformierte das eigentlich generierte Objekt ist.
2. Alle Datenbestandteile, die im Kern der Wavelettransformierten liegen, können nicht rekonstruiert werden.

Wie aber verträgt sich das nun mit Satz 3.9, der ja schon behauptet, daß $W_{\psi}^{-1}W_{\psi} = I$ ist und den wir je gerade als Beleg für die Tatsache verkauft haben, daß bei W_{ψ} keine Information „verlorengeht“?

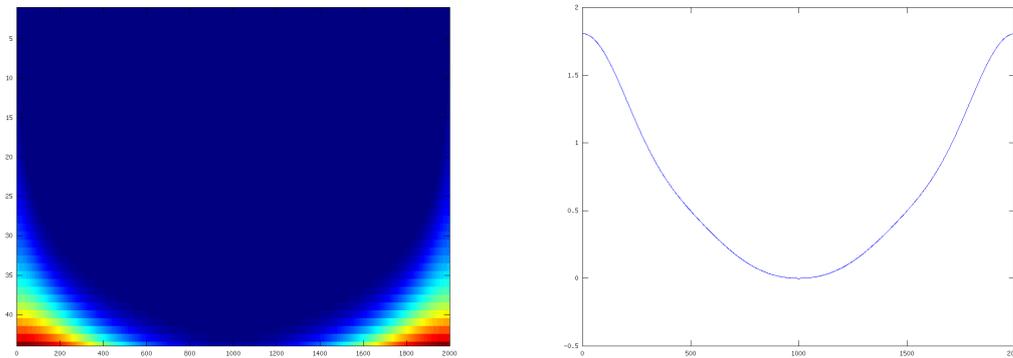


Abbildung 3.10: Die Wavelettransformation der Parabel aus Abb 3.9 (*links*). Innerhalb des U-förmigen „Konfidenzbereichs“ verschwindet sie! Dazu die Korrekturfunktion (*rechts*).

Die Wavelettransformierte ist nach Satz 3.9 „nur“ auf $L_2(\mathbb{R})$ invertierbar und das einzige Polynom, das zu $L_2(\mathbb{R})$ gehört ist das Nullpolynom. Das Problem besteht also in den **endlichen** Daten, bei denen polynomiale Anteile sehr wohl relevant werden können.

Das ist auch das wirkliche Problem, nämlich daß wir eigentlich etwas sehr dummes machen:

Wendet man kontinuierliche Transformationen, die für unendliche Datenbereiche definiert sind, auf endliche und diskrete Daten an, so kann man nicht erwarten, daß die theoretischen Resultate noch gelten und muss auf eventuelle Schwierigkeiten vorbereitet sein.

Zum Teil lassen sich diese „Schwierigkeiten“ sogar recht einfach lösen. Will man beispielsweise Daten im Waveletbereich modifizieren, indem man beispielsweise $W_\psi f$ durch g ersetzt, so verwendet man für die Rekonstruktion den Ausdruck

$$(I - W_\psi^{-1}W_\psi) f + W_\psi^{-1}g \quad (3.51)$$

und erhält wieder gute Ergebnisse, siehe (Franz, 2011; Sauer, 2011c; Sauer, 2011d). Der Grund ist ganz einfach die Linearität der Wavelettransformation und damit des Fehlers.

3.8 Momentanfrequenzen, Fourierfenster und Waveletdesign

Manchmal ist es wichtig, daß die Skaleninformationen nicht nur Näherungen für Frequenzen sind, sondern soweit wie möglich echten Frequenzen entsprechen. Musiksignale sind hier das naheliegendste Beispiel, aber auch bei der Erkennung von Schwingungsanregung in CNC–Werkzeugmaschinen oder bei der Fehleranalyse rotierender Teil treten ganz ähnliche Fragestellungen auf. Zu diesem Zweck ist es gut, wenn das Wavelet selbst aussieht wie eine *gefensterte Fouriertransformation*:

$$\psi(t) = g(t) e^{int}, \quad \|g\|_2 = 1, \quad (3.52)$$

mit einer (normalerweise symmetrischen und reellen) *Fensterfunktion* g . Da

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i(\xi-\eta)t} dt = \widehat{g}(\xi - \eta)$$

ist, also $\widehat{\psi}_s(\xi) = \sqrt{|s|} \widehat{g}(s\xi - \eta)$, hat

$$(W_{\psi} f(s, \cdot))^{\wedge}(\xi) = \sqrt{|s|} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(s\xi - \eta)$$

nur für diejenigen Werte von ξ einen signifikanten Wert, für die $s\xi - \eta \in \widehat{\Omega}$ liegt, bzw.

$$\xi \in \frac{\eta}{s} + \frac{1}{s} \widehat{\Omega} \quad (3.53)$$

wobei $\widehat{\Omega}$ den symmetrischen¹¹¹ Bereich der effizienten Bandbreite von g beschreibt, also etwas in der Art von

$$\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}_{\varepsilon} = \{\xi \in \mathbb{R} : |\widehat{g}(\xi)| \geq \varepsilon\}.$$

Doch zurück zu (3.53): Die *wesentliche Frequenz* eines Wavelets der Form (3.52) ist also η/s und die *Frequenzauflösung* $\widehat{\Omega}/s$. Durch den Parameter η kann man dabei einstellen, welche Frequenzen welchen Skalen zugeordnet werden und wie „scharf“ diese Frequenzen aufgelöst werden.

Bemerkung 3.32 *Mit der Fensterfunktion g stehen wir vor dem üblichen Zeit-/Frequenz–Dilemma: Verpassen wir ihr einen kompakten Träger, so ist zumindest $\widehat{\Omega}_0$ unbeschränkt, wollen wir, daß sie bandbeschränkt ist, dann ist ihr Träger ganz \mathbb{R} . Ein guter Kompromiss wäre sicherlich eine Funktion, die optimale Unschärfe bietet, für die also Gleichheit in der Heisenbergschen Unschärferelation (3.31) gilt. Diese Funktionen kennt man, nämlich $e^{-(\cdot)^2/2}$ und das zugehörige Wavelet ist dann gerade das Morlet–Wavelet $\psi(t) = e^{int} e^{-t^2/2}$.*

¹¹¹Zumindest wenn die Fensterfunktion reell ist, denn dann ist die Fouriertransformierte bekanntlich symmetrisch.

Allerdings sollte man sich darüber klar sein, daß man sich mit „Wavelets“ der Form (3.52)¹¹² eigentlich im Grenzbereich zwischen Wavelets und gefensterter Fouriertransformation alias Gabortransformation bewegt. Aber darauf muss man sich eben einlassen, wenn man „richtige“ Frequenzen haben will.

Diese Idee kann man noch stärker lokalisieren, indem man die Momentanfrequenz eines Signals betrachtet. Dazu modelliert man das Signal als

$$f(t) = a(t) \cos(\omega t + \omega_0) =: a(t) \cos \phi(t), \quad \omega \geq 0,$$

und stellt fest, daß die Frequenz dieses Modells $\omega = |\phi'(t)|$ ist. Nun macht man dasselbe einfach für beliebige ϕ .

Definition 3.33 Die Momentanfrequenz¹¹³ eines Signals $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$ zum Zeitpunkt t ist definiert als $|\phi'(t)|$.

Nun gilt das folgende Resultat, das man mit allen Details in (Mallat, 1999, Theorem 4.5) finden kann; hier geben wir nur die wesentlichen Inhalte von Resultat und Beweis an.

Satz 3.34 Für $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$ und ψ wie in (3.52) ist

$$W_\psi f(s, u) = \sqrt{s} a(u) e^{i(\phi(u) - \eta/s)} \widehat{g}(\eta - s\phi'(u)) + \varepsilon, \quad (3.54)$$

wobei ε unter gewissen Voraussetzungen¹¹⁴ an a und ϕ und s vernachlässigbar wird.

Beweis: Wir schreiben $f(t) = \frac{1}{2}a(t) (e^{i\phi(t)} + e^{-i\phi(t)})$ und erhalten zuerst einmal, daß

$$\begin{aligned} W_\psi f(s, u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} a(t) (e^{i\phi(t)} + e^{-i\phi(t)}) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{g\left(\frac{t-u}{s}\right)} e^{i(t-u)\eta/s} dt \\ &=: I(\phi) + I(-\phi) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{-i(t-u)\eta/s} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} a(t+u) e^{i\phi(t+u)} g(t/s) e^{-it\eta/s} dt. \end{aligned}$$

¹¹²Um wirklich ein Wavelet zu bekommen, braucht man wieder einen Korrekturterm wie im Morlet-Wavelet.

¹¹³Auf Englisch *instantaneous frequency*.

¹¹⁴Im wesentlichen dürfen sich a und ϕ relativ zu ψ nicht allzu schnell ändern und ϕ muss in einem Frequenzbereich liegen, der zur wesentlichen Bandbreite von ψ passt.

Mittels Taylor–Entwicklungen erhalten wir, daß¹¹⁵

$$\begin{aligned} a(t+u) &= a(u) + t a'(u) + \frac{t^2}{2} \alpha(t) \\ \phi(t+u) &= \phi(u) + t \phi'(u) + \frac{t^2}{2} \varphi(t) \\ e^{i\varphi(t)t^2/2} &= 1 + \varphi(t) \gamma(t), \quad |\gamma| \leq 1, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \frac{1}{2\sqrt{s}} a(u) e^{i\phi(u)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\phi'(u)-\eta/s)t} g(t/s) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{s}} a(u) e^{i\phi(u)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\phi'(u)-\eta/s)t} \varphi(t) \gamma(t) g(t/s) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{s}} a'(u) e^{i\phi(u)} \int_{\mathbb{R}} t e^{i(\phi'(u)-\eta/s)t} e^{i\varphi(t)t^2/2} g(t/s) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{s}} e^{i\phi(u)} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{2} \alpha(t) e^{i(\phi'(u)-\eta/s)t} e^{i\varphi(t)t^2/2} g(t/s) dt. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite gibt nach einer Variablentransformation $t \rightarrow ts$ gerade die Hälfte von (3.54), alle anderen enthalten im Integral stetige Funktionen, die an der Stelle 0 verschwinden. Alle diese Integrale laufen aber nur über $s\Omega_\varepsilon$ und wenn s hinreichend klein gewählt wird, die Frequenz also nicht zu klein, dann bleiben alle diese stetigen Funktionen klein und damit sind die restlichen Integrale vernachlässigbar. \square

Bemerkung 3.35 Satz 3.34 sagt uns, daß derartige Fourier–Wavelets auch Momentanfrequenzen ganz gut rekonstruieren können, solange die Parameter alle so gewählt sind, daß ε in (3.54) klein genug bleibt. Das kann (und sollte) man auch tun und genau das passiert auch in (Mallat, 1999, Theorem 4.5), wo sich eine wesentlich quantitativere, aber eben auch kompliziertere Form des Resultats findet.

Ein anderes Problem ist die Anpassung von Wavelets an bestimmte vorgegebene Strukturen. Dazu erinnern wir uns daran, daß man (3.9) ja auch als Korrelation zwischen Funktion und Wavelet interpretieren kann, also als eine Messung der *Ähnlichkeit* zwischen Funktion und passend gestauchtem Wavelet. Nun sucht man oftmals in Signalen nach wellenförmigen, zeitlokalen Anteilen, beispielsweise nach sogenannten *Spindeln* in Elektroenzephalogrammen (EEG), siehe (Samar et al., 1999).

Lemma 3.36 1. Ist ψ ein zulässiges Wavelet, so auch $\psi(a \cdot -b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

¹¹⁵Und hier bedeuten a' und ϕ' wirklich einmal Ableitungen – daß wir sowas noch erleben dürfen ...

2. Sind ψ_1, \dots, ψ_n zulässige Wavelets, so gilt das auch für

$$\psi = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j, \quad c_j \in \mathbb{R}. \quad (3.55)$$

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich, die zweite folgt aus der Tatsache, daß

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j \widehat{\psi}_j \right|^2 \leq n^2 \sum_{j=1}^n c_j^2 \left| \widehat{\psi}_j \right|^2$$

ist, siehe (3.50), woraus natürlich sofort

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq n^2 \sum_{j=1}^n c_j^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}_j(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$$

folgt, da alle Wavelets ja als zulässig vorausgesetzt waren. \square

Hat man nun also eine Funktion f , zu der man ein Wavelet „maßschneidern“ möchte, so kann man beispielsweise von einem zulässigen Lieblingswavelet ψ_* ausgehen und das Näherungswavelet wie in (3.55) ansetzen, wobei $\psi_j := \psi_*(a_j \cdot -b_j)$ für beliebig gewählte Werte $(a_j, b_j) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ gesetzt wird¹¹⁶.

Bemerkung 3.37 Solange $n \leq \log N$ ist, ist der Aufwand bei der Bestimmung von $\psi\left(\frac{2\pi ks}{Nh}\right)$, $k \in \mathbb{Z}_N$, immer noch so gering, daß die Gesamtkomplexität $O(N \log N)$, die von der FFT vorgegeben wird, nicht überschritten wird.

Das Wavelet ψ kann man nun an die Funktion f „fitten“. Dabei sind unter anderem die folgenden Möglichkeiten denkbar:

Interpolation: Für passende Stellen soll $\psi(x_j) = f(x_j)$, $j \in \mathbb{Z}_n$. oder, falls das Wavelet in der Fouriertransformierten gestaltet werden soll, $\widehat{\psi}(\xi_j) = \widehat{f}(\xi_j)$, $j \in \mathbb{Z}_n$, sein. Das ist bekanntlich ein einfaches lineares Gleichungssystem, siehe (Sauer, 2000a).

Diskrete Least Squares: ψ soll eine Summe der Form

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_M} |f(x_j) - \psi(x_j)|^2 \quad \text{oder} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}_M} \left| \widehat{f}(\xi_j) - \widehat{\psi}(\xi_j) \right|^2$$

minimieren, was sich auch sehr leicht in ein lineares Gleichungssystem umformen läßt.

¹¹⁶Es ist nicht notwendig, sich ψ aus nur einem einzigen Wavelet zusammenzusetzen, aber es erleichtert die numerische Implementierung und setzt lediglich die Festlegung der Zahlenpaare (a_j, b_j) voraus.

Least Squares: Ein bisschen schicker ist da schon die Minimierung in der L_2 -Norm:

$$\min_c \|f - \psi\|_2^2 = \frac{1}{4\pi^2} \|\widehat{f} - \widehat{\psi}\|_2^2, \quad (3.56)$$

die simultan den Abstand zwischen den Funktionen und deren Fouriertransformationen minimiert.

Um (3.56) zu lösen, das nicht ganz so offensichtlich ist, schreiben wir

$$\begin{aligned} \|f - \psi\|_2^2 &= \left\langle f - \sum_{j=1}^n c_j \psi_j, f - \sum_{j=1}^n c_j \psi_j \right\rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{j=1}^n \Re(c_j \langle f, \psi_j \rangle) + \sum_{j,k=1}^n c_j \bar{c}_k \langle \psi_j, \psi_k \rangle, \end{aligned}$$

was zum Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \langle \psi_j, \psi_k \rangle : \\ k = 1, \dots, n \end{bmatrix} \begin{matrix} j = 1, \dots, n \\ \end{matrix} \mathbf{c} = [\langle \psi_j, f \rangle : j = 1, \dots, n]$$

führt. Wir müssen hier also Integrale kennen oder numerisch berechnen. Dennoch kann man durch geeignete Wahl der Skalierungs- und Verschiebungsfaktoren a_j und b_j durchaus dafür sorgen, daß die *Gram-Matrix* in diesem Gleichungssystem beispielsweise dünn besetzt ist.

Nothing has afforded me so convincing a proof of the unity of the Deity as these purely mental conceptions of numerical and mathematical science which have been by slow degrees vouchsafed to man, and are still granted in these latter times by the Differential Calculus, now superseded by the Higher Algebra, all of which must have existed in that sublimely omniscient Mind from eternity.

Mary Somerville

Frames und Gruppen

4

Wir haben in „Praxiskapitel“ schon festgestellt, daß wir die Wavelettransformation nur für *endlich viele* Skalen und Positionen wirklich berechnen können, so daß sich natürlich die Frage stellt, wie wir diese Parameter bestimmen sollen, um wirklich in $W_\psi f$ die volle Information über f finden zu können. Ein paar Hinweise hatten wir ja schon durch den Shannonschen Abtastatz und etwas Heuristik am Ende von Kapitel 3.3 gefunden, aber jetzt wollen wir das Problem systematischer angehen. Dazu wählen wir eine neue Sichtweise und betrachten ausgehend von der offensichtlichen Identität

$$W_\psi f(u_j, t_k) = \int_{\mathbb{R}} f(t) |s_j|^{-1/2} \overline{\psi\left(\frac{t-t_k}{s_j}\right)} dt =: \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (4.1)$$

aber nun das *Funktionensystem* $\psi_{j,k}$ in $L_2(\mathbb{R})$ und dessen Eigenschaften.

4.1 Basen und Frames

Wir betrachten nun Systeme $\Psi \subset L_2(\mathbb{R})$, die den Hilbertraum $L_2(\mathbb{R})$ erzeugen, also

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\text{span } \Psi} = \overline{\left\{ \sum_{\psi \in \Psi} c_\psi \psi : c_\psi \in \mathbb{C} \right\}}. \quad (4.2)$$

Solch eine Menge nennt man *erzeugendes System* und spricht von einer *Basis* von $L_2(\mathbb{R})$ wenn alle Darstellungen

$$L_2(\mathbb{R}) \ni f = \sum_{\psi \in \Psi} f_\psi \psi$$

bezüglich Ψ *eindeutig* sind. Besonders brav ist Ψ , wenn es eine *Orthonormalbasis* bildet, das heisst, wenn

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \delta_{\psi, \psi'}, \quad \psi, \psi' \in \Psi,$$

erfüllt ist, denn dann gilt

$$f = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi \quad \text{und} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi \rangle|^2. \quad (4.3)$$

Nun können wir unsere Frage aus dem Anfang dieses Kapitels etwas anders formulieren:

Unter welchen Voraussetzungen an die beiden Folgen¹¹⁷ $(s_j : j \in \mathbb{Z})$ und $(t_k : k \in \mathbb{Z})$ ist das System $\Psi = \{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ eine Basis oder zumindest etwas vergleichbares?

Um es gleich vorwegzunehmen: Basis ist sehr unwahrscheinlich, aber es gibt „etwas vergleichbares“, das wir aber erst einmal einführen müssen.

Definition 4.1 Ein abzählbares¹¹⁸ System Ψ von Funktionen in $L_2(\mathbb{R})$ heißt *Frame*, wenn es Konstanten $0 < A \leq B < \infty$ gibt, so daß

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad (4.4)$$

erfüllt ist.

Bemerkung 4.2 1. Manchmal wird im deutschsprachigen Raum auch das Wort *Rahmen* verwendet. Man kann das natürlich tun. Man kann auch *Wellchenanalyse* betreiben und versuchen, *Wellchenrahmen* zu konstruieren ...

2. Ein bisschen ist ein *Frame* angelehnt an die *stabile Basis*. Eine *Basis* Ψ wird *stabil* genannt¹¹⁹, wenn es Konstanten $0 < A < B < \infty$ gibt, so daß

$$f = \sum_{\psi \in \Psi} f_\psi \psi \quad \Rightarrow \quad A \|f\|_2^2 \leq \sum_{\psi \in \Psi} |f_\psi|^2 \leq B \|f\|_2^2$$

¹¹⁷Endliche viele Werte reichen natürlich nie, schliesslich ist $L_2(\mathbb{R})$ ein *unendlichdimensionaler Funktionenraum*.

¹¹⁸Mal ganz im Ernst: Wie will man sonst einen Begriff wie \sum_{Ψ} wie in (4.4) auch nur vernünftig interpretieren?

¹¹⁹Zumindest in $L_2(\mathbb{R})$.

gilt. Dies bezeichnet man als Äquivalenz zwischen der Funktionennorm von f und der diskreten Norm der Koeffizienten der Darstellung von f bezüglich Ψ . Bei stabilen Normen ist die Beziehung zwischen Funktion und Koeffizienten ein stetiger Operator mit stetiger Inverser.

3. Allerdings muss ein Frame keine Basis mehr sein, sondern darf sogar eine ganz gezielte Überrepräsentation darstellen. Schliesslich sind die Werte, die in (4.4) nach oben und unten beschränkt werden, nur dann eindeutige Koeffizienten, wenn Ψ eine Orthonormalbasis ist.

Beispiel 4.3 Das Standardbeispiel für einen Frame, der **keine** Basis ist, ist der Mercedes-Stern, der von den Vektoren

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

gebildet wird. Diese Vektoren sind definitiv keine Basis, da sie linear abhängig sind, aber für $x \in \mathbb{R}^2$ ist

$$x_2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 = x_2^2 + \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

und somit $A = B = \frac{3}{2}$. So gesehen ist das also sogar ein ganz besonderer Frame, bei dem obere und untere Schranke übereinstimmen.

Definition 4.4 Ein Frame heisst tight Frame bzw. straffer Rahmen oder fester Rahmen, siehe (Louis et al., 1998), wenn in (4.4) $A = B$ ist. Man spricht von einem Parseval-Frame¹²⁰ wenn obendrein $A = B = 1$ ist.

Der Mercedes-Stern aus Beispiel 4.3 ist also sogar ein tight Frame und stellt damit auch einen direkten Bezug zwischen der Funktionen- und der Koeffizientennorm her. Dennoch enthalten die drei Koeffizienten natürlich mehr Daten, als x Information enthält, sie sind also *redundant*. Stellt sich also die Frage, ob und wie man f aus den möglicherweise redundanten Framekoeffizienten rekonstruieren kann.

Definition 4.5 Der Analyse-Operator¹²¹ $T_\Psi : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^\Psi$ ist definiert als

$$T_\Psi f := (\langle f, \psi \rangle : \psi \in \Psi), \quad (4.5)$$

¹²⁰Der Name ist leicht erklärt: Die Koeffizienten erfüllen dann die Parseval-Identität.

¹²¹Die Sprechweise hier folgt (Louis et al., 1998), in (Daubechies, 1992) wird dieser Operator als „Frame-Operator“ bezeichnet. Es gibt also wieder einmal keine normierte Bezeichnungsweise.

der Synthese-Operator $T_{\Psi}^* : \mathbb{C}^{\Psi} \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ als

$$T_{\Psi}^* c := \sum_{\psi \in \Psi} c_{\psi} \psi, \quad c = (c_{\psi} : \psi \in \Psi), \quad (4.6)$$

und der Frame-Operator schliesslich als

$$S_{\Psi} f := T_{\Psi}^* T_{\Psi} f = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi. \quad (4.7)$$

Bemerkung 4.6 1. Die „*“-Notation in (4.6) ist natürlich kein Zufall: Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ und $c \in \ell_2(\Psi)$ ist

$$\begin{aligned} \langle T_{\Psi} f, c \rangle &= \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \overline{c_{\psi}} = \sum_{\psi \in \Psi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(t)} dt \right) \overline{c_{\psi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\sum_{\psi \in \Psi} c_{\psi} \psi(t)} dt = \langle f, T^* c \rangle, \end{aligned}$$

der Synthese-Operator ist also auch in einem ganz strengen und formalen Sinn Adjungierter des Analyse-Operators.

2. Wenn wir nun an Matrizen denken, dann ist also der Frame-Operator ein Operator der Form $A^T A$, also ein symmetrischer und hoffentlich auch in irgendeiner Form definitiver Operator. Für Operatoren auf Hilberträumen bedeutet das, daß $\langle A f, f \rangle \geq 0$ sein muss.
3. Für praktische Zwecke ist eine unnormierte Version des Frame-Operators, nämlich

$$S'_{\Psi} := \frac{2}{A+B} S_{\Psi}, \quad \text{d.h.} \quad S'_{\Psi} = \frac{2}{A+B} \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi, \quad (4.8)$$

besser geeignet. Warum, das sehen wir gleich.

Satz 4.7 Für einen Frame Ψ

1. ist der der Frame-Operator S_{Ψ} ein positiver, beschränkter und stetig invertierbarer Operator. Genauer:

$$A \|f\|^2 \leq \langle S_{\Psi} f, f \rangle \leq B \|f\|_2^2. \quad (4.9)$$

2. gilt

$$\|S'_{\Psi} - I\|_2 \leq \rho := \frac{B-A}{A+B} < 1. \quad (4.10)$$

Beweis: Zuerst sollten wir uns mal einem bisher vergessenen Detail widmen, nämlich der *Wohldefiniertheit* von S_Ψ aus (4.7). Dazu indizieren¹²² wir die Elemente nun einmal als ψ_j , $j \in \mathbb{N}$, und approximieren $f \in L_2(\mathbb{R})$ durch die Folge

$$S_N f := \sum_{j=1}^N \langle f, \psi_j \rangle \psi_j, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz, siehe (Yosida, 1965, III.6) bzw. Übung 4.1 für das konkrete Resultat, ist dann für $M \leq N$ mit ein bisschen Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} \|S_M f - S_N f\|_2^2 &= \sup_{\|g\|_2=1} |\langle f_M - f_N, g \rangle|^2 = \sup_{\|g\|_2=1} \left| \sum_{j=M+1}^N \langle f, \psi_j \rangle \langle \psi_j, g \rangle \right|^2 \\ &\leq \sup_{\|g\|_2=1} \sum_{j=M+1}^N |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \underbrace{\sum_{j=M+1}^N |\langle g, \psi_j \rangle|^2}_{\leq B \|g\|_2^2=1} \leq B \sum_{j=M+1}^N |\langle f, \psi_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Da $\sum |\langle f, \psi_j \rangle|^2$ durch $B\|f\|_2^2$ beschränkt ist und somit konvergiert, geht die rechte Seite der Abschätzung *unabhängig von N* gegen Null für $M \rightarrow \infty$. Mit anderen Worten: $S_M f$ ist eine *Cauchy–Folge* in $L_2(\mathbb{R})$, die aus Vollständigkeitsgründen gegen eine Grenzfunktion $S_\Psi f \in L_2(\mathbb{R})$ konvergieren muss.

(4.9) ist nicht schwer zu beweisen:

$$\langle S_\Psi f, f \rangle = \left\langle \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi, f \right\rangle = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \underbrace{\langle \psi, f \rangle}_{=\langle f, \psi \rangle} = \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi \rangle|^2,$$

und der Rest ist die Definition (4.4) des Frames. Damit folgt aber auch schon (4.10), denn nach (4.9) ist für jedes $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$-\frac{2B}{A+B} \|f\|_2^2 \leq \langle -S'_\Psi f, f \rangle \leq -\frac{2A}{A+B} \|f\|_2^2$$

und damit

$$\left(1 - \frac{2B}{A+B}\right) \|f\|_2^2 \leq \langle (I - S'_\Psi) f, f \rangle \leq \left(1 - \frac{2A}{A+B}\right) \|f\|_2^2,$$

¹²²Das hätten wir natürlich schon die ganze Zeit tun können, aber das würde immer auch den Eindruck erwecken, es gäbe irgendeinen Grund, warum ψ_1 einen kleineren Index hat als ψ_2 und erzeugt so eine künstliche Asymmetrie zwischen den Elementen des Frame.

weswegen $|\langle (I - S'_\Psi) f, f \rangle| \leq \frac{B-A}{B+A}$ ist, woraus mit Lemma 4.8

$$\|I - S'_\Psi\|_2 = \sup_{\|f\|_2=1} |\langle (I - S'_\Psi) f, f \rangle| \leq \frac{B-A}{B+A}$$

folgt. □

Übung 4.1 Zeigen Sie: Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt $\|f\|_2 = \sup \{|\langle f, g \rangle| : \|g\|_2 = 1\}$. ◇

Zum Komplettieren des Beweises von Satz 4.7 noch ein allgemeines Resultat zu symmetrischen Operatoren auf Hilberträumen aus (Kreyszig, 1978; Taylor & Lay, 1980)

Lemma 4.8 Ist $T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ein selbstadjungierter Operator, so ist $\|T\|_2 = \sup_{\|f\|_2=1} |\langle Tf, f \rangle|$.

Beweis: Eine Richtung ist klar:

$$\sup_{\|f\|_2=1} |\langle Tf, f \rangle| \leq \sup_{\|f\|_2=1} \|Tf\|_2 \underbrace{\|f\|_2}_{=1} = \sup_{\|f\|_2=1} \|Tf\|_2 = \|T\|_2.$$

Da für $T = 0$ das Lemma trivial ist, fordern wir nun $T \neq 0$, wählen g so, daß $Tg \neq 0$ ist und setzen $f_1 := \|Tg\|_2^{1/2} g$ sowie $f_2 = \|Tg\|_2^{-1/2} Tg$, so daß $\|f_1\|_2^2 = \|f_2\|_2^2 = \|Tg\|_2$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} & \langle T(f_1 + f_2), f_1 + f_2 \rangle - \langle T(f_1 - f_2), f_1 - f_2 \rangle \\ &= \langle Tf_1, f_1 \rangle + \langle Tf_2, f_1 \rangle + \langle Tf_1, f_2 \rangle + \langle Tf_2, f_2 \rangle \\ & \quad - \langle Tf_1, f_1 \rangle + \langle Tf_2, f_1 \rangle + \langle Tf_1, f_2 \rangle - \langle Tf_2, f_2 \rangle \\ &= 2(\langle Tf_1, f_2 \rangle + \langle Tf_2, f_1 \rangle) = 2(\langle Tg, Tg \rangle + \langle T^2g, g \rangle) = 4\|Tg\|_2^2, \end{aligned}$$

letzteres wegen der Selbstadjungiertheit von T . Ausserdem ist für jedes $g \neq 0$ und $g' = g/\|g\|_2$

$$|\langle Tg, g \rangle| = \|g\|_2^2 |\langle Tg', g' \rangle| \leq \|g\|_2^2 \sup_{\|f\|_2=1} |\langle Tf, f \rangle| =: \|g\|_2^2 \nu(T)$$

und wir erhalten somit, daß

$$\begin{aligned} 4\|Tg\|_2^2 &\leq \nu(T) (\|f_1 + f_2\|_2^2 + \|f_1 - f_2\|_2^2) = 2\nu(T) (\|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2) \\ &= 4\nu(T) \|Tg\|_2 \end{aligned}$$

Nach Division durch $4\|Tg\|_2$ ergibt sich $\|Tg\|_2 \leq \nu(T)$ und das gilt für alle g mit Norm 1, für die $Tg \neq 0$ ist. Also ist auch

$$\|T\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} \|Tg\|_2 \leq \nu(T) = \sup_{\|f\|_2=1} |\langle Tf, f \rangle|,$$

was den Beweis komplettiert. \square

Aus (4.10) ergibt sich eine sehr einfache Formel zur *Invertierung* des Frame–Operators S_Ψ bzw. S'_Ψ , denn da $I - S'_\Psi$ eine Kontraktion ist, konvergiert die Reihe

$$S''_\Psi := \sum_{j=0}^{\infty} (I - S'_\Psi)^j$$

absolut und in der Operatornorm, und in der Tat ist

$$S''_\Psi S'_\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} (I - S'_\Psi)^j (I - (I - S'_\Psi)) = \sum_{j=0}^{\infty} (I - S'_\Psi)^j - \sum_{j=1}^{\infty} (I - S'_\Psi)^j = I.$$

Damit kann dann aber auch der inverse Frame–Operator explizit als $S_\Psi^{-1} := \frac{A+B}{2} S''_\Psi$ angegeben werden. Die Iterationsfolge

$$v_n = \sum_{j=0}^n (I - S'_\Psi)^j v_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergiert $S''_\Psi v_0$, also mit $v_0 = v = S'_\Psi f$ gegen f und erfüllt dann die Iterationsvorschrift

$$v_{n+1} = v + \sum_{j=1}^{n+1} (I - S'_\Psi)^j v = v + (I - S'_\Psi) \sum_{j=0}^n (I - S'_\Psi)^j v = v + (I - S'_\Psi) v_n \quad (4.11)$$

der sogenannten *Landweber–Iteration* oder *Richardson–Iteration*. Der Fehler der Iteration ist dann

$$\|f - v_n\|_2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} (I - S'_\Psi)^j v_0 \right\|_2 \leq \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho} \|S'_\Psi f\|_2,$$

was natürlich umso schneller abfällt, je näher A und B beisammenliegen, also je mehr sich der Frame in Richtung „tight Frame“ bewegt. Ist $\rho = 0$, so muss man gar nicht iterieren.

Korollar 4.9 *Ist Ψ ein tight Frame, so ist*

$$f = \frac{1}{B} \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi, \quad f \in L_2(\mathbb{R}). \quad (4.12)$$

Auch bei Frames kann man wieder schöne Dualitätstheorie betreiben. Dazu bemerken wir zuerst, daß die Inverse eines positiven Operators wieder positiv ist (Kreyszig, 1978; Taylor & Lay, 1980) und daß aus (4.9) auch

$$\frac{1}{B} \|f\|_2^2 \leq \langle S_\Psi^{-1} f, f \rangle \leq \frac{1}{A} \|f\|_2^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad (4.13)$$

erfüllt ist, es drehen sich halt eben nur die Konstanten um¹²³.

Definition 4.10 Als dualer Frame zu einem Frame Ψ wird das System

$$\Psi^* := S_\Psi^{-1} \Psi = \{ \psi^* = S_\Psi^{-1} \psi : \psi \in \Psi \}$$

bezeichnet.

Proposition 4.11 Der duale Frame Ψ^* zu einem Frame Ψ ist ebenfalls ein Frame mit den Framekonstanten $0 < B^{-1} < A^{-1} < \infty$. Außerdem gilt

$$f = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi^* \rangle \psi = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi^*, \quad f \in L_2(\mathbb{R}). \quad (4.14)$$

Beweis: Da S_Ψ selbstadjungiert¹²⁴ und von der Form $T_\Psi^* T_\Psi$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi^* \rangle|^2 &= \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, S_\Psi^{-1} \psi \rangle|^2 = \sum_{\psi \in \Psi} |\langle S_\Psi^{-1} f, \psi \rangle|^2 = \|T_\Psi S_\Psi^{-1} f\|_2^2 \\ &= \langle T_\Psi S_\Psi^{-1} f, T_\Psi S_\Psi^{-1} f \rangle = \langle S_\Psi^{-1} f, T_\Psi^* T_\Psi S_\Psi^{-1} f \rangle = \langle S_\Psi^{-1} f, S_\Psi S_\Psi^{-1} f \rangle \\ &= \langle S_\Psi^{-1} f, f \rangle, \end{aligned}$$

was eingesetzt in (4.13) gerade die Frameeigenschaft für Ψ^* ist. (4.14) folgt aus der Tatsache, daß

$$S_\Psi^{-1} S_\Psi = S_\Psi^{-1} \left(\sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi \right) = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle S_\Psi^{-1} \psi = \sum_{\psi \in \Psi} \langle f, \psi \rangle \psi^*$$

ist und daß die Rollen von Frame und dualem Frame vertauschbar sind. \square

Bemerkung 4.12 Ist der Frame Ψ sogar eine Basis, dann sind Ψ und Ψ^* biorthogonal, denn aus der Eindeutigkeit der Darstellung

$$\psi = \sum_{\phi \in \Psi} \langle \psi, \phi^* \rangle \phi$$

folgt

$$\langle \psi, \phi^* \rangle = \delta_{\psi, \phi}, \quad \psi, \phi \in \Psi. \quad (4.15)$$

¹²³Man denke wieder an Matrizen: Wenn A symmetrisch und positiv definit ist, dann überträgt sich das auch auf A^{-1} und die Eigenwerte sind durch ihre Reziprokwerte zu ersetzen.

¹²⁴Also „symmetrisch“.

Es gibt zumindest einen Fall, in dem Frames auch Basen sind, so daß Bemerkung 4.12 greift.

Proposition 4.13 *Ein Parseval-Frame ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn er ein normierter Frame ist, d.h., wenn $\|\psi\|_2 = 1$, $\psi \in \Psi$, ist.*

Beweis: Daß jede Orthonormalbasis ein normierter Parseval-Frame ist, ist offensichtlich, also ist nur die andere Richtung der Äquivalenz von Interesse. Dazu bemerken wir zuerst, daß jeder Parseval-Frame per Definitionem die *Parseval-Identität*¹²⁵

$$\sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi \rangle|^2 = \|f\|_2^2, \quad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad (4.16)$$

erfüllt. Wenden wir diese nun auf ein Frameelement $\psi \in \Psi$ an, so erhalten wir, daß

$$\|\psi\|_2^2 = \sum_{\psi' \in \Psi} |\langle \psi, \psi' \rangle|^2 = \underbrace{|\langle \psi, \psi \rangle|^2}_{=\|\psi\|_2^2=1} + \sum_{\psi' \neq \psi} |\langle \psi, \psi' \rangle|^2,$$

also $\langle \psi, \psi' \rangle = 0$, $\psi, \psi' \in \Psi$. Elemente eines Parseval-Frame sind also immer orthogonal und wenn sie nun passend normiert sind, natürlich auch orthonormal, also eine Basis des von ihnen erzeugten Vektorraums, der wegen (4.16) $L_2(\mathbb{R})$ enthalten muss. \square

4.2 Wavelet-Frames

Wenn wir nun schon mit Frames angefangen haben, dann ist die nächste Frage nicht schwer zu erraten:

Unter welchen Voraussetzungen an s_j und t_k bilden die Wavelets ψ_{jk} aus (4.1) einen Frame?

Diese Frage in voller Allgemeinheit zu beantworten ist nicht wirklich einfach, wir werden uns hier auf den Spezialfall

$$\psi_{jk} = a^{-j/2} \psi(a^j \cdot -kb), \quad \text{d.h.} \quad s_j = a^{-j}, t_{jk} = kbs_j, \quad a > 1, b > 0, \quad (4.17)$$

beschränken, zudem es ein klein wenig zu sagen gibt.

Bemerkung 4.14 *1. Die Wahl der Parameter s_j und t_{jk} entspricht wieder der Struktur; der Skalenparameter entstammt \mathbb{R}_+ , hat also multiplikative Struktur; der Ortsparameter hingegen ist aus \mathbb{R} zu wählen und damit von additiver Natur.*

¹²⁵Bekannt als Eigenschaft der Fouriertransformation (zumindest bis auf Normierung), kann man sie ausserdem sehr leicht für jede Orthonormalbasis zeigen.

2. Einen kleinen Unterschied zu (4.1) haben wir jetzt aber doch: Die Translationsparameter t_{jk} wurden an den Skalenparameter angepasst, eine stark gestreckte Version von ψ wird um größere Werte verschoben, eine gestauchte Version hingegen um kleinere.

Definition 4.15 Eine Frame $\Psi = \{\psi_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ der gemäß (4.17) von einem sogenannten Mutterwavelet¹²⁶ erzeugt wird, heisst Wavelet-Frame.

Wir beginnen mit einer notwendigen Bedingung, die die Parameter a, b mit der Zulässigkeitskonstante des Wavelets und den Frameschranken koppeln wird. Der Beweis wird ein bisschen dauern und diverse Teilaspekte, auch von positiven und symmetrischen Operatoren auf Hilberträumen, beleuchten, insofern also durchaus Spaß machen. Das Resultat und der Beweis stammen aus (Daubechies, 1992).

Satz 4.16 Ist Ψ ein Wavelet-Frame, so ist

$$A b \log a \leq \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)| d\xi \\ \int_{-\infty}^0 |\xi|^{-1} |\widehat{\psi}(\xi)| d\xi \end{array} \right\} \leq B b \log a. \quad (4.18)$$

Zum Einstieg brauchen wir die *Spur* eines Operators auf $L_2(\mathbb{R})$. Dazu beginnen wir mit einer besonderen Klasse von Operatoren.

Definition 4.17 Ein Operator T von einem Banachraum X in einen Banachraum Y heisst kompakter Operator oder vollstetiger Operator¹²⁷, wenn für jede beschränkte Folge $x_j \in X$ die Bildfolge Tx_j eine konvergente Teilfolge enthält.

Symmetrische, kompakte Operatoren haben nun die schöne Eigenschaft, daß sie Eigenvektoren besitzen, deren Eigenwert die Norm ist.

Proposition 4.18 Ist $0 \neq T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ kompakt und symmetrisch, $\langle Tf, f \rangle = \langle f, Tf \rangle$, so ist einer der Werte $\pm \|T\|_2$ ein Eigenwert von T und es gibt einen zugehörigen Eigenvektor $f \in L_2(\mathbb{R})$, so daß $\|f\|_2 = 1$ und $\langle Tf, f \rangle = \|T\|_2$.

Beweis: Nach Lemma 4.8 gibt es eine Folge $f_n \in L_2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, so daß $\|f_n\|_2 = 1$ und $\langle Tf_n, f_n \rangle \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| = \|T\|_2$. Dann ist

$$0 \leq \|Tf_n - \lambda f_n\|_2^2 = \|Tf_n\|_2^2 - 2\lambda \langle Tf_n, f_n \rangle + \lambda^2 \underbrace{\|f_n\|_2^2}_{=1} \rightarrow 0$$

¹²⁶Wurde einst als „mother wavelet“ eingeführt.

¹²⁷Was schon zeigt, daß dies eine recht restriktive Eigenschaft ist, zumindest deutlich stärker als Stetigkeit.

für $n \rightarrow \infty$, also $Tf_n \rightarrow \lambda f_n$. Da T kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $Tf_{n(k)}$ und weil

$$f_{n(k)} = \frac{1}{\lambda} Tf_{n(k)} \rightarrow g, \quad \lambda \neq 0$$

ist, konvergiert auch $f_{n(k)} \rightarrow f$ mit $g = Tf$. Dieses f ist dann genau, wonach wir gesucht haben. \square

Wenn wir nun T auf $f^\perp = \{g : \langle f, g \rangle = 0\}$ einschränken und das ganze Spiel iterieren, so können wir zu einer *Diagonalisierung* des Operators T kommen:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \cdot, f_k \rangle f_k, \quad \|f_k\|_2 = 1, \quad (4.19)$$

siehe (Taylor & Lay, 1980, Theorem VI.4.2). Ist T positiv, so sind selbstverständlich alle $\lambda_k \geq 0$.

Definition 4.19 Die Spur¹²⁸ $\text{Tr} T$ eines Operators in der Form (4.19) ist definiert als

$$\text{Tr} T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Die Trace Class besteht aus allen Operatoren, für die

$$\text{Tr}_\Phi := \sum_{\varphi \in \Phi} |\langle T\varphi, \varphi \rangle| < \infty$$

für alle Orthonormalbasen Φ erfüllt ist, siehe (Daubechies, 1992; Yosida, 1965).

Das was wir hier gesehen haben, ist allerdings nur das Spektrum eines diskreten Operators. Wir könnten auch Operatoren der Form

$$Tf = \int_X \lambda(x) \langle f, f_x \rangle f_x d\mu(x), \quad \|f_x\|_2 = 1,$$

definieren¹²⁹, deren Spur dann natürlich

$$\text{Tr} T = \int_X \lambda(x) d\mu(x)$$

ist. So, nun aber endlich zum Beweis von Satz 4.16, der aus (Daubechies, 1992) entnommen ist und wohl original in (Daubechies, 1990) geführt wurde.

¹²⁸Das passt natürlich zur Spur einer Matrix, die ja auch die Summe der Eigenwerte, aber eben auch gleichzeitig die Summe der Diagonalelemente ist.

¹²⁹Wer sich da ganz spontan an Gruppen und deren Haar-Maße erinnert fühlt, ist durchaus auf der richtigen Spur und muss nur noch auf Abschnitt 4.3 warten.

Beweis von Satz 4.16: Wir untersuchen eine besondere Wavelettransformation. Dazu sei $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ ein normiertes zulässiges Wavelet¹³⁰ mit $\hat{\phi}(\xi) = 0$ für $\xi < 0$ und $c(s, u)$, $(s, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine beschränkte, positive Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) du \frac{ds}{s^2} < \infty. \quad (4.20)$$

Damit definieren wir den Operator

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \left\langle f, s^{-1/2} \phi \left(\frac{\cdot - u}{s} \right) \right\rangle s^{-1/2} \phi \left(\frac{x - u}{s} \right) du \frac{ds}{s^2} \quad (4.21)$$

und stellen fest, daß die Abkürzung $\phi_{su} := s^{-1/2} \phi(s^{-1}(\cdot - u))$ eine Menge Schreibarbeit einsparen kann. Die Spur $\text{Tr } T$ von T ist gerade der endliche Ausdruck aus (4.20).

Nun betrachten wir die Frameungleichung

$$A \underbrace{\|\phi_{su}\|_2^2}_{=1} \leq \sum_{\psi \in \Psi} |\langle \phi_{su}, \psi \rangle|^2 \leq B \underbrace{\|\phi_{su}\|_2^2}_{=1}$$

für ϕ_{su} , multiplizieren alles mit $c(s, u)$ und integrieren alles auf, so daß wir

$$A \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) du \frac{ds}{s^2}}_{=\text{Tr } T} \leq \sum_{\psi \in \Psi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) |\langle \phi_{su}, \psi \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \leq B \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) du \frac{ds}{s^2}}_{=\text{Tr } T}$$

erhalten, wovon wir den mittleren Term mit ein paar großzügigen Vertauschungen der Integrationsreihenfolge in

$$\begin{aligned} & \sum_{\psi \in \Psi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) |\langle \phi_{su}, \psi \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \\ &= \sum_{\psi \in \Psi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \langle \phi_{su}, \psi \rangle \langle \psi, \phi_{su} \rangle du \frac{ds}{s^2} \\ &= \sum_{\psi \in \Psi} \left\langle \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \langle \psi, \phi_{su} \rangle \phi_{su} du \frac{ds}{s^2}, \psi \right\rangle = \sum_{\psi \in \Psi} \langle T\psi, \psi \rangle \end{aligned}$$

umformen können und so die Abschätzung

$$A \text{Tr } T \leq \sum_{\psi \in \Psi} \langle T\psi, \psi \rangle \leq B \text{Tr } T \quad (4.22)$$

¹³⁰Ein Wavelet mit einseitigem Spektrum heisst *analytisches Wavelet* und ist notwendigerweise komplex, denn reelle Funktionen haben ja ein symmetrisches Spektrum und dann bliebe nicht mehr viel übrig.

erhalten. Als nächstes spezialisieren wir die bisher recht beliebige Funktion c zu

$$c(s, u) = \chi_{[1, a]}(s) w\left(\frac{|u|}{s}\right), \quad w \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} w(t) dt < \infty.$$

Damit vereinfacht sich auch

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} T &= \int_1^a \int_{\mathbb{R}} w\left(\frac{|u|}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} = \int_1^a \frac{1}{s} ds \int_{\mathbb{R}} w(|u|) du \\ &= 2 \log a \int_{\mathbb{R}_+} w(t) dt = \log a, \end{aligned} \quad (4.23)$$

siehe Übung 4.2. Jetzt wird es langsam mal Zeit, die besondere Struktur (4.17) unseres Wavelet-Frames zu berücksichtigen. So ist nämlich für $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{jk}, \phi_{su} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} a^{-j/2} \psi(a^{-j}t - kb) s^{-1/2} \overline{\phi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \\ &= a^{j/2} s^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(t - kb) \overline{\phi\left(\frac{a^j t - u}{s}\right)} dt \\ &= a^{j/2} s^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \overline{\phi\left(\frac{a^j t + a^j kb - u}{s}\right)} dt \\ &= (a^{-j} s)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \overline{\phi\left(\frac{t - (a^{-j}u - kb)}{a^{-j}s}\right)} dt = \langle \psi, \phi_{a^{-j}s, a^{-j}u - kb} \rangle. \end{aligned}$$

Der mittlere Term aus (4.22) wird nun zu¹³¹

$$\begin{aligned} \sum_{\psi \in \Psi} \langle T\psi, \psi \rangle &= \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \int_1^a \int_{\mathbb{R}} w\left(\frac{|u|}{s}\right) |\langle \psi_{jk}, \phi_{su} \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \\ &= \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \int_1^a \int_{\mathbb{R}} w\left(\frac{|u|}{s}\right) |\langle \psi, \phi_{a^{-j}s, a^{-j}u - kb} \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \\ &= \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \int_{a^{-j}}^{a^{-j+1}} \int_{\mathbb{R}} w\left(\frac{|u + kb|}{s}\right) |\langle \psi, \phi_{s, u} \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{a^{-j}}^{a^{-j+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w\left(\frac{|u + kb|}{s}\right) |\langle \psi, \phi_{s, u} \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w\left(\frac{|u + kb|}{s}\right) |\langle \psi, \phi_{s, u} \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2}. \end{aligned}$$

¹³¹Wer nur technisch denkt, findet hier eine korrekt durchgeführte Variablentransformation, wer strukturell denkt, sieht, daß wir hier die Invarianz des Haar-Maßes auf dem semidirekten Produkt $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ausgenutzt haben.

Spezialisieren wir w weiter, beispielsweise zu¹³² $w(t) = \lambda e^{-(\lambda\pi t)^2}$, $\lambda > 0$, so haben wir es mit einer Sorte Funktionen zu tun, die eine Quadratur-Integral-Näherung der Form

$$\left| y \sum_{k \in \mathbb{Z}} w(x + ky) - \int_{\mathbb{R}} w(t) dt \right| \leq y \sup_{x \in \mathbb{R}} w(x)$$

erfüllen, siehe Lemma 4.21, das wir gleich noch beweisen werden, was für unser spezielles w

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} w\left(\frac{|u + kb|}{s}\right) - \frac{s}{b} \right| \leq w(0) = \lambda \quad (4.24)$$

bedeutet. Mit (4.24) erhalten wir dann, daß

$$\sum_{\psi \in \Psi} \langle T\psi, \psi \rangle = \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} |\langle \psi, \phi_{s,u} \rangle|^2 du \frac{ds}{s} + R \quad (4.25)$$

wobei

$$|R| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} w\left(\frac{|u + kb|}{s}\right) - \frac{s}{b} \right|}_{\leq \lambda} |\langle \psi, \phi_{s,u} \rangle|^2 du \frac{ds}{s^2} \leq \lambda C_\phi$$

mit einer von ϕ abhängigen Konstanten C_ϕ . Jetzt haben wir es fast geschafft, wir brauchen nur beim ersten Term in (4.25) zu den Fouriertransformierten überzugehen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} |\langle \psi, \phi_{s,u} \rangle|^2 du \frac{ds}{s} &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left| \langle \widehat{\psi}, \widehat{\phi}_{s,u} \rangle \right|^2 du \frac{ds}{s} \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) \sqrt{s} \widehat{\phi}(s\xi) e^{iu\xi} d\xi \right|^2 du \frac{ds}{s} \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) \widehat{\phi}(s\xi) e^{iu\xi} d\xi \right)}_{=\overline{(\widehat{\psi}\widehat{\phi}(s\cdot))}^\wedge(u)} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\xi) \widehat{\phi}(s\xi) e^{-iu\xi} d\xi \right)}_{=(\widehat{\psi}\widehat{\phi}(s\cdot))^\wedge(u)} duds \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left| (\widehat{\psi}\widehat{\phi}(s\cdot))^\wedge(u) \right|^2 duds = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(\xi) \widehat{\phi}(s\xi) \right|^2 d\xi ds \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2}_{=0, \xi < 0} \left| \widehat{\phi}(s\xi) \right|^2 d\xi ds = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 \left| \widehat{\phi}(s\xi) \right|^2 d\xi ds \end{aligned}$$

¹³²Der Clou ist, daß diese Familie von Funktionen immer noch schön integrierbar ist, ihr Maximum immer an $t = 0$ hat und ansonsten schnell und streng monoton abfällt. Für $\lambda \rightarrow \infty$ wird das dann mal wieder ein δ -Funktional, was uns nun wieder an das Zauberwort *approximative Identitäten* erinnern sollte.

$$= \int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} |\widehat{\phi}(s)|^2 \frac{ds}{\xi}}_{=\xi^{-1} \|\phi\|_2^2 = \xi^{-1}} d\xi = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi,$$

also

$$\sum_{\psi \in \Psi} \langle T\psi, \psi \rangle = \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi + O(\lambda). \quad (4.26)$$

Setzen wir nun (4.26) in (4.22) ein, so bekommen wir mit (4.23) die Abschätzung

$$A \log a b \leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi + O(\lambda) \leq B \log a b \quad (4.27)$$

und der erste Teil von (4.18) folgt mit dem Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$. Der zweite Teil funktioniert ganz genauso, nur betrachtet man dann ein ϕ , dessen Fouriertransformierte $\widehat{\phi}$ auf \mathbb{R}_+ verschwindet. \square

Übung 4.2 Zeigen Sie mit den Bezeichnungen aus dem obigen Beweis, daß $\int_{\mathbb{R}_+} w(t) dt = \frac{1}{2}$. \diamond

Bemerkung 4.20 (Vergleich mit dem Beweis von Satz 3.9) Die (technische) Bedeutung von ϕ wird klar, wenn wir diesen Beweis mit dem von Satz 3.9 vergleichen! Wir können im vorletzten Schritt vor (4.26) nur deswegen die Variablentransformation $s \rightarrow s/\xi$ durchführen, weil sich die Vorzeichen nicht ändern, und genau das wird durch die Wahl von ϕ gewährleistet, denn den Träger dessen Fouriertransformation hatten wir bis zu diesem Punkt nie ausgenutzt.

Lemma 4.21 Sei $0 \leq f \in L_1(\mathbb{R})$ eine auf \mathbb{R}_- monoton steigende und auf \mathbb{R}_+ monoton fallende Funktion¹³³. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt - f(0) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \leq \int_{\mathbb{R}} f(t) dt + f(0). \quad (4.28)$$

Beweis: Auf \mathbb{R}_+ fällt die Funktion und somit ist für $k \geq 0$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq \int_{\mathbb{R}_+} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

¹³³Übung: Wo hat eine derartige Funktion wohl ihr Maximum?

Analog gilt auf \mathbb{R}_- und für $k < 0$

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} f(k) \leq \int_{\mathbb{R}_-} f(t) dt \leq \sum_{k=-\infty}^0 f(k).$$

Addiert man nun die beiden Summen, so erhält man

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) - f(0) \leq \int_{\mathbb{R}} f(t) dt \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + f(0),$$

woraus (4.28) unmittelbar folgt. \square

Satz 4.16 ist nur eine **notwendige** Bedingung, die vom Zusammenspiel der Schrittweiten, der *Framekonstanten* und der *Zulässigkeitskonstante* von ψ erfüllt werden muss, damit das System überhaupt einen Frame bilden **kann**. Um auch eine **hinreichende** Bedingung für die Existenz des Wavelet-Frame zu erhalten, folgen wir (Daubechies, 1992) ein bisschen weiter und betrachten, für $f \in L_2(\mathbb{R})$ und $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \left| \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{jk} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) a^{j/2} \overline{\widehat{\psi}(a^j \xi)} e^{ikba^j \xi} d\xi \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} a^j \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi(ba^j)^{-1}[\ell, \ell+1]} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(a^j \xi)} e^{ikba^j \xi} d\xi \right|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2} a^j \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi(ba^j)^{-1}} \widehat{f}\left(\xi + \frac{2\pi\ell}{ba^j}\right) \overline{\widehat{\psi}\left(a^j \xi + \frac{2\pi\ell}{b}\right)} e^{ikba^j \xi} d\xi \right|^2 \\ &= a^j \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi(ba^j)^{-1}} e^{ikba^j \xi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi + \frac{2\pi\ell}{ba^j}\right) \overline{\widehat{\psi}\left(a^j \xi + \frac{2\pi\ell}{b}\right)} d\xi \right|^2 \\ &= a^j \left| \frac{1}{2\pi ba^j} \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{ba^j}\right) \overline{\widehat{\psi}\left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{b}\right)} d\xi \right|^2 \\ &= \frac{1}{b^2 a^j} \underbrace{\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{ba^j}\right) \overline{\widehat{\psi}\left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{b}\right)} d\xi \right|^2}_{= \widehat{g}(-k)} \end{aligned}$$

mit

$$g(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{x + 2\pi\ell}{ba^j}\right) \overline{\widehat{\psi}\left(\frac{x + 2\pi\ell}{b}\right)}.$$

Plancherel, diesmal in der Version für Fourierreihen¹³⁴, besagt dann, daß

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 &= \frac{1}{b^2 a^j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(k)|^2 = \frac{1}{b^2 a^j} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi b^2 a^j} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f} \left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{ba^j} \right) \overline{\widehat{\psi} \left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{b} \right)} \right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi(ba^j)^{-1}} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f} \left(\xi + \frac{2\pi\ell}{ba^j} \right) \overline{\widehat{\psi} \left(a^j \xi + \frac{2\pi\ell}{b} \right)} \right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi(ba^j)^{-1}} \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f} \left(\xi + \frac{2\pi\ell}{ba^j} \right) \overline{\widehat{f} \left(\xi + \frac{2\pi k}{ba^j} \right)} \times \\
&\quad \times \overline{\widehat{\psi} \left(a^j \xi + \frac{2\pi\ell}{b} \right)} \widehat{\psi} \left(a^j \xi + \frac{2\pi k}{b} \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi b} \sum_{k, \ell \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi(ba^j)^{-1}[\ell, \ell+1]} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f} \left(\xi + \frac{2\pi(k-\ell)}{ba^j} \right)} \times \\
&\quad \times \overline{\widehat{\psi}(a^j \xi)} \widehat{\psi} \left(a^j \xi + \frac{2\pi(k-\ell)}{b} \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi b} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f} \left(\xi + \frac{2\pi k}{ba^j} \right)} \overline{\widehat{\psi}(a^j \xi)} \widehat{\psi} \left(a^j \xi + \frac{2\pi k}{b} \right) d\xi,
\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{jk} \rangle|^2 &= \frac{1}{2\pi b} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\pi b} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \neq 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f} \left(\xi + \frac{2\pi k}{ba^j} \right)} \overline{\widehat{\psi}(a^j \xi)} \widehat{\psi} \left(a^j \xi + \frac{2\pi k}{b} \right) d\xi \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\frac{1}{2\pi b} \|f\|_2^2 \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \xi)|^2 \leq I_1 \leq \frac{1}{2\pi b} \|f\|_2^2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \xi)|^2 \quad (4.29)$$

¹³⁴Also auf dem Torus.

und es lässt sich zeigen¹³⁵, daß

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi b} \|f\|_2^2 \sum_{k \neq 0} \sqrt{\psi_{\downarrow} \left(\frac{2k\pi}{b} \right) \psi_{\downarrow} \left(\frac{-2k\pi}{b} \right)} \quad (4.30)$$

ist, wobei

$$\psi_{\downarrow} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi) \right| \left| \widehat{\psi}(a^j \xi + \cdot) \right|. \quad (4.31)$$

Übung 4.3 Schlagen Sie (4.30) in (Daubechies, 1992) nach¹³⁶. \diamond

Satz 4.22 Erfüllt das Wavelet ψ die Voraussetzungen

$$0 < m(\psi, a) := \inf_{|\xi| \in [1, a]} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi) \right|^2 \leq M(\psi, a) := \sup_{|\xi| \in [1, a]} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi) \right|^2 < \infty \quad (4.32)$$

und gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{1+\varepsilon} \psi_{\downarrow}(\xi) < \infty, \quad (4.33)$$

dann gibt es ein $b_0 > 0$, so daß für alle $b < b_0$ das System Ψ aus (4.17) einen Wavelet-Frame bildet.

Beweis: Zuerst bemerken wir, daß die Abklingbedingung (4.33) an ψ_{\downarrow} bedeutet, daß $\widehat{\psi}(\xi) = O\left((1 + |\xi|)^{-(1+\varepsilon)}\right)$, also $\widehat{\psi}\left(\frac{\pm 2k\pi}{b}\right) = O\left(\left(\frac{|k|}{b}\right)^{-(1+\varepsilon)}\right)$ und daß daher

$$q(b) := \sum_{k \neq 0} \sqrt{\psi_{\downarrow} \left(\frac{2k\pi}{b} \right) \psi_{\downarrow} \left(\frac{-2k\pi}{b} \right)} = O(b^{1+\varepsilon}), \quad b \rightarrow 0,$$

sein muss. (4.29) und (4.30) können wir nun in

$$\frac{1}{2\pi b} (m(\psi, a) - q(\psi, b)) \leq \frac{1}{\|f\|_2^2} \sum_{\psi \in \Psi} |\langle f, \psi \rangle|^2 \leq \frac{1}{2\pi b} (M(\psi, a) + q(\psi, b)) \quad (4.34)$$

umformen, wobei die Einschränkung $|\xi| \in [1, a]$ dadurch gerechtfertigt ist, daß für jedes andere $\xi = a^k \xi'$, $|\xi| \in [1, a]$ die Summe in (4.29) den Wert

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi) \right|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^{j+k} \xi') \right|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi') \right|^2$$

annimmt. Die rechte Seite von (4.34) ist eigentlich für alle Werte von a, b endlich, aber die linke Seite wird nur für hinreichend kleine Werte von b positiv sein. \square

¹³⁵Im wesentlichen ein wenig Cauchy-Schwartz und mehr oder weniger trickreiches Umformen.

¹³⁶Dies ist eine sogenannte *Softskill-Übung*.

Bemerkung 4.23 *Ein bisschen was können wir noch aus Satz 4.22 und seinem Beweis lernen:*

1. *Die heuristische Vorstellung, daß die Heisenberg-Boxen einander überlappen müssen, damit die diskreten Werte eine vernünftige Rekonstruktion erlauben, wird in Satz 4.22 konkretisiert und ist dann halt eben nicht mehr ganz so einfach.*
2. *Wenn wir uns (4.32) und (4.33) nochmal etwas genauer ansehen, so stellen die rechte Seite von (4.32) und (4.33) Forderungen an die Abklingrate von $\widehat{\psi}$ für $|\xi| \rightarrow \infty$ dar, während die linke Seite von (4.32) verlangt, daß die Funktionen $\widehat{\psi}(a^j \cdot)$, $j \in \mathbb{Z}$, keine gemeinsamen Nullstellen haben.*
3. *Eine etwas „einfachere“ hinreichende Bedingung für einen Frame besteht daher aus der Abklingbedingung*

$$\left| \widehat{\psi}(\xi) \right| \leq C \frac{|\xi|^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{(\alpha+1+\varepsilon)/2}} \sim O(|\xi|^{1+\varepsilon}), \quad \alpha, \varepsilon > 0, \quad (4.35)$$

und der Nullstellenbedingung

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi) \right|^2 \geq \beta > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.36)$$

siehe (Daubechies, 1992).

4. *Unter sehr einfachen Voraussetzungen ist (4.36) sogar eine notwendige Bedingung. Ist nämlich $\widehat{\psi}$ stetig¹³⁷ und fällt gegen ∞ ab¹³⁸, so kann man, falls an einer Stelle $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(a^j \xi) \right|^2 < \varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$ ist, eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 = 1$ konstruieren, so daß $\sum_{\psi} |\langle f, \psi \rangle| \leq C\varepsilon$ ist, indem man die Fouriertransformation von f nur in einer kleinen Umgebung von ξ ungleich 0 wählt. Kann man nun sogar $\varepsilon \rightarrow 0$ gehen lassen, weil (4.36) nicht erfüllt ist, dann geht die untere Frameschranke verloren.

Das Fazit ist relativ einfach: Unter relativ milden Voraussetzungen an das Wavelet gibt es Werte a und b , so daß die Familie aus (4.17) einen Frame bildet, und im wesentlichen bedeutet das, daß man hinreichend fein abtasten muss. Die Framekonstanten hängen

¹³⁷Was ja immer dann der Fall ist, wenn $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ ist, und wer will sich wirklich mit L_2 -Funktionen herumschlagen, die nicht zu L_1 gehören und deren Fouriertransformation nur aufgrund eines Grenzwertarguments existiert.

¹³⁸Auf der „anderen Seite“ von \mathbb{R}_+ , also in der Nähe der Null, fällt $\widehat{\psi}$ ab, weil ψ ein Wavelet ist.

von der Feinheit dieser Abtastung ab und wenn a und b nicht zusammenpassen, dann kann es auch schon mal passieren, daß es mit dem Frame nichts wird.

Für viele konkrete Wavelets¹³⁹ kann man diese a - b -Bereiche und die Framekonstanten sogar mehr oder weniger explizit angeben, siehe mal wieder (Daubechies, 1992), wobei man besonders an B/A , also der „Framebreite“ als Qualitätskriterium interessiert ist.

4.3 Wavelets und Gruppen

Wie haben schon im Beweis von Satz 4.16 gesehen, daß der „Trick“ bei der Nutzung von $\langle \psi_{jk}, \phi_{su} \rangle$ auch im Rahmen des invarianten Haar-Maßes gesehen werden konnte. Diese Thematik wollen wir hier noch ein klein wenig vertiefen, und zwar mit der Darstellung von Gruppen auf Hilberträumen.

Definition 4.24 Eine Darstellung einer Gruppe¹⁴⁰ G auf einem Hilbertraum \mathcal{H} ist eine Abbildung¹⁴¹ $U : G \rightarrow \mathcal{H}'$ mit der Eigenschaft

$$U(gg') = U(g)U(g'), \quad U(1) = I. \quad (4.37)$$

Die Darstellung heisst

1. unitär, wenn $U(g)$ ein unitärer Operator ist, also $U^*(g)U(g) = I$, $g \in G$.
2. stetig, wenn für jedes $f \in \mathcal{H}$ die Abbildung $g \mapsto U(g)f$ stetig ist.
3. reduzibel, wenn es einen nichttrivialen Teilraum $\{0\} \neq V \subset \mathcal{H}$ von \mathcal{H} gibt, so daß

$$V \supseteq U(G)V = \{U(g)f : g \in G, f \in V\}.$$

Eine Darstellung ist also wieder einmal eine Verknüpfung zweier Strukturen, diesmal einer Gruppe und eines Hilbertraums. Auch hier ist natürlich wieder der entscheidende Aspekt, wie diese beiden Objekte interagieren. Doch zuerst einmal das „einfachste“ Beispiel für so eine Darstellung.

Beispiel 4.25 Betrachten wir nochmal die affine Gruppe $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}_* \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit den Gruppenoperationen

$$gg' := (a, b)(a', b') := (aa', ab' + b), \quad g^{-1} = (a, b)^{-1} = (a^{-1}, -b/a).$$

¹³⁹Vor allem die populären unter ihnen.

¹⁴⁰Multiplikativ geschrieben.

¹⁴¹Es geht also um eine „funktionalwertige“ Abbildung.

Die linksreguläre Darstellung dieser Gruppe auf $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ ist dann¹⁴²

$$U(g) = U(a, b) = \tau_b \sigma_{1/a},$$

also das inzwischen wohlbekannte¹⁴³

$$U(a, b)f = \tau_b \sigma_{1/a} f = f \left(\frac{\cdot + b}{a} \right). \quad (4.38)$$

Allerdings hat die Darstellung (4.38) den kleinen Schönheitsfehler, nicht unitär zu sein. Das lässt sich leicht beheben, indem man $U(a, b) = |a|^{1/2} \sigma_{1/a} \tau_b$ setzt, denn dann ist für alle $f, f' \in L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle U^*(a, b)U(a, b)f, f' \rangle &= \langle U(a, b)f, U(a, b)f' \rangle \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} f \left(\frac{x+b}{a} \right) \overline{f' \left(\frac{x+b}{a} \right)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f'(x)} dx = \langle f, f' \rangle \end{aligned}$$

und somit $U^*(a, b)U(a, b) = I$.

Die affine Gruppe ist natürlich nicht abelsch, muß also über ein rechts- und ein linksinvariantes Haar-Maß verfügen, die auch nicht übereinstimmen müssen und dies auch nicht tun werden.

Lemma 4.26 Invariante Maße für die affine Gruppe G sind¹⁴⁴

$$d\mu_L(a, b) = db \frac{da}{a^2} \quad \text{und} \quad d\mu_R(a, b) = db \frac{da}{|a|}. \quad (4.39)$$

Beweis: Wir setzen die Maße als $d\mu_{L/R}(a, b) = w_{L/R}(a, b) d(a, b)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_G w_L(a, b) d(a, b) &= \int_{gG} w_L(a, b) d(a, b) = \int_{g_a \mathbb{R}_+ \times g_a \mathbb{R} + g_b} w_L(a, b) d(a, b) \\ &= \int_G w_L(g_a a, g_a b + g_b) \left| \det J \begin{bmatrix} g_a(\cdot)_1 \\ g_a(\cdot)_2 + g_b \end{bmatrix} \right| d(a, b) \\ &= \int_G w_L(g_a a, g_a b + g_b) \left| \det \begin{bmatrix} g_a & 0 \\ 0 & g_a \end{bmatrix} \right| d(a, b) \\ &= \int_G w_L(g_a a, g_a b + g_b) g_a^2 d(a, b), \end{aligned}$$

¹⁴²Eigentlich würde man an dieser Stelle ja eher $\sigma_a \tau_{-b}$ erwarten, aber das ist die rechtsreguläre Darstellung, für die linksreguläre nimmt man die Inverse $\tau_{-b}^{-1} \sigma_a^{-1} = \tau_b \sigma_{1/a}$, siehe (Grossmann *et al.*, 1985).

¹⁴³Wer will, kann gerne τ_b durch τ_{-b} ersetzen, das gibt dann die „gewohnte“ Verschiebung der Funktion um b .

¹⁴⁴Wie immer natürlich bis auf Normalisierung.

was zeigt, daß $w_L(a, b) = a^{-2}$ die gewünschte Form haben könnte und wegen der Eindeutigkeit des Haar-Maßes, Satz 2.18, auch sein muss. Ein analoges Argument für das rechtsseitige Haar-Maß ergibt

$$\begin{aligned} \int_G w_R(a, b) d(a, b) &= \int_{Gg} w_R(a, b) d(a, b) = \int_G w_R(g_a a, g_b + b) d(a, b) \\ &= \int_G w_L(g_a a, g_a b + g_b) \left| \det \begin{bmatrix} g_a & 0 \\ g_b & 1 \end{bmatrix} \right| d(a, b) \\ &= \int_G w_L(g_a a, g_a b + g_b) |g_a| d(a, b), \end{aligned}$$

was (4.39) komplettiert. □

Bemerkung 4.27 Das linksinvarianten Haarsche Maß gehört zur linksregulären Darstellung, das rechtsinvariante zur rechtsregulären. Das sollte auch die Namensgebung erklären.

Es gibt noch eine¹⁴⁵ etwas komplexere Gruppenstruktur, die eine bedeutende Rolle in der Quantenphysik spielt.

Beispiel 4.28 (Heisenberg-Gruppe) Unter der Heisenberg-Gruppe versteht man die Menge $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}_1$ mit der Gruppenoperation

$$\begin{aligned} (p, q, z) (p', q', z') &= (p + p', q + q', z z' e^{i(p'q - pq')/2}), \\ (p, q, z)^{-1} &= (-p, -q, z^{-1}). \end{aligned}$$

und der Darstellung

$$U(p, q, z) f(x) = z e^{-ipq/2} e^{iqx} f(x - p).$$

Definition 4.29 1. Ein Element $f \in \mathcal{H}$ heisst zulässig (bezüglich der Darstellung), wenn

$$\int_G |\langle U(g)f, f \rangle|^2 d\mu(g) < \infty \quad (4.40)$$

ist. Mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ bezeichnen wir die Menge der zulässigen¹⁴⁶ Elemente von \mathcal{H} .

2. Eine quadratintegrierbare Darstellung ist eine irreduzible Darstellung, die über mindestens ein zulässiges Element verfügt.

¹⁴⁵Das ist so natürlich nicht richtig: Es gibt jede Menge solcher Strukturen.

¹⁴⁶„admissible“

Jetzt haben wir schon die zweite Definition des Begriffs „zulässig“, aber das ist erstens nicht zufällig, zweitens kein Versehen und drittens völlig korrekt.

Proposition 4.30 *Bei der unitären Darstellung der affinen Gruppe auf $L_2(\mathbb{R})$ ist $f \in L_2(\mathbb{R})$ genau dann zulässig, wenn f zulässig im Sinne von Definition 3.8 ist, also wenn*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (4.41)$$

erfüllt ist.

Beweis: Wir bestimmen für unseren Spezialfall unter Ausnutzung von Lemma 4.26 das Integral¹⁴⁷

$$\begin{aligned} \int_G |\langle U(g)f, f \rangle|^2 d\mu(g) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\langle |a|^{-1/2} \tau_b \sigma_{1/a} f, f \rangle|^2 db \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\langle |a|^{-1/2} \tau_{-b} \sigma_{1/a} f, f \rangle|^2 db \frac{da}{a^2} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |((|a|^{-1/2} \sigma_{1/a} f) * f)(b)|^2 db \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(|a|^{-1/2} \sigma_{1/a} f)^\wedge(\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(a\xi)|^2 \frac{da}{|a|}}_{= \int_{\mathbb{R}_*} |\widehat{f}(\cdot\xi)|^2 d\mu} d\xi = \|f\|_2^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(a)|^2}{|a|} da. \end{aligned}$$

□

Diese Proposition wirft neues Licht auf die bisher sehr technische Zulässigkeitsbedingung (3.11). Beispielsweise ist das $\int_{\mathbb{R}}$ dort in Wirklichkeit ein Integral über \mathbb{R}_* und das auch noch mit dem dazu passenden Haar-Maß.

Generell sind quadratintegrierbare Darstellungen eine feine Sache, denn das sind die Darstellungen, die in gewissem Sinne invertierbare Transformationen liefern, wobei die *Geometrie* der Darstellung in der Gruppe codiert ist¹⁴⁸, die Analysis aber auf dem Hilbertraum \mathcal{H} ausgeführt wird. Der zentrale Satz stammt aus einer Arbeit von Grossmann, Morlet und Paul, (Grossmann *et al.*, 1985).

¹⁴⁷Zur Erinnerung: Nach Satz 3.4, genauer (3.3), ist $(\sigma_a f)^\wedge = |a|^{-1} \widehat{f}(\cdot/a)$.

¹⁴⁸Daß Geometrie sehr viel mit Gruppen zu tun hat, sieht man schon am Beispiel der Symmetrien.

Satz 4.31 (Quadratintegrierbare Darstellungen) *Ist U eine quadratintegrierbare Darstellung $G \rightarrow \mathcal{H}$ einer lokalkompakten Gruppe, so existiert ein eindeutiger selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, so daß*

$$\int_G \langle U(g)v_1, f_1 \rangle \overline{\langle U(g)v_2, f_2 \rangle} d\mu(g) = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle, \quad v_1, v_2 \in \mathcal{A}, f_1, f_2 \in \mathcal{H}. \quad (4.42)$$

Ist die Gruppe G unimodular, so ist $T = \lambda I$ für ein $\lambda \neq 0$.

Spezifizieren wir $f_2 = \delta_x$ (bzw. eine Approximation davon) und $v_1 = v_2$, so erhalten wir jetzt automatisch eine Invertierungsformel für die Transformation $f \mapsto \langle U(g)v, f \rangle$, die unsere Wavelettransformation verallgemeinert.

Korollar 4.32 (Invertierungsformel) *Unter geeigneten Voraussetzungen ist*

$$\int_G \langle U(g)v, f \rangle \overline{\langle U(g)v, \delta_x \rangle} d\mu(g) = \|Tv\|_2^2 f(x), \quad f \in \mathcal{H}. \quad (4.43)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \int_G \langle U(g)v, f \rangle \overline{\langle U(g)v, \delta_x \rangle} d\mu(g) \\ &= \int_G \langle U(g)v, f \rangle \overline{\langle U(g)v, \delta_x \rangle} d\mu(g) = \langle Tv, Tv \rangle \langle f, \delta_x \rangle = \|Tv\|_2^2 f(x). \end{aligned}$$

□

The whole of the developments and operations of analysis are now capable of being executed by machinery. . . .

As soon as an Analytical Engine exists, it will necessarily guide the future course of science.

Ch. Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher* (London 1864)

Filterbänke & Wavelets

5

Wir verlassen nun die der kontinuierlichen Wavelets und wenden uns der rein digitalen Welt der Signalverarbeitung zu. Klar, zuerst brauchen wir einmal ein paar Grundlagen.

5.1 Signale & Filter

Wir betrachten nun ausschliesslich diskrete Signale, diese aber nicht nur in einer oder zwei Variablen, sondern beliebig in s Variablen, unser *Signalraum* ist also

$$\ell(\mathbb{Z}^s) := \{c : \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (5.1)$$

Wie schreiben Signale nicht als Folgen c_α , sondern als Funktionen $c(\alpha)$, wobei $\alpha \in \mathbb{Z}^s$ ein sogenannter *Multiindex* ist, also $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. Spezifische Signorräume sind noch

$$\begin{aligned} \ell_p(\mathbb{Z}^s) & : \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} |c(\alpha)|^p < \infty, & 1 \leq p < \infty \\ \ell_\infty(\mathbb{Z}^s) & : \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} |c(\alpha)| < \infty, \\ \ell_{00}(\mathbb{Z}^s) & : \#\{\alpha : c(\alpha) \neq 0\} < \infty. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Einheitsvektoren $\epsilon_j = (\delta_{jk} : k = 1, \dots, s)$ können wir wieder den *Translationsoperator* τ als

$$\tau_j c := c(\cdot + \epsilon_j), \quad \tau^\alpha c = \tau_1^{\alpha_1} \cdots \tau_s^{\alpha_s} c = c(\cdot + \alpha)$$

eingeführen. Die Notation¹⁴⁹ τ^α entspricht der Monomnotation, die wir später noch ausführlicher kennenlernen werden. Ausserdem brauchen wir noch das δ -Signal,

$$\delta(\alpha) = \delta_{\alpha,0} = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha \neq 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{Z}^s. \quad (5.2)$$

Definition 5.1 (Filter) 1. Ein Filter ist ein Operator auf einem Signalraum.

2. Ein LTI-Filter¹⁵⁰ F ist ein linearer Operator mit der Eigenschaft $\tau^\alpha F = F\tau^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}^s$.

Wenn in der Signalverarbeitung von einem (digitalen) Filter gesprochen wird, ist normalerweise¹⁵¹ ein LTI-Filter gemeint, siehe (Hamming, 1989). In diesem Skript wird „Filter“ ebenfalls synonym für LTI-Filter verwendet werden.

Lemma 5.2 F ist genau dann ein Filter, wenn es $f \in \ell(\mathbb{Z}^s)$ gibt, so daß

$$Fc = f * c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\cdot - \alpha) c(\alpha), \quad c \in \ell(\mathbb{Z}^s), \quad (5.3)$$

ist. Das Signal $f = F\delta$ heisst Impulsantwort des Filters F .

Beweis: Sei F ein Filter. Wir schreiben c formal als

$$c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \tau^{-\alpha} \delta$$

und erhalten wegen der Linearität und Zeitinvarianz von F , daß

$$Fc = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) F(\tau^{-\alpha} \delta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \tau^{-\alpha} \underbrace{F\delta}_{=f} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) f(\cdot - \alpha),$$

also (5.3). Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} \tau^\beta Fc &= \tau^\beta (f * c) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\cdot + \beta - \alpha) c(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\cdot - \alpha) c(\alpha + \beta) \\ &= f * \tau^\beta c = F\tau^\beta c, \end{aligned}$$

alle Faltungen sind also auch (LTI-)Filter. □

¹⁴⁹Eigentlich könnten wir durchaus auch τ_α schreiben, aber Iterationen der Koordinatentranslationen passt besser ins Gesamtkonzept.

¹⁵⁰Linear Time Invariant

¹⁵¹Verlassen sollte man sich grundsätzlich auf nichts!

Definition 5.3 Ein Filter heisst FIR–Filter¹⁵², wenn $f \in \ell_{00}(\mathbb{Z}^s)$ ist. Solche Filter können tatsächlich in Hardware realisiert werden, siehe (Sauer, 2003; Schüßler, 1992).

Zum Rechnen mit Filtern und Transformationen empfiehlt es sich, diese ein klein wenig zu algebraisieren.

Definition 5.4 Zu einem Signal $c \in \ell(\mathbb{Z}^s)$ betrachtet man das Symbol

$$c^\sharp(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}_*^s, \quad (5.4)$$

und die z –Transformation

$$c^\flat(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) z^{-\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}_*^s, \quad (5.5)$$

beide im Sinne einer formalen¹⁵³ Laurentreihe.

Zugegeben, der Unterschied zwischen dem in der Subdivision–Theorie gebräuchlichen Symbol und der in der Signalverarbeitung populären z –Transformation ist nicht wirklich groß und man muss schon sehr genau hinsehen, um ihn auf Anhieb zu finden, aber dennoch gibt es nicht nur bei der Kausalität¹⁵⁴ Unterschiede. So kann man beispielsweise die inverse z –Transformation als komplexes Kurvenintegral schreiben, siehe (Föllinger, 2000), bei Symbolen muss man etwas anders vorgehen, (Cavaretta *et al.*, 1991). Dennoch sind sie für unsere Zwecke komplett äquivalent und man kann sich eines der beiden Konzepte aussuchen, wobei die Wahl hier auf die Symbole fallen soll.

Lemma 5.5 $(Fc)^\sharp = f^\sharp c^\sharp$.

Beweis: Eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} (Fc)^\sharp(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} Fc(\alpha) z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} f(\alpha - \beta) c(\beta) \underbrace{z^{\alpha - \beta} z^\beta}_{=z^\alpha} \\ &= \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\alpha) z^\alpha \right) \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) z^\beta \right). \end{aligned}$$

□

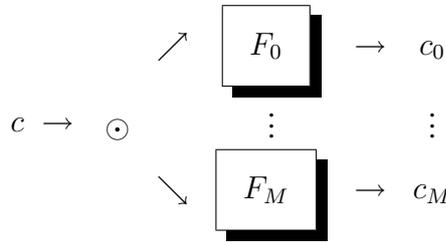
¹⁵²Finite Impulse Response, auf Deutsch also „EIA–Filter“.

¹⁵³Das heisst, man interessiert sich nicht für Konvergenz und dergleichen.

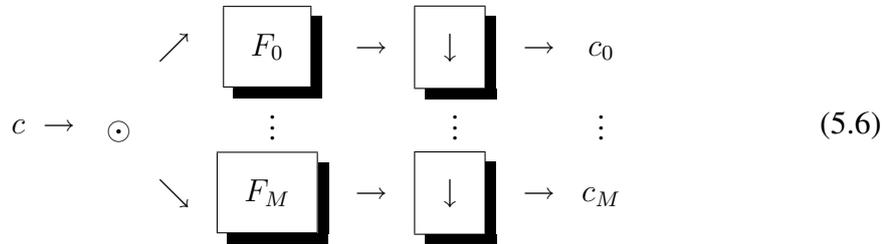
¹⁵⁴In der Praxis macht es zumindest bei zeitabhängigen Signalen einen ziemlichen Unterschied, ob ein Filter Daten aus der Vergangenheit verwendet oder Werte aus der Zukunft raten muss. In der Bildverarbeitung hingegen ist Kausalität ziemlich irrelevant, da ein Bild zur Verarbeitungszeit normalerweise komplett vorliegt.

5.2 Filterbänke

Eine *Filterbank* ist nun nichts anderes als eine ganze Reihe $F_j, j \in \mathbb{Z}_{M+1}$ von Filtern, von denen das Signal parallel verarbeitet wird:



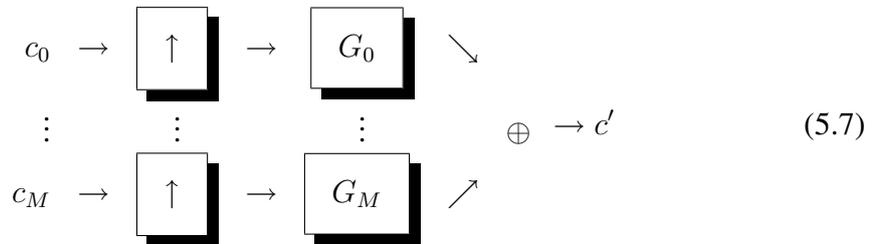
So hat das allerdings den Nachteil, daß sich die Datenmenge um den Faktor $M + 1$ vervielfältigt. Deswegen dünnt man die gefilterten Daten (idealerweise um einen Faktor $M + 1$) aus:



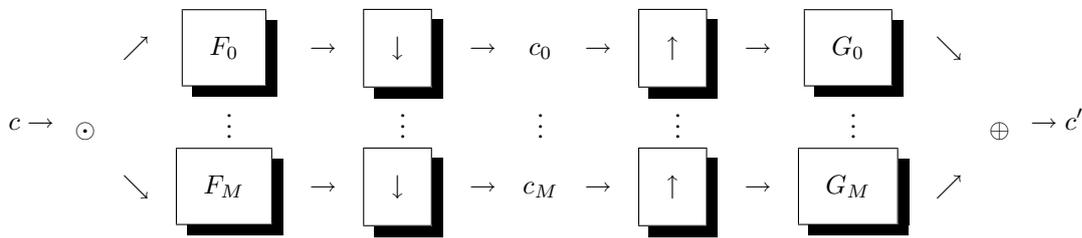
wobei der Operator \downarrow für *Unterabtastung* bzw. *Downsampling* steht.

Beispiel 5.6 (Zweikanal-Filterbank) *Der einfachste Fall einer Filterbank, siehe (Strang & Nguyen, 1996; Vetterli & Kovačević, 1995), verwendet für univariate ($s = 1$) zwei Filter F_0, F_1 und extrahiert in beiden Fällen einfach die Elemente des gefilterten Signals mit geradem Index: $c_j = (F_j c)(2 \cdot), j \in \mathbb{Z}_2$.*

Damit liefert eine Filterbank also eine Zerlegung eines Signals in Signalkomponenten, die sogenannten *Bänder*, die idealerweise dieselbe Informationsmenge wie das Ausgangssignal enthalten. Wenn das der Fall ist, so könnten wir c aus diesen Teilmformationen wieder rekonstruieren, was wir gerne durch eine Umkehrung des Filterbankprozesses erreichen würden, nämlich durch



Die *Upsampling*-Operatoren „ \uparrow “ sehen wir uns gleich noch genauer an. Wir können jetzt die gesamte Filterbank definieren:



Definition 5.7 1. Die Komponenten (5.6) bzw. (5.7) bezeichnet man Analyse-Filterbank bzw. Synthese-Filterbank.

2. Eine Filterbank besitzt perfekte Rekonstruktion, wenn $c' = c$ ist.

3. Eine kritisch abgetastete Filterbank, auf Englisch critically sampled, ist eine Filterbank, bei der die Anzahl der Filter mit dem Dezimierungsfaktor der Unterabtastung übereinstimmt.

Es liegt nahe, daß eine gute Filterbank über perfekte Rekonstruktion verfügt, aber was bedeutet das *mathematisch* für die Filter F_j und G_j ? Und was bedeutet (gleichmäßiges) Downsampling und Upsampling in s Variablen? Diesen Fragen werden wir uns im nächsten Kapitel widmen.

5.3 Downsampling und ganzzahlige Matrizen

Beispiel 5.6 gibt uns schon eine erste Idee, wie wir das Downsampling¹⁵⁵ durchführen könnten: durch Verwendung der gleichmäßigen Zerlegung von \mathbb{Z} in gerade und ungerade Zahlen. Hätten wir nun $M + 1$ Bänder in unserer Filterbank, so können wir die ebenfalls gleichmäßigen Restklassen $\mathbb{Z}/(M + 1)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_{M+1} \simeq \{0, \dots, M\}$ verwenden. In \mathbb{Z}^s hingegen haben wir deutlich mehr Möglichkeiten.

Definition 5.8 Eine Matrix¹⁵⁶ $\Xi \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ heißt expandierende Matrix, wenn all ihre Eigenwerte im Absolutbetrag strikt größer als 1 sind. Äquivalent dazu ist, daß¹⁵⁷ Ξ^{-1} kontraktiv ist, d.h. $\|\Xi^{-n}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

¹⁵⁵Irgendwie hat sich der englische Begriff auch in der deutschen Sprache eingebürgert, weswegen wir auf das altehrwürdige „Unterabtasten“ verzichten werden.

¹⁵⁶Konvention: Ganzzahlige Matrizen werden mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

¹⁵⁷Wenn die Eigenwerte im Betrag > 1 sind, sind sie insbesondere $\neq 0$ und damit ist die Matrix invertierbar.

Neben den Eigenwerten gibt es eine weitere Möglichkeit, eine Matrix zu beschreiben, nämlich durch ihre *Smith–Werte*. Dazu ein bisschen mehr und leicht allgemeinere Terminologie, die wir aber auch in dieser Allgemeinheit brauchen werden.

Definition 5.9 Eine Matrix $A \in R^{n \times n}$ über einem Ring¹⁵⁸ heißt unimodular, wenn $\det A \in R_*$ eine Einheit ist, also in R ein multiplikatives Inverses besitzt.

Beispiel 5.10 1. Die Einheiten in \mathbb{Z} sind genau ± 1 , eine unimodulare Matrix muss also Determinante ± 1 haben.

2. Die Einheiten im Polynomring $\mathbb{C}[z] = \Pi$ sind \mathbb{C}_* , eine unimodulare Matrix hat also konstante, von Null verschiedene Determinante.

3. Die Laurentpolynome $\mathbb{C}[z, z^{-1}] =: \Lambda$ haben $\mathbb{C}_* \{z^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^s\}$, die Menge der von Null verschiedenen Monome, als Einheiten. Da jedes Polynom auch ein Laurentpolynom ist¹⁵⁹, kann eine Matrix $A \in \Pi^{n \times n}$ über Λ unimodular sein, über Π aber nicht.

Satz 5.11 (Unimodulare Matrizen) 1. Eine Matrix $A \in R^{n \times n}$ hat genau dann eine Inverse in $R^{n \times n}$, wenn sie unimodular ist.

2. Zu jeder Matrix $A \in R^{n \times n}$ über einem euklidischen¹⁶⁰ Ring existieren unimodulare Matrizen T, T' und eine Diagonalmatrix Σ , so daß

$$A = T \Sigma T' \quad (5.8)$$

ist.

Definition 5.12 Die Darstellung (5.8) heißt *Smith–Zerlegung* von A und man spricht von der *Smith–Normalform*, wenn zusätzlich die *Teilbarkeitsbedingung* $\sigma_{j+1, j+1} | \sigma_{jj}$, $j = 1, \dots, n-1$, erfüllt ist. Die Diagonalwerte $\sigma_j = \sigma_{jj}$ der *Smith–Normalform* sind die *Smith–Werte* von A .

Beweis von Satz 5.11: 1.) ist leicht zu beweisen: Besitzt A eine Inverse, so ist

$$1 = \det I = \det (A^{-1}A) = \det A^{-1} \det A$$

¹⁵⁸Man kann addieren und multiplizieren und zwischen den beiden Operation besteht das allgemein übliche Distributivgesetz. Prototypen sind \mathbb{Z} und die (Laurent-)Polynome in einer und mehreren Variablen.

¹⁵⁹Die Umkehrung gilt fast, zumindest nach Multiplikation mit einem Monom, also einer Einheit.

¹⁶⁰Es existiert eine Division mit Rest, mit einem Rest der „kleiner“ ist als der Divisor. Details beispielsweise in (Gathen & Gerhard, 1999; Sauer, 2001).

und damit ist $\det A \in R_*$. Die Umkehrung folgt aus der Cramerschen Regel $A_{jk}^{-1} = \det A_{jk} / \det A$, was in R liegt, wenn $\det A \in R_*$.

Der Beweis von 2.) ist konstruktiv und eine nette Melange aus euklidischem Algorithmus und Gauß–Elimination. Dazu sei $d : R \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ die *Bewertungsfunktion* des euklidischen Ringes R , (Gathen & Gerhard, 1999; Sauer, 2001), so daß sich für $a, b \in R$ immer $p, r \in R$ finden lassen mit

$$a = pb + r, \quad d(r) < d(a).$$

1. Man beginnt mit der Matrix A und bestimmt $j, k \in \{1, \dots, n\}$ so, daß

$$d(a_{jk}) = \min \{d(a_{rs}) : r, s \in \{1, \dots, n\}, a_{rs} \neq 0\}$$

2. Man wählt die beiden unimodularen Permutationsmatrizen \tilde{P}_1, \tilde{Q}_1 als Vertauschung der Zeilen 1 und j bzw. 1 und k , dann hat die Matrix $\tilde{A} = \tilde{P}_1 A \tilde{Q}_1$ die Eigenschaft, daß

$$\tilde{a}_{11} = a_{jk}, \quad \implies \quad d(\tilde{a}_{11}) \leq \min_{r,s \in \{1, \dots, n\}} d(\tilde{a}_{rs}).$$

3. Man bestimmt Werte p_j und q_j , $j = 2, \dots, n$, so daß

$$\tilde{a}_{j1} = p_j \tilde{a}_{11} + r_j \quad \text{und} \quad \tilde{a}_{1j} = q_j \tilde{a}_{11} + s_j, \quad j = 2, \dots, n,$$

wobei, weil wir es ja mit einem *euklidischen* Ring zu tun haben,

$$\left. \begin{array}{l} d(r_j) \\ d(s_j) \end{array} \right\} < d(\tilde{a}_{11}), \quad j = 2, \dots, n. \quad (5.9)$$

4. Man setzt

$$A^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -p_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -p_n & & & 1 \end{bmatrix}}_{P'_1} \tilde{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -q_2 & \dots & -q_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{Q'_1} = \underbrace{P'_1 \tilde{P}_1}_{=: P_1} A \underbrace{\tilde{Q}_1 Q'_1}_{=: Q_1} = P_1 A Q_1.$$

Diese Matrix ist unimodular ähnlich zu A .

Dieses Spiel setzt man nun iterativ fort. Da, nach (5.9), die Ungleichung

$$\min_{r,s \in \{1, \dots, n\}} d(a_{rs}^{(j)}) =: d(A^{(j)}) < d(A^{(j-1)}), \quad j = 1, 2, \dots$$

gilt, muß diese Kette nach endlich vielen Schritten abbrechen, das heißt, es gibt einen Index j , so daß $r_j = s_j = 0$ ist und damit

$$A^{(j)} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}^{(j)} & 0 \\ \hline 0 & B^{(j)} \end{array} \right], \quad B^{(j)} \in R^{n-1 \times n-1}.$$

Und dann wenden wir dasselbe Verfahren auf $B^{(j)}$ an ... □

Mit ein klein bisschen mehr Sorgfalt kann man auch gewährleisten, daß die Einträge der Diagonalmatrix die Teilbarkeitsbedingung erfüllen, siehe (Marcus & Minc, 1969).

Bemerkung 5.13 *Bei der Definition 5.8 der expandierenden Matrix spielten die Eigenwerte von A eine wichtige Rolle. Nun ist klar, daß*

$$\det \Xi = \prod_{j=1}^n \lambda_j = \prod_{j=1}^n \sigma_j,$$

aber die Faktoren dieses Produkts können schon massiv unterschiedlich sein. Ein Beispiel ist die Quincunx-Matrix zum Zwart-Powell-Element¹⁶¹

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1/2} = 1 \pm i, \quad \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1.$$

Wir werden sehen, daß die Eigenwerte das analytische Verhalten von Ξ beschreiben, während die Smith-Werte eher für die algebraischen Eigenschaften zuständig sind.

Für die Smith-Zerlegung unserer expandierenden Matrix Ξ werden wir von nun an immer

$$\Xi = \Theta \Sigma \Theta', \quad |\det \Theta| = |\det \Theta'| = 1 \quad (5.10)$$

verwenden. Jetzt nutzen wir Ξ , um \mathbb{Z}^s gleichmäßig zu zerlegen.

Lemma 5.14 *Die (additive) Quotientengruppe $\mathbb{Z}^s / \Xi \mathbb{Z}^s$ hat $|\det \Xi|$ Elemente und es gilt*

$$\mathbb{Z}^s = \bigcup_{\epsilon \in E_\Xi} \epsilon + \Xi \mathbb{Z}^s, \quad E_\Xi = \Xi [0, 1)^s \cap \mathbb{Z}^s \simeq \mathbb{Z}^s / \Xi \mathbb{Z}^s. \quad (5.11)$$

Beweis: Mit der Smith-Faktorisierung (5.10) ist der Beweis sehr einfach. Zuerst bemerken wir, daß für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^s$

$$\alpha - \beta \in \Xi \mathbb{Z}^s = \Theta \Sigma \underbrace{\Theta' \mathbb{Z}^s}_{=\mathbb{Z}^s} \Leftrightarrow \Theta^{-1} \alpha - \Theta^{-1} \beta \in \Sigma \mathbb{Z}^s,$$

¹⁶¹Was auch immer das ist. Na gut, es hat etwas mit finiten Elementen und Dreiecksnetzen zu tun.

also

$$\mathbb{Z}^s / \Xi \mathbb{Z}^s \simeq \Sigma \mathbb{Z}^s = \bigotimes_{j=1}^s \mathbb{Z} / \sigma_j \mathbb{Z},$$

und die Gruppe auf der rechten Seite hat offensichtlich $\prod_j |\sigma_j| = |\det \Xi|$ Elemente. Für $\alpha \in \mathbb{Z}^s$ wählen wir als Repräsentanten

$$\alpha + \Xi \mathbb{Z}^s \ni \epsilon = \alpha - \Xi \lfloor \Xi^{-1} \alpha \rfloor = \Xi \underbrace{(\Xi^{-1} \alpha - \lfloor \Xi^{-1} \alpha \rfloor)}_{\in [0,1)^s},$$

und so erhaltenen Äquivalenzklassen sind in der Tat disjunkt, da für $\epsilon, \epsilon' \in \Xi[0, 1)^s$ die Beziehung $\epsilon - \epsilon' = \Xi \beta$ zu

$$\beta = \Xi^{-1} (\epsilon - \epsilon') \in \Xi^{-1} \Xi (-1, 1)^s = (-1, 1)^s$$

und damit zu $\beta = 0$ führt. \square

Definition 5.15 Die duale Quotientengruppe zu $\mathbb{Z}^s / \Xi \mathbb{Z}^s$ ist $\mathbb{Z} / \Xi^T \mathbb{Z}^s$ mit Repräsentantenmenge $E'_\Xi := \Xi^T [0, 1)^s$.

Der Begriff „Dualität“ wird in Definition 5.15 durchaus absichtlich gebraucht.

Proposition 5.16 (Fourier–Matrizen)

$$\frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} = \delta(\epsilon'), \quad \epsilon' \in E'_\Xi, \quad (5.12)$$

das heisst, die Fourier–Matrix

$$F_\Xi = \left[e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} : \begin{array}{l} \epsilon \in E_\Xi \\ \epsilon' \in E'_\Xi \end{array} \right] \quad (5.13)$$

ist unitär bis auf den Faktor $|\det \Xi|$.

Beweis: Für $\epsilon' = 0$ ist (5.12) offensichtlich, für

$$0 \neq \epsilon' \in \Xi^T [0, 1)^s \cap \mathbb{Z}^s = \Theta^T \Sigma \underbrace{\Theta^T \mathbb{Z}^s}_{=\mathbb{Z}^s} \cap \Theta^T \mathbb{Z}^s = \Theta^T (\Sigma [0, 1)^s \cap \mathbb{Z}^s)$$

Analog ist $\epsilon \in \Theta (\Sigma [0, 1)^s \cap \mathbb{Z}^s)$. Somit ist

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} &= \sum_{\eta \in \Sigma [0, 1)^s \cap \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i \eta^T \Theta^T \Xi^{-T} \Theta^T \eta'} \\ &= \sum_{\eta \in E_\Sigma} e^{2\pi i \eta^T \Theta^T \Theta^{-T} \Sigma^{-1} \Theta^{-T} \Theta^T \eta'} = \sum_{\eta \in E_\Sigma} e^{2\pi i \eta^T \Sigma^{-1} \eta'}, \quad \eta' \in E'_\Sigma, \end{aligned}$$

für die Summe (5.12) ist also nur Σ relevant. Nun ist aber

$$E_{\Sigma} = E'_{\Sigma} = \bigotimes_{j=1}^s \mathbb{Z}_{\sigma_j},$$

also, für $\eta' \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} &= \sum_{j_1=0}^{\sigma_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{\sigma_s-1} \left(e^{2\pi i \eta'_1 / \sigma_1} \right)^{j_1} \dots \left(e^{2\pi i \eta'_s / \sigma_s} \right)^{j_s} \\ &= \sum_{j_1=0}^{\sigma_1-1} \left(e^{2\pi i \eta'_1 / \sigma_1} \right)^{j_1} \dots \underbrace{\sum_{j_s=0}^{\sigma_s-1} \left(e^{2\pi i \eta'_s / \sigma_s} \right)^{j_s}}_{=(1 - (e^{2\pi i \eta'_s / \sigma_s})^{\sigma_s}) / (1 - e^{2\pi i \eta'_s / \sigma_s})} = \prod_{j=1}^s \frac{1 - e^{2\pi i \eta'_j}}{1 - e^{2\pi i \eta'_j / \sigma_s}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

was dann auch „schon“ (5.12) liefert.

Bleibt noch die Unitarität der Fourier-Matrix. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} F_{\Xi}^H F_{\Xi} &= \begin{bmatrix} e^{-2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} & : & \epsilon' \in E'_{\Xi} \\ & & \epsilon \in E_{\Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \eta'} & : & \epsilon \in E_{\Xi} \\ & & \eta' \in E'_{\Xi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} e^{-2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \eta'} & : & \epsilon' \in E_{\Xi} \\ & & \eta' \in E'_{\Xi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} e^{-2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} (\epsilon' - \eta')} & : & \epsilon' \in E_{\Xi} \\ & & \eta' \in E'_{\Xi} \end{bmatrix} \\ &= |\det M| \begin{bmatrix} \delta(\epsilon' - \eta') & : & \epsilon' \in E_{\Xi} \\ & & \eta' \in E'_{\Xi} \end{bmatrix} = |\det M| I, \end{aligned}$$

wobei der Beweis mehr Schreib- denn Denkarbeit war. \square

Bemerkung 5.17 1. Natürlich gilt (5.12) auch, wenn man die Rollen von ϵ und ϵ' vertauscht, also

$$\frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E'_{\Xi}} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} = \delta(\epsilon), \quad \epsilon \in E_{\Xi}. \quad (5.14)$$

2. Der wirkliche Lerneffekt aus dem Beweis von Proposition 5.16 ist die Tatsache, daß die Summe in Wirklichkeit nur von der Struktur der Diagonalen, also von der Smith-Normalform abhängt und daß die restliche Information eigentlich recht irrelevant ist.

Definition 5.18 (Up- und Downsampling) Der Downsampling-Operator ist als

$$\downarrow_{\Xi} c := c(\Xi \cdot) \tag{5.15}$$

definiert¹⁶², der Upsampling-Operator als

$$\uparrow_{\Xi} c(\alpha) = \begin{cases} c(\Xi^{-1}\alpha), & \alpha \in \Xi\mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{Z}^s. \tag{5.16}$$

Bemerkung 5.19 Die Funktion des Downsamplings ist klar, beim Upsampling wird das Signal c in die Äquivalenzklasse zu $\epsilon = 0$ verteilt und der Rest mit Null aufgefüllt. Die Operatoren sind aber nur teilweise Inverse zueinander:

$$\downarrow_{\Xi} \uparrow_{\Xi} = I \neq \uparrow_{\Xi} \downarrow_{\Xi}, \tag{5.17}$$

allerdings gilt

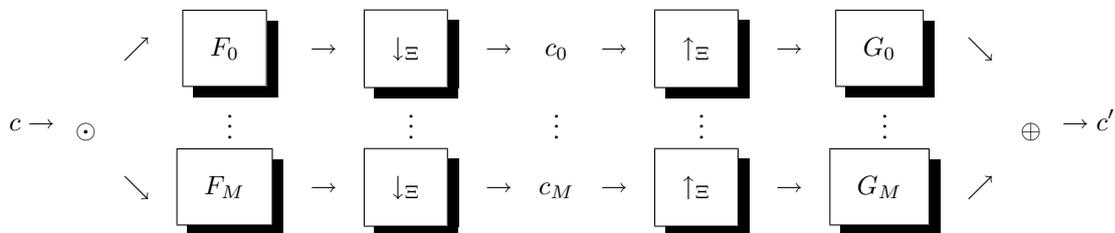
$$\sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} \tau^{\epsilon} \uparrow_{\Xi} \downarrow_{\Xi} \tau^{\epsilon} = I, \tag{5.18}$$

was auch schon die gesamte Mathematik hinter dem sogenannten lazy Filter ist.

Übung 5.1 Verifizieren Sie (5.18). ◇

5.4 Filterbänke im Symbolkalkül

Mit $M = |\det \Xi| - 1$ nimmt unsere Filterbank also nun die „finale“ Gestalt



an. Es gibt nun einen einfachen Weg, eine Filterbank mit perfekter Rekonstruktion zu bauen, nämlich den *lazy Filter* mit¹⁶³

$$F_{\epsilon} = G_{\epsilon} = \tau^{\epsilon}, \quad \epsilon \in E_{\Xi},$$

die perfekte Rekonstruktion folgt dann sofort aus (5.18). Allerdings ist dieses Kojzept nicht besonders aufregend, schliesslich zerlegen wir das Signal bezüglich seiner Parität (relativ zu Ξ) und setzen es dann einfach wieder zusammen. Um uns schön langsam

¹⁶²Also als Einschränkung auf die Äquivalenzklasse zu $\epsilon = 0$ in $\mathbb{Z}^s / \Xi\mathbb{Z}^s$.

¹⁶³Es empfiehlt sich, die Filter „natürlich“ zu indizieren, also mit Elementen aus E_{Ξ} .

an die Frage annähern zu können, wann denn nun eine Filterbank auf nichttriviale Art und Weise perfekte Rekonstruktion beherrscht, sollten wir als nächstes die Aktion der Filterbank algebraisieren, wozu es sich empfiehlt, mit dem Up- und Downsampling anzufangen. Doch bevor wir das tun können, brauchen wir noch ein wenig Notation. Ist $\Theta \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ eine Ganzzahlmatrix, so können wir diese als Zeilenvektor ihrer Spalten schreiben,

$$\mathbb{Z}^{s \times s} \ni \Theta = [\theta_1 \dots \theta_s], \quad \theta_j \in \mathbb{Z}^s, \quad j = 1, \dots, s.$$

Jede dieser Spalten können wir nun wieder als *Multiindex* auffassen, so daß dann $z^{\theta_j} = z_1^{\theta_{j1}} \dots z_s^{\theta_{js}} \in \mathbb{C}$ wohdefiniert ist. Schreiben wir das dann noch als $(z^\Theta)_j = z^{\theta_j}$, dann ist $z^\Theta \in \mathbb{C}^s$ auch schon definiert und konsistent mit unserer bisherigen Notation. Ausserdem verwenden wir noch für¹⁶⁴ $z z'$, das *Hadamard-Produkt*

$$z z' := (z_1 z'_1, \dots, z_s z'_s) \in \mathbb{C}^s, \quad z, z' \in \mathbb{C}^s.$$

Und schon können wir die Sampling-Operatoren im Symbolkalkül beschreiben.

Lemma 5.20 (Up- & Downsampling) Für $c \in \ell(\mathbb{Z}^s)$ ist

$$(\uparrow_{\Xi} c)^\sharp(z) = c^\sharp(z^\Xi), \quad (5.19)$$

$$(\downarrow_{\Xi} c)^\sharp(z^\Xi) = \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} c^\sharp(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z). \quad (5.20)$$

Beweis: (5.19) folgt sofort wegen

$$\begin{aligned} (\uparrow_{\Xi} c)^\sharp(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \uparrow_{\Xi} c(\alpha) z^\alpha = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \underbrace{\uparrow_{\Xi} c(\epsilon + \Xi \alpha)}_{=\delta(\epsilon)c(\alpha)} z^{\epsilon + \Xi \alpha} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \underbrace{z^{\Xi \alpha}}_{=(z^\Xi)^\alpha} = c^\sharp(z^\Xi). \end{aligned}$$

Um die Rechnung umzudrehen verwenden wir die Fourier-Dualität (5.14):

$$\begin{aligned} (\downarrow_{\Xi} c)^\sharp(z^\Xi) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\Xi \alpha) z^{\Xi \alpha} = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \delta(\epsilon) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\epsilon + \Xi \alpha) z^{\epsilon + \Xi \alpha} \\ &= \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\epsilon + \Xi \alpha) z^{\epsilon + \Xi \alpha} \\ &= \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \underbrace{e^{2\pi i (\Xi \alpha)^T \Xi^{-T} \epsilon'}}_{=e^{2\pi i \alpha^T \epsilon'}=1} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} c(\epsilon + \Xi \alpha) z^{\epsilon + \Xi \alpha} \end{aligned}$$

¹⁶⁴Also **ohne** Transposition eines der beiden Argumente.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} \sum_{\epsilon \in E'_{\Xi}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i(\epsilon + \Xi\alpha)^T \Xi^{-T} \epsilon'} c(\epsilon + \Xi\alpha) z^{\epsilon + \Xi\alpha} \\
&= \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E'_{\Xi}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} e^{2\pi i\alpha^T \Xi^{-T} \epsilon'} c(\alpha) z^{\alpha} = \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E'_{\Xi}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \left(e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right)^{\alpha} \\
&= \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon' \in E'_{\Xi}} c^{\#} \left(e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right),
\end{aligned}$$

was genau (5.20) ist. \square

Bemerkung 5.21 Die komischen Zahlen $z_{\epsilon'} e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'}$, $\epsilon' \in E'_{\Xi}$, aus (5.20) sollten wir uns noch ein wenig genauer ansehen.

1. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall, $s = 1$ und $\Xi = 2$. Dann ist $E'_{\Xi} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ und die beiden Zahlen sind $e^{\pi\epsilon'} = \pm 1$.
2. Wird man ein wenig allgemeiner und geht zu $s = 1$ und $\Xi = n$ über, dann ist $E'_{\Xi} = \mathbb{Z}_n$ und die zugehörigen Werte $\{e^{2\pi i k/n} : k \in \mathbb{Z}_n\}$ sind gerade die gleichmäßig über den Einheitskreis verteilten Potenzen der n -ten Einheitswurzel.

Einheitswurzeln sind ja auch eigentlich nichts anderes als Vorzeichen und genau das ist die generelle Rolle dieser Zahlen. Ist nämlich ξ_j eine Spalte von Ξ , so ist

$$\left(e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} \right)^{\xi_j} = e^{2\pi i\xi_j^T \Xi^{-T} \epsilon'}$$

und damit

$$z_{\epsilon'}^{\Xi} = e^{2\pi i\Xi^T \Xi^{-T} \epsilon'} = e^{2\pi i\epsilon'} = [1 \dots 1] =: \mathbf{1},$$

da $\epsilon' \in \mathbb{Z}^s$. Anders gesagt:

Die Vektoren $z_{\epsilon'} \in \mathbb{C}^s$ sind Ξ -te Einheitswurzeln¹⁶⁵!

Damit können wir uns an die Beschreibung der Filterbank machen. Für den Analyseteil numerieren wir die Filter nun als F_{ϵ} , $\epsilon \in E_{\Xi}$, was die Philosophie widerspiegelt, daß die Anzahl der Filter dem Ausdünnungsfaktor $\#E_{\Xi} = |\det \Xi|$ entsprechen sollte. Ein Zweig der Analyse-Filterbank ist dann von der Form $\downarrow_{\Xi} F_{\epsilon}$ und hat das Symbol

$$\begin{aligned}
(\downarrow_{\Xi} F_{\epsilon} c)^{\#} (z^{\Xi}) &= \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon' \in E'_{\Xi}} (F_{\epsilon} c)^{\#} \left(e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right) \\
&= \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon' \in E'_{\Xi}} f_{\epsilon}^{\#} \left(e^{-2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right) c^{\#} \left(e^{-2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right) \\
&= \frac{1}{|\det \Xi|} \left[f_{\epsilon}^{\#} \left(e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \epsilon' \in E'_{\Xi} \right]^T \left[c^{\#} \left(e^{2\pi i\Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \epsilon' \in E'_{\Xi} \right].
\end{aligned}$$

¹⁶⁵Wer also schon immer mal **matrixabhängige** Einheitswurzeln sehen wollte, muss nur multivariate Filterbänke machen, da tauchen sie ganz natürlich auf.

Schreiben wir nun die $c_\epsilon = \downarrow_{\Xi} F_\epsilon$ in einen Vektor, so können wir die Operation der Analyse–Filterbank kompakt als ein Matrixprodukt schreiben:

$$\begin{aligned} & [c_\epsilon^\sharp(z^\Xi) : \epsilon \in E_\Xi] \\ &= \frac{1}{|\det \Xi|} \left[f_\epsilon^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \begin{array}{l} \epsilon \in E_\Xi \\ \epsilon' \in E'_\Xi \end{array} \right] \left[c_\epsilon^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \epsilon' \in E'_\Xi \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die Bestandteile von (5.21) verdienen einen eigenen Namen.

Definition 5.22 (Polyphase & Modulation)

1. Die Polyphase–Darstellung bzw. der Polyphase–Vektor zu einem Signal $c \in \ell(\mathbb{Z}^s)$ ist definiert als

$$p_c(z) := \left[c_\epsilon^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \epsilon' \in E'_\Xi \right]. \quad (5.22)$$

2. Die Modulationsmatrix einer Analyse–Filterbank $F = [F_\epsilon : \epsilon \in E_\Xi]$ ist

$$F(z) := \frac{1}{|\det \Xi|} \left[f_\epsilon^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \begin{array}{l} \epsilon \in E_\Xi \\ \epsilon' \in E'_\Xi \end{array} \right]. \quad (5.23)$$

3. Damit ist dann also

$$\mathbf{c}^\sharp(z^\Xi) := [c_\epsilon^\sharp(z^\Xi) : \epsilon \in E_\Xi] = F(z) p_c(z) \quad (5.24)$$

Die Synthese–Filterbank im Symbolkalkül ist schon fast zu einfach, denn sie ergibt sich nach (5.19) als

$$d^\sharp(z) = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} (G_\epsilon \uparrow_{\Xi} c_\epsilon)^\sharp(z) = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} g_\epsilon^\sharp(z) c_\epsilon^\sharp(z^\Xi)$$

und praktischerweise liefert ja die Analyse–Filterbank auch gerade den hierfür benötigten Vektor $\mathbf{c}^\sharp(z^\Xi)$. Da (5.24) aber einen Polyphase–Vektor als Eingabe will und verwendet hat, schreiben wir den Rückgabewert $d = c'$ auch in dieser Form und erhalten so für $\epsilon' \in E'_\Xi$

$$\begin{aligned} (p_d(z))_{\epsilon'} &= d^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} g_\epsilon^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) c_\epsilon^\sharp \left(\underbrace{e^{2\pi i \Xi^T \Xi^{-T} \epsilon'} z^\Xi}_{=1} \right) \\ &= \left(\left[g_\epsilon^\sharp \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \begin{array}{l} \epsilon' \in E'_\Xi \\ \epsilon \in E_\Xi \end{array} \right] \mathbf{c} \left(z^\Xi \right) \right)_{\epsilon'} \end{aligned}$$

und damit

$$p_{c'}(z) = |\det \Xi| G(z)^T \mathbf{c} \left(z^\Xi \right), \quad (5.25)$$

jetzt mit der Modulationsmatrix zu $G = [g_\epsilon : \epsilon \in E_\Xi]$. Und damit sind wir auch schon am Etappenziel und können perfekte Rekonstruktion über die Modulationsmatrizen von Analyse und Synthese beschreiben.

Satz 5.23 (Perfekte Rekonstruktion) *Eine Filterbank besitzt genau dann perfekte Rekonstruktion, wenn*

$$G^T(z) F(z) = \frac{1}{|\det \Xi|} I. \quad (5.26)$$

Zu einer gegebenen Analyse–Filterbank kann man also eine passende Synthese immer als $G(z) = F^{-T}(z)$ bauen, sie ist also vervollständigbar, wenn $F(z)$ eine Inverse im Ring der Laurentpolynome hat. Und das hatten wir ja schon in Satz 5.11, so daß wir die folgende Beobachtung machen können.

Korollar 5.24 (Ergänzung) *Eine Analyse–Filterbank F bzw. eine Synthese–Filterbank G kann genau dann zu einer Filterbank mit perfekter Rekonstruktion komplettiert werden, wenn $F(z)$ bzw. $G(z)$ unimodular ist.*

Mit anderen Worten: Genau dann, wenn $F(z)$ eine unimodulare Matrix in $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^{s \times s} =: \Lambda^{s \times s}$ ist, gibt es eine komplettierende zweite Hälfte der Filterbank $G(z) = F^{-T}(z)$, so daß die Gesamtfilterbank perfekte Rekonstruktion liefert. Wir müssen also „nur“ invertieren, was im schlimmsten Fall mit der Cramerschen Regel¹⁶⁶ möglich ist. Allerdings sagt uns a priori erst einmal niemand, daß F^{-T} auch wieder die Struktur (5.23) eine Modulationsmatrix hat.

Proposition 5.25 (Inverse von Modulationsmatrizen) *Ist $F \in \Lambda^{s \times s}$ unimodular, so gibt es $g_\epsilon \in \Lambda$, $\epsilon \in E_\Xi$, so daß*

$$F^{-1}(z) = \left[g_\epsilon^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) : \begin{array}{l} \epsilon' \in E'_\Xi \\ \epsilon \in E_\Xi \end{array} \right]. \quad (5.27)$$

Beweis: Wir definieren $g_\epsilon^\#(z) := (F^{-1}(z))_{0,\epsilon}$ und bemerken, daß¹⁶⁷

$$\delta_{0,\epsilon'} = (F^{-1}(z) F(z))_{0,\epsilon'} = \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} g_\epsilon^\#(z) f_\epsilon^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right), \quad \epsilon' \in E'_\Xi. \quad (5.28)$$

Setzen wir nun in (5.28) $\epsilon' = 0$ und ersetzen z durch $e^{2\pi i \Xi^{-T} \eta'} z$ für ein $\eta' \in E'_\Xi$, dann ist

$$1 = \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} g_\epsilon^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \eta'} z \right) f_\epsilon^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \eta'} z \right) = (G^T(z) F(z))_{\eta', \eta'}. \quad (5.29)$$

¹⁶⁶Symbolisches Invertieren, also Invertieren einer Matrix in einem (Laurent)–Polynomring ist wieder eine Sache für sich, bei der einem die Cramersche Regel plötzlich sogar sehr einfach und möglicherweise effizient vorkommt, zumal ja nur durch eine Einheit zu teilen ist.

¹⁶⁷Zur Notation: $F^{-1} F \in \mathbb{C}^{E'_\Xi \times E'_\Xi}$ ist eine mit ϵ' indizierte Einheitsmatrix.

Derselbe Trick mit $\epsilon' \neq 0$ liefert

$$0 = \frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} g_{\epsilon}^{\#} \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \eta'} z \right) f_{\epsilon}^{\#} \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} (\epsilon' + \eta')} z \right) = (G^T(z) F(z))_{\eta', \epsilon' + \eta'}, \quad (5.30)$$

und da $\{\eta' + \epsilon' : \epsilon' \neq 0\} = E'_{\Xi} \setminus \{\eta'\}$ ist, zumindest modulo Ξ , können wir (5.29) und (5.30) zu

$$\delta_{\epsilon', \eta'} = (G^T(z) F(z))_{\epsilon', \eta'}, \quad \text{d.h.,} \quad G(z) = F^{-T}(z)$$

zusammenfassen und da die Inverse einer Matrix eindeutig ist, hat F^{-T} in der Tat die Gestalt einer Modulationsmatrix. \square

5.5 Tiefpass, Subdivision & Interpolation

Wir wissen jetzt also, daß zu einer gute Filterbank eine unimodulare Modulationsmatrix gehört, also eine Eigenschaft im Zusammenspiel der einzelnen Filter. Um uns wieder an Wavelets anzunähern, schränken wir nun die Menge der möglichen Filterbänke bzw. der darin enthaltenen Filter ein klein wenig ein. Dazu zuerst zwei besondere Typen von Filtern.

Definition 5.26 *Ein Filter F heißt Hochpassfilter, wenn $F1 = 0$ ist und Tiefpassfilter, wenn $F1 = 1$ ist.*

Die Namen erklären sich dadurch, daß das konstante Signal $c = 1 \in \ell_{\infty}(\mathbb{Z}^s)$ die niedrigstmögliche Frequenz 0 hat, so daß ein Tiefpassfilter dieses Signal niedrigster Frequenz unverändert durchläßt, ein Hochpassfilter hingegen sperrt. Allerdings interessieren wir uns in unserer Filterbank nicht für die Filter $F_{\epsilon}, G_{\epsilon}$ an sich, sondern für die Kombinationen $\check{F}_{\epsilon} := \downarrow_{\Xi} F_{\epsilon}$ und $\check{G}_{\epsilon} := G_{\epsilon} \uparrow_{\Xi}$. Und nun eine wichtige **Konvention**:

Die Filter \check{F}_0 und \check{G}_0 sollen *Tiefpassfilter* sein, alle anderen $\check{F}_{\epsilon}, \check{G}_{\epsilon}, \epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}$ hingegen *Hochpassfilter*.

Betrachten wir einmal die Wirkung des Synthese–Tiefpassfilters auf ein Signal $c \in \ell(\mathbb{Z}^s)$:

$$\begin{aligned} \check{G}_0 c &= G_0 \uparrow_{\Xi} c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_0(\cdot - \alpha) (\uparrow_{\Xi} c)(\alpha) \\ &= \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_0(\cdot - (\epsilon + \Xi\alpha)) \underbrace{(\uparrow_{\Xi} c)(\epsilon + \Xi\alpha)}_{=\delta(\epsilon) c(\alpha)}, \end{aligned}$$

also

$$\check{G}_0 c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_0(\cdot - \Xi\alpha) c(\alpha). \quad (5.31)$$

Und dieser Typ von Operatoren ist nun wieder wohlbekannt, (Cavaretta *et al.*, 1991).

Definition 5.27 Der (stationäre) Subdivision–Operator S_a zur Maske $a \in \ell_{00}(\mathbb{Z}^s)$ und zur Dilatation¹⁶⁸ $\Xi \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ ist definiert als

$$S_a c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi \alpha) c(\alpha). \quad (5.32)$$

Was hat das nun mit „Subdivision“, also „Unterteilung“ zu tun? Um das etwas klarer zu erkennen, sehen wir uns für $\epsilon \in E_{\Xi}$

$$S_a c(\epsilon + \Xi \cdot) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\epsilon + \Xi(\cdot - \alpha)) c(\alpha) = a_{\epsilon} * c, \quad a_{\epsilon} := a(\epsilon + \Xi \cdot),$$

an. Das heisst, auf jeder Restklasse in $\mathbb{Z}^s / \Xi \mathbb{Z}^s$ bildet der Operator Werte durch eine Filterung, deren Impulsantwort die *Submaske* a^{ϵ} ist. Betrachten wir $S_a c$ als Funktion auf dem feineren Gitter $\Xi^{-1} \mathbb{Z}^s \supset \mathbb{Z}^s$, also $S_a c(\alpha) = f(\Xi^{-1} \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^s$, dann können wir den Prozess auch als eine restklassenweise *Verfeinerung* der Daten c auffassen¹⁶⁹. Dabei ist jedes a^{ϵ} ein separater Filter für die jeweilige Restklasse, a_0 ist dabei zuständig für die „Ersetzung“ der bestehenden Werte, die anderen a_{ϵ} , $\epsilon \neq 0$, geben hingegen vor, wie Werte einzufügen sind. Aber dazu spater mehr, jetzt erst mal eine einfache Beobachtung.

Lemma 5.28 Der Filter \check{G}_0 ist genau dann ein Tiefpassfilter, wenn

$$1 = g_{0,\epsilon} * 1 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_0(\epsilon + \Xi \alpha), \quad \epsilon \in E_{\Xi}. \quad (5.33)$$

Beweis: \check{G}_0 ist genau dann ein Tiefpassfilter, wenn

$$1 = 1(\epsilon + \Xi \alpha) = \check{G}_0 1 = (g_{0,\epsilon} * 1)(\alpha), \quad \epsilon \in E_{\Xi}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^s,$$

ist. □

Wir haben bereits bemerkt, daß der Filter a^0 eines Subdivision–Schemas eine besondere Rolle spielt, denn er regelt ob und wodurch die Werte $c(\alpha)$ beim Übergang zu $S_a c(\Xi \alpha) = f(\alpha)$ ersetzt werden. In der einfachsten Form übernimmt man einfach diese Werte, das heisst

$$S_a c(\Xi \cdot) = c \quad \text{oder} \quad a_0 = \delta. \quad (5.34)$$

Einen solchen Subdivision–Operator bezeichnet man als *interpolatorisch*.

Proposition 5.29 Ein Subdivision–Operator ist genau dann interpolatorisch, wenn

$$\frac{1}{|\det \Xi|} \sum_{\epsilon' \in E'_{\Xi}} a^{\#} \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z \right) = 1. \quad (5.35)$$

¹⁶⁸Wir verwenden „Dilatation“ ab sofort als gelegentliches Synonym für „expandierende Matrix“.

¹⁶⁹Den wir später iterieren werden, um dann in der Grenze Funktionen zu generieren.

Beweis: Zuerst berechnen wir

$$a^\sharp(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) z^\alpha = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\epsilon + \Xi\alpha) z^{\epsilon + \Xi\alpha} = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} z^\epsilon \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_\epsilon(\alpha) z^{\Xi\alpha},$$

also

$$a^\sharp(z) = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} z^\epsilon a_\epsilon^\sharp(z^\Xi) \quad (5.36)$$

Damit ist dann, wieder einmal unter Verwendung der Dualität (5.14)

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} a^\sharp\left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z\right) &= \sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z\right)^\epsilon a_\epsilon^\sharp\left(\left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'} z\right)^\Xi\right) \\ &= \sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} z^\epsilon a_\epsilon^\sharp\left(e^{2\pi i \Xi \Xi^{-T} \epsilon'} z^\Xi\right) \\ &= \sum_{\epsilon \in E_\Xi} z^\epsilon a_\epsilon^\sharp\left(\underbrace{e^{2\pi i \epsilon'}}_{=1} z^\Xi\right) \underbrace{\sum_{\epsilon' \in E'_\Xi} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'}}_{=|\det \Xi| \delta(\epsilon)} = |\det \Xi| a_0^\sharp(z^\Xi). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: (5.35) ist genau dann erfüllt, wenn $a_0^\sharp \equiv 1 \equiv \delta^\sharp$, d.h. $a_0 = \delta$ ist, also genau dann, wenn S_a interpolatorisch ist. \square

5.6 Interpolation & perfekte Rekonstruktion

Benutzt man einen interpolatorischen *Synthese-Tiefpass*, also einen Filter \check{G}_0 , dessen Impulsantwort (5.33) und (5.35) erfüllt, dann kann man sehr einfach Filterbänke mit perfekter Rekonstruktion konstruieren. Das geht auf zwei Arten, einmal eher intuitiv-konstruktiv¹⁷⁰ und dann recht elegant mit dem bisher hergeleiteten Formalismus. Doch zuerst zur Intuition.

Wir beginnen mit dem Downsampling des Signals, setzen $c_0 = \downarrow_\Xi c$, was nichts anderes als $f_0 = \delta$ bedeutet. Aus diesem reduzierten Signal c_0 versuchen wir nun, mittels unseres *interpolatorischen* Filters g_0 das Signal zu rekonstruieren und berechnen zu diesem Zweck

$$S_{g_0} c_0 = S_{g_0} \downarrow_\Xi c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_0(\cdot - \Xi\alpha) c(\Xi\alpha).$$

Da \check{G}_0 interpolatorisch ist, ist $S_{g_0} c_0|_{\Xi\mathbb{Z}^s} = c|_{\Xi\mathbb{Z}^s}$ auf den anderen Äquivalenzklassen muss das aber nicht stimmen. Diese Fehler merken wir uns, indem wir

$$d_\epsilon = \downarrow_\Xi \tau_\epsilon (c - S_{g_0} c_0) = \downarrow_\Xi \tau_\epsilon (I - G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi) c, \quad \epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\},$$

¹⁷⁰Und die Idee ist auch noch sehr alt, siehe (Faber, 1909).

bestimmen, was uns die *Analyse-Filter*¹⁷¹

$$F_\epsilon = \begin{cases} \delta, & \epsilon = 0, \\ \tau_\epsilon (I - G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi), & \epsilon \neq 0, \end{cases} \quad \epsilon \in E_\Xi, \quad (5.37)$$

liefert. Bei der Synthese ergänzen wir die *Vorhersage* bzw. *Prediction* $S_{g_0} c_0$ dann um die jeweilige *Korrektur* bzw. *Correction* d_ϵ , $\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}$, die wir nur nach dem Up-sampling an die richtige Stelle schieben müssen. Damit sind die *Synthese-Filter* auch leicht hingeschrieben:

$$G_\epsilon = \tau_\epsilon, \quad \epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}. \quad (5.38)$$

Die einzige Unbekannte in unserer Konstruktion ist dann also der interpolatorische Synthese-Tiefpass G_0 , auf dessen Basis wir die gesamte Filterbank konstruieren können. Anschaulich ist klar, daß diese Konstruktion ja nichts anderes macht, als sich die Fehler zu merken und diese wieder zu korrigieren, daher ist die folgenden Aussage keine Überraschung.

Satz 5.30 *Die durch (5.37) und (5.38) definierten Filter ergeben eine Filterbank mit perfekter Rekonstruktion.*

Beweis: Natürlich gönnen wir uns auch einen formalen Beweis, aber der ist auch nicht schwer:

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon \in E_\Xi} G_\epsilon \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi F_\epsilon &= G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi F_0 + \sum_{\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}} G_\epsilon \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi F_\epsilon \\ &= G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi + \underbrace{\sum_{\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}} \tau_\epsilon \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi \tau_\epsilon (I - G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi)}_{=I} = G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi + (I - G_0 \uparrow_\Xi \downarrow_\Xi) \\ &= I. \end{aligned}$$

□

Das war's dann auch schon zum *Predition-Correction*-Kontext. Und weil das alles so einfach und einleuchtend war, um nicht zu sagen zu konstruktiv, sehen wir uns das nochmal algebraisch an, jetzt aber auf der Synthese-Seite der Filterbank. Dazu verwenden wir nochmal die Formel (5.36) für die Subsymbole von g_0^\sharp ,

$$g_0^\sharp(z) = \underbrace{g_{0,\epsilon}^\sharp(z^\Xi)}_{=\delta^\sharp(z^\Xi)=1} + \sum_{\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}} z^\epsilon g_{0,\epsilon}^\sharp(z^\Xi) = 1 + \sum_{\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}} z^\epsilon g_{0,\epsilon}^\sharp(z^\Xi)$$

¹⁷¹In den F_ϵ ist das Downsampling noch **nicht** enthalten.

und erhalten damit für $\epsilon' \in E'_\Xi$, daß

$$\begin{aligned} g_0^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon' z} \right) &= 1 + \sum_{\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}} \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon' z} \right)^\epsilon g_{0,\epsilon}^\# \left(\underbrace{e^{2\pi i \Xi^T \Xi^{-T} \epsilon'}_{=1} z^\Xi \right) \\ &= 1 + \sum_{\epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} z^\epsilon g_{0,\epsilon}^\# (z^\Xi). \end{aligned}$$

Das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Zusammenhangs, den wir schon festhalten sollten.

Lemma 5.31 *Zwischen den Polyphase-Vektoren und den Subsymbolen eines Filters F besteht die Beziehung*

$$\left[f^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon' z} \right) : \epsilon' \in E'_\Xi \right] = F_\Xi^T D_\Xi(z) \left[f_\epsilon^\# (z^\Xi) \right], \quad (5.39)$$

wobei $D_\Xi(z) := \text{diag} [z^\epsilon : \epsilon \in E_\Xi]$. Die Kopplungsmatrix $F_\Xi^T D_\Xi(z)$ ist unimodular über Λ .

Beweis: Die allgemeine Form der gerade durchgeführten Rechnung ist, für $\epsilon' \in E'_\Xi$,

$$\begin{aligned} f^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon' z} \right) &= \sum_{\epsilon \in E_\Xi} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} z^\epsilon f_\epsilon^\# (z^\Xi) \\ &= \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \underbrace{e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'}}_{=(F_\Xi^T)_{\epsilon',\epsilon}} (D_\Xi(z) [f_\epsilon^\# (z^\Xi)])_\epsilon = (F_\Xi^T D_\Xi(z) [f_\epsilon^\# (z^\Xi)])_{\epsilon'}. \end{aligned}$$

Die Unimodularität ist offensichtlich. \square

Mit Lemma 5.31 ist die Vervollständigung eines interpolatorischen Synthesefilters nun ganz einfach: In diesem Fall ist ja $g_{0,0}^\# (z^\Xi) = 1$ und die (Block-)Matrix

$$\tilde{G}(z) := \left[\begin{array}{c|c} g_{0,0}^\# (z^\Xi) & [g_{0,\epsilon}^\# (z^\Xi) : \epsilon \neq 0] \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & [g_{0,\epsilon}^\# (z^\Xi) : \epsilon \neq 0] \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (5.40)$$

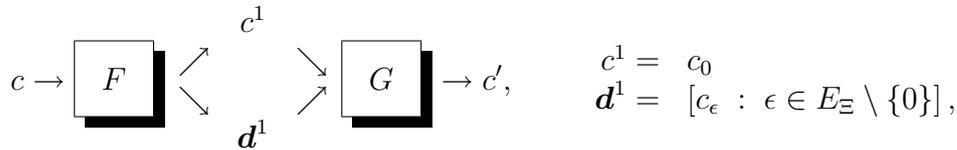
ist offensichtlich unimodular, so daß die Polyphase-Matrix

$$G(z) = F_\Xi^T D_\Xi(z) \tilde{G}(z) = \left[\begin{array}{c|c} g_0^\# \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon' z} \right) : \epsilon' \in E'_\Xi \\ \hline \left(e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon' z} \right)^\epsilon : \epsilon \neq 0 \\ \hline \epsilon' \in E'_\Xi \end{array} \right],$$

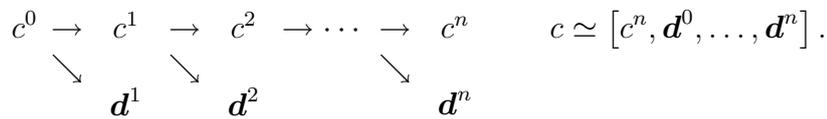
die im übrigen der Wahl $G_\epsilon = \tau_{-\epsilon}$ entspricht, ebenfalls unimodular ist und damit die Filterbank komplettiert werden kann. Man sieht sehr schön, daß die „natürliche“ Wahl der Prediction-Correction-Methode zur Vervollständigung eines interpolatorischen Synthese-Tiefpasses bei weitem nicht die einzige Möglichkeit darstellt, denn wir können die Einheitsmatrix I in (5.40) durch jede beliebige unimodulare Matrix aus $\Lambda^{|\det \Xi|^{-1} \times |\det \Xi|^{-1}}$ ersetzen und erhalten immer noch ein unimodulares \tilde{G} und damit auch G .

5.7 Kaskaden & Pyramiden

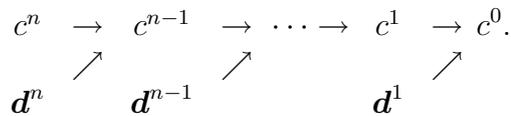
Wir betrachten jetzt die Filterbank in einer vereinfachten Form, nämlich



wobei, gemäß unserer Konvention¹⁷² c^1 der *Tiefpassanteil*, \mathbf{d}^1 der *Hochpassanteil* von c ist und eine Filterbank mit perfekter Rekonstruktion ausserdem $c' = c$ gewährleistet. Ausserdem sorgt das Downsampling dafür, daß sich der Informationsanteil von c^1 zu dem in \mathbf{d}^1 wie $1 : |\det \Xi| - 1$ verhält. Das Signal c^1 hat nun aber wieder dieselbe Struktur wie $c^0 = c$ und kann daher ebenfalls mit Hilfe der Filterbank zerlegt werden, diesmal in c^2 und \mathbf{d}^2 . Und diesen Prozess kann man natürlich beliebig oft oder, wie der Mathematiker sagt, n -mal iterieren und erhält so die Zerlegung



Besitzt die Filterbank perfekte Rekonstruktion, so kann man aus diesen Informationen c auch wieder rekonstruieren, indem man den Prozess einfach umkehrt:



Auf diese Art und Weise definiert jede perfekt rekonstruierende Filterbank eine umkehrbare Transformation

$$c \leftrightarrow [c^n, \mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^n], \tag{5.41}$$

die man als *diskrete Wavelettransformation* oder *Pyramidenschema* bezeichnet. Der Name „Pyramidenschema“ rührt daher, daß \mathbf{d}^j im wesentlichen $\left(\frac{|\det \Xi| - 1}{|\det \Xi|}\right)^j$ des Informationsgehalts von c enthält¹⁷³ und wenn man diese Vektoren nun übereinanderstapelt und oben noch c^n draufsetzt, das mit $|\det \Xi|^{-n}$ ja noch kleiner ist, dann erhält man eben eine schöne geometrische Pyramide, siehe Abb 5.1.

So weit ist das alles ganz schön und allgemein und jede Filterbank mit perfekter Rekonstruktion liefert eine umkehrbare Zerlegung im Sinne von (5.41). Man bräuchte noch nicht einmal echte Hoch- und Tiefpassfilter, man könnte einfach E_Ξ in zwei

¹⁷²Und die gilt immer noch und auch weiterhin!

¹⁷³Man braucht sich nur vorzustellen, das Signal c hätte endlichen Träger, dann hat jedes c_ϵ bis auf „Verschmierungseffekte“ durch die Filterlängen (daher auch „im wesentlichen“) einen durch $1/|\det \Xi|$ skalierten Träger.

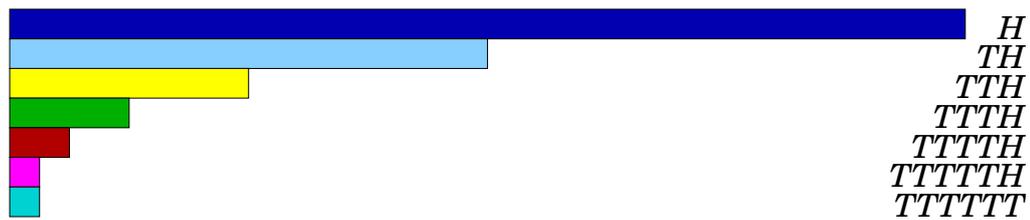


Abbildung 5.1: Die Pyramide (linksbündig und im Kopfstand) für den allereinfachsten Fall $s = 1$ und $\Xi = 2$. H und T indizieren die Anwendung von Hoch- bzw. Tiefpass.

disjunkte Teilmengen $H_{\Xi} \cup L_{\Xi} = E_{\Xi}$, $H_{\Xi} \cap L_{\Xi} = \emptyset$ zerlegen und dann die Filterbank-Kaskade auf alle Signalanteile c_{ϵ} , $\epsilon \in L_{\Xi}$, anwenden¹⁷⁴, die Transformation funktioniert nach wie vor. Der **Nachteil** einer solch allgemeinen Vorgehensweise besteht allerdings darin, daß wir kaum eine **Interpretation** dieser Zerlegung geben können. Das ist, wie wir gleich sehen werden, anders, wenn wir \check{G}_0 als Tiefpassfilter wählen, denn dann gibt es eine Interpretation der Zerlegung in Funktionensinne. Und genau diesen Zusammenhang wollen wir im nächsten Abschnitt herstellen.

¹⁷⁴Ist $L_{\Xi} = E_{\Xi}$, wird also alles weiterzerlegt, so spricht man von *Wavelet-Packages*, siehe (Mallat, 1999).

The equations narrowed [...] until they became just a few expressions that appeared to move and sparkle with a life of their own. This was maths without numbers, pure as lightning.

T. Pratchett, *Men at arms*

Verfeinerbare Funktionen, Subdivision und Wavelets

6

Den *Subdivision-Operator* haben wir ja bereits in (5.32) kennengelernt, wo wir auch gesagt haben, daß das so generierte Signal $c^1 = S_a c$ eigentlich dem **verfeinerten** Gitter $\Xi^{-1}\mathbb{Z}^s$ zugerechnet werden müsste. Iteriert man den Subdivision-Operator, dann erhält man eine Folge

$$c^n = S_a^n c \simeq f(\Xi^{-n}\cdot), \quad n \in \mathbb{N},$$

von „Funktionswerten“ auf der Folge $\Xi^{-n}\mathbb{Z}^s$ von immer feineren Gittern mit immer dichteren Punkten, die \mathbb{R}^s immer besser annähern. Anders gesagt: Die Folge c^n konvergiert in diesem Sinne möglicherweise gegen eine Grenzfunktion f , die stetig, integrierbar oder was auch immer sein kann.

6.1 Subdivision & Konvergenz

Hier wollen wir uns die Frage beantworten, wann das *Subdivision-Schema*, das die Folge $c^n = S_a^n c$, $n \in \mathbb{N}$, generiert, gegen eine Funktion konvergiert. Doch zu diesem Zweck sollten wir erst einmal unseren Konvergenzbegriff konkretisieren.

Definition 6.1 *Der Subdivision-Operator definiert ein konvergentes Subdivision-Schema in, wenn es zu jedem $c \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^s)$ eine Funktion $f \in C_u(\mathbb{R}^s)$ gibt, so daß*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} |S_a^n c(\alpha) - f_c(\Xi^{-n}\alpha)| = 0 \quad (6.1)$$

ist und $f_c \neq 0$ für mindestens ein c gilt.

Die Iterierten Subdivision–Operatoren kann man auch explizit anders schreiben, nämlich als¹⁷⁵

$$\begin{aligned}
S_a^1 c &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi \alpha) c(\alpha) \\
S_a^2 c &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi \alpha) S_a^1 c(\alpha) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi \alpha) a(\alpha - \Xi \beta) c(\beta) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi \alpha - \Xi^2 \beta) a(\alpha)}_{=S_a a(\cdot - \Xi^2 \beta) = S_a^2 \delta(\cdot - \Xi^2 \beta)} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} \underbrace{S_a a(\cdot - \Xi^2 \beta)}_{=: a^2(\cdot - \Xi^2 \beta)} c(\beta) \\
S_a^{n+1} c &= S_a^n S_a c = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^s} a^n(\cdot - \Xi^n \alpha) a(\alpha - \Xi \beta) c(\beta) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a^n(\cdot - \Xi^n \alpha - \Xi^{n+1} \beta) a(\alpha)}_{=S_a^n a(\cdot - \Xi^{n+1} \beta) =: a^{n+1}(\cdot - \Xi^{n+1} \beta)} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a^{n+1}(\cdot - \Xi^{n+1} \beta) c(\beta),
\end{aligned}$$

also

$$S_a^n c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a^n(\cdot - \Xi^n \alpha) c(\alpha), \quad a^n = S_a^{n-1} a = S_a^n \delta. \quad (6.2)$$

Das könnten wir auch als eine Faltung nach n -fachem Upsampling ansehen.

Für alles, was nun folgt, brauchen wir wieder einmal eine Standardannahme:

Die *Maske* a des Subdivision–Operators hat **endlichen Träger**¹⁷⁶, d.h., $a \in \ell_{00}(\mathbb{Z}^s)$. Damit ist dann auch die *konvexe Hülle*

$$[\alpha \in \mathbb{Z}^s : a(\alpha) \neq 0]$$

ein kompaktes Polyeder in \mathbb{R}^s , ebenso wie ihre Symmetrisierung¹⁷⁷

$$\Omega_a := \{\epsilon x : x \in [\alpha : a(\alpha) \neq 0], \epsilon \in \{\pm 1\}^s\}.$$

Bemerkung 6.2 1. $C_u(\mathbb{R}^s)$ ist der Raum der gleichmäßig stetigen und gleichmäßig beschränkten Funktionen auf \mathbb{R}^s . Da \mathbb{R}^s nicht kompakt ist, sind natürlich nicht alle stetigen Funktionen auch gleichmäßig stetig.

2. Man könnte nun erwarten, daß man die Grenzfunktion in $C(\mathbb{R}^s)$ oder gar in $L_\infty(\mathbb{R}^s)$ fordern sollte. Daß dies nicht der Fall ist, folgt einmal aus der Gleichmäßig-

¹⁷⁵Wer genau hinsieht, findet darin eine Induktion versteckt.

¹⁷⁶Anders gesagt: a ist Impulsantwort eines FIR–Filters.

¹⁷⁷Für jeden Punkt x aus der konvexen Hülle nehmen wir auch ϵx , $\epsilon \in \{\pm 1\}^s$ dazu.

keit des Subdivision-Prozesses¹⁷⁸ und aus der Tatsache, daß L_∞ ein chronisch pathologischer Funktionenraum ist, mit dem man nicht wirklich vernünftig umgehen kann, siehe z.B. (Yosida, 1965).

3. Konvergenz von Subdivision-Schemata lässt sich auch auf anderen L_p -Räumen untersuchen, braucht aber etwas mehr Terminologie, die wir uns erst einmal sparen wollen. Die Charakterisierung der Konvergenz, so viel sei schon einmal gesagt, ist allerdings fast identisch.

Als erstes zwei einfach zu beweisende aber wichtige Folgerungen aus der Konvergenz des Subdivision-Schemas.

Proposition 6.3 Wenn das Subdivision-Schema konvergiert, dann

1. existiert eine fundamentale Grenzfunktion¹⁷⁹ $\phi \in C_{00}(\mathbb{R}^s)$ mit

$$f_c = c * \phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \phi(\cdot - \alpha), \quad c \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^s), \quad (6.3)$$

deren Träger in Ω_a enthalten ist.

2. ist die Grenzfunktion ϕ verfeinerbar, das heißt,

$$\phi = (a * \phi)(\Xi \cdot) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) \phi(\Xi \cdot - \alpha). \quad (6.4)$$

3. ist $\check{A} = S_a$ ein Tiefpassfilter, also $S_a 1 = 1$.

Beweis: Für 1) bemerken wir zuerst, daß für $c \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^s)$ und $d \in \ell_{00}(\mathbb{Z}^s)$ die Identität

$$\begin{aligned} S_a(d * c) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi\alpha) (d * c)(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi\alpha) d(\alpha - \beta) c(\beta) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\cdot - \Xi\alpha - \Xi\beta) d(\alpha) c(\beta)}_{S_a c(\cdot - \Xi\beta)} = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) S_a d(\cdot - \Xi\beta) \end{aligned}$$

gilt. Iterieren wir das, so erhalten wir mit (6.2)

$$S_a^n(d * c) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) \underbrace{S_a^n d(\cdot - \Xi^n \beta)}_{\simeq f_d(\Xi^{-n}(\cdot - \Xi^n \beta))} \rightarrow \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) f_d(\cdot - \beta)$$

¹⁷⁸Das Schema ist *stationär*, das heisst, was passiert hängt **nicht** davon ab, **wo** es passiert und deswegen kann die Grenzfunktion nicht in einem Bereich stetiger sein als in einem anderen.

¹⁷⁹Die Funktion ist stetig und hat kompakten Träger, also ist sie, ganz im Sinne von Definition 6.1, auch gleichmäßig stetig.

und brauchen nur noch $d = \delta$, also $\phi = \lim S_a^n \delta$ zu setzen und die Tatsache auszunutzen, daß δ eine Eins in der diskreten Faltungsalgebra ist¹⁸⁰. Für die Trägerbetrachtungen schreiben wir Ω^n für die konvexe Hülle des Trägers von $S_a^n \delta$ und halten erst einmal fest, daß $S_a^1 \delta = a$ ist, also $\Omega^1 = \Omega_a$. Nun ist aber ein $\alpha \in \mathbb{Z}^s$ nur dann in Ω^{n+1} , wenn es ein $\beta \in \Omega^n$ gibt, so daß $\alpha - \Xi\beta \in \Omega_a$ liegt, also

$$\alpha \in \Omega_a + \Xi\Omega^n = \Omega_a + \Xi(\Omega_a + \Xi\Omega_a^{n-1}) = \dots = \sum_{j=0}^n \Xi^j \Omega_a.$$

Nun entspricht so ein α aber der Stelle $\Xi^{-n-1}\alpha$, das heißt, die Näherung an die Funktion „lebt“ nur auf

$$\Xi^{-n-1} \left(\sum_{j=0}^n \Xi^j \Omega_a \right) = \sum_{j=1}^n \Xi^{n-j-1} \Omega_a \subseteq \Omega_a,$$

da Ξ eine Kontraktion ist¹⁸¹.

Um 2) zu beweisen, definieren wir den *Transition-Operator* T_a als

$$T_a f = (a * f)(\Xi \cdot) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) f(\Xi \cdot - \alpha), \quad f \in C_{00}(\mathbb{R}^s),$$

und stellen fest, daß¹⁸²

$$\begin{aligned} (S_a c * f)(\Xi \cdot) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} S_a c(\alpha) f(\Xi \cdot - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha - \Xi\beta) c(\beta) f(\Xi \cdot - \alpha) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) f(\Xi(\cdot - \beta) - \alpha)}_{=T_a f(\cdot - \beta)} = c * T_a f. \end{aligned}$$

Mit $c = \delta$ und $f = \phi$ ist dann

$$T_a \phi = (S_a \delta * \phi)(\Xi \cdot) = f_{S_a \delta}(\Xi \cdot),$$

also, für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^s$

$$|(T_a \phi - \phi)(\Xi^{-n} \alpha)| = \left| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\beta) \phi(\Xi^{-n+1}(\alpha - \Xi^{n-1} \beta)) - \phi(\Xi^{-n} \alpha) \right|$$

¹⁸⁰Womit Satz 2.33 auch nochmals zu Ehren kommt.

¹⁸¹Der *Spektralradius* von Ξ ist < 1 und daher wird die Summe oben in der Norm zu einer geometrischen Reihe.

¹⁸²Mehr oder weniger geschickte Indexverschiebungen sind in der Subdivision-Theorie ein gebräuchliches Hilfsmittel.

$$\begin{aligned}
&\leq \underbrace{\left| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\beta) S_a^{n-1} \delta(\alpha - \Xi^{n-1} \beta) - S_a^n \delta(\alpha) \right|}_{S_a^n \delta(\alpha)} \\
&\quad + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} |a(\beta)| \left| \phi(\Xi^{-n+1}(\alpha - \Xi^{n-1} \beta)) - S_a^{n-1} \delta(\alpha - \Xi^{n-1} \beta) \right| \\
&\quad + \left| \phi(\Xi^{-n} \alpha) - S_a^n \delta(\alpha) \right|,
\end{aligned}$$

und das geht wegen der Konvergenz gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Auf der linken Seite stehen aber zwei stetige Funktionen, die an immer dichteren Gittern übereinstimmen müssen, also ist $T_a \phi = \phi$, was genau (6.4) ist.

Bleibt 3). Dazu wählen wir $x \in \mathbb{R}^s$ mit¹⁸³ $\phi(x) \neq 0$ und eine Folge $\alpha^n \in \mathbb{Z}^s$ mit $\Xi^{-n} \alpha^n \rightarrow x$, beispielsweise $\alpha^n = \lfloor \Xi^n x \rfloor$. Da ϕ stetig ist und das Subdivision-Schema konvergiert, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(x) - S_a^n \delta(\alpha^n)| = 0.$$

Aus

$$\begin{aligned}
S_a^n \delta(\alpha^n) - \phi(x) &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha^n - \Xi \beta) S_a^{n-1} \delta(\beta) - \phi(x) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha^n - \Xi \beta) (S_a^{n-1} \delta(\beta) - \phi(x)) + \phi(x) \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha^n - \Xi \beta) - 1 \right)
\end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
&|\phi(x)| \left| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha^n - \Xi \beta) - 1 \right| \\
&\leq \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} |a(\alpha^n + \Xi \beta)| |S_a^{n-1} \delta(\beta) - \phi(x)| + \underbrace{|S_a^n \delta(\alpha^n) - \phi(x)|}_{\rightarrow 0}.
\end{aligned}$$

Im ersten Ausdruck auf der rechten Seite läuft die Summe über β aufgrund des endlichen Trägers nur über $\alpha^n + \Omega_a$, was wegen

$$\Xi^{-n} \beta \in \Xi^{-n} \alpha^n + \underbrace{\Xi^{-n} \Omega_a}_{\rightarrow \{0\}} \rightarrow \{x\}$$

auch immer gegen x konvergiert. Da ϕ immer noch stetig ist, konvergiert auch dieser Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen 0, und wenn man nun noch

$$\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} |a(\alpha^n + \Xi \beta)| \leq \max_{\epsilon \in E_{\Xi}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} |a(\epsilon + \Xi \beta)|$$

¹⁸³Wenn $\phi = 0$ ist, dann ist das Subdivision-Schema trivial, d.h. $f_c = 0$ für alle c und das ist in Definition 6.1 explizit ausgeschlossen.

berücksichtigt, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(x)| \left| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha^n - \Xi\beta) - 1 \right| = 0.$$

Jetzt muss man nur noch $\epsilon \in E_{\Xi}$ fixieren und die Folge α^n so wählen, daß $\alpha^n \in \epsilon + \Xi\mathbb{Z}^s$ ist, und schon ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(x)| \left| \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} a(\epsilon - \Xi\beta) - 1 \right| = 0$$

und da die linke Seite aber nun überhaupt nicht mehr von n abhängt, muss sie Null sein. \square

Aus Proposition 6.3 können wir zwei wichtige Schlüsse ziehen.

Korollar 6.4 1. Die Maske eines konvergenten Subdivision-Schemas definiert immer einen Tiefpassfilter.

2. Die Grenzfunktion ϕ eines konvergenten Subdivision-Schemas erfüllt immer $\phi * 1 = 1$, ist also eine Teilung der Eins.

Die Tiefpasseigenschaft, die offensichtlich eine ziemlich bedeutende Rolle in der Subdivision spielt, kann man auch algebraisch beschreiben bzw. am Symbol ablesen, und wieder spielen unsere *Einheitswurzeln*

$$z_{\epsilon'} := e^{2\pi i \Xi^{-T} \epsilon'}, \quad \epsilon' \in E'_{\Xi}, \quad (6.5)$$

eine entscheidende Rolle, diesmal als Nullstellen.

Proposition 6.5 S_a ist genau dann ein Tiefpassfilter, wenn

$$a^{\sharp}(z_{\epsilon'}) = |\det \Xi| \delta(\epsilon'), \quad \epsilon' \in E'_{\Xi}. \quad (6.6)$$

Beweis: Ist S_a ein Tiefpassfilter, dann ist für jedes ϵ

$$1 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\epsilon + \Xi\alpha) = a_{\epsilon}(1),$$

also, mit (5.36),

$$a^{\sharp}(z_{\epsilon'}) = \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} z_{\epsilon'}^{\epsilon} a_{\epsilon}^{\sharp}(z_{\epsilon'}^{\Xi}) = \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} e^{2\pi i \epsilon^T \Xi^{-T} \epsilon'} \underbrace{a_{\epsilon}^{\sharp}(z_{\epsilon'}^{\Xi})}_{=a_{\epsilon}^{\sharp}(1)=1} = |\det \Xi| \delta(\epsilon').$$

Für die Umkehrung interpretieren wir die eben gemachte Rechnung als

$$[a^\#(z_{\epsilon'}) : \epsilon' \in E'_\Xi] = F_\Xi [a^\#_\epsilon(1) : \epsilon \in E_\Xi].$$

Da F_Ξ invertierbar ist, folgt dann aber aus (6.6) unmittelbar, daß

$$[a^\#_\epsilon(1) : \epsilon \in E_\Xi] = F_\Xi^{-1} |\det \Xi| \delta = \mathbf{1}$$

und damit ist S_a ein Tiefpass. □

Bemerkung 6.6 *Genaugenommen zerfällt (6.6) in zwei Teile: Die Nullstellen an $z_{\epsilon'}$, $\epsilon' \neq 0$, sorgen dafür, daß konstante Folgen von S_a erhalten werden, die Normalisierung $a^\#(1) = |\det \Xi|$ kümmert sich hingegen darum, daß die Konstante 1 auch wirklich auf 1 abgebildet wird, ansonsten hätte man*

$$S_a 1 = \frac{a^\#(1)}{|\det \Xi|} 1,$$

was man mit einer einfachen Umskalierung¹⁸⁴ auch leicht sieht.

Die Nullstelleneigenschaft (6.6) eines Tiefpassfilters ist ausgesprochen hilfreich und erlaubt die Verwendung von Methoden der konstruktiven Idealtheorie alias Computeralgebra, siehe (Sauer, 2001). Das wesentliche Hilfsmittel zur Beschreibung von Nullstellengebilden ist dann natürlich das *Ideal*, siehe (Adams & Loustau, 1994; Cox et al., 1996).

Definition 6.7 (Ideale)

1. Ein Ideal \mathcal{I} in Π oder Λ ist eine Menge mit der Eigenschaft $\mathcal{I} + \mathcal{I} = \mathcal{I}$ und $\mathcal{I} \cdot \Pi = \mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{I} \cdot \Lambda = \mathcal{I}$.
2. Das von einer endlichen Menge $F \subset \Lambda$ erzeugte Ideal ist der Abschluss von F unter den Idealoperationen, also

$$\langle F \rangle := \left\{ \sum_{f \in F} g_f f : g_f \in \Lambda \right\}.$$

3. Das Nullstellenideal zu einer Menge $Z \subset \mathbb{C}^s$ ist¹⁸⁵ $\mathcal{I}(Z) := \{f : f(Z) = 0\}$.

¹⁸⁴Multipliziert man ein (Laurent-)Polynom mit einer von Null verschiedenen Konstanten, so interessiert das die Nullstellen nicht.

¹⁸⁵Wobei f wahlweise Π oder Λ „durchlaufen“ darf.

4. Die Varietät zu einem Ideal \mathcal{I} ist das zugehörige Nullstellengebilde $Z(\mathcal{I}) = \{z \in \mathbb{C}^s : f(z) = 0, f \in \mathcal{I}\}$. Ein Ideal heißt Radikal¹⁸⁶, wenn $\mathcal{I} = \mathcal{I}(Z(\mathcal{I}))$ ist.

5. Das Quotientenideal $\mathcal{I} : \mathcal{J}$ zu zwei Idealen \mathcal{I}, \mathcal{J} ist definiert als

$$\mathcal{I} : \mathcal{J} := \{f : f \cdot \mathcal{J} \subset \mathcal{I}\}. \quad (6.7)$$

Das Quotientenideal hat nun eine ganz besonders schöne Interpretation im Varietäten-sinne: Im wesentlichen¹⁸⁷ ist nämlich

$$Z(\mathcal{I} : \mathcal{J}) = Z(\mathcal{I}) \setminus Z(\mathcal{J}), \quad (6.8)$$

siehe (Cox *et al.*, 1996). Wir brauchen hier nur zwei ganz einfache Ideale, von denen zumindest eines ganz direkt etwas mit Ξ zu tun hat, und zwar

$$\langle z^\Xi - 1 \rangle := \langle z^{\xi_j} - 1 : \Xi = [\xi_1 \cdots \xi_s] \rangle \quad (6.9)$$

$$\langle z - 1 \rangle := \langle z^I - 1 \rangle = \langle z_j - 1 : j = 1, \dots, s \rangle. \quad (6.10)$$

Das Nullstellenverhalten dieser beiden Ideale gibt und dann ganz direkt eine weitere Beschreibung der Tiefpassfilter.

Lemma 6.8 Für die beiden Ideale aus (6.9) und (6.10) gilt

$$Z(\langle z^\Xi - 1 \rangle) = \{z_{\epsilon'} : \epsilon' \in E'_\Xi\} \quad \text{und} \quad Z(\langle z - 1 \rangle) = \{1\}, \quad (6.11)$$

also

$$\{f : f(z_\epsilon) = 0, \epsilon \in E'_\Xi \setminus \{0\}\}, \quad (6.12)$$

und damit ist S_a genau dann ein Tiefpass, wenn $a^\sharp \in \langle z^\Xi - 1 \rangle : \langle z - 1 \rangle$ und $a^\sharp(1) = |\det \Xi|$.

Beweis: Daß $Z(\langle z - 1 \rangle) = \{1\}$ ist, ist klar, ebenso, daß

$$Z(\langle z^\Xi - 1 \rangle) \supset \{z_{\epsilon'} : \epsilon' \in E'_\Xi\},$$

denn schliesslich sind ja alle $z_{\epsilon'}$ Ξ -te Einheitswurzeln. Bleibt also „ \subset “, denn bisher ist ja nicht klar, ob es nicht vielleicht irgendwo da draussen noch unbekannte weitere Einheitswurzeln¹⁸⁸ geben könnte. Um das auszuschließen, verwenden wir mal wieder die Smith-Faktorisierung $\Xi = \Theta \Sigma \Theta'$ und sehen uns die Gleichung

$$\mathbf{1} = z^\Xi = z^{\Theta \Sigma \Theta'} = (y^\Sigma)^{\Theta'}, \quad y := z^\Theta,$$

¹⁸⁶Das ist kein Schreibfehler, die Begriffe *Radikal* und *radikales Ideal* sind vollkommen synonym.

¹⁸⁷Der Teufel steckt hier im Detail, diese Identität gilt eigentlich nur für den *Zariski-Abschluss* der Varietäten, aber in unserem Kontext hier ist das ziemlich egal.

¹⁸⁸Also Lösungen von $z^\Xi = 1$.

an, die sich äquivalent in

$$y^\Sigma = \mathbf{1}^{\Theta^{-1}} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad y_j = e^{2\pi i k / \sigma_j}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\sigma_j}, \quad j = 1, \dots, s,$$

umformen lässt. Dabei interessiert uns noch nicht einmal die genaue Gestalt der Lösungen, sondern lediglich die Tatsache, daß es genau $|\det \Sigma| = |\det \Xi|$ Einheitswurzeln gibt. Diese kennen wir aber schon alle, was den Beweis von (6.11) auch schon vervollständigt. (6.12) ist dann eine direkte Konsequenz aus (6.8). \square

Die algebraische Definition durch das Quotientenideal hat eine nette Konsequenz, die es uns ermöglicht, der *Eigenwert* 1 des Subdivision-Operators S_a auszufaktorisieren. Dazu sehen wir uns mal an, was $a^\sharp \in \langle z^\Xi - 1 \rangle : \langle z - 1 \rangle$ bedeutet, nämlich, daß sich für jedes $f \in \langle z - 1 \rangle$ das Produkt $f(z) a^\sharp(z)$ in $\langle z^\Xi - 1 \rangle$ darstellen lässt. Speziell gibt es für jedes $j \in \{1, \dots, s\}$ „Koeffizienten“ $b_{jk}^\sharp(z) \in \Lambda$, so daß

$$(z_j - 1) a^\sharp(z) = \sum_{k=1}^s b_{jk}^\sharp(z) (z^{\xi_k} - 1),$$

oder, in Matrixform,

$$[z - 1] a^\sharp(z) = B^\sharp(z) [z^\Xi - 1], \quad (6.13)$$

wobei für $\Theta \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ der Vektor¹⁸⁹ $[z^\Theta - 1] = [z^{\theta_j} - 1 : j = 1, \dots, s]$ das Erzeugendensystem des Ideals enthält. Das Symbol B^\sharp definiert nun ein Subdivision-Schema, das nicht auf skalaren, sondern auf **vektorwertigen** Daten operiert. Aber auch geometrisch hat (6.13) eine Bedeutung.

Lemma 6.9 1. Für $c \in \ell(\mathbb{Z}^s)$ gilt

$$(S_a c)^\sharp(z) = a^\sharp(z) c^\sharp(z^\Xi). \quad (6.14)$$

2. Das Symbol der Rückwärtsdifferenz $\nabla := [\tau_{-\epsilon_j} - I : j = 1, \dots, s]$, die auch als diskreter Gradient angesehen werden kann, ist

$$(\nabla c)^\sharp(z) = [z - 1] c^\sharp(z). \quad (6.15)$$

3. Die Zerlegung (6.13) ist äquivalent zu

$$\nabla S_a = S_B \nabla. \quad (6.16)$$

¹⁸⁹Eigentlich ist es ja nur ein s -Tupel, aber „Vektor“ ist das gebräuchlichere Wort – erstaunlicherweise können Mathematiker manchmal entsetzlich unpräzise sein, vor allem dann, wenn die Gewohnheit durchschlägt.

Beweis: Für 1) berechnen wir einfach

$$\begin{aligned} (S_a c)^\sharp(z) &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha - \Xi\beta) c(\beta) z^\alpha = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) c(\beta) z^{\alpha + \Xi\beta} \\ &= \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) z^\alpha \right) \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c(\beta) z^{\Xi\beta} \right) = a^\sharp(z) c^\sharp(z^\Xi), \end{aligned}$$

2) ergibt sich aus

$$(\tau_{-\epsilon_j} c - c)^\sharp = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (c(\alpha - \epsilon_j) - c(\alpha)) z^\alpha = (z_j - 1) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) z^\alpha = (z_j - 1) c^\sharp(z)$$

und 3) ist einfaches Einsetzen:

$$(\nabla S_a c)^\sharp(z) = [z - 1] a^\sharp(z) c^\sharp(z^\Xi)$$

sowie

$$(S_B \nabla c)^\sharp(z) = B^\sharp(z) (\nabla c)^\sharp(z^\Xi) = B^\sharp(z) [z^\Xi - 1] c^\sharp(z^\Xi),$$

woraus (6.15) sofort folgt. □

Der Differenzenoperator ∇ hat die Eigenschaft, daß

$$\mathbb{R}\{1\} = \ker \nabla := \{c \in \ell(\mathbb{Z}^s) : \nabla c = 0\}$$

und faktorisiert so den Eigenvektor 1 von S_a aus. Der Preis ist allerdings, daß wir vektorisieren müssen, allerdings gibt es für $s > 1$ leider auch keinen linearen Operator $A : \ell_\infty(\mathbb{Z}^s) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z}^s)$ mit $\ker A = \mathbb{R}\{1\}$. erinnert man sich an die gute alte *Potenzmethode*¹⁹⁰, siehe (Golub & van Loan, 1996; Sauer, 2000b), dann wissen wir, daß derartige Iterationen konvergieren, wenn alle Eigenwerte ausser dem Eigenwert 1 zur konstanten Folge **kleiner als** 1 sind, wnn also das „faktorisierte“ Schema S_B eine *Kontraktion* in einem etwas allgemeineren Sinne ist.

Was wir nämlich von einem Operator A brauchen, ist ja nicht wirklich, daß A selbst eine Kontraktion ist, d.h. $\|A\| < 1$, sondern daß es einen Index r gibt, so daß A^r eine Kontraktion ist, also $\|A^r\| < 1$, denn letzteres reicht völlig aus, daß $\|A^n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Und diese Eigenschaft ist bekannt, siehe beispielsweise (Sauer, 2000a), und wird dadurch charakterisiert, daß $\rho(A) < 1$ ist, wobei der *Spektralradius* eines Operators bekanntlich als

$$\rho(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$$

definiert ist, wobei „ $\|\cdot\|$ “ für die Operatornorm steht.

¹⁹⁰Auf Englisch „power iteration“.

Es wäre nun naheliegend, zu fordern, daß $\rho(S_B) < 1$ sein sollte, aber das ist zu viel! Wegen des „vorgeschalteten“ Differenzenoperators ∇ „sieht“ S_B nämlich nicht beliebige vektorwertige Daten, sondern nur solche, die Bild des Differenzenoperators sind, und die bilden einen echten Teilraum der vektorwertigen Folgen:

$$\nabla \ell_\infty(\mathbb{Z}^s) \subset \ell_\infty^s(\mathbb{Z}^s). \quad (6.17)$$

Das ist sehr einfach zu sehen, denn alle Folgen in $v \in \nabla \ell_\infty(\mathbb{Z}^s)$, $v = \nabla c$ erfüllen die Bedingung

$$(\tau_{-\epsilon_j} - I)v_k - (\tau_{-\epsilon_k} - I)v_j = (\tau_{-\epsilon_j} - I)(\tau_{-\epsilon_k} - I)c - (\tau_{-\epsilon_k} - I)(\tau_{-\epsilon_j} - I)c = 0.$$

Deswegen dürfen wir nicht den Spektralradius verwenden, sondern nur den Spektralradius, den wir erhalten, wenn wir S_B auf den Teilraum $\nabla \ell_\infty(\mathbb{Z}^s)$ einschränken. Genau das ist der Inhalt der folgenden Definition.

Definition 6.10 Als eingeschränkter Spektralradius des Subdivision-Operators wird der Ausdruck

$$\rho_\infty(S_B | \nabla) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{v \in \nabla \ell_\infty(\mathbb{Z}^s)} \frac{\|S_B^n v\|_\infty}{\|v\|_\infty} \right)^{1/n} \quad (6.18)$$

bezeichnet. Die hierbei verwendete Norm ist

$$\|v\|_\infty = \max_{j=1, \dots, s} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} |v_j(\alpha)|, \quad v \in \ell_\infty^s(\mathbb{Z}^s).$$

Jetzt haben wir alles beisammen, um die Charakterisierung von Subdivision-Schemata wenn auch nicht zu beweisen, so doch hinzuschreiben. Ein Beweis in einem allgemeineren Kontext findet sich beispielsweise in (Sauer, 2011a).

Satz 6.11 Das Subdivision-Schema zur Maske $a \in \ell_{00}(\mathbb{Z}^s)$ ist genau dann konvergent, wenn

$$S_a 1 = 1 \quad \text{und} \quad \rho_\infty(S_B | \nabla) < 1. \quad (6.19)$$

Bemerkung 6.12 1. So schlimm ist der Beweis von Satz 6.11 gar nicht, aber alle Details nehmen halt doch ein wenig Zeit in Anspruch, weswegen wir ihn uns hier schenken wollen.

2. Man kann zeigen, daß die Grenzfunktion auch hölderstetig ist, genauer:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C_\phi \|x - y\|^{1-\rho}, \quad \rho = \rho_\infty(S_B | \nabla), \quad (6.20)$$

mit einer Konstanten $C_\phi < \infty$. Damit ist die Grenzfunktion eines Subdivision-Schemas immer ein bisschen mehr als stetig.

3. Die Größe ρ aus (6.20) bestimmt nicht nur die Hölder-Regularität der Grenzfunktion, sondern auch die Konvergenzgeschwindigkeit des Subdivision-Schema. Dabei gilt: Je braver, desto besser.
4. Man kann auch höhere Regularitätseigenschaften von ϕ wie Differenzierbarkeit verschiedener Ordnung aus a heraus bestimmen, aber das wird dann irgendwann ein klein wenig kompliziert, siehe (Sauer, 2006).

6.2 Multiresolution

Es hat einen Grund, daß wir uns so intensiv mit den Methoden zur Generierung verfeinerbarer¹⁹¹ Funktionen beschäftigt haben, denn ohne diese Funktionen ist das folgende Konzept nicht möglich.

Definition 6.13 (Multiresolution) Eine verschachtelte Folge von Funktionenräumen $V_0 \subset V_1 \subset \dots$ heißt Multiresolution Analysis, oder kurz MRA, wenn

1. der Raum V_0 translationsinvariant ist, das heißt,

$$f \in V_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\cdot - \alpha) \in V_0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^s. \quad (6.21)$$

2. die Räume Skalenräume sind, das heißt,

$$f \in V_j \quad \Leftrightarrow \quad f(\Xi \cdot) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (6.22)$$

3. es eine Skalierungsfunktion ϕ gibt, so daß

$$V_0 = \text{span} \{ \phi(\cdot - \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}^s \} = \{ c * \phi : c \in \ell(\mathbb{Z}^s) \}, \quad (6.23)$$

und diese Skalierungsfunktion stabil ist, das heißt, es gibt Konstanten $0 < A \leq B < \infty$, so daß

$$A \|c\|_\infty \leq \|c * \phi\|_\infty \leq B \|c\|_\infty, \quad c \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^s). \quad (6.24)$$

Bemerkung 6.14 So ganz zu 100% entspricht diese Definition nicht unbedingt der Standarddefinition einer Multiresolution-Analysis, wie sie beispielsweise in (Daubechies, 1992; Mallat, 1999) zu finden ist¹⁹².

1. In den meisten Fällen wird eine MRA in $L_2(\mathbb{R}^s)$ definiert, was natürlich die Stabilitätsdefinition in (6.24) ein wenig ändert¹⁹³, was aber eigentlich nicht nötig ist.

¹⁹¹Man könnte auch sagen: „selbstähnlicher“

¹⁹²Die Definition einer MRA geht im Original auf Mallat (Mallat, 1989) zurück.

¹⁹³Wo man ∞ symbolisch durch 2 ersetzen sollte.

2. Wenn man sich auf einen Raum wie X festlegt, in dem die V_j eine MRA bilden sollen, dann fordert man, daß die MRA diesen Raum auch ausschöpft:

$$\overline{\lim_{j \rightarrow \infty} V_j} = X.$$

Wir können uns allerdings auch das Leben leicht machen und dies einfach als Definition des Raums X ansehen, in dem die MRA lebt.

3. Auch bei (6.23) kann man sich überlegen, auf welche Folgenräume man c einschränkt. Hat ϕ kompakten Träger ist es nicht so wild, denn dann man eigentlich immer Konvergenz der unendlichen Summe $c * \phi$ auf kompakten Mengen, was ja auch schon wieder eine schöne Topologie ist.

Was das alles mit Verfeinerbarkeit zu tun hat, zeigt das nächste Resultat.

Satz 6.15 Jede Skalierungsfunktion einer MRA ist verfeinerbar.

Beweis: Nach (6.22) sind $f \in V_1$ und $f(\Xi^{-1}\cdot) \in V_0$ äquivalent, also gehört f genau dann zu V_1 , wenn es $c \in \ell(\mathbb{Z}^s)$ gibt, so daß

$$f(\Xi^{-1}\cdot) = c * \phi \quad \Leftrightarrow \quad f = c * \phi(\Xi\cdot) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \phi(\Xi\cdot - \alpha).$$

Iteriert man das, so erhält man

$$V_j = \{c * \phi(\Xi^j\cdot) : c \in \ell(\mathbb{Z}^s)\}. \quad (6.25)$$

Wegen $\phi \in V_0 \subset V_1$ gibt es dann aber Koeffizienten $a \in \ell(\mathbb{Z}^s)$, so daß

$$\phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a(\alpha) \phi(\Xi\cdot - \alpha)$$

und wenn ϕ kompakten Träger hat, dann muss das auch für a gelten. \square

Und dann war da noch die Stabilität der Skalierungsfunktion in 3) von Definition 6.13, durch die man ohne Konvergenz des Subdivision-Schema dann wirklich nicht mehr auskommt.

Satz 6.16 (Stabilität & Verfeinerbarkeit) Ist $\phi \in C_{00}(\mathbb{R}^s)$ eine stabile Lösung der Verfeinerungsgleichung (6.4), d.h. $\phi = T_a\phi$, dann konvergiert das Subdivision-Schema genau dann, wenn $\phi * 1 = 1$ ist.

Beweis: Die Richtung „ \Rightarrow “ gilt nach Korollar 6.4 sogar für jedes konvergente Subdivision–Schema, ganz egal, ob ϕ stabil ist oder nicht.

Also scheint der interessante Teil die Umkehrung zu sein. Wegen der Stabilität von ϕ gibt es eine Konstante $A > 0$, so daß wir wegen der Dualität von S_a und T_a und dank $T_a\phi = \phi$

$$\begin{aligned}
& \|\phi(\Xi^{-n}\cdot) - S_a^n\delta\|_{\ell_\infty} := \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} |\phi(\Xi^{-n}\alpha) - S_a^n\delta(\alpha)| \\
& \leq A^{-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^s} |(\phi(\Xi^{-n}\cdot) - S_a^n\delta) * \phi(x)| \\
& \leq A^{-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^s} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} (\phi(\Xi^{-n}\alpha) - S_a^n\delta(\alpha)) \phi(\Xi^n x - \alpha) \right| \\
& \leq A^{-1} \left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \phi(\Xi^{-n}\alpha) \phi(\Xi^n \cdot - \alpha) - (S_a^n\delta * \phi)(\Xi^n \cdot) \right\|_{L_\infty} \\
& = A^{-1} \left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \phi(\Xi^{-n}\alpha) \phi(\Xi^n \cdot - \alpha) - \delta * T_a\phi \right\|_{L_\infty} \\
& = A^{-1} \left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \phi(\Xi^{-n}\alpha) \phi(\Xi^n \cdot - \alpha) - \phi \right\|_{L_\infty}
\end{aligned}$$

erhalten. Jetzt müssen wir also nur noch zeigen, daß sogar für jedes $f \in C_u(\mathbb{R}^s)$ die Aussage¹⁹⁴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\Xi^{-n}\alpha) \phi(\Xi^n \cdot - \alpha) - f \right\| = 0. \quad (6.26)$$

Sehen wir uns den Ausdruck in (6.26) einmal für ein $x \in \mathbb{R}^s$ an. Wegen des kompakten Trägers¹⁹⁵ Ω ist die Summe nur über diejenigen α , für die $\Xi^n x - \alpha \in \Omega$ ist, also $\alpha \in \Xi^n x - \Omega$ und damit $\Xi^{-n}\alpha \in x - \Xi^{-n}\Omega$. Damit ist dann aber

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\Xi^{-n}\alpha) \phi(\Xi^n x - \alpha) - f(x) \right| \\
& \leq \underbrace{\left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(x) \phi(\Xi^n x - \alpha) - f(x) \right|}_{=f(x)(1*\phi)(\Xi^n x)=f(x)} + \left| \sum_{\alpha \in \Xi^n x - \Omega} (f(x) - f(\Xi^{-n}\alpha)) \phi(\Xi^n x) \right|
\end{aligned}$$

¹⁹⁴Wer genau hinsieht, erkennt hier eine Aussage über die Approximation durch den Quasiinterpolanten auf ϕ -Basis.

¹⁹⁵Das folgt aus der Verfeinerungsgleichung mit genau denselben Methoden, die wir benutzt haben, um den kompakten Träger der Grenzfunktion eines konvergenten Subdivision–Schemas im Beweis von Proposition 6.3 nachzuweisen.

$$\leq B \sup_{y \in x - \Xi^{-n}\Omega} |f(x) - f(y)|,$$

was wegen der *gleichmäßigen* Stetigkeit von f *unabhängig von* x gegen Null geht. \square

Das Fazit der beiden Sätze aus diesem Abschnitt ist klar und deutlich:

Jede „vernünftige“ MRA basiert auf einem konvergenten Subdivision–Schema, ohne Subdivision läuft da also gar nichts.

6.3 Filterbank–Wavelets

Mit all diesen Vorbemerkungen können wir nun die Wavelets nahezu ohne Extra–Aufwand einführen und definieren. Hier noch einmal der Vollständigkeit halber unsere Voraussetzungen:

1. Die Filterbank besitzt perfekte Rekonstruktion und die Filter \check{F}_0 und \check{G}_0 sind Tiefpassfilter.
2. Das Subdivision–Scheme S_{g_0} konvergiert mit Grenzfunktion ϕ .

Definition 6.17 Die Wavelets zur Filterbank (F, G) und zur Skalierungsfunktion ϕ sind definiert als

$$\psi_\epsilon := T_{g_\epsilon} \phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_\epsilon(\alpha) \phi(\Xi \cdot -\alpha), \quad \epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}. \quad (6.27)$$

Mit Hilfe dieser Wavelets bekommen wir nun ein beinahe schon zu billige Darstellung von Funktionen.

Satz 6.18 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c * \phi(\Xi^n \cdot) = c^n * \phi + \sum_{k=1}^n d_\epsilon^k * \psi_\epsilon(\Xi^{n-k} \cdot), \quad (6.28)$$

wobei, mit $c^0 := c$,

$$c^k := F_0 c^{k-1}, \quad d_\epsilon^k = F_\epsilon c^{k-1}, \quad \epsilon \in E_\Xi \setminus \{0\}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.29)$$

die Koeffizienten aus dem Pyramidenschema bezeichnet.

Beweis: Wegen der perfekten Rekonstruktion ist (mit $d_0^1 = c^1$)

$$c = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} G_\epsilon \uparrow_\Xi d_\epsilon^1 = \sum_{\epsilon \in E_\Xi} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} g_\epsilon(\cdot - \Xi\beta) d_\epsilon^1(\beta), \quad (6.30)$$

und daher

$$\begin{aligned}
c * \phi(\Xi \cdot) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c(\alpha) \phi(\Xi \cdot - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} g_{\epsilon}(\alpha - \Xi\beta) d_{\epsilon}^1(\beta) \phi(\Xi \cdot - \alpha) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c^1(\beta) g_0(\alpha - \Xi\beta) \phi(\Xi \cdot - \alpha) \\
&\quad + \sum_{\epsilon \neq 0} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} d^1(\beta) g_{\epsilon}(\alpha - \Xi\beta) \phi(\Xi \cdot - \alpha) \\
&= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c^1(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_0(\alpha) \phi(\Xi(\cdot - \beta) - \alpha)}_{=\phi(\cdot - \beta)} \\
&\quad + \sum_{\epsilon \neq 0} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} d^1(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_{\epsilon}(\alpha) \phi(\Xi(\cdot - \beta) - \alpha)}_{=\psi_{\epsilon}(\cdot - \alpha)} \\
&= c^1 * \phi + \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{\epsilon}^1 * \psi_{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Ersetzen wir in dieser Identität nun das Argument durch $\Xi^{n-1} \cdot$, so ergibt sich durch Wiederholung der Zerlegung

$$\begin{aligned}
c^0 * \phi(\Xi^n \cdot) &= c^1 * \phi(\Xi^{n-1} \cdot) + \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{\epsilon}^1 * \psi_{\epsilon}(\Xi^{n-1} \cdot) \\
&= c^2 * \phi(\Xi^{n-2} \cdot) + \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{\epsilon}^2 * \psi_{\epsilon}(\Xi^{n-2} \cdot) + \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{\epsilon}^1 * \psi_{\epsilon}(\Xi^{n-1} \cdot) \\
&\quad \vdots \\
&= c^k * \phi(\Xi^{n-k} \cdot) + \sum_{j=1}^k \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{\epsilon}^j * \psi_{\epsilon}(\Xi^{n-j} \cdot) \\
&\quad \vdots \\
&= c^n * \phi + \sum_{j=1}^n \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{\epsilon}^j * \psi_{\epsilon}(\Xi^{n-j} \cdot),
\end{aligned}$$

wie in (6.28) behauptet. □

Sehen wir uns (6.28) einmal genauer an: Auf der linken Seite steht $c * \phi(\Xi^n \cdot)$, also gewichtete Translate der mit Ξ^n „gestauchten“ Funktion ϕ , auf der rechten Seite hingegen die Zerlegung dieser Funktion in Translate von ϕ und Translate der Wavelets auf verschiedenen Auflösungsstufen. Und alles, was wir dazu benötigt haben, war die *perfekte Rekonstruktion*, die äquivalent zu (6.30) ist.

Bemerkung 6.19 1. Bei der Zerlegung (6.28) werden eigentlich nur die Koeffizienten c und d_ϵ^k , und das nach (6.29) über die Analyse–Filterbank.

Die Zerlegungsformel (6.28) ist eine **Interpretation** der Filterbank–Aktion im Sinne von Funktionen, die aber für die eigentliche Rechnung nicht wirklich bekannt sein müssen.

2. Was passiert nun, wenn man eine Funktion f analysieren möchte? Man bestimmt zuerst eine Auflösungsstufe n und Koeffizienten c , so daß

$$\|f - c * \phi(\Xi^n \cdot)\| \leq \varepsilon$$

für eine vorgegebene Genauigkeit $\varepsilon > 0$ ist. Das kann beispielsweise durch eine Projektion auf die MRA, also auf V_n geschehen¹⁹⁶, oder durch irgendein anderes Annäherungsverfahren wie einen Quasiinterpolant

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} f(\Xi^{-n} \alpha) \phi(\Xi^n \cdot), \quad \text{d.h.} \quad c = f(\Xi^{-n} \cdot)|_{\mathbb{Z}^s}.$$

3. Das führt nun zu einer wirklich interessanten Frage: Wie gut können die Translate von ϕ , bzw. die Translate von $\phi(\Xi^n \cdot)$ andere Funktionen annähern, was ist die Approximationsordnung dieser Funktionen in gewissen Funktionenräumen? Genau um solche Fragen geht es dann, wenn man sich mit der Approximation durch translationsinvariante Räume beschäftigt.

¹⁹⁶Das wäre dann möglicherweise eine Bestapproximation, die ja eine (nichtlineare) Projektion ist.

*And it didn't stop being magic just
because you found out how it was
done.*

T. Pratchett, *Wee Free Men*

Multiple Filterbänke und Shearlets

7

Wir verallgemeinern die Filterbankidee nun noch ein klein wenig, indem wir uns vorstellen, daß wir nicht nur eine Filterbank, sondern gleich mehrere davon¹⁹⁷ zur Verfügung haben, unter denen wir in jedem Iterationsschritt auswählen können. Das ist natürlich zuerst einmal total allgemein, aber wir werden sehen, daß eine geeignete Auswahl der Parameter interessante Effekte liefern kann. Diese Ideen sind ziemlich neu¹⁹⁸ und basieren auf (Kutyniok & Sauer, 2009; Sauer, 2011a; Sauer, 2011b).

7.1 Multiple Filterbankkaskaden & Bäume

Um die Idee auch formal beschreiben zu können, legen wir noch eine etwas allgemeinere Definition einer Filterbank fest.

Definition 7.1 (Filterbänke, formal und mehrfach)

1. Eine Filterbank $\mathcal{F} = (\Xi, F, G)$ wird formal durch die Skalierungsmatrix $\Xi \in \mathbb{Z}^{s \times s}$, und die „Vektoren“ der Analysefilter $F = (F_\epsilon : \epsilon \in E_\Xi)$ und Synthesefilter $G = (G_\epsilon : \epsilon \in E_\Xi)$ beschrieben.
2. Eine multiple Filterbank oder Mehrfach-Filterbank der Vielfachheit m besteht aus m Filterbänken \mathcal{F}_j , $j \in \mathbb{Z}_m$.
3. Ein Index der Länge n für eine multiple Filterbank ist eine endliche Folge $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}_m^n$. Die Menge aller Indizes nennen wir

$$\mathbb{Z}_m^* := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_m^j,$$

¹⁹⁷Man stelle sich Filterbänke als kleine Kästchen vor ...

¹⁹⁸Zumindest zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Skripts, aber nichts verblasst so schnell mit der Zeit wie Neuigkeit.

$\ell = \ell(\mathbf{e})$ bezeichne für $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_m^*$ die Länge eines derartigen Index und wir schreiben den Index dann als

$$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_{\ell(\mathbf{e})}) =: (e_1, \dots, e_\ell).$$

Für $k \leq \ell$ bezeichnen wir das Anfangssegment der Länge k von \mathbf{e} mit $\mathbf{e}^k := (e_1, \dots, e_k)$.

4. Für die unendlichen Indizes verwenden wir

$$\mathbb{Z}_m^\infty = \mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}} = \{\mathbf{e} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_m\}.$$

5. Die Mehrfach-Filterbank heißt kompatibel, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_m^n} \|\Xi_{\mathbf{e}}^{-1}\| = 0, \quad \Xi_{\mathbf{e}} := \Xi_{e_\ell} \cdots \Xi_{e_1}. \quad (7.1)$$

Die Definition der Mehrfach-Filterbank ist eigentlich eine ganz einfache und natürlich Erweiterung und basiert auf der Idee, daß wir nun in jedem Schritt eine der Filterbänke zur Zerlegung auswählen dürfen. **Welche** Filterbank wir dabei in jedem Schritt verwenden, wird durch den Index \mathbf{e} beschrieben. Da wir dabei im ersten Schritt mit Ξ_{e_1} unterabtasten¹⁹⁹, dann im zweiten Schritt mit Ξ_{e_2} , im dritten mit Ξ_{e_3} und so weiter, verwendet die Unterabtastung durch den endlichen Index $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_m^*$ gerade die Matrix

$$\Xi_{\mathbf{e}} := \Xi_{e_\ell} \cdots \Xi_{e_1}$$

und (7.1) fordert dann, daß all diese Matrizen Kontraktionen werden sollen und das *unabhängig* vom gewählten Index.

Bemerkung 7.2 (Gemeinsamer Spektralradius)

1. Für eine endliche Familie $\mathcal{A} = \{A_j : j \in \mathbb{Z}_m\}$ von Matrizen oder linearen Operatoren wird die Größe

$$\rho_\infty(\mathcal{A}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{e} \in \mathbb{Z}_m^n} \|A_{e_n} \cdots A_{e_1}\|_\infty^{1/n} \quad (7.2)$$

als gemeinsamer Spektralradius, auf Englisch joint spectral radius, bezeichnet.

2. Es gibt dann immer eine Konstante $C = C_{\mathcal{A}}$, die nur von \mathcal{A} abhängt²⁰⁰, so daß $\|A_{\mathbf{e}}\|_\infty \leq C \rho_\infty(\mathcal{A})^{\ell(\mathbf{e})}$.

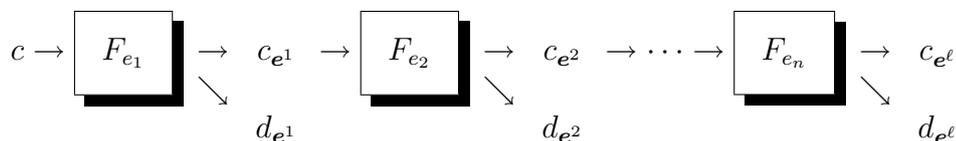
¹⁹⁹Ja, das ist ein blödes Wort.

²⁰⁰Wovon denn auch sonst?

3. Ist also $\rho_\infty(\mathcal{A}) < 1$, so konvergiert $\|A_e\|_\infty$ gegen Null und zwar nur in Abhängigkeit von $\ell(e)$, also sozusagen **gleichmäßig** in e .
4. Wählen wir $e = (j, j, \dots)$ für ein $j \in \mathbb{Z}_m$, so sehen wir sofort, daß $\rho_\infty(A_j) \leq \rho_\infty(\mathcal{A})$ und damit impliziert $\rho_\infty(\mathcal{A}) < 1$, daß $\rho_\infty(A_j) < 1$, $j \in \mathbb{Z}_m$. Die Umkehrung davon gilt **nicht**.
5. In der Sprechweise gemeinsamer Spektralradien bedeutet nun (7.1) nichts anderes als daß

$$\rho_\infty(\Xi) < 1, \quad \Xi := \{\Xi_j : j \in \mathbb{Z}_m\}. \quad (7.3)$$

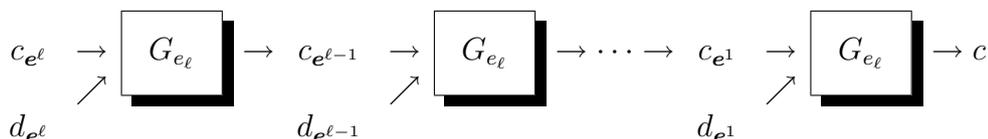
Wir können nun, ausgehend von einem Index e ein Signal mit der Mehrfach–Filterbank zerlegen, indem wir eben einfach in jedem Schritt die durch den Index festgelegte Filterbank verwenden:



und haben damit eine Zerlegung

$$c \rightarrow (c_{e^\ell}, d_{e^1}, \dots, d_{e^\ell})$$

erreicht. Haben alle Filterbänke *perfekte Rekonstruktion*, so lässt sich dieser Prozess auch ganz einfach wieder umkehren:



Dieser Prozess funktioniert genau dann, wenn alle Filterbänke über perfekte Rekonstruktion verfügen. Nun war das aber nur die Zerlegung entlang **eines** Index, normalerweise haben wir ja m^ℓ Indizes der Länge ℓ zur Verfügung und **jeder** dieser Indizes liefert uns eine Zerlegung/Rekonstruktion wie oben. Abb. 7.1 zeigt den ersten Schritt einer solchen Zerlegung, wobei die Ergebnisse der einzelnen Filterbänke nebeneinander aufgetragen werden. Die $d_{(j)}$ sind ja nun bereits Endergebnisse der Zerlegung, die $c_{(j)}$ werden nun wieder in alle Filterbänke gesteckt²⁰¹ und liefern dann die neuen Ergebnisse c_e und d_e , $e \in \mathbb{Z}_m^2$, siehe Abb. 7.2. Die resultierende Zerlegung nach n derartigen

²⁰¹Es ist vielleicht keine schlechte Idee, sich klarzumachen, daß diese Zerlegung wunderbar parallelisiert werden kann, denn die einzelnen Komponenten solch einer Mehrfach–Filterbank sind ja komplett voneinander entkoppelt.

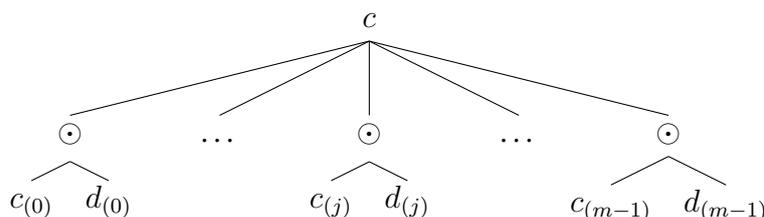


Abbildung 7.1: Eine Zerlegungsstufe einer multiplen Filterbank.

Schritten ist dann

$$c \rightarrow (c_e, d_{e^k} : e \in \mathbb{Z}_m^n, k = 1, \dots, n).$$

Diese Darstellung ist natürlich hochgradig redundant, denn das Originalsignal c ließe sich ja bereits aus **einem** kompletten Zweig $(c_e, d_{e^k} : k = 1, \dots, n)$ des Baumes vollständig rekonstruieren und da wir m^n derartige Zweige haben²⁰², stehen wir also vor dem beeindruckenden Redundanzverhältnis von m^n . Trotzdem kann man den Zerlegungsbaum erstaunlich effizient speichern! Diese Beobachtung wurde zuerst in (Kurtz, 2010) gemacht und man kann in der Tat zeigen, daß unter sehr milden Forderungen an Ξ der Speicheraufwand für den kompletten Baum nur ein Vielfaches des Speicheraufwands von c ist²⁰³, und zwar unabhängig von der Zerlegungstiefe n , siehe (Sauer, 2011b).

Worin soll aber nun der Vorteil solcher Zerlegungen bestehen, schliesslich möchten wir mit Wavelets ja beispielsweise komprimieren und da klingt es zuerst einmal ziemlich widersinnig, das Signal auf ein Vielfaches „aufzublasen“. Aber so dumm ist das gar nicht: Die Hoffnung besteht darin, daß in einem Teil des Signals²⁰⁴ eine Filterbank sehr effizient komprimieren kann, in einem anderen Teil des Bildes eine andere. Zusammen mit der Lokalität der Filterbänke²⁰⁵ wird das dann schon interessant.

Beispiel 7.3 *Bei der Wavelet-basierten Kompression wird zuerst eine Wavelet-Zerlegung berechnet und dann wird nur ein gewisser Prozentsatz der Skalierungs- und Wavelet-Koeffizienten gespeichert und zwar natürlich die betragsgrößten. Bei einer Mehrfach-Filterbank kann man das ganz genauso machen, man hat eben nur mehr Koeffizienten zur Auswahl, nämlich alle Blätter am Baum.*

²⁰²Einen für jeden Index ...

²⁰³Das Eingangssignal c sollte natürlich endlich sein, sonst gibt es ohnehin Speicherprobleme.

²⁰⁴Und das ganze wird eigentlich erst dann wirklich sinnvoll, wenn $s \geq 2$ ist, wenn wir es also mit Bildern oder Volumina zu tun haben.

²⁰⁵Endliche Impulsantwort und so ...

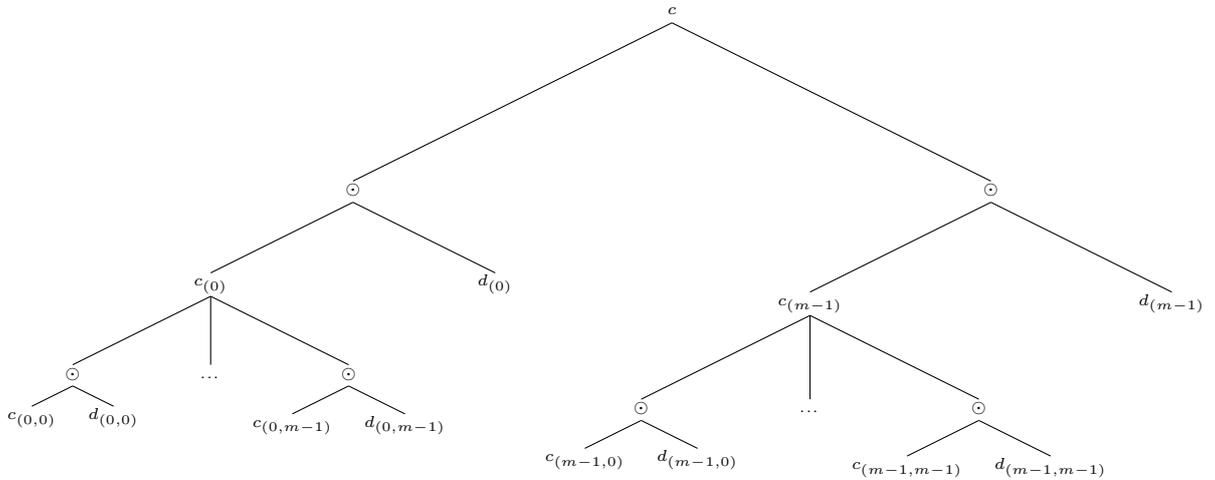


Abbildung 7.2: Dieser Sehtest zeigt zwei Zerlegungen mit der Mehrfach-Filterbank. Zerlegt werden dabei aber immer nur die Tiefpassanteile der Filterbank auf vorhergehender Stufe. Man sieht recht gut, wie sich der Baum ausbreitet.

7.2 Mehrfach-Wavelets

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob auch Mehrfach-Filterbänke eine Interpretation im Funktionensinne zulassen, also ob eine Zerlegung wie in (6.28) existiert. Um dahin zu kommen, sollten wir uns wieder Subdivision ansehen, jetzt natürlich geeignet verallgemeinert.

Definition 7.4 (Mehrfach-Subdivision)

1. Ein mehrfaches Subdivision-Schema (a, Ξ) der Vielfachheit m besteht aus m Masken a_j , $j \in \mathbb{Z}_m$, und kompatiblen Skalierungsmatrizen Ξ_j , $j \in \mathbb{Z}_m$.
2. Zu einem Index $e \in \mathbb{Z}_m^*$ ist der zugehörige Subdivision-Operator als

$$S_a^e := S_{a_{e_\ell}} \cdots S_{a_{e_1}}$$

definiert.

3. Das Subdivision-Schema heisst konvergent, wenn **für alle Indizes** $e \in \mathbb{Z}_m^\infty$ eine

Grenzfunktion ϕ_e existiert, so daß²⁰⁶

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} |S_a^{e^n} \delta(\alpha) - \phi_e(\Xi_e \alpha)| = 0. \quad (7.4)$$

Diese Definition, insbesondere (7.4), ist konsistent mit dem, was wir vorher über „einfache“ Subdivision–Schemata herausgefunden haben, wir müssen uns eigentlich nur klarmachen, daß jetzt $S_a^{e^n}$ mit dem Gitter Ξ_{e^n} in Bezug zu setzen ist. Tatsächlich übertragen sich mit diesem Wissen die meisten Formeln auf die Mehrfach–Subdivision, so gilt beispielsweise

$$S_a^e c = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_e(\cdot - \Xi_e \alpha) c(\alpha),$$

und vieles anderes mehr. Ausserdem bedeutet Konvergenz auch immer, daß jedes der Subdivision–Schemata (a_j, Ξ_j) für sich konvergent sein muss, was uns sofort eine ganze Menge von notwendigen Bedingungen liefert. Richtig spaßig wird es allerdings bei der Verfeinerbarkeit, die im Prinzip ganz genauso bewiesen wird wie im Fall „einfacher“ Subdivision.

Satz 7.5 *Ist (a, Ξ) ein konvergentes Mehrfach–Subdivision–Schema mit Grenzfunktionen ϕ_e , so gilt*

$$\phi_e = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_{e^*}(\alpha) \phi_{e^\infty}(\Xi_{e^*} \cdot - \alpha), \quad e = (e^*, e^\infty), \quad e^* \in \mathbb{Z}_m^*, \quad e^\infty \in \mathbb{Z}_M^\infty. \quad (7.5)$$

Mit anderen Worten: Die (**über**abzählbar unendlich vielen) Funktionen ϕ_e , $e \in \mathbb{Z}_m^\infty$, sind *gemeinsam verfeinerbar*, wobei jedes endliche Anfangssegment eines Index e die Maske festlegt, mit der verfeinert wird und das unendliche Endsegment die Funktion bestimmt, die für diese Verfeinerung verwendet wird.

Auf der Basis dieser Verfeinerungsgleichung kann man dann auch wieder eine MRA definieren, nur ist das dann eben eine mehrfache. Zu deren Definition brauchen wir eine kanonische Einbettung von \mathbb{Z}_m^* in \mathbb{Z}_m^∞ , die wir für $e \in \mathbb{Z}_m^*$ als $\hat{e} := (e, 0, 0, \dots)$ definieren. Die Menge

$$\{\hat{e} : e \in \mathbb{Z}_m^*\} \subset \mathbb{Z}_m^\infty$$

ist dann eine abzählbare Teilmenge der unendlichen Folgen. Dabei ist die Wahl der Null als „Füllsymbol“ eigentlich völlig irrelevant, jedes andere Element von \mathbb{Z}_m würde genauso gut oder schlecht funktionieren.

²⁰⁶Das ist eine äquivalente Definition – Subdivision konvergiert genau dann für alle c , wenn sie für $c = \delta$ konvergiert.

Definition 7.6 (MMRA) Die mehrfache Multiresolution Analysis, kurz MMRA, besteht aus den verschachtelten²⁰⁷ Räumen

$$V_j := \{c * \phi_{\widehat{e}}(\Xi_{e'} \cdot) : e \in \mathbb{Z}_m^*, c \in \ell(\mathbb{Z}^s), e' \in \mathbb{Z}_m^j\}. \quad (7.6)$$

Besondere Funktionen in V_n sind die „Diagonalfunktionen“ $\phi_{\widehat{e}_r}(\Xi_e \cdot)$, $e \in \mathbb{Z}_m^n$, wobei $e_r = (e_\ell, \dots, e_1)$ die gespiegelte Version von e bezeichnet. Approximieren wir nun eine Funktion für jedes solche e durch Daten

$$f \sim c_e * \phi_{\widehat{e}_r}(\Xi_e \cdot), \quad c \sim f(\Xi_e^{-1} \cdot), \quad (7.7)$$

dann haben wir ein hochgradig redundantes System von insgesamt m^n Darstellungen der Funktionen²⁰⁸. Schreiben wir das mal explizit hin und nutzen die perfekte Rekonstruktion²⁰⁹:

$$\begin{aligned} c_e * \phi_{\widehat{e}}(\Xi_e \cdot) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} c_e(\alpha) \phi_{\widehat{e}}(\Xi_e \cdot - \alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\epsilon \in E_{\Xi}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} g_{e_n, \epsilon}(\alpha - \Xi_{e_n} \beta) d_{e^{n-1}, \epsilon}(\beta) \phi_{\widehat{e}_r}(\Xi_e \cdot - \alpha) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} c_{e^{n-1}}(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_{e_n, 0}(\alpha - \Xi_{e_n} \beta) \phi_{(e_n, \widehat{e}_r^{n-1})}(\Xi_{e_n} \Xi_{e^{n-1}} \cdot - \alpha)}_{= \phi_{\widehat{e}_r^{n-1}}(\Xi_{e^{n-1}} \cdot - \beta)} \\ &\quad + \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} d_{e^{n-1}, \epsilon}(\beta) \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} g_{e_n, \epsilon}(\alpha - \Xi_{e_n} \beta) \phi_{(e_n, \widehat{e}_r^{n-1})}(\Xi_{e_n} \Xi_{e^{n-1}} \cdot - \alpha)}_{=: \psi_{e^n, \epsilon}(\Xi_{e^{n-1}} \cdot - \beta)} \\ &= c_{e^{n-1}} * \phi_{\widehat{e}_r^{n-1}}(\Xi_{e^{n-1}} \cdot - \beta) + \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{e^{n-1}, \epsilon} * \psi_{e^n, \epsilon}(\Xi_{e^{n-1}} \cdot - \beta) \\ &\quad \vdots \\ &= c * \phi_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{e^{k-1}, \epsilon} * \psi_{e^k, \epsilon}(\Xi_{e^{k-1}} \cdot - \beta), \end{aligned}$$

also

$$c_e * \phi_{\widehat{e}}(\Xi_e \cdot) = c * \phi_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{\epsilon \in E_{\Xi} \setminus \{0\}} d_{e^{k-1}, \epsilon} * \psi_{e^k, \epsilon}(\Xi_{e^{k-1}} \cdot - \beta). \quad (7.8)$$

²⁰⁷Diese Eigenschaft folgt aus der Verfeinerungsgleichung (7.5)! Genau deswegen betreibt man ja den ganzen Aufwand.

²⁰⁸Ja, das ist viel, aber wir sehen die Redundanz hier durchaus als Verbündeten, weil wir am Ende der Berechnung dann nur noch die **besten** Darstellungen speichern wollen und die kennen wir a priori ja nicht, weswegen wir sie erst einmal suchen müssen.

²⁰⁹Wieder mit $c = d_0$!

Wieder einmal ist alles, was wir hier genutzt haben, die perfekte Rekonstruktion der beteiligten Filterbänke. Aber viel interessanter ist es, sich einmal anzusehen, welche Koeffizienten in dieser Zerlegung wirklich verwendet wurden, nämlich c und $d_{e^{k-1}, e}$, $k = 1, \dots, n$. Das wiederum sind aber genau die Koeffizienten, die bei der Subdivision mit Index e auftreten, bzw., die im Zweig e des Baumes auftreten. Und das ist auch genau die Erkenntnis:

Subdivision liest den Baum von oben nach unten, die Wavelet-Zerlegung von $c * \phi_{\hat{e}_r}(\Xi_e \cdot)$ hingegen stellt diesen Zweig in Funktionenform dar. MM-RAs arbeiten **vertikal** im Baum.

7.3 Shearlets

Bisher haben wir keine Bedingungen an die Bestandteile der MMRA gestellt, wenn man von Kompatibilität einmal absieht. Damit haben die Indizes e natürlich auch erst einmal keine wirkliche Bedeutung ausser eben als „Wegweiser“ in der Zerlegung, die den zu wandelnden Pfad festlegen. Das ändert sich, wenn man ein wenig Geometrie einführt, indem man die Matrizen Ξ_j , $j \in \mathbb{Z}_m$, geeignet festlegt²¹⁰. Eine wesentliche Idee besteht darin, eine „Rotation für Arme“ zu verwenden, die aber zumindest für Geraden wie eine Drehung wirkt.

Definition 7.7 Eine Scherung $\Sigma = \Sigma(W)$ ist eine Matrix der Form

$$\Sigma := \begin{bmatrix} I_p & W \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}, \quad p + q = s, \quad W \in \mathbb{R}^{s-p \times q}. \quad (7.9)$$

Die zugehörige parabolische Dilatation ist

$$\Delta := \begin{bmatrix} 4I_p & 0 \\ 0 & 2I_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}. \quad (7.10)$$

Lemma 7.8 Scherungen sind unimodulare Matrizen mit $\Sigma(W)^{-1} = \Sigma(-W)$.

Beweis: Mit der Blockmatrixdarstellung ist

$$\Sigma(W)\Sigma(-W) = \begin{bmatrix} I_p & W \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & -W \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p I_p & I_p W - W I_q \\ 0 & I_q I_q \end{bmatrix} = I,$$

und die Unimodularität an sich folgt aus der Tatsache, daß Scherungen obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen sind. \square

²¹⁰Und diese geometrische Festlegung war natürlich der eigentliche Ausgangspunkt der ganzen Geschichte, denn Mathematik entwickelt sich zumeist vom Speziellen zum Allgemeinen, wird dann aber vom Allgemeinen zum Speziellen erzählt.

Weitere nette Formeln für die Interaktion von Scherung und parabolischer Dilatation, die sich über die Blockmatrixdarstellung leicht verifizieren lassen²¹¹, sind

$$\Delta \Sigma(W) = \Sigma(2W) \Delta \quad \text{und} \quad \Sigma(W)\Sigma(W') = \Sigma(W + W'). \quad (7.11)$$

Ausserdem sieht man natürlich, daß

$$\Sigma(W) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Wy \\ y \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q,$$

und daß damit die Ursprungsgerade $\left\{ \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ auf die **gedrehte** Ursprungsgerade $\left\{ \lambda \begin{bmatrix} x + Wy \\ y \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ abgebildet wird – es muss eigentlich nur $y \neq 0$ sein. Dies ist dann auch die Rolle der Scherung als „Drehung für Arme“. Das liefert dann ein spezialisiertes Konzept für richtungsadaptive Subdivisionschemata, das in (Kutyniok & Sauer, 2009) eingeführt wurde.

Definition 7.9 *Ein Shearlet–Subdivision–Schema ist ein Subdivision–Schema mit Dilatationsmatrizen $\Xi_j = \Delta \Sigma(W_j)$, $W_j \in \mathbb{Z}^{p \times q}$, wobei $W_0 = 0$ sein soll.*

Die Idee dahinter ist die Verwendung der Scherung als Rotationsersatz, denn durch die Skalierung Δ werden die Gitter $\Xi_e^{-1} \mathbb{Z}^s$ in den ersten p Komponenten ja „dünn“.

Das sieht man sehr schön in Abb 7.3, wo entsprechende Iterationen eines derartigen Schemas²¹² dargestellt sind. Es gibt also offensichtlich einen Zusammenhang zwischen dem Index e und den Verformungen. Dazu eine kleine Rechnung für $e \in \mathbb{Z}_m^*$, die nur die beiden einfachen Beobachtungen aus (7.11) verwendet

$$\begin{aligned} \Xi_e &= \Xi_{e_\ell} \cdots \Xi_{e_1} = \Delta \Sigma(W_{e_\ell}) \cdots \Delta \Sigma(W_{e_1}) \\ &= \Sigma(2W_{e_\ell}) \underbrace{\Delta \Sigma(2W_{e_{\ell-1}}) \cdots \Delta \Sigma(2W_{e_1})}_{=4\Sigma(2W_{e_{\ell-1}})\Delta} \Delta = \Sigma(2W_{e_\ell}) \cdots \Sigma(2^\ell W_{e_1}) \Delta^\ell \\ &= \Sigma \left(\sum_{k=1}^{\ell} 2^k W_{e_{\ell+1-k}} \right) \Delta^\ell = \Sigma \left(\sum_{k=1}^{\ell} 2^{\ell+1-k} W_{e_k} \right) \Delta^\ell \end{aligned}$$

und daher²¹³

$$\Xi_e^{-1} = \Delta^{-\ell} \Sigma \left(- \sum_{k=1}^{\ell} 2^{\ell+1-k} W_{e_k} \right) = \Sigma \left(- \sum_{k=1}^{\ell} 2^{1-k} W_{e_k} \right) \Delta^{-\ell}. \quad (7.12)$$

²¹¹Übung!

²¹²Die Subdivision–Schemata basieren auf Tensorprodukt–B–Splines.

²¹³Wie die aufmerksamen Leser bestimmt bereits gemerkt haben, folgt die zweite Identität aus $\Delta^{-1} \Sigma(2W) = \Sigma(W) \Delta^{-1}$, was sich wieder unmittelbar aus (7.11) ergibt.

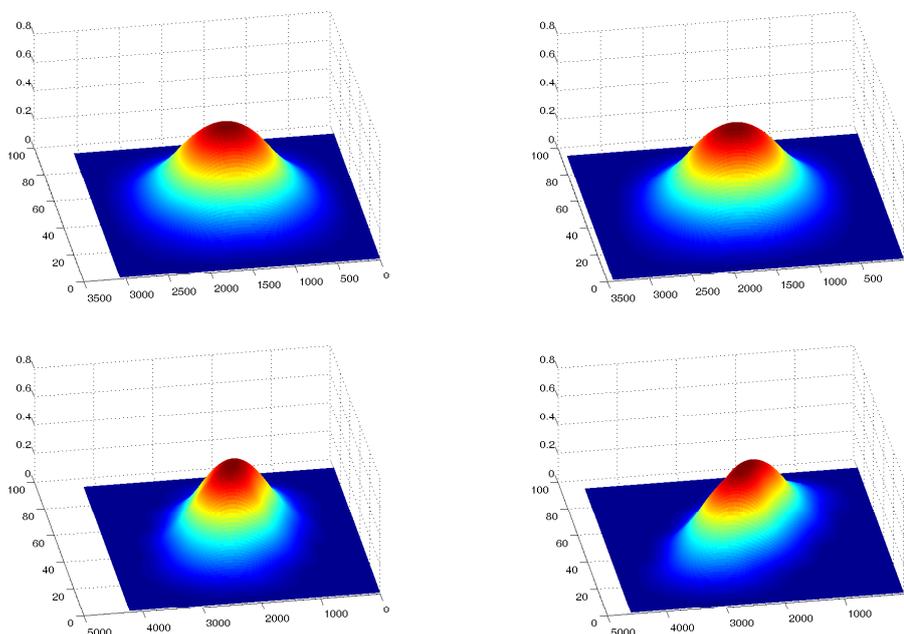


Abbildung 7.3: Vier Beispiele für verschiedene $e \in \mathbb{Z}_m^5$ zu $s = 2$, $p = q = 1$ und $W_0 = 0$ sowie $W_1 = 1$. Man sieht schön, wie hier der Bereich gestaucht und dann aber auch rotiert wird. Und man sieht, daß bereits fünf Subdivision-Iterationen ausreichen, um den Eindruck einer stetigen Funktion zu erwecken.

Die Darstellung links ist für alle e eine *unimodulare Zerlegung* von Ξ_e^{-1} , die rechts im allgemeinen nur für $\ell(e) = 1$. Mit ein bisschen gutem Willen kann man nur die Matrizen W_{e_k} als *Ziffern* in einer dyadischen Entwicklung einer Scherungsmatrix W_e ansehen und eben diese „Daydik“ sorgt für die Beziehung zwischen Scherung und Index.

Das Schöne an der Sache: Über die Funktion der Filterbank und die Zerlegungsfunktionen müssen wir kein Wort mehr verlieren, das ist alles in (7.8) geregelt und zwar ein für alle Male und für alle Skalierungsmatrizen. Wir verpassen dem Ganzen hier nur auch noch ein bisschen geometrische Interpretation.

7.4 Shearlets der Codimension 1

Der einfachste Fall solch einer Shearlet-Geometrie, und der einzige, der in $s = 2$ auftreten kann²¹⁴ ist der mit *Codimension 1*. Die Codimension der Skalierungsmatrizen ist

²¹⁴Man sollte nie vergessen, daß zweidimensionale Geometrie immer noch pathologisch gutartig ist, denn da sind Ebenen und Hyperebenen dasselbe.

offensichtlich q , denn das ist der Bereich, in dem die Ξ_j weniger kontraktiv sind. In diesem Fall ist $W_j \in \mathbb{R}^{s-1 \times 1}$, wir haben es also mit Vektoren zu tun und die natürliche Wahl ist natürlich $m = s$ und

$$W_0 = 0, \quad W_j = \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, s-1.$$

Beispiel 7.10 In Fall $s = 3$ sind die Skalierungsmatrizen zur kanonischen Shearlet-Analyse mit Codimension 1

$$W_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nehmen wir nun einen Vektor der Form $z = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^s$, $x \in \mathbb{R}^{s-1}$, dann ist

$$\begin{aligned} \Xi_e^{-1} z &= \begin{bmatrix} I_{s-1} & -\sum_{k=1}^{\ell} 2^{1-k} \epsilon_{e_k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{-\ell} I_{s-1} & 0 \\ 0 & 2^{-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4^{-\ell} I_{s-1} & -2^{-\ell} \sum_{k=1}^{\ell} 2^{1-k} \epsilon_{e_k} \\ 0 & 2^{-\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2^{-\ell} \begin{bmatrix} 2^{-\ell} x - y_e \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_e := 2 \sum_{k=1}^{\ell} 2^{-k} \epsilon_{e_k}. \end{aligned}$$

Diesen Punkt $y_e \in \mathbb{R}^{s-1}$ sehen wir uns einmal genauer an: Offensichtlich ist $y_{e,j} \geq 0$ und es gilt ausserdem

$$\sum_{j=1}^{s-1} y_{e,j} = 2 \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=1}^{\ell} 2^{-k} \epsilon_{e_k,j} = 2 \sum_{k=1}^{\ell} 2^{-k} = 2(1 - 2^{-\ell}),$$

es gilt also

$$y_e \in \frac{2^{\ell} - 1}{2^{\ell-1}} \mathbb{S}_{s-1} \subset 2SS_x, \quad \mathbb{S}_d := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x_j \geq 0, \sum_{j=1}^d x_j = 1 \right\}, \quad (7.13)$$

die Punkte liegen also in einem skalierten *Einheitssimplex*. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert das dann gegen die dyadischen Punkte in $2\mathbb{S}_{s-1}$.

Jetzt sind wir fast durch: Wir interpretieren z als Normale auf eine Hyperebene, die wir so normieren, daß $1 = \|z\|_{\infty} \geq \|x\|_{\infty}$ ist, und bei der wir erst einmal nur $0 \leq x \leq 1$ zulassen, wobei dann x_j die *Steigung* der Hyperebene in Richtung j darstellt. Die modifizierte Normale

$$z' = 2^{\ell} \Xi_e^{-1} z = \begin{bmatrix} 2^{\ell} (x - y_e) \\ 1 \end{bmatrix}$$

hat dann Steigungen, die zwischen -2^ℓ und 2^ℓ variieren können²¹⁵, für hinreichend großes ℓ können wir damit dann auch wirklich alle positiven Steigungen abdecken. Was ist nun mit x -Einträgen, die ein beliebiges Vorzeichenverhalten aufweisen? Nun, da passen wir einfach die Vorzeichen in der Skalierungsmatrix an:

$$W_j = \operatorname{sgn} x_j \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, s-1.$$

Wir benötigen also insgesamt nicht eine Shearlet-Analyse, sondern 2^{s-1} verschiedene Varianten, um die verschiedenen Vorzeichenverhalten abzudecken. Und das reicht auch noch nicht, denn die Bestimmung der Steigung relativ zur letzten Komponenten schliesst Normalen der Form $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$, natürlich aus²¹⁶. Wir müssen also die Lage der 1 auch noch zwischen den s Komponenten variieren und kommen so insgesamt tatsächlich auf $s2^{s-1}$ derartige Bäume, die berechnet werden müssen. Das ist aber halt eben der Preis den man bezahlen muss, wenn man die Erkennung anisotroper Effekte integriert haben will. Es gibt eben nichts umsonst im Leben²¹⁷, und das ist ein ebenso zutreffendes wie passendes Schlusswort.

²¹⁵Schliesslich sind $x_j, y_j \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, s$.

²¹⁶Ein typisches Phänomen „unendlich ferner Punkte“, das man auch aus der projektiven Geometrie kennt.

²¹⁷„There is no free lunch“, siehe (Lodge, 2002)

Literatur

7

- Adams, W. W., Loustaunau, P. (1994). *An Introduction to Groebner Bases*, volume 3 of *Graduate Studies in Mathematics*. AMS.
- Cavaretta, A. S., Dahmen, W., Micchelli, C. A. (1991). *Stationary Subdivision*, volume 93 (453) of *Memoirs of the AMS*. Amer. Math. Soc.
- Cox, D., Little, J., O’Shea, D. (1996). *Ideals, Varieties and Algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer–Verlag, 2. edition.
- Daubechies, I. (1990). The wavelet transform, time–frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **36**:961–1005.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM.
- DeVore, R. A., Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation*, volume 303 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer.
- Domes, J. (2007). Schnelle inverse Wavelettransformation. Zulassungsarbeit zum ersten Staatsexamen, Justus–Liebig–Universität Gießen.
- Faber, G. (1909). Über stetige Funktionen. *Math. Ann.*, **66**:81–94.
- Föllinger, O. (2000). *Laplace-, Fourier- und z–Transformation*. Hüthig.
- Forster, O. (1984). *Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*. Vieweg, 3. edition.
- Franz, J. (2011). Zeit-/Frequenzanalyse von Interferenzartefakten aus chemischen Produktionsprozessen. Diploma Thesis, Justus–Liebig–Universität Gießen.
- Gathen, J. v. z., Gerhard, J. (1999). *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press.
- Gautschi, W. (1997). *Numerical Analysis. An Introduction*. Birkhäuser.
- Golub, G., van Loan, C. F. (1996). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3rd edition.
- Gröbner, W. (1968). *Algebraische Geometrie I*. Number 273 in B.I–Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut Mannheim.
- Grossmann, A., Morlet, J., Paul, T. (1985). Transforms associated to square integrable group representations. i.general results. *J. Math. Phys.*, **26**:2473–2479.

- Haar, A. (1918). Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung stetiger funktionen. *Math. Ann.*, **78**:294–311.
- Hamming, R. W. (1989). *Digital Filters*. Prentice–Hall. Republished by Dover Publications, 1998.
- Hardy, G. H., Rogosinsky, W. W. (1956). *Fourier Series*. Cambridge University Press, 3. edition. Republished by Dover Publications, 1999.
- Hille, E. (1982). *Analytic Function Theory*. Chelsea Publishing Company, 2nd edition.
- Holschneider, M. (1995). *Wavelets: an analysis tool*. Clarendon Press, Oxford.
- Hubbard, B. B. (1996). *The world according to wavelets*. A.K. Peters.
- Isaacson, E., Keller, H. B. (1966). *Analysis of Numerical Methods*. John Wiley & Sons.
- Katznelson, Y. (1976). *An Introduction to Harmonic Analysis*. Dover Books on advanced Mathematics. Dover Publications, 2. edition.
- Klein, A. (2011). *Zur Numerik kontinuierlicher Wavelet- und Matrixwavelet-Transformationen*. PhD thesis, Justus–Liebig–Universität Gießen.
- Knuth, D. E. (1998). *The Art of Computer Programming. Seminumerical Algorithms*. Addison–Wesley, 3rd edition.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- Kurtz, A. (2010). Die schnelle Shearletterlegung. Bachelor Thesis, Justus–Liebig–Universität Gießen.
- Kutyniok, G., Sauer, T. (2009). Adaptive directional subdivision schemes and shearlet multiresolution analysis. *SIAM J. Math. Anal.*, **41**:1436–1471.
- Lodge, D. (2002). *Nice work!*. Penguin, 2nd edition.
- Loomis, L. H. (1953). *Introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand. Dover reprint, 2011.
- Lorentz, G. G. (1966). *Approximation of functions*. Chelsea Publishing Company.
- Louis, A. K., Maaß, P., Rieder, A. (1998). *Wavelets*. B. G. Teubner, 2. edition.
- Mallat, S. (1989). Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315**:69–87.
- Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 2. edition.
- Marcus, M., Minc, H. (1969). *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Prindle, Weber & Schmidt. Paperback reprint, Dover Publications, 1992.
- Meyer, Y. (1993). *Wavelets – Algorithms and Applications*. SIAM.

- Natterer, F., Wübbeling, F. (2001). *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM.
- Samar, V. J., Bopardikar, A., Raghuvver, M. K., Swartz, K. (1999). Wavelet analysis of neuroelectric waveforms: A conceptual tutorial. *Brain and Language*, **66**:7–60.
- Sauer, T. (2000a). Numerische Mathematik I. Vorlesungsskript, Friedrich–Alexander–Universität Erlangen–Nürnberg, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2000b). Numerische Mathematik II. Vorlesungsskript, Friedrich–Alexander–Universität Erlangen–Nürnberg, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2001). Computeralgebra. Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2002). Approximationstheorie. Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2003). Digitale Signalverarbeitung. Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2006). Differentiability of multivariate refinable functions and factorization. *Advances Comput. Math.*, **25**:211–235.
- Sauer, T. (2007). Splinekurven und –flächen in Theorie und Anwendung. Vorlesungsskript, Friedrich–Alexander–Universität Erlangen–Nürnberg, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2008). Integraltransformationen. Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen. <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- Sauer, T. (2011a). Multiple subdivision. In et al., J.-D. B., editor, *Curves and Surfaces 2011*, number 6920 in Lecture Notes in Computer Science, pages 612–628. Springer. to appear.
- Sauer, T. (2011b). Shearlet multiresolution and multiple refinement. In Kutyniok, G., D., L., editors, *Shearlets*. Springer.
- Sauer, T. (2011c). Time–frequency analysis, wavelets and why things (can) go wrong. *Human Cognitive Neurophysiology*, **4**:38–64.
- Sauer, T. (2011d). Transformations, implementations, and pitfalls. *Proc. Appl. Math. Mech.*, **11**:863–866.
- Schüßler, H. W. (1992). *Digitale Signalverarbeitung*. Springer, 3. edition.

- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.*, **27**:379–423.
- Shannon, C. E. (1949). Communications in the presence of noise. *Proc. of the IRE*, **37**:10–21.
- Steen, L. A., Seebach, J. A. (1970). *Counterexamples in Topology*. Springer. Dover reprint, 1995.
- Strang, G., Nguyen, T. (1996). *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley–Cambridge Press.
- Taylor, A. E., Lay, D. C. (1980). *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- van Loan, C. (1992). *Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*. SIAM.
- Vetterli, M., Kovačević, J. (1995). *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall.
- Whittaker, E. T. (1915). On the functions which are represented by the expansions of the interpolation–theory. *Edinb. R. S. Proc.*, **35**:181–194.
- Yosida, K. (1965). *Functional Analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer–Verlag.

- ψ -kompatibel, 65
- z -Transformation, 109
- ‘power iteration’, 138

- abelsch, 26
- abelsche Gruppen, 26
- Abklingbedingung, 100
- Abklingrate, 101
- Abschluss, 23
- Abtastrate, 57
- Abtastatz, 52, 55
- Abtastung, 51, 53
- Adjungierter, 86
- adjungierter Operator, 39
- affine Gruppe, 102
- algebraischer Dualraum, 42
- Analyse
 - Zeit-/Frequenz, 6
- Analyse-Filter, 125
- Analyse-Filterbank, 111
- Analyse-Operator, 85
- Analysefilter, 146
- analytisches Wavelet, 94
- Anfangssegment, 147
- Approximationsordnung, 145
- approximative Identitäten, 96
- approximative Identität, 34
- aquidistant, 51
- Äquivalenz, 85
- Artefakte, 74
- Ausgangsskala, 62
- Automorphismus, 28

- Banachalgebra, 29
- Banachraum, 29, 42

- bandbeschränkt, 53
- Bandbreite, 55
- Bänder, 110
- Bandpassfilter, 53
- Basis, 36, 84
- Bewertungsfunktion, 113
- biorthogonal, 90

- Cauchy-Folge, 87
- Charakter, 35, 44
- Charaktere, 13
- Codimension, 155
- Correction, 125
- critically sampled, 111

- Darstellung, 102
- Deconvolution, 33
- DFT, 55
- Diagonalisierung, 93
- dicht, 22
- digitale Filter, 31
- Dilatation, 4, 53, 123
- Dilatationsoperator, 45
- diskreter Gradient, 137
- diskreter topologischer Raum, 31
- diskrete Fouriertransformation, 55, 56
- diskrete Topologie, 31
- diskrete Wavelettransformation, 127
- Downsampling, 110
- Downsampling-Operator, 117
- dualer Frame, 90
- duale Gruppe, 35
- duale Quotientengruppe, 115
- Dualität, 42

- EEG, 80
- Eigenwert, 137
- Ein–Punkt–Kompaktifizierung, 16
- eingeschränkter Spektralradius, 139
- Einheit, 112
- Einheitssimplex, 156
- Einheitswurzel, 56
- Einheitswurzeln, 119, 134
- Einpunkt–Kompaktifizierung, 43
- erzeugendes System, 84
- expandierende Matrix, 111

- Faltung, 29, 53
- FCWT, 74
- Fensterfunktion, 8, 78
- fester Rahmen, 85
- FFT, 55
- Filter, 108
- Filterbank, 110
 - kritisch abgetastete, 111
- FIR–Filter, 109
- Fourier–Matrix, 115
- Fourier–Wavelets, 80
- Fouriermatrix, 56
- Fourierreihe, 5
- Fouriertransformation, 14, 37, 45
 - inverse, 46
- Fouriertransformierte, 14, 45
- Frame, 84
- Frame–Operator, 86
- Framekonstanten, 98
- Frequenz, 5
- Frequenzauflösung, 57, 78
- Frequenzbereich, 57
- Frequenzlokalisierung, 5, 59
- Frequenzschwerpunkt, 59
- Frequenzvariation, 59
- fundamentale Grenzfunktion, 131
- Funktion
 - bandbeschränkte, 55
 - bandbeschränkte, *siehe* bandbeschränkte
 - gleichmäßig stetige, 130
 - mittelwertfreie, *siehe* Wavelet 47
 - schnell abklingende, 67
 - verfeinerbare, 131
- Funktionensystem, 83

- Gabortransformation, 7, 79
- gefensterte Fouriertransformation, 8, 78
- gefilterte Rückprojektion, 33
- gemeinsamer Spektralradius, 147
- gemeinsam verfeinerbar, 151
- gerichtetes System, 34
- Gewichte, 64
- gleichmäßig stetig, 17
- Gram–Matrix, 82
- Gruppenhomomorphismus, 35

- Haar–Integral, 23
- Haar–Mas, 23
- Haar–Überdeckungsfunktion, 19
- Haar–Wavelet, 4
- Hadamard–Produkt, 118
- Hausdorff–Raum, 15
- Heisenberg–Box, 59
- Heisenberg–Gruppe, 104
- Heisenbergsche Unschärferelation, 53
- Hertz, 5
- Hochpassanteil, 127
- Hochpassfilter, 122
- Holder–Regularität, 140
- holderstetig, 139
- Homomorphismus, 17, 26, 41

- Ideal, 40, 135
- Identität, 31
- Impulsantwort, 108
- Index, 146
- indiskrete Topologie, 31
- instantaneous frequency, 79
- Integral, 22
- interpolatorisch, 123
- Interpolationsvariante Mase, 103

- invariantes Mas, 25
- invers-invariant, 27
- inverse DFT, 58
- inverse FFT, 58
- inverse Fouriertransformation, 38, 39
- Invertierung, 89
- Involution, 30
- Isometrie, 40

- joint spectral radius, 147

- kanonische Abbildung, 18
- kardinaler B-Spline, 57
- kardinale Funktion, 54
- Kardinalzahlen, 54
- Klangfarbe, 6
- Knoten, 63
- Kommutator, 31
- kompakter Operator, 92
- kompatibel, 147
- Kompatibilität, 18
- Kompatibilitätsbedingung, 65
- Komplexifizierung, 13
- Konstante
 - Lipschitz-, 66
- Kontraktion, 138
- kontraktiv, 111
- konvergent, 150
- konvergentes Subdivision-Schema, 129
- konvexe Hülle, 130
- Koordinatenprojektionen, 23
- Korrektur, 125
- Korrelation, 3
- kritische Abtastrate, 55
- kritisch abgetastete Filterbank, 111

- Landweber-Iteration, 89
- Laurentreihe, 109
- lazy Filter, 117
- Lebesgue-Mas, 19
- linksinvariant, 20, 22
- linksreguläre Darstellung, 103

- Lipschitz-Konstante, 66
- lokal kompakt, 15
- LTI-Filter, 108

- Maske, 123, 130
- Maskierungsvektor, 57
- Matrix, 39
- maximales Ideal, 40
- Mehrfach-Filterbank, 146
- mehrfaches Subdivision-Schema, 150
- mehrfache Multiresolution Analysis, 152
- Mercedes-Stern, 85
- mittelwertfrei, 3, 47
- MMRA, 152
- modulare Funktion, 26, 28
- Modulationsmatrix, 120
- Momentanfrequenz, 6, 79
- Momente, 67
 - verschwindende, 67
- Morlet-Wavelet, 78
- MRA, 140
- Multiindex, 107, 118
- multiple Filterbank, 146
- Multiresolution Analysis, 140
- Mutterwavelet, 92

- neutrales Element, 16
- nichttriviale Gruppen, 34
- normalisiert, 47
- Normalisierung, 135
- normierter Frame, 91
- normierter Körper, 44
- normreduzierender Homomorphismus, 44
- Nullstellen, 135
- Nullstellenideal, 135
- Nyquist-Frequenz, 55

- Ondelette, *siehe* Wavelet 47
- Ondelettes, 4
- Operator
 - Abtast-, 55
- orthogonale Matrix, 39

- Orthonormalbasis, 84, 85
 Paley–Wiener–Sätze, 53
 parabolische Dilatation, 153
 Parseval–Frame, 85
 Parseval–Identität, 91
 Partialtone, 6
 perfekte Rekonstruktion, 111, 144, 148
 Phasenverschiebung, 15, 46
 Polyphase–Darstellung, 120
 Polyphase–Vektor, 120
 positiv definitive Funktion, 39
 Potenzmethode, 138
 prakompakt, 23
 Prediction, 125
 Prediction–Correction, 125
 punktetrennend, 31
 Pyramidenschema, 127, 143

 quadratintegrierbare Darstellung, 104
 Quadraturformel, 52
 Quasiinterpolant, 57, 145
 Quincunx–Matrix, 114
 Quotientengruppe, 18
 Quotientenideal, 136

 Radikal, 136
 radikales Ideal, 136
 Rahmen, 84
 Rechtecksregel, 52, 64
 rechtsreguläre Darstellung, 103
 redundant, 85
 reflexiv, 42
 Regularität, 66
 reine Stimmung, 9
 Rekonstruktionswavelet, 50
 relative Genauigkeit, 61
 Richardson–Iteration, 89
 Ring, 40, 112
 Ringhomomorphismus, 42
 Rückwärtsdifferenz, 137

 Scherung, 153
 schnelle Fouriertransformation, 55
 schnelle Wavelettransformation, 58
 Schoenberg–Operator, 57
 schwache Umkehrformel, 51
 Schwebungen, 8
 semidirektes Produkt, 28
 Shannon, 52
 Shearlet–Subdivision–Schema, 154
 Shift, 53
 Si–Funktion, 55
 Signalraum, 107
 sinc, 54
 Sinc–Funktion, 54
 Sinus Cardinalis, 54
 Skalarprodukt, 39
 Skalenparameter, 4
 Skalenprogression, 62
 Skalenräume, 140
 Skalierungsfunktion, 140
 Skalierungsmatrix, 146
 Skalierungsoperator, 53
 Skalogramm, 7
 Smith–Normalform, 112
 Smith–Werte, 112
 Smith–Zerlegung, 112
 Softskill–Übung, 100
 Sombrero, 48
 Spektralradius, 132, 138
 Spektrum, 6
 Spindeln, 80
 Spur, 92, 93
 stabil, 84, 140
 stabile Basis, 84
 stabile Lösung, 141
 stationär, 131
 Steigung, 156
 Stetigkeit
 Lipschitz–, 66
 straffer Rahmen, 85

- Subdivision–Operator, 123, 129
- Subdivision–Schema, 129
- Submaske, 123
- Summe
 - Littlewood, 70
- Symbol, 109
- symmetrisch, 92
- symmetrische, 17
- Synthese–Filter, 125
- Synthese–Filterbank, 111
- Synthese–Operator, 86
- Synthese–Tiefpass, 124
- Synthesefilter, 146

- Teilung der Eins, 134
- Tiefpassanteil, 127
- Tiefpassfilter, 122
- tight Frame, 85
- Ton, 5
- Topologie, 36
- topologische Gruppe, 16
- Torus, 13
- Trace Class, 93
- Träger
 - kompakter, 47
- Transformation
 - Wavelet, 47
- Transition–Operator, 132
- translationsinvariant, 140
- translationsinvariante Raume, 145
- Translationsoperator, 45, 53, 107
- trigonometrische Polynome, 35

- Umgebung, 15
- Undersampling, 55
- unendlichdimensionaler Funktionenraum, 84
- unimodular, 26, 112, 121
- unimodulare Zerlegung, 155
- Unschärferelation
 - Heisenbgersche, 60
- Unterabtastung, 110

- Upsampling, 111
- Upsampling–Operator, 117

- Varietat, 136
- verfeinerbar, 131
- Verfeinerungsgleichung, 141
- verschwindende Momente, 75
- vollstetiger Operator, 92
- Vorhersage, 125

- Wavelet, 3
 - Haar-, 4, 47
 - Mexican Hat, 48
 - Morlet-, 48
 - normalisiertes, 47
 - progressives, 49
 - skaliertes, 47
 - verschwindende Momente, 67
 - zulassiges, 49
- Wavelet–Frame, 92, 100
- Wavelet–Packages, 128
- Wavelets, 143
- Wavelettransformation, 3
- wesentliche Frequenz, 78

- Zariski–Abschluss, 136
- Zeit-/Frequenz–Analyse, 6
- Zeitlokalisierung, 59
- Zeitschwerpunkt, 59
- Zeitvariation, 59
- zentriertes Wavelet, 60
- zero padding, 57
- Ziffern, 155
- zulässig, 49, 51, 104
- Zulässigkeitskonstante, 98
- Zwart–Powell–Element, 114