

Funktionentheorie

Tomas Sauer

Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung
FORWISS
University of Passau
Innstr. 43
94032 Passau



Version 2.0
Stand 28.6.2021

Die altmodische Tafelvorlesung in der Mathematik ist in der übrigen Wissenschaftslandschaft tatsächlich zur Ausnahmeerscheinung geworden, genießt aber gleichzeitig Kult-Status und wäre durchaus eine würdige Anwärtlerin für das immaterielle Kulturerbe der UNESCO, ähnlich wie die deutsche Brotkultur oder das mongolische Knöchelschießen.

G. Zöller, *Forschung und Lehre Online*, 2.4.2015

Nothing spoils numbers faster than a lot of arithmetic.

Peppermint Patty, *The Peanuts*, 4.12.1968

Heute haben wir die experimentelle und mathematische Naturwissenschaft und laufen nicht mehr Gefahr, der Mystik in die Arme zu fallen. Wir können uns aber neue Hilfsarbeiter für die Erkenntnis heranziehen.

K. Laßwitz, *Aspira. Geschichte einer Wolke*

To isolate mathematics from the practical demands of the sciences is to invite the sterility of a cow shut away from the bulls.

P. Chebyshev

Inhaltsverzeichnis

1	Vom Reellen ins Komplexe	3
1.1	Komplexe Zahlen und Funktionen	3
1.1.1	Elementare Funktionen	4
1.1.2	Polardarstellung und Einheitswurzeln	7
1.1.3	Der Logarithmus	9
1.2	Funktionen, Stetigkeit und Ableitungen	9
1.2.1	Stetigkeit	9
1.2.2	Ableitung	10
1.3	Komplexe Differentiation	11
1.3.1	Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen	12
1.3.2	Analytische Funktionen und Potentialfunktionen	15
2	Integrale	19
2.1	Komplexe Integration	19
2.1.1	Integration über reelle Intervalle	19
2.1.2	Kurvenintegrale	20
2.1.3	Geschlossene Kurven und Stammfunktionen	23
2.2	Der Cauchysche Integralsatz	25
2.2.1	Beweis und Variationen	26
2.2.2	Elementargbiete	31
2.3	Integration und Punktauswertung	34
2.3.1	Die Cauchysche Integralformel	34
2.3.2	Glattheit analytischer Funktionen	37
2.3.3	Ganze Funktionen und Algebra	40
2.3.4	Das Maximumprinzip	42
3	Folgen und Reihen	43
3.1	Approximation und Konvergenz	43
3.1.1	Konvergenz von Funktionenfolgen	43
3.1.2	Konvergenz von Funktionenreihen	45
3.2	Potenzreihen	47
3.2.1	Konvergenz	47
3.2.2	Potenzreihendarstellung analytischer Funktionen	49
3.2.3	Rechenregeln für Potenzreihen	50
3.2.4	Beschreibung analytischer Funktionen	53
3.3	Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen	54
3.3.1	Häufungspunkte und Identitätsmengen	54
3.3.2	Offene Abbildungen	56

3.3.3	Maximumsprinzipien	57
4	Singularitäten	61
4.1	Singularitäten analytischer Funktionen	61
4.1.1	Hebbare Singularitäten	62
4.1.2	Außerwesentliche Singularitäten und der Ordnungsbegriff	62
4.1.3	Wesentliche Singularitäten	64
4.1.4	Ein Beispiel: Reelle Integration mit komplexen Mitteln	66
4.2	Laurentreihen	67
4.2.1	Laurentzerlegung und Laurentreihen	67
4.2.2	Komplexe Fourierreihen	72
4.3	Meromorphe Funktionen	73
4.3.1	Riemannsche Zahlenkugel und Definition	74
4.3.2	Partialbruchzerlegungen	75
4.3.3	Meromorphe Funktionen auf der Zahlenkugel	78
4.4	Der Residuensatz	79
4.4.1	Die Windungszahl	79
4.4.2	Residuum und Residenformel	81
4.4.3	Folgerungen aus dem Residuensatz	84
4.4.4	Integralberechnung mit dem Residuensatz	87
5	Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen	93
5.1	Die Gammafunktion	93
5.1.1	Existenz, Funktionalgleichung, elementare Eigenschaften	93
5.1.2	Unendliche Produkte	96
5.1.3	Die Produktdarstellung der Gammafunktion	99
5.1.4	Formeln für die Gammafunktion	102
5.1.5	Die Stirlingformel	104
5.1.6	Die Partialbruchzerlegung	106
5.2	Die Produktformel von Weierstraß	106
5.2.1	Analytische Funktionen	107
5.2.2	Beispiele	111
5.2.3	Meromorphe Funktionen	113
5.2.4	Fazit	116
6	Der Riemannsche Abbildungssatz	117
6.1	Definitionen und Formulierung	117
6.2	Beweis	118
6.2.1	Einfache Transformationen	118
6.2.2	Annäherung an die Kreisscheibe	119
6.2.3	Der Satz von Montel	120
6.2.4	Finale	122
7	Noch ein bisschen Mathematik	125
7.1	Geometrie der Möbiustransformationen	125
7.1.1	Gruppeneigenschaften	126
7.1.2	Kreise und Geraden	128
7.1.3	Fixpunkte	131

Vom Reellen ins Komplexe

1

[...] die Mathematik ist eine ganze Welt für sich, und man muß reichlich lange in ihr gelebt haben, um alles zu fühlen, was in ihr notwendig ist.

(R. Musil, *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*)

Gegenstand der Funktionentheorie ist die Untersuchung von Funktionen komplexer Variabler, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. *Komplexwertige* Funktionen reeller Variablen kennt man schon aus der Analysis [5, 11, 16], da hat es genügt, einfach den Realteil und den Imaginärteil der Funktion separat zu betrachten. In diesem ersten Kapitel wollen wir die wesentlichen Begriffe und Ideen aus der Analysis wiederholen und für die Zwecke der komplexen Analysis aufbereiten.

1.1 Komplexe Zahlen und Funktionen

Zuerst ein bisschen Terminologie, die eigentlich¹ aus der Analysis bekannt sein sollte.

Definition 1.1.1. Der KÖRPER $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen besteht aus allen Zahlen der Form $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $i^2 = -1$. Alternativ kann man eine KOMPLEXE ZAHL auch als Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der mit den Rechenregeln

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \quad (1.1.1)$$

auffassen. Diese Interpretation des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet man als KOMPLEXE ZAHLENEBENE. Jede REELLE ZAHL $x \in \mathbb{R}$ hat als komplexe Zahl die Darstellung $x + i0$ bzw. $(x, 0)$.

Übung 1.1.1

1. Weisen Sie nach, daß die Rechenregeln (1.1.1) den Körperaxiomen entsprechen.
2. Bestimmen Sie $(x, y)^{-1}$, definiert durch $(x, y)^{-1}(x, y) = (1, 0)$.

◇

Definition 1.1.2. Der REALTEIL von $z = x + iy$ ist $\Re z := x$, der IMAGINÄRTEIL $\Im z := y$. Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ bezeichnet man als KOMPLEX KONJUGIERT zu z .

Die Standardmetrik für komplexe Zahlen ist der ABSOLUTBETRAG

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.1.2)$$

¹Aber was heißt das schon?

1 Vom Reellen ins Komplexe

der immer ≥ 0 ist und genau dann den Wert 0 hat, wenn $x = y = 0$, also $z = 0$. Aus der Definition (1.1.2) folgt sofort daß

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.1.3)$$

Übung 1.1.2 Zeigen Sie, daß $|\cdot|$ die Axiome einer Norm erfüllt und daß $d(z, z') = |z - z'|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$ definiert. $\diamond$

Aus der Analysis [17] weiß man, daß ein metrischer Raum die richtige Umgebung ist, in sich mit Folgen und Reihen zu beschäftigen.

Definition 1.1.3. Eine FOLGE $(a_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt KONVERGENT mit Grenzwert² a^* , wenn es zu jedem³ $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_n - a^*| < \varepsilon, \quad n \geq n_0. \quad (1.1.4)$$

Eine unendliche REIHE $\sum a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

heißt KONVERGENT, wenn die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergiert. s_n heißt n te PARTIALSUMME der Reihe. Man bezeichnet die Reihe als ABSOLUT KONVERGENT, wenn $\sum |a|$ konvergiert.

1.1.1 Elementare Funktionen

Die einfachste Funktion auf $\mathbb{C}$ ist wahrscheinlich immer noch ein POLYNOM

$$f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j,$$

bei dem nur endlich viele Körperaxiome verwendet werden. Bei einer POTENZREIHE, deren Entwicklungspunkt wir in $z_0 \in \mathbb{C}$ legen,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.1.5)$$

stellt sich dann schon wieder die Frage nach der Konvergenz. Damit das der Fall ist, muss a_j für $j \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abfallen. Dazu wiederholen wir die folgende Begrifflichkeit aus der Analysis [16].

Definition 1.1.4. Der KONVERGENZRADIUS einer Potenzreihe $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ ist definiert als

$$\rho(f) := \sup \left\{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ konvergiert} \right\}. \quad (1.1.6)$$

²Zur Erinnerung: Die Existenz des Grenzwerts gehört zur Definition der Konvergenz.

³Da $\mathbb{C}$ kein ANGEORDNETER KÖRPER ist, beinhaltet > 0 immer, daß das so verglichene Objekt eine reelle Zahl sein muss.

1.1 Komplexe Zahlen und Funktionen

Wie das folgende Resultat zeigt, trägt der Konvergenzradius seinen Namen zu recht.

Satz 1.1.5. Die Potenzreihe $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|z - z_0| < \rho(f)$ und divergiert für $|z - z_0| > \rho(f)$.

Satz 1.1.6 (Komplexe Exponentialfunktion). Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (1.1.7)$$

absolut, also

$$\rho(\exp) = \infty. \quad (1.1.8)$$

Die Grenzfunktion $\exp(z)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z'). \quad (1.1.9)$$

Außerdem ist $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ und es gilt

$$|e^{ix}| = 1, \quad \overline{e^{ix}} = e^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.10)$$

Beweis: Für die Konvergenz verwendet man das Quotientenkriterium und die Tatsache, daß $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert und so irgendwann durch 1 beschränkt werden kann. (1.1.9) ist ein bisschen Rechnen mit Binomialkoeffizienten und dem Cauchyprodukt von Reihen

$$\begin{aligned} \exp(z + z') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{n!} \right) = \exp(z) \exp(z'). \end{aligned}$$

Die Rechenregeln für die Konjugation liefern

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)},$$

weswegen

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(\overline{ix}) = \exp(-ix), \quad x \in \mathbb{R},$$

und damit

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

sein muss. □

Definition 1.1.7. Die EULERSCHE ZAHL e ist definiert als $e = \exp(1)$ und wir schreiben $e^z := (\exp(1))^z := \exp(z)$.

Definition 1.1.8 (Trigonometrische Funktionen). Die Funktionen COSINUS und SINUS, definiert als

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.1.11)$$

nennt man TRIGONOMETRISCHE FUNKTION. Sie erfüllen per Definitionem die EULERSCHE GLEICHUNG

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.12)$$

1 Vom Reellen ins Komplexe

Beispiel 1.1.9. Sehen wir uns den komplexen Cosinus aus (1.1.11) mal genauer an. Vermittels $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ergibt sich aus (1.1.11) und (1.1.12),

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2} \left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{ix-y} + e^{-ix+y} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x) \right) \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x,\end{aligned}$$

was den komplexen Cosinus dann auch schon in Real- und Imaginärteil aufspaltet.

Übung 1.1.3 Bestimmen Sie analog zu Beispiel 1.1.9 die Darstellung von $\sin z$. ◇

Übung 1.1.4 Beweisen Sie die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\end{aligned}$$

von Cosinus und Sinus. ◇

Nun definieren wir uns eine wichtige Zahl einfach passend.

Definition 1.1.10 (π). Als KREISZAHL⁴ π bezeichnen wir die eindeutige⁵ Zahl⁶ $\pi \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $0 \leq \pi \leq 4$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Bemerkung 1.1.11. Alternativ kann man π auch über die Reihenentwicklung

$$\pi = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}} \quad (1.1.13)$$

definieren; es gibt eine ganze Menge von Reihenentwicklungen für π , die auch für die hochgenaue Berechnung von π benutzt werden.

Satz 1.1.12. $e^{i\pi} = -1$.

Beweis: Da für $x \in \mathbb{R}$ ja

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = e^{ix} e^{-ix} = 1$$

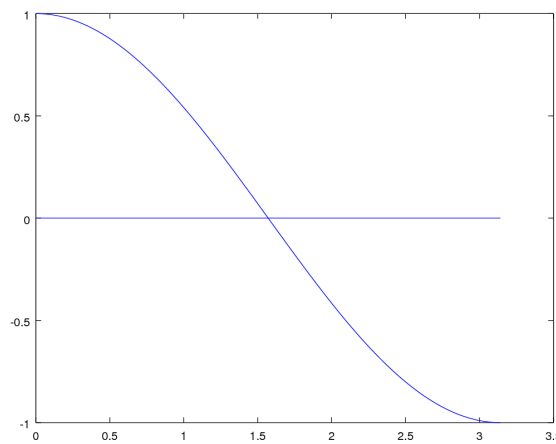
gilt, ist, nach Definition von π ,

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\pi}{2} \in \{\pm 1\}$$

⁴In Kreuzworträtseln auch gerne als LUDOLF'SCHE ZAHL bezeichnet, nach Ludolf/Ludolph van Ceulen, 1540–1610, Fechtmeister (bei dem Namen) und Mathematiker, benannt, der π auf 35 Dezimalstellen berechnete, siehe [2].

⁵Existenz und Eindeutigkeit müssen bewiesen werden, aber das macht man in der Analysis.

⁶Es sollte sich herumgesprochen haben, daß $\pi = 3.1414592\dots$ bzw. $\pi \approx \frac{22}{7}$, was die alten Ägypter verwendet haben. Man kann π beispielsweise aus der Reihenentwicklung des Cosinus und der Nullstellenforderung durch Intervallschachtelung ermitteln, siehe [5].


Abbildung 1.1.1: Cosinusfunktion auf $[0, \pi]$.

und da⁷ $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Damit ist

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = i,$$

also

$$e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1, \quad e^{i\frac{3}{2}\pi} = i^3 = -i, \quad e^{2i\pi} = i^4 = 1, \quad (1.1.14)$$

was sogar noch deutlich mehr ist als nur $e^{i\pi} = -1$. $\square$

1.1.2 Polardarstellung und Einheitswurzeln

Aus Satz 1.1.12 folgt sofort für $k \in \mathbb{Z}$, daß

$$\exp(z + 2ik\pi) = e^z e^{2ik\pi} = e^z \underbrace{\left(e^{i\pi}\right)^{2k}}_{=(-1)^{2k}=1} = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.1.15)$$

die Funktion $\exp$ ist also periodisch, und Sinus und Cosinus sind damit 2π -periodisch. Umgekehrt ist das aber auch die einzige Mehrdeutigkeit.

Wie man aus Abb. 1.1.1 sieht⁸, ist die Cosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ strikt monoton fallend und nimmt alle Werte zwischen -1 und 1 . Sie besitzt also eine UMKEHRFUNKTION $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, den ARCUSCOSINUS, und der ist auch schon alles, was wir brauchen, um das nächste Resultat zu beweisen.

Proposition 1.1.13 (Polardarstellung komplexer Zahlen). *Jede Zahl $0 \neq z \in \mathbb{C}$ kann eindeutig⁹ als*

$$z = |z| e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (1.1.16)$$

geschrieben werden.

⁷Auch das muss man beweisen, siehe [16].

⁸All das kann man natürlich sogar beweisen, siehe [16].

⁹Und für $z = 0$ ist die Darstellung (1.1.16) sogar für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ erfüllt, wir brauchen die Unterscheidung also wirklich nur für die Eindeutigkeit.

1 Vom Reellen ins Komplexe

Beweis: Wir setzen $z' = \frac{z}{|z|}$, so daß

$$1 = |z'|^2 = (\Re z')^2 + (\Im z')^2$$

gilt. Da $(\Re z')^2 \in [0, 1]$ ist $\Re z' \in [-1, 1]$ und $\alpha := \arccos \Re z' \in [0, \pi]$ ist wohldefiniert. Dann ist

$$\Im z' = \pm \sqrt{1 - (\Re z')^2} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sin \alpha =: \sin \beta.$$

Nun setzen wir nur noch

$$\theta = \begin{cases} \alpha, & \alpha = \beta, \\ 2\pi - \alpha, & \alpha = -\beta, \end{cases} \Rightarrow \theta \in [0, 2\pi),$$

dann ist

$$z' = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

wie behauptet. □

Definition 1.1.14 (Phase). Die Zahl θ in der POLARDARSTELLUNG (1.1.16) von z nennt man auch PHASE¹⁰ oder ARGUMENT der komplexen Zahl z , geschrieben als $\theta = \arg z$.

Bemerkung 1.1.15 (Multiplikation). Durch Proposition 1.1.13 haben wir eine geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen:

$$z z' = |z| e^{i\theta} |z'| e^{i\theta'} = |z||z'| e^{i(\theta+\theta')},$$

man multipliziert also die Beträge und addiert die Phasenwinkel. Insbesondere kann die Multiplikation mit einer komplexen Zahl auch als Rotation des anderen Faktors in der ZAHLENEBENE aufgefasst werden.

Proposition 1.1.16 (Einheitswurzeln). Für $n \geq 2$ hat die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau die n Lösungen

$$\zeta_k := e^{2\pi i k/n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (1.1.17)$$

die man n -TE EINHEITSWURZELN nennt.

Beweis: Da

$$\zeta_k^n = \left(e^{2\pi i k/n} \right)^n = e^{2\pi i k} = 1, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

ist jedes ζ_k eine Lösung von $z^n = 1$. Sei nun z eine beliebige Lösung, dann ist unter Verwendung von (1.1.16)

$$1 = |z^n| = |z|^n \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta},$$

und damit

$$1 = \left(e^{i\theta} \right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

so daß $n\theta$ eine Nullstelle des Sinus sein muss, was zu

$$n\theta \in \pi\mathbb{Z} \Rightarrow \theta \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z} \cap [0, 2\pi) = \left\{ \frac{k\pi}{n} : k = 0, \dots, 2n-1 \right\}$$

führt. Da

$$\cos 2k\pi = 1 \quad \text{und} \quad \cos(2k+1)\pi = -1, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

bleiben für $z^n = 1$ nur die geradzahlgigen Vielfachen von π übrig, was genau die Einheitswurzeln ζ_k liefert. □

¹⁰Das kommt von der Interpretation als Wechselstrom oder als akustisches Signal.

1.1.3 Der Logarithmus

Aus der Polardarstellung von Proposition 1.1.15 folgt direkt, daß es zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ genau¹¹ ein $\theta \in [0, 2\pi)$ gibt, so daß

$$z = |z| e^{i\theta} = e^{\log|z| + i\theta} = \exp(\log|z| + i\theta) \quad (1.1.18)$$

ist. Das können wir dann auch etwas formaler formulieren. Dazu benötigen wir den reellen TORUS $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq [-\pi, \pi) \simeq [0, 2\pi)$.

Satz 1.1.17. *Die Funktion $\exp$ ist eine Bijektion zwischen dem Streifen $\mathbb{R} + i\mathbb{T}$ und $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit besitzt sie eine UMKEHRFUNKTION $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R} + i\mathbb{T}$, die man als HAUPTZWEIG des Logarithmus bezeichnet.*

Beweis: Mit (1.1.18) alles sehr einfach. Surjektiv ist die Abbildung, da jedes $z \in \mathbb{C}^*$ eine eindeutige Polardarstellung hat und injektiv ist sie weil

$$\exp(x + i\theta) = \exp(x' + i\theta')$$

zu

$$1 = \frac{\exp(x + i\theta)}{\exp(x' + i\theta')} = \exp((x - x') + i(\theta - \theta')) = e^{x-x'} e^{i(\theta-\theta')}$$

äquivalent ist, was genau dann erfüllt ist, wenn $x = x'$ und $\theta = \theta' + 2k\pi$ ist. Die Einschränkung auf $\mathbb{R} + i\mathbb{T}$ ergibt dann, daß $\theta = \theta'$ sein muss. $\square$

Ein Blick auf (1.1.18) gibt uns dann die explizite Formel für den komplexen Logarithmus.

Korollar 1.1.18. *Für $z \in \mathbb{C}^*$ gilt*

$$\log z = \log|z| + i \arg z. \quad (1.1.19)$$

1.2 Funktionen, Stetigkeit und Ableitungen

Nun betrachten wir Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und deren elementare Eigenschaften. Dazu schreiben wir f bezüglich seines Real- und Imaginärteils als

$$f(z) = u(z) + i v(z) = u(x + iy) + i v(x + iy), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (1.2.1)$$

und verwenden je nach Situation die passende Darstellung aus (1.2.1).

1.2.1 Stetigkeit

Da Stetigkeit von Funktionen etwas mit einer Metrik zu tun hat, sieht die Definition der Stetigkeit nicht anders aus als wir es gewohnt sind.

Definition 1.2.1. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, heißt STETIG an der Stelle $z \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|z' - z| < \delta, \quad z' \in D, \quad \Rightarrow \quad |f(z') - f(z)| < \varepsilon. \quad (1.2.2)$$

Alternativ kann man auch sagen, daß f stetig ist, wenn für jede gegen z konvergente Folge $(z_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{C}$ die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right) = f(z) \quad (1.2.3)$$

erfüllt ist.

¹¹Dafür brauchen wir $z \neq 0$.

1 Vom Reellen ins Komplexe

Proposition 1.2.2. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, ist genau dann stetig an $z \in D$ wenn $u = \Re f$ und $v = \Im f$ stetig sind.

Beweis: Folgt direkt aus

$$|f(z') - f(z)|^2 = (u(z') - u(z))^2 + (v(z') - v(z))^2. \quad (1.2.4)$$

Findet man nämlich ein δ , so daß die linke Seite von (1.2.4) $< \varepsilon^2$ ist, so gilt dies auch für beide Terme auf der rechten Seite, kann man umgekehrt beide Terme auf der rechten Seite durch ε^2 beschränken, so ist die linke Seite $< 2\varepsilon^2$. $\square$

Korollar 1.2.3. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, stetig an $z \in D$, dann ist auch $|f|$ stetig an z .

Beweis: $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist Hintereinanderausführung stetiger reeller Funktionen und damit stetig. $\square$

Das nächste Resultat ist ein Standardresultat für allgemeine metrische Räume, Beweise finden sich in [10, 6, 17].

Satz 1.2.4. Seien $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind auch $f + g$, cf , $c \in \mathbb{C}$, und $f \circ g := f(g(\cdot))$ stetig.

Beispiel 1.2.5. Die trigonometrischen Funktionen und alle Polynome sind stetig auf $\mathbb{C}$, ebenso $z \mapsto |z|$. Die Funktion $z \mapsto 1/z$ ist stetig auf $\mathbb{C}^*$.

Im Reellen hatten wir es mit der schönen Situation zu tun, daß die Umkehrfunktionen stetiger Funktionen wieder stetig waren. Das ist leider im Komplexen nicht mehr der Fall.

Beispiel 1.2.6. Die Funktion $z \mapsto \arg z$ ist die Umkehrfunktion der stetigen Funktion $\theta \mapsto e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{T} \simeq [0, 2\pi)$, aber selbst nicht mehr stetig, denn $\arg(1) = 0$, aber mit $\theta_n := 2\pi - 1/n$ sowie $z_n = e^{i\theta_n}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 2\pi \neq 0.$$

Bemerkung 1.2.7. Stellt man $\mathbb{T}$ durch¹² $(-\pi, \pi]$ dar, dann ist $\arg$ an der Stelle -1 unstetig, siehe [8]. Generell ist es immer die Periodizität, die uns Ärger macht, denn das halboffene Intervall ist nicht kompakt, im Gegensatz zur Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, den es darstellen soll.

Bemerkung 1.2.8. Periodizität ist in $\mathbb{R}$ nicht möglich, hier haben wir zum ersten Mal einen Unterschied in der *komplexen* Analysis, was uns bereits die Vermutung nahelegt, daß *Kurven* in $\mathbb{C}$ eine interessante Rolle spielen werden.

1.2.2 Ableitung

Auch die Definition der Ableitung ergibt sich erst einmal ganz unschuldig auf die wohlbekannte Art und Weise.

Definition 1.2.9 (Ableitung). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt DIFFERENZIERBAR an $z \in D$ heißt (komplex) DIFFERENZIERBAR an $z \in D$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} =: f'(z) \quad (1.2.5)$$

existiert.

¹²Wie man das Intervall halboffen wählt ist dabei natürlich irrelevant.

Bemerkung 1.2.10. So richtig sinnvoll wird die Ableitung nur dann, wenn man annimmt, daß D eine ganze Umgebung¹³ von z enthält. Wenn es keine Folge $z' \rightarrow z$ gibt, ist (1.2.5) bedeutungslos. Allerdings kann man D auch als ein reelles Intervall, $D = [a, b]$, wählen, dann ist f nur eine Funktion eines reellen Arguments und Definition 1.2.9 liefert genau das, was man aus der Analysis kennt. Dieser Fall ist also als Spezialfall enthalten.

Wie für reellwertige Funktionen gibt es nun die sogenannten Permanenzeigenschaften der Ableitung.

Satz 1.2.11. Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $z \in D$ differenzierbar und ist $c \in \mathbb{C}$, so sind auch die Funktionen $f + g$, cf , $f \cdot g$ und $\frac{1}{f}$ differenzierbar, letztere, falls $f(z) \neq 0$. Es gelten die PRODUKTREGEL

$$(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z), \quad (1.2.6)$$

die QUOTIENTENREGEL

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}. \quad (1.2.7)$$

Ist g an der Stelle z differenzierbar und f an der Stelle $g(z)$, so gilt die KETTENREGEL

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z). \quad (1.2.8)$$

Übung 1.2.1 Beweisen Sie Satz 1.2.11. ◇

Definition 1.2.12. Ist f differenzierbar für alle $z \in D$, so bezeichnet $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$ die ABLEITUNGSFUNKTION von f .

Beispiel 1.2.13 (Differenzierbare Funktionen).

1. Polynome sind differenzierbar. Insbesondere gilt für das MONOM $f(z) = z^n$, daß $f'(z) = n z^{n-1}$ ist.
2. Die Funktion $\exp$ ist differenzierbar und ihre eigene Ableitung:

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(z) \left(1 + \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!} \right) = \exp(z). \end{aligned}$$

nach Definition (1.1.7).

1.3 Komplexe Differentiation

Bisher war das alles ganz einfach und nichts neues im Vergleich zur reellen Analysis. Spannend wird es allerdings, wenn wir die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und ihren Parameter nach Real- und Imaginärteil trennen und somit als eine Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ v(x+iy) \end{pmatrix}, \quad (1.3.1)$$

ansehen. Jetzt benötigen wir ein bisschen Terminologie aus der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^2$, wechseln also nahtlos in den Teil II der Analysis.

¹³Also eine offene Menge, die z enthält.

1 Vom Reellen ins Komplexe

Definition 1.3.1 (Jacobimatrix). Die JACOBIMATRIX einer Funktion $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, auch TOTALES DIFFERENTIAL genannt, ist definiert als

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k} : \begin{matrix} j = 1, \dots, q \\ k = 1, \dots, p \end{matrix} \right) \in \mathbb{R}^{q \times p}. \quad (1.3.2)$$

Die Jacobimatrix $F'(x)$ an der Stelle x ist der Koeffizient der ABLEITUNG einer Funktion in mehreren Variablen als lineare Funktion, d.h. die eindeutig bestimmte Matrix A , so daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - (F(x) + Ah)\|}{\|h\|} = 0$$

ist, siehe z.B. [17].

1.3.1 Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

Jetzt gehen wir davon aus, daß $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ an $z = x + iy$ komplex differenzierbar ist. Da wie im Reellen¹⁴ Differenzierbarkeit gleichbedeutend zu

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z) - f'(z)(z' - z)}{z' - z} = 0 \quad (1.3.3)$$

ist, können wir die folgenden einfache Beobachtung machen.

Lemma 1.3.2. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann differenzierbar an z , wenn

$$0 = \lim_{z' \rightarrow 0} \frac{\Re(f(z+z') - f(z) - f'(z)z')}{|z'|} = \lim_{z' \rightarrow 0} \frac{\Im(f(z+z') - f(z) - f'(z)z')}{|z'|} \quad (1.3.4)$$

Beweis: Wir ersetzen z' in (1.3.3) durch $z + z'$ und nutzen die Tatsache, daß $\lim a_n = 0$ genau dann wenn $\lim |a_n| = 0$ ist. Und da

$$\begin{aligned} & \lim_{z' \rightarrow 0} \max \left(\frac{|\Re(f(z+z') - f(z) - f'(z)z')|}{|z'|}, \frac{|\Im(f(z+z') - f(z) - f'(z)z')|}{|z'|} \right) \\ & \leq \lim_{z' \rightarrow 0} \frac{|f(z+z') - f(z) - f'(z)z'|}{|z'|} \\ & \leq \lim_{z' \rightarrow 0} \left(\frac{\Re(f(z+z') - f(z) - f'(z)z')}{|z'|} + \frac{\Im(f(z+z') - f(z) - f'(z)z')}{|z'|} \right) \end{aligned}$$

konvergiert der Absolutbetrag genau dann, wenn (1.3.4) erfüllt ist. $\square$

Übung 1.3.1 Zeigen Sie, daß für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichungen

$$\max(|\Re z|, |\Im z|) \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$$

erfüllt sind. $\diamond$

Satz 1.3.3 (Differenzierbarkeit). Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann an $z = x + iy$ differenzierbar, wenn die Funktion¹⁵ $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an (x, y) differenzierbar ist und es eine Funktion $f': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \Re f'(z) & -\Im f'(z) \\ \Im f'(z) & \Re f'(z) \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

erfüllt ist.

¹⁴Der Beweis aus der Analysis I lässt sich wörtlich kopieren.

¹⁵Genau genommen ist die Funktion nur auf $D' = \{(x, y) : x + iy \in D\} \subset \mathbb{R}^2$ definiert, aber das verkompliziert die Schreibweise des Satzes nur unnötig. Dank der Fußnote wissen wir es ja.

Beweis: Setzen wir F aus (1.3.1) für f ein, dann ist, mit $c := (a + ib) := f'(z) \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z + z') - f(z) - f'(z)z' &= u(x + x', y + y') - u(x, y) + i(v(x + x', y + y') - v(x, y)) - (a + ib)(x' + iy') \\ &= (u(x + x', y + y') - u(x, y) - (ax' - by')) \\ &\quad + i(v(x + x', y + y') - v(x, y) - (bx' + ay')) \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.3.2 bedeutet dies, daß

$$0 = \lim_{(x', y') \rightarrow 0} \frac{F(x + x', y + y') - F(x, y) - A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|_2}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

gelten muss. Und das ist wiederum äquivalent dazu, daß F an (x, y) differenzierbar ist und die Ableitung $F'(x, y) = A$ sein muss. $\square$

Bemerkung 1.3.4. Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (1.3.6)$$

werden als DREHSTRECKUNG bezeichnet und stellen die komplexe Multiplikation im $\mathbb{R}^2$ dar:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(cz) \\ \Im(cz) \end{pmatrix}, \quad c = a + ib, z = x + iy.$$

Der Name DREHSTRECKUNG rührt daher, daß man die Matrix als

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (1.3.7)$$

schreiben kann, also als Kombination einer STRECKUNG und einer DREHUNG. Dabei ist (1.3.7) nichts anderes als die Matrixform der Polardarstellung von c aus (1.1.16).

Übung 1.3.2 Zeigen Sie, daß

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad a' + ib' = \frac{1}{a + ib}.$$

$\diamond$

Die Identität (1.3.5) ist nun wieder äquivalent zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Re f' = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\Im f' = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

was wir folgendermaßen zusammenfassen können.

Korollar 1.3.5 (Cauchy–Riemann). *Die Funktion $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$, D offen, ist genau dann an $z \in D$ komplex differenzierbar, wenn F and (x, y) total differenzierbar gelten und die CAUCHY–RIEMANN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad (1.3.8)$$

erfüllt sind. Es gilt dann

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z). \quad (1.3.9)$$

1 Vom Reellen ins Komplexe

Bemerkung 1.3.6. Auch wenn Korollar 1.3.5 einfach zu beweisen war, stellt es einen wesentlichen Unterschied zum reellen Fall dar: Nicht jede Funktion, bei der Realteil und Imaginärteil differenzierbar sind, ist auch komplex differenzierbar, da Real- und Imaginärteil über (1.3.8) verknüpft sein können. $\mathbb{C}$ ist also doch etwas anderes als $\mathbb{R}^2$!

Definition 1.3.7. Statt $\frac{\partial u}{\partial x}$ schreibt man auch u_x oder $\partial_x u$ oder $\partial_1 u$ und entsprechend für $\frac{\partial u}{\partial y}$ dann u_y , $\partial_y u$, $\partial_2 u$.

Beispiel 1.3.8 (Differenzierbarkeit).

1. Die Funktion $f(z) = z^2$ ist komplex differenzierbar. Da

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2, \\ v(x, y) &= 2xy, \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\partial_1 u(z) = 2x = \partial_2 v(z), \quad \partial_2 u(z) = -2y = -\partial_1 v(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$, die Cauchy–Riemann Differentialgleichungen sind also ebenfalls erfüllt.

2. Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist, im Gegensatz zu $f(z) = z$, nicht differenzierbar. Hier wäre $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, und damit

$$\partial_1 u(z) = 1 \neq -1 = \partial_2 v(z).$$

3. Die Funktion $\exp$ ist ja bereits als differenzierbar nachgewiesen. Verifizieren wir es und betrachten

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

also

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

und damit

$$\partial_1 u = e^x \cos y, \quad \partial_2 u = -e^x \sin y, \quad \partial_1 v = e^x \sin y, \quad \partial_2 v = e^x \cos y,$$

woraus die Cauchy–Riemann Differentialgleichungen direkt folgen.

4. Mit $\exp(z)$ ist auch $\cos(x) = \frac{1}{2} (\exp(iz) + \exp(-iz))$ differenzierbar und wir erhalten

$$\cos'(z) = \frac{1}{2} (i \exp(iz) - i \exp(-iz)) = \frac{\exp(-iz) - \exp(iz)}{2i} = -\sin(z)$$

und ganz analog auch $\sin' = \cos$.

Eine erste Bemerkung etwas allgemeinerer Natur zur Komplexität komplexer Ableitungen ist die folgende.

Proposition 1.3.9. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, D offen, dann ist f genau dann komplex differenzierbar, wenn f auf D lokal konstant¹⁶ ist.

¹⁶Ein Funktion heißt LOKAL KONSTANT auf D , wenn es zu jedem $z \in D$ eine Umgebung gibt, auf der die Funktion konstant ist. Sonst wäre der Satz beispielsweise für die Vereinigung zweier disjunkter offener Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ falsch, denn auf jedem Bereich kann die Konstante eine andere sein.

Beweis: Reellwertig heißt, daß $v = \Im f = 0$ und damit ist wegen (1.3.8) für jedes $z \in D$

$$\partial_1 u(z) = \partial_2 v(z) = 0, \quad \partial_2 u(z) = -\partial_1 v(z) = 0,$$

also $u'(z) = 0$ und damit u lokal konstant. Ist umgekehrt f lokal konstant und reellwertig, dann ist u lokal konstant, also $u' = 0$ und $F'(x, y) = 0$ für alle (x, y) mit $x + iy \in D$. $\square$

Übung 1.3.3 Zeigen Sie: $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, D offen, ist genau dann lokal konstant, wenn f komplex differenzierbar ist und $f'(z) = 0$, $z \in D$, gilt. $\diamond$

Beispiel 1.3.10. Die Funktionen $f(z) = |z|$, $f(z) = |z|^2$, $f(z) = \Re z$ oder $f(z) = |g(z)|$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, können auf einer offenen Menge D **nicht** komplex differenzierbar sein.

1.3.2 Analytische Funktionen und Potentialfunktionen

Zuerst eine zentrale Begrifflichkeit der Funktionentheorie.

Definition 1.3.11 (Analytische Funktion). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, heißt ANALYTISCH, HOLOMORPH oder REGULÄR in D , wenn sie in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist. Sie heißt ANALYTISCH in einem Punkt z , wenn es eine offene Umgebung $U \subset D$, $z \in U$, von z gibt, so daß die Funktion analytisch in U ist.

Achtung: Die offene Umgebung in Definition 1.3.11 ist wichtig.

Beispiel 1.3.12. Die Funktion $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ ist wegen

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{|z|^2}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} |z| = 0$$

an der Stelle 0 komplex differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Da die Funktion reellwertig und nirgends konstant ist, kann sie aber auf keiner offenen Menge komplex differenzierbar sein und ist daher nicht analytisch.

Als nächstes noch die Ableitung der Umkehrfunktion.

Satz 1.3.13. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, D offen, eine in D analytische Funktion mit $f'(z) \neq 0$, $z \in D$. Dann gilt:

1. Es gibt eine offene Teilmenge $D_0 \subset D$ auf der f injektiv ist.
2. f besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{C}$, diese ist analytisch und erfüllt

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}. \quad (1.3.10)$$

Beweis: Ist f analytisch, dann ist $F : D' \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D' := \{(x, y) : x + iy \in D\}$, eine differenzierbare Funktion mit

$$\det F'(x, y) = (\Re f'(z))^2 + (\Im f'(z))^2 = |f'(z)|^2, \quad z = x + iy \in D.$$

Damit ist¹⁷ F eine injektive Funktion mit Umkehrfunktion F^{-1} , die

$$(F^{-1})'(x, y) = (F'(x, y))^{-1}$$

im Matrixsinne erfüllt. Zusammen mit Übung 1.3.2 ist das dann auch schon der Beweis. $\square$

¹⁷Wieder einmal Analysis II, Satz über die Umkehrfunktion. Auch dort muss man für die Injektivität den Definitionsbereich eventuell nochmals einschränken.

1 Vom Reellen ins Komplexe

Beispiel 1.3.14 (Logarithmus). Da die Exponentialfunktion $z \mapsto \exp(z)$ eine überall differenzierbare, also analytische, Funktion ist, sollten wir auch ihre Umkehrfunktion, den LOGARITHMUS ableiten können. Dazu müssen wir aber $\exp$ auf $\mathbb{R} + i\mathbb{T}$ einschränken, wobei wir diesmal den Torus durch $[-\pi, \pi)$ darstellen wollen. Dieses Intervall ist aber nicht offen, so daß es geschickter ist, sich auf $(-\pi, \pi)$ einzuschränken. Da $\exp$ eingeschränkt auf die Menge $\mathbb{R} + i(-\pi, \pi)$ injektiv ist und $\exp' \neq 0$ auf dieser Menge gilt, können wir Satz 1.3.13 anwenden und erhalten

$$\log'(\exp(z)) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)}, \quad z \in \mathbb{R} + i(-\pi, \pi),$$

beziehungsweise

$$\log'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \exp(\mathbb{R} + i(-\pi, \pi)) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-. \quad (1.3.11)$$

Die Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, bei der die negative reelle Achse inklusive Nullpunkt aus den komplexen Zahlen entfernt wird, bezeichnet man gerne als GESCHLITZTE EBENE. Auf $\mathbb{R}_-$ springt der Logarithmus wegen

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log(x \pm iy) = \log|x| \pm i\pi, \quad x \in \mathbb{R}_-.$$

Wie können aber nun komplexe Ableitungen überhaupt aussehen? Nehmen wir an, wir hätten¹⁸ $f'(z) = u'(z) + i v'(z)$, also

$$u' = \partial_1 u = \partial_2 v, \quad v' = \partial_1 v = -\partial_2 u,$$

und nehmen wir ausserdem an, u und v wären zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist

$$\partial_1 u' = \partial_1^2 u = \partial_1 \partial_2 v, \quad \partial_2 v' = \partial_2 \partial_1 v = -\partial_2^2 u$$

und somit, da nach Annahme die Ableitungen vertauscht werden dürfen¹⁹,

$$\partial_1^2 u = \partial_1 \partial_2 v = \partial_2 \partial_1 v = -\partial_2^2 u$$

beziehungsweise

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u =: \Delta u. \quad (1.3.12)$$

Definition 1.3.15 (Laplaceoperator & harmonische Funktionen).

1. Der (reelle) DIFFERENTIALOPERATOR

$$u \mapsto \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u, \quad u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.3.13)$$

heißt LAPLACEOPERATOR.

2. Eine homogene Lösung der LAPLACEGLEICHUNG

$$\Delta u = 0 \quad (1.3.14)$$

nennt man HARMONISCHE FUNKTION oder POTENTIALFUNKTION.

¹⁸**Achtung:** Hier stehen u', v' für Real- und Imaginärteil der Ableitung und nicht für die komplexen Ableitungen des Real- und Imaginärteils. Letzteres wäre ja auch nicht sinnvoll, denn reellwertige Funktionen sind normalerweise ja **nicht** komplex differenzierbar, siehe Proposition 1.3.9.

¹⁹Satz von Schwarz.

1.3 Komplexe Differentiation

Satz 1.3.16. *Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, eine in D analytische Funktion, deren Real- und Imaginärteil als Funktionen in x, y zweimal stetig partiell differenzierbar sind, dann sind $\Re f$ und $\Im f$ harmonische Funktionen.*

Beweis: Für den Realteil u haben wir das in (1.3.12) schon nachgewiesen, für den Imaginärteil v erhalten wir es durch

$$\partial_1^2 v = \partial_1 v' = -\partial_1 \partial_2 u = -\partial_2 \partial_1 u = -\partial_2 u' = -\partial_2^2 v$$

aus den Cauchy–Riemann Differentialgleichungen. □

Übung 1.3.4 Zeigen Sie: Ist $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, dann ist die Funktion

$$f(z) = \partial_1 u(x, y) - i \partial_2 u(x, y), \quad z = x + i y,$$

analytisch in $D \subset \mathbb{C}$, D offen. ◇

Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions.

(E. Klein)

Die komplexe Integralrechnung unterscheidet sich signifikant von ihrer reellen Version, aber auch von der Integralrechnung im $\mathbb{R}^2$. Bei letzterem würde man Integration über Gebiete betrachten, also „Vektoranalysis“ betreiben¹, hier werden wir uns mit der Integration über Kurven in $\mathbb{C}$ befassen, denn wir haben es ja immer noch mit Funktionen *einer* Variablen zu tun.

2.1 Komplexe Integration

Um komplexe Integration einführen zu können, sehen wir uns erst einmal an, wie wir die Integration auf $\mathbb{R}$ einfach erweitern können und ziehen dann zusätzliche Schlüsse für $\mathbb{C}$.

2.1.1 Integration über reelle Intervalle

Wir setzen voraus, daß wir ein BESTIMMTES INTEGRAL

$$\int_a^b f(x) dx, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

zur Verfügung haben, das zumindest für jede stetige Funktion wohldefiniert ist. Normalerweise wird dies das Riemann–Integral sein, das man aus der Analysis kennt.

Definition 2.1.1 (Integrierbarkeit). Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt INTEGRIERBAR, wenn die Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ integrierbar sind, also wenn

$$\int_a^b \Re f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \Im f(x) dx$$

existieren und endlich sind. Dann definieren wir das INTEGRAL

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \Re f(x) dx + i \int_a^b \Im f(x) dx. \quad (2.1.1)$$

Diese Definition erbt natürlich alle Eigenschaften des reellen Integrals.

Satz 2.1.2. *Das bestimmte Integral aus (2.1.1) hat die folgenden Eigenschaften:*

¹Was wir zur Abwechslung aus der Analysis eher nicht kennen, es sei denn, sie wäre dreisemestrig, siehe [7].

2 Integrale

1. LINEARITÄT: Für $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \quad (2.1.2)$$

2. DREIECKSUNGLEICHUNG: Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| (b - a). \quad (2.1.3)$$

3. SUBSTITUTIONSREGEL: Für stetig differenzierbares $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und integrierbares $f : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx. \quad (2.1.4)$$

4. STAMMFUNKTION Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar² mit Ableitung $F' = f$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.1.5)$$

Beweis: Das einzige, was nicht direkt aus der Definition 2.1.1 und den bekannten Eigenschaften des Riemann-Integrals folgt, ist (2.1.3). Da wir für konstantes $f = c$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = |(b - a)c| = (b - a)|c| = \int_a^b |f(x)| dx$$

ist, gilt dies auch für beliebige komplexwertige Treppenfunktionen und dann, via Riemannsumme für beliebige integrierbare Funktionen. $\square$

2.1.2 Kurvenintegrale

Die wesentliche Rolle in der komplexen Analysis spielen Integrale entlang von Kurven. Das ist insofern eine sinnvolle Verallgemeinerung als es in $\mathbb{R}$ eigentlich nur eine Form von Kurven gibt, nämlich Intervalle. Dazu wiederholen wir erst einmal den Begriff einer Kurve, der aus der Analysis bekannt ist.

Definition 2.1.3 (Kurve). Als KURVE oder PFAD bezeichnen wir eine stetige Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ von einem kompakten reellen Intervall nach $\mathbb{C}$. Die Kurve φ heißt GLATT, wenn sie stetig differenzierbar ist und REGULÄR, wenn $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, ist.

Bemerkung 2.1.4.

1. Vor allem in der Differentialgeometrie versteht man unter einer KURVE nur die Punktmenge³

$$I(\varphi) = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{C} \quad (2.1.6)$$

die Funktion φ heißt dann PARAMETRISIERUNG der Kurve.

2. Kurven lassen sich als Abbildungen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ oder $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ nicht wirklich unterscheiden.

²Reell differenzierbar! Das ist ja äquivalent dazu, daß die Funktionen $\Re F(x)$ und $\Im F(x)$ „ganz normal“ nach x differenzierbar sind.

³Der Buchstabe „I“ steht für „Image“.

Beispiel 2.1.5. Die Funktionen $\varphi_k(x) := e^{ikx}$, $x \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{N}$, sind voneinander verschiedene, glatte und reguläre Funktionen, aber liefern dieselbe Punktmenge

$$\varphi_k(\mathbb{T}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

die aber bei φ_k dann k -mal umlaufen wird.

Definition 2.1.6 (Bogenlänge). Die BOGENLÄNGE einer glatten Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\ell(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(x)| dx. \quad (2.1.7)$$

Beispiel 2.1.7. Die Bogenlänge der φ_k aus Beispiel 2.1.5 ist

$$\ell(\varphi_k) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d}{dx} e^{ikx} \right| dx = k \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|i|}_{=1} \underbrace{|e^{ikx}|}_{=1} dx = 2k\pi,$$

also k mal der Umfang des Einheitskreises.

Da das Integral die Additivitätseigenschaft

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

besitzt, kann man bei der Glattheit von Kurven kleine Zugeständnisse machen, solange es das Integral betrifft.

Definition 2.1.8. Eine Kurve⁴ $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt STÜCKWEISE GLATT, wenn es Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (2.1.8)$$

gibt, so daß die EINSCHRÄNKUNG $\varphi|_{[x_{j-1}, x_j]}$ auf das Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ glatt ist, $j = 1, \dots, n$. Die Bogenlänge einer stückweise glatten Kurve ist dann

$$\ell(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(x)| dx := \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\varphi'(x)| dx. \quad (2.1.9)$$

Das erlaubt uns die Definition des zentralen Integralbegriffs der komplexen Analysis.

Definition 2.1.9 (Kurvenintegral). Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine (stückweise) glatte Kurve und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \supseteq I(\varphi) := \varphi([a, b])$. Das KURVENINTEGRAL oder KONTURINTEGRAL von f entlang φ ist definiert als

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta := \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx. \quad (2.1.10)$$

Bei stückweise glatten Funktionen ist das Integral im Sinne von (2.1.9) zu verstehen.

Bemerkung 2.1.10. Wir verwenden die folgende **Konvention**: Wann immer wir ein Kurvenintegral $\int_{\varphi}$ verwenden, wird φ als stückweise glatte Kurve vorausgesetzt, damit das Kurvenintegral auch wohldefiniert ist.

Beginnen wir mit ein paar einfachen Eigenschaften des Kurvenintegrals, die ziemlich direkt aus den bekannten Eigenschaften des Integrals folgen.

⁴Das beinhaltet nach Definition 2.1.3 bereits, daß φ stetig ist.

2 Integrale

Proposition 2.1.11 (Kurvenintegral). *Das Kurvenintegral einer Funktion f entlang einer stückweise glatten Kurve φ hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $f \rightarrow \int_{\varphi} f$ ist ein LINEARES FUNKTIONAL in f , also eine lineare Abbildung von den stetigen Funktionen auf $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

2. Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(\varphi(x))| \ell(\varphi). \quad (2.1.11)$$

3. Es generalisiert das reelle Integral: Ist $\varphi(x) = x$ und damit $\varphi([a, b]) = [a, b]$, dann ist

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.1.12)$$

4. INVARIANZ unter REPARAMETRISIERUNG: Ist $\psi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ eine stückweise glatte Kurve mit $\psi(a') = a$, $\psi(b') = b$, dann ist

$$\int_{\varphi \circ \psi} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.1.13)$$

5. Hat f die komplex differenzierbare STAMMFUNKTION⁵ F , d.h. $F' = f$, so gilt

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)). \quad (2.1.14)$$

Beweis: 1) folgt aus der Linearität des Integrals, 2) aus der Tatsache, daß

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta \right| &= \left| \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(\varphi(x)) \varphi'(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(\varphi(x))| \underbrace{\int_a^b |\varphi'(x)| dx}_{=\ell(\varphi)}, \end{aligned}$$

und 3) ist wirklich trivial. Für 4) bemerken wir zuerst, daß $\varphi \circ \psi$ ebenfalls stückweise glatt ist und erhalten mit der Kettenregel und der Substitutionsregel, daß

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \circ \psi} f(\zeta) d\zeta &= \int_{a'}^{b'} f(\varphi(\psi(x))) \varphi'(\psi(x)) \psi'(x) dx \\ &= \int_{\psi(a')}^{\psi(b')} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

5) folgt aus (2.1.5). □

Bemerkung 2.1.12. Das wichtigste von diesen einfachen Resultaten ist (2.1.13), denn es sagt uns, daß für das Kurvenintegral letztlich das Bild $I(\varphi)$ relevant ist und nicht die konkrete Parametrisierung.

⁵Eigentlich braucht man hier noch keine komplexe Differentiation, F muss nur an jeder Stelle $\varphi(t)$ in Richtung $\varphi'(t)$ richtungsdifferenzierbar sein.

Beispiel 2.1.13. Die Funktionen φ_k aus Beispiel 2.1.7 sind ja von der Form $\varphi_k = \varphi_1(k \cdot)$ und damit ist

$$\int_{\varphi_k} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi_1} f(\zeta) d\zeta$$

immer das Integral über den Einheitskreis.

Der nächste Begriff ist nahezu selbsterklärend.

Definition 2.1.14. Eine Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt GESCHLOSSEN, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$ ist.

Korollar 2.1.15. *Besitzt die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion und ist φ eine geschlossene Kurve mit $I(\varphi) \subseteq D$, so gilt*

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.1.15)$$

Beweis: Nach (2.1.14) ist

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)) = 0.$$

□

Beispiel 2.1.16 (Potenzen auf dem Kreis). Auf dem Kreis mit Radius $r > 0$, parametrisiert durch

$$\varphi(t) = r \exp(it), \quad t \in [0, 2\pi],$$

erhalten wir, für $n \in \mathbb{Z}$, daß

$$\int_{\varphi} \zeta^n d\zeta = \int_0^{2\pi} (\varphi(t))^n \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} r i e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt,$$

also

$$\int_{\varphi} \zeta^n d\zeta = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases} \quad (2.1.16)$$

siehe Übung 2.1.1.

Übung 2.1.1 Zeigen Sie, daß

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \delta_{n0} 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

◇

Korollar 2.1.17. *Die Funktion $f(z) = 1/z$ hat auf keiner Teilmenge von $\mathbb{C}^*$, die eine Umgebung des Nullpunkts enthält, eine Stammfunktion.*

2.1.3 Geschlossene Kurven und Stammfunktionen

Auch wenn es einfach zu beweisen war, hat Korollar 2.1.15 recht weitreichende Auswirkungen, weil es uns, siehe Korollar 2.1.17 ermöglicht, zu entscheiden, ob eine Funktion eine Stammfunktion besitzt. Das ist wieder ein Unterschied zur reellen Analysis wo *jede* stetige Funktion eine Stammfunktion hatte. Wir werden nun sehen, daß Korollar 2.1.15 sogar eine Umkehrung hat, allerdings unter gewissen Einschränkungen an den Bereich.

2 Integrale

Definition 2.1.18. Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **BOGENZUSAMMENHÄNGEND**, wenn es zu zwei beliebigen Punkten z, z' eine Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow D$ gibt, so daß $\varphi(a) = z$ und $\varphi(b) = z'$. Ein GEBIET $D \subset \mathbb{C}$ ist eine **bogenzusammenhängende offene Menge**.

Nun zwei Operationen auf Kurven. Da irgendwie jede Notation seltsam aussieht, auch die in [8], können wir es ganz eklektisch machen.

Definition 2.1.19. Seien $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\psi : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$. Wir bilden die Kurven

$$\overleftarrow{\varphi} : \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{C}, \\ t & \mapsto \varphi(a + b - t), \end{cases} \quad (2.1.17)$$

und $\varphi \rightarrow \psi : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$(\varphi \rightarrow \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b], \\ \psi(t), & t \in [b, c]. \end{cases} \quad (2.1.18)$$

Damit das wirklich eine Kurve, also stetig ist, müssen wir allerdings $\varphi(b) = \psi(b)$ voraussetzen.

Anschaulich sind die beiden Operationen ja ganz einfach: $\overleftarrow{\varphi}$ durchläuft φ in umgekehrter Richtung, es ist also insbesondere $I(\overleftarrow{\varphi}) = I(\varphi)$, wohingegen $\varphi \rightarrow \psi$ die beiden Kurven aneinanderhängt. Wenn alles „brav“ ist, dann erhalten wir

$$\int_{\overleftarrow{\varphi}} f(\zeta) d\zeta = - \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta \quad (2.1.19)$$

und

$$\int_{\varphi \rightarrow \psi} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta + \int_{\psi} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.1.20)$$

Jetzt kann man Ableitungen, also Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, mittels Integration charakterisieren.

Satz 2.1.20 (Stammfunktionen & geschlossene Kurven). *Für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem GEBIET $D \subseteq \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

1. f besitzt eine Stammfunktion.
2. Für jede geschlossene Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow D$ gilt

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.1.21)$$

3. Für jede Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow D$ hängt $\int_{\varphi} f$ nur von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ ab.

Beweis: „1) $\Rightarrow$ 2)“ ist Korollar 2.1.15, für „2) $\Rightarrow$ 3)“ nehmen wir an, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ wären Kurven mit $\varphi(a) = \psi(c)$ und $\varphi(b) = \psi(d)$. Indem wir ψ durch $\psi(\cdot - c + b)$ ersetzen, können wir annehmen, daß $c = b$ ist. Nach dieser Transformation ist dann $\varphi \rightarrow \overleftarrow{\psi}$ wohldefiniert und es gilt

$$0 = \int_{\varphi \rightarrow \overleftarrow{\psi}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta + \int_{\overleftarrow{\psi}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta - \int_{\psi} f(\zeta) d\zeta,$$

da das Integral nur von den Endpunkten abhängt und diese identisch sind.

2.2 Der Cauchysche Integralsatz

Ein bisschen arbeiten müssen wir also nur für „3) $\Rightarrow$ 1)“. Hier *definieren* wir die STAMM-FUNKTION F zu f für ein beliebig gewähltes $z_0 \in D$ als

$$F(z) = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta, \quad \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(a) = z_0, \quad \varphi(b) = z, \quad (2.1.22)$$

definiert und hängt nach Voraussetzung, nur von z_0 und z ab und ist damit für alle $z \in D$ wohldefiniert; da D bogenzusammenhängend ist, gibt es auch für jeden Punkt $z \in D$ mindestens eine Kurve φ , die ihn mit z_0 verbindet. Wir müssen also zeigen, daß $F' = f$ ist. Für $z \in D$ gibt es, da D offen ist, ein $\rho > 0$, so daß die OFFENE KUGEL $B_{\rho}(z) = \{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| \leq \rho\}$ zu D gehört. Für $z' \in B_{\rho}(z)$ wählen wir ein beliebiges $\varphi : [a, b] \rightarrow D$, $\varphi(a) = z_0$, $\varphi(b) = z'$, und $\psi : [b, b + 1]$ als die Verbindungsgerade

$$\psi(t) = (1 - t')z' + t'z = z' + t(z - z'), \quad t' := t - b.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(z) - F(z') &= \int_{\varphi \rightarrow \psi} f(\zeta) d\zeta - \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta + \int_{\psi} f(\zeta) d\zeta - \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\psi} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(\psi(t)) \psi'(t) dt = \int_0^1 f((1 - t)z + tz') (z - z') dt \\ &= (z - z') f((1 - \theta)z + \theta z'), \end{aligned}$$

für ein $\theta \in [0, 1]$ nach dem ZWISCHENWERTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG⁶. Damit ist

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = f((1 - \theta)z + \theta z'), \quad \theta \in [0, 1],$$

und wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = f(z), \quad z \in D,$$

also ist in der Tat $F' = f$. □

2.2 Der Cauchysche Integralsatz

Wir haben in Satz 2.1.20 gesehen, daß wir die Frage, ob eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt, also selbst eine Ableitung ist, dadurch entscheiden können, daß wir das Verhalten des Integrals der Funktion über eine geschlossene Kurve untersuchen. Diese zentrale Eigenschaft besitzen analytische Funktionen.

Satz 2.2.1 (CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ). *Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ANALYTISCH auf dem STERNGEBIET $D \subset \mathbb{C}$, so ist*

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (2.2.1)$$

für jede geschlossene Kurve φ .

⁶Woher man den kennt? Analysis I natürlich.

2 Integrale

2.2.1 Beweis und Variationen

Definition 2.2.2 (Konvexe Hülle & Sterngebiet). Die KONVEXE HÜLLE $[[z_1, \dots, z_n]]$ von n Punkten ist definiert als

$$[[z_1, \dots, z_n]] := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j : \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1 \right\}. \quad (2.2.2)$$

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt STERNGEBIET, wenn es einen Punkt $z_* \in D$ gibt, so daß

$$[[z_*, z]] \subset D, \quad z \in D, \quad (2.2.3)$$

erfüllt ist.

Die Intuition hinter dieser Definition ist einfach: Da die konvexe Hülle zweier Punkte nichts anderes als die Verbindungsstrecke ist, bedeutet (2.2.3), daß das Sterngebiet ein ZENTRUM z_* besitzt, das für jeden anderen Punkt aus D sichtbar ist, in dem Sinne, daß die gesamte Verbindungsstrecke jedes Punktes mit dem Zentrum ebenfalls komplett in D liegt.

Bemerkung 2.2.3.

1. Das einfachste Beispiel für ein Sterngebiet ist der KREISRING oder ANNULUS

$$\mathbb{D}_{r,R}(0) := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}, \quad 0 < r < R, \quad (2.2.4)$$

der kein Sterngebiet ist, da die Verbindungsstrecke zwischen $\pm z$, $z \in \mathbb{D}_{r,R}(0)$, durch den Ursprung geht und damit nicht zu $\mathbb{D}_{r,R}(0)$ gehört.

2. Jede konvexe Menge ist ein Sterngebiet, die Umkehrung gilt nicht. Man muss sich nur eine „richtig“ sternförmige Menge vorstellen wie beispielsweise endlich viele Geraden, die sich alle in einem Punkt schneiden, der dann auch das Zentrum ist.

Als nächstes eine einfache Definition, die lediglich den Rand des Dreiecks mit Ecken z_1, z_2, z_3 formalisiert.

Definition 2.2.4 (Dreieckspfad). Ein DREIECKSPFAD $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ ist eine geschlossene stückweise lineare Kurve $\varphi : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$\varphi(t + j - 1) = (1 - t)z_j + tz_{j+1}, \quad t \in [0, 1], \quad j = 1, 2, 3, \quad z_4 := z_1. \quad (2.2.5)$$

Das folgende Resultat ist bereits ein Spezialfall des Cauchyschen Integralsatzes, und wird bei seinem Beweis eine zentrale Rolle spielen, weswegen man es auch das FUNDAMENTALLEMMA DER FUNKTIONENTHEORIE nennt.

Satz 2.2.5 (Cauchyscher Integralsatz für Dreieckspfade). Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch in der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ und sind z_1, z_2, z_3 so gewählt, daß $[[z_1, z_2, z_3]] \subset D$, dann ist

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.2.6)$$

Beweis: Wir zerlegen das Dreieck $[[z_1, z_2, z_3]]$ mittels der Seitenhalbierenden in die vier Dreiecke⁷

$$[[z_j, \frac{1}{2}(z_j + z_{j+1}), \frac{1}{2}(z_j + z_{j+2})]], \quad j = 1, 2, 3, \quad [[\frac{1}{2}(z_1 + z_2), \frac{1}{2}(z_1 + z_3), \frac{1}{2}(z_2 + z_3)]],$$

⁷Mit der Konvention, daß $z_4 = z_1$ und $z_5 = z_2$ ist

deren Ränder wir als die zyklischen Kurven⁸

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left\langle z_1, \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_1 + z_3}{2} \right\rangle := \langle z_1, z_{12}, z_{13} \rangle \\ \alpha_2 &= \left\langle z_2, \frac{z_2 + z_3}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2} \right\rangle := \langle z_2, z_{23}, z_{12} \rangle \\ \alpha_3 &= \left\langle z_3, \frac{z_3 + z_1}{2}, \frac{z_3 + z_2}{2} \right\rangle := \langle z_3, z_{13}, z_{23} \rangle \\ \alpha_4 &= \left\langle \frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}, \frac{z_3 + z_1}{2} \right\rangle := \langle z_{12}, z_{23}, z_{13} \rangle\end{aligned}$$

schreiben, wobei alle vier Kurven im Uhrzeigersinn parametrisiert sind. Nun ist⁹

$$\begin{aligned}& \int_{\alpha_1} + \int_{\alpha_2} + \int_{\alpha_3} + \int_{\alpha_4} \\&= \left(\int_{\langle z_1, z_{12} \rangle} + \int_{\langle z_{12}, z_{13} \rangle} + \int_{\langle z_{13}, z_1 \rangle} \right) + \left(\int_{\langle z_2, z_{23} \rangle} + \int_{\langle z_{23}, z_{12} \rangle} + \int_{\langle z_{12}, z_2 \rangle} \right) \\& \quad + \left(\int_{\langle z_3, z_{13} \rangle} + \int_{\langle z_{13}, z_{23} \rangle} + \int_{\langle z_{23}, z_3 \rangle} \right) + \left(\int_{\langle z_{12}, z_{23} \rangle} + \int_{\langle z_{23}, z_{13} \rangle} + \int_{\langle z_{13}, z_{12} \rangle} \right) \\&= \int_{\langle z_1, z_{12} \rangle} + \int_{\langle z_{12}, z_{13} \rangle} + \int_{\langle z_{13}, z_1 \rangle} + \int_{\langle z_2, z_{23} \rangle} - \int_{\langle z_{12}, z_{23} \rangle} + \int_{\langle z_{12}, z_2 \rangle} \\& \quad + \int_{\langle z_3, z_{13} \rangle} + \int_{\langle z_{13}, z_{23} \rangle} + \int_{\langle z_{23}, z_3 \rangle} + \int_{\langle z_{12}, z_{23} \rangle} - \int_{\langle z_{13}, z_{23} \rangle} - \int_{\langle z_{12}, z_{13} \rangle} \\&= \int_{\langle z_1, z_{12} \rangle} + \int_{\langle z_{12}, z_2 \rangle} + \int_{\langle z_2, z_{23} \rangle} + \int_{\langle z_{23}, z_3 \rangle} + \int_{\langle z_3, z_{13} \rangle} + \int_{\langle z_{13}, z_1 \rangle} \\&= \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle},\end{aligned}$$

siehe Abb. 2.2.1. Damit erhalten wir

$$\left| \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\alpha_j} f(\zeta) d\zeta \right| \Rightarrow \left| \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta \right| \leq 4 \max_{j=1,2,3,4} \left| \int_{\alpha_j} f(\zeta) d\zeta \right|.$$

Sei $\alpha^1 = \langle z_1^1, z_2^1, z_3^1 \rangle$ diejenige Kurve, bei der der Ausdruck maximal wird. Dann gibt es mit demselben Argument eine Kurve $\alpha^2 = \langle z_1^2, z_2^2, z_3^2 \rangle$ im von α^1 berandeten Dreieck, so daß

$$\left| \int_{\alpha^1} f(\zeta) d\zeta \right| \leq 4 \left| \int_{\alpha^2} f(\zeta) d\zeta \right|,$$

und, durch induktives Fortführen dieses Arguments, Kurven $\alpha^j = \langle z_1^j, z_2^j, z_3^j \rangle$, $j \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left| \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta \right| \leq 4^j \left| \int_{\alpha^j} f(\zeta) d\zeta \right|, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.2.7)$$

Da die Dreiecke verschachtelt sind, das heißt,

$$[[z_1^j, z_2^j, z_3^j]] \subset [[z_1^{j+1}, z_2^{j+1}, z_3^{j+1}]], \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.2.8)$$

⁸Siehe Konvention.

⁹Da das für jede Funktion gilt, nicht nur für unser analytisches f , können wir das „ $f(\zeta)d\zeta$ “ auch einfach weglassen.

2 Integrale

gibt es einen Punkt

$$\mathbb{C} \ni z_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [[z_1^j, z_2^j, z_3^j]],$$

der in allen Dreiecken enthalten ist. Außerdem halbiert sich die Seitenlänge mit jedem Schritt und da die Dreiecke alle ähnlich zueinander sind, gilt

$$\max_{k=1,2,3} |z_k^j - z_0| \leq 2^{-j} \max_{k=1,2,3} |z_k - z_0|, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.2.9)$$

und

$$\ell(\alpha^j) = 2^{-j} \ell(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle). \quad (2.2.10)$$

Jetzt endlich kommt die Voraussetzung ins Spiel, daß f ANALYTISCH ist. Nach der Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist¹⁰

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lim_{z' \rightarrow z_0} \frac{\overbrace{r(z') - r(z_0)}^{=0}}{z' - z_0} = 0, \quad (2.2.11)$$

und da die Funktion $z \mapsto az + b$ die Stammfunktion $\frac{a}{2}z^2 + bz$ hat ist nach Satz 2.1.20

$$\int_{\alpha^j} f(\zeta) d\zeta = \underbrace{\int_{\alpha^j} (f(z_0) + f'(z_0)(\zeta - z_0)) d\zeta}_{=0} + \int_{\alpha^j} r(\zeta) d\zeta.$$

Die Grenzwertaussage in (2.2.11) lässt sich auch so formulieren, daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\rho > 0$ gibt, so daß

$$|z' - z_0| < \rho \quad \Rightarrow \quad |r(z') - r(z_0)| \leq \varepsilon |z' - z_0|.$$

Nun wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Wegen (2.2.9) gibt es $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|z - z_0| < 2^{-j} \varepsilon, \quad z \in [[z_1^j, z_2^j, z_3^j]] \supset \alpha^j$$

und mit (2.2.10) und der Dreiecksungleichung (2.1.11) folgt dann

$$\left| \int_{\alpha^j} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \max_{z \in \alpha^j} |r(z)| \underbrace{\ell(\alpha^j)}_{\leq 2^{-j} \varepsilon \leq 2^{-j} \ell(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle)} \leq 4^{-j} \varepsilon \ell(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle).$$

Zusammen mit (2.2.7) ist dann schließlich

$$\left| \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta \right| \leq 4^j 4^{-j} \varepsilon \ell(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle) = \varepsilon \ell(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle),$$

und da ε beliebig war, muß (2.2.6) gelten. □

Definition 2.2.6 (Polygonzug). Zu Punkten $z_1, \dots, z_n \in D$ ist der POLYGONZUG $[z_1, \dots, z_n]$ definiert als die Kuve $\varphi: [0, n-1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(k+t) = (1-t)z_{j+1} + tz_{j+2}, \quad t \in [0, 1], \quad k \in \{0, \dots, n-2\}.$$

Ein GESCHLOSSENER POLYGONZUG ist dann

$$\langle z_1, \dots, z_n \rangle = [z_1, \dots, z_n, z_1].$$

¹⁰Eigentlich ist das nichts anderes als eine TAYLORENTWICKLUNG erster Ordnung, nur daß wir diese für komplexe Differenzierbarkeit nicht hergeleitet haben.

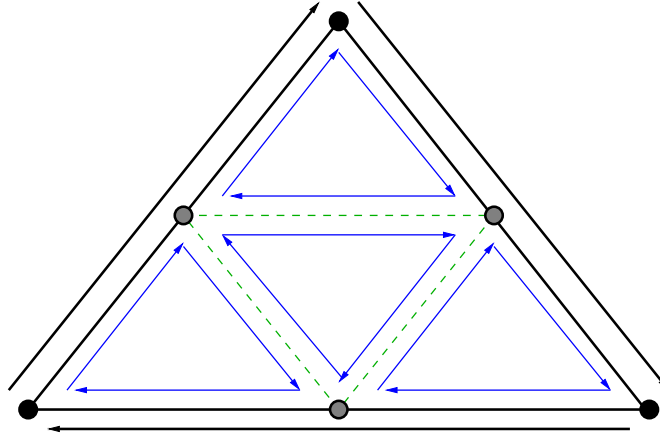


Abbildung 2.2.1: Die Kurvenintegrale aus dem Beweis von Satz 2.2.5. grün gestrichelten Kanten des inneren Dreiecks werden zweimal in unterschiedliche Richtung durchlaufen und heben sich daher auf, so daß nur der äußere Rand des Dreiecks übrigbleibt.

Korollar 2.2.7 (Cauchyscher Integralsatz für Polygonzüge). *Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch in dem Sterngebiet $D \subset \mathbb{C}$ und ist φ ein geschlossener POLYGONZUG in D , also $\varphi = \langle z_1, \dots, z_n \rangle \subset D$, dann ist*

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.2.12)$$

Beweis: Mit einem Zentrum z_0 des Sterngebiets wenden wir Satz 2.2.5 auf

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^n \int_{\langle z_j, z_{j+1}, z_0 \rangle} f(\zeta) d\zeta$$

an, wo jedes Integral über $\langle z_j, z_0 \rangle$ genau zweimal mit unterschiedlichem Vorzeichen kommt. $\square$

Jetzt können wir den Cauchyschen Integralsatz beweisen.

Beweis von Satz 2.2.1: Nach Satz 2.1.20 ist die Aussage von Satz 2.2.1 äquivalent dazu, daß jede analytische Funktion auf dem Sterngebiet eine Stammfunktion hat und diese bestimmen wir nun mittels eines Polygonzugs. Sei dazu z_0 ein Zentrum des Sterngebiets, dann setzen wir, für einen beliebigen Polygonzug $\varphi := [z_0, z_1, \dots, z_n, z] \subset D$ von z_0 nach $z \in D$

$$F(z) := \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.2.13)$$

Ist ψ ein anderer Polygonzug von z_0 nach z , dann ist $\varphi \rightarrow \overleftarrow{\psi}$ ein geschlossener Polygonzug in D und nach Satz 2.2.5 ist

$$0 = \int_{\varphi \rightarrow \overleftarrow{\psi}} f(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta - \int_{\psi} f(\zeta) d\zeta,$$

so daß die Definition (2.2.13) vom konkreten Polygonzug unabhängig ist. Daß dieses F die Eigenschaft $F' = f$ hat folgt mit genau demselben Argument wie im Beweis von Satz 2.1.20, „3) $\Rightarrow$ 1)“, denn der letzte Punkt z_n des Polygonzugs φ kann immer beliebig nahe bei z gewählt werden. $\square$

Nun noch zwei einfache bis offensichtliche Folgerungen aus Satz 2.2.1.

2 Integrale

Korollar 2.2.8. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf dem Sterngebiet D , so besitzt f eine Stammfunktion.

Korollar 2.2.9. Jede analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet D besitzt lokal eine Stammfunktion: Es gibt zu jedem $z \in D$ eine Umgebung $U \subset D$, so daß f auf U eine Stammfunktion besitzt.

Beweis: Da D nach Definition *offen* ist, gibt es zu jedem z eine offene Kugel $B_\rho(z)$, $\rho > 0$, mit $B_\rho(z) \subset D$. Die Kugel ist konvex, damit ein Sterngebiet, weswegen man Satz 2.2.1 auf $U = B_\rho(z)$ anwenden kann. $\square$

Und noch eine Variante des Cauchyschen Integralsatzes mit leicht abgeschwächten Voraussetzungen.

Korollar 2.2.10. Ist D ein Sterngebiet mit Zentrum z_0 und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und analytisch auf $D \setminus \{z_0\}$, dann hat f eine Stammfunktion in D .

Beweis: Wir definieren die Stammfunktion durch

$$F(z) = \int_{[z_0, z_1, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei wir z_1 beliebig wählen können, solange nur $[[z_1, z]] \subset D$ ist. Dies kann immer erreicht werden, da D offen ist. Nun führen wir zwei Punkte $w_0 \in [[z_0, z]]$ und $w_1 \in [[z_0, z_1]]$, die in D liegen, da dieses ein Sterngebiet ist. Nach Satz 2.2.5 ist dann

$$\begin{aligned} \int_{\langle z_0, z_1, z \rangle} f(\zeta) d\zeta &= \int_{\langle z_0, w_1, w_0 \rangle} f(\zeta) d\zeta + \underbrace{\int_{\langle w_1, z_1, z \rangle} f(\zeta) d\zeta}_{=0} + \underbrace{\int_{\langle z, w_0, w_1 \rangle} f(\zeta) d\zeta}_{=0} \\ &= \int_{\langle z_0, w_1, w_0 \rangle} f(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

siehe Abb. 2.2.2, und da

$$\left| \int_{\langle z_0, w_1, w_0 \rangle} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \max_{z \in \langle z_0, w_1, w_0 \rangle} |f(z)| (|w_0 - z_0| + |w_1 - z_0|),$$

folgt¹¹

$$\int_{\langle z_0, z_1, z \rangle} f(\zeta) d\zeta = \lim_{w_0 \rightarrow z_0} \lim_{w_1 \rightarrow z_0} \int_{\langle z_0, z_1, z \rangle} f(\zeta) d\zeta = \lim_{w_0 \rightarrow z_0} \lim_{w_1 \rightarrow z_0} \int_{\langle z_0, w_0, w_1 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

und damit ist F eine wohldefinierte Stammfunktion mit $F(z_0) = 0$. $\square$

Bemerkung 2.2.11. Der Beweis ist nötig, da wir Satz 2.2.7 nur anwenden können, wenn f auf dem *ganzen* Sterngebiet analytisch ist, was für Polygonzüge durch z_0 eben nicht erfüllt ist. Andererseits zeigt uns der Beweis aber auch, daß Stetigkeit fast zu viel ist und daß es auch reicht, vorauszusetzen, daß f auf $D \setminus \{z_0\}$ analytisch und in einer Umgebung von z_0 BESCHRÄNKT ist.

¹¹Die erste Identität ist trivial, da das Kurvenintegral ja erst mal gar nicht von w_0 und w_1 abhängt.

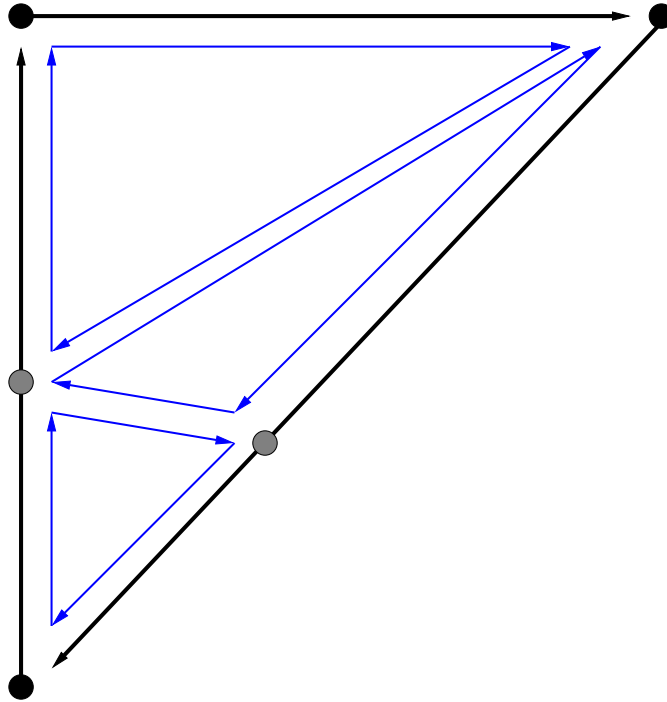


Abbildung 2.2.2: Die Kurvenintegrale aus dem Beweis von Korollar 2.2.10. Unten der Punkt z_0 , oben links ist z_1 und oben rechts z . w_0 und w_1 ergeben sich dann automatisch.

2.2.2 Elementargebiete

Gebiete, auf denen der Cauchysche Integralsatz funktioniert, sind so wichtig, daß sie einen eigenen Namen bekommen.

Definition 2.2.12. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ELEMENTARGEBIET, wenn jede analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.

Bemerkung 2.2.13. Konvexe Gebiete und Sterngebiete sind Elementargebiete.

Auf Elementargebieten besitzen analytische Funktionen weitere interessante Eigenschaften.

Satz 2.2.14. Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $0 \notin f(D)$ und analytischer Ableitung¹² f' . Dann gibt es eine analytische Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(z) = \exp(g(z)), \quad z \in D. \quad (2.2.14)$$

Definition 2.2.15. Die Funktion g aus (2.2.14) heißt ANALYTISCHER ZWEIG des LOGARITHMUS.

Bemerkung 2.2.16. Es existiert auch immer eine WURZEL aus f , also eine Funktion h mit $h^n = f$. Dazu nimmt man einfach das g aus (2.2.14) und setzt $h(z) = \exp(\frac{1}{n}g(z))$.

¹²Es wird sich bald herausstellen, daß man diese Annahme gar nicht braucht, sondern daß die Ableitung einer analytischen Funktion wieder analytisch ist.

2 Integrale

Beweis von Satz 2.2.14: Sei F eine Stammfunktion zur analytischen Funktion¹³ f'/f , dann gilt für die Funktion

$$G(z) := \frac{\exp(F(z))}{f(z)}, \quad z \in D,$$

daß

$$G'(z) = \frac{f(z) e^{F(z)} F'(z) - e^{F(z)} f'(z)}{(f'(z))^2} = \frac{f(z) e^{F(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} - e^{F(z)} f'(z)}{(f'(z))^2} = 0$$

ist, also ist G constant oder eben $\exp(F(z)) = C f(z)$ für ein $0 \neq C = e^c \in \mathbb{C}$. Damit erfüllt $g(z) = F(z) - c$ aber

$$\exp(g(z)) = \frac{1}{C} \exp(F(z)) = f(z), \quad z \in D,$$

wie behauptet. □

Da Elementargebiete offensichtlich von Bedeutung sind, sind ein paar Abschlußeigenschaften hilfreich.

Lemma 2.2.17 (Elementargebiete).

1. Sind D, D' Elementargebiete, so ist auch $D \cap D'$ ein Elementargebiet.
2. Sind $D, D' \subset \mathbb{C}$ Elementargebiete mit der Eigenschaft, daß $D \cap D' \neq \emptyset$ und zusammenhängend ist, dann ist auch $D \cup D'$ ein Elementargebiet.
3. Sind $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots$ verschachtelte Elementargebiete, dann ist auch ihre Vereinigung

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

ein Elementargebiet.

Beweis: 1) ist trivial, da nach Definition jede Teilmenge eines Elementargebiets wieder ein Elementargebiet ist. Für 2) bestimmen wir zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 auf D und D' . Da

$$(F_1 - F_2)'(z) = f(z) - f(z), \quad z \in D \cap D',$$

können sich die beiden Stammfunktionen auf dem Schnitt nur um eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ unterscheiden¹⁴, $F_1 = F_2 + c$. Ersetzen wir F_2 durch $F_2 + c$, so stimmen die Stammfunktionen auf $D \cap D'$ überein und damit auch auf der Vereinigung $D \cup D'$. 3) folgt aus 3) und der Tatsache, daß jeder Punkt der Vereinigung zu einem D_n , also auch zu allen D_m , $m \geq n$, gehören muss. □

Schließlich noch ein Abbildungssatz für Elementargebiete.

Proposition 2.2.18. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf ganz D analytische Funktion mit analytischer Ableitung¹⁵ und¹⁶ $\varphi'(z) \neq 0$, so ist auch $D^* = \varphi(D)$ ein Elementargebiet.

¹³Daß sie analytisch ist, ist die Quotientenregel, daß die Stammfunktion existiert ist, folgt aus der Annahme „Elementargebiet“.

¹⁴Hier braucht man die Voraussetzung „ZUSAMMENHÄNGEND“, denn sonst könnte die Konstante auf verschiedenen Zusammenhangskomponenten variieren, denn die Differenz ist nur lokal konstant.

¹⁵Das wird sich später als automatisch erfüllt herausstellen

¹⁶Diese Eigenschaft wird dafür sorgen, daß φ eine konforme Abbildung ist, siehe die Diskussion nach Definition 6.1.1 und Proposition 6.1.2.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß jede analytische Funktion $f : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion hat. Nach der Kettenregel ist $g = f \circ \varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, wenn f analytisch ist, denn es gilt ja

$$g'(z) = f'(\varphi(z)) \varphi'(z), \quad z \in D.$$

Da D ein Elementargebiet ist, hat g eine Stammfunktion G und damit ist, mit Verwendung der ebenfalls analytischen Umkehrfunktion φ^{-1} , die Funktion $F = G \circ \varphi^{-1}$ eine Stammfunktion von f . Also ist D^* ein Elementargebiet. $\square$

Die Transformation von Gebieten mit analytischen Funktionen hat auch eine geometrische Interpretation.

Definition 2.2.19. Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt WINKELTREU, oder ISOGONAL, wenn

$$\|Tx\|_2 \|Ty\|_2 \langle x, y \rangle = \|x\|_2 \|y\|_2 \langle Tx, Ty \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2.15)$$

erfüllt ist und ORIENTIERUNGSTREU, wenn $\det T > 0$ ist.

Identifizieren wir, wie wir es die ganze Zeit schon tun, $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, dann kennen wir winkeltreue Abbildungen, nämlich die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = |z|e^{i\theta}$, die ja eine Drehstreckung

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = |z| R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert. Da $R_\theta = R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$ und $\|R_\theta x\|_2 = \|x\|_2$ ist¹⁷, erhalten wir, daß

$$\|x\|_2 \|y\|_2 \langle Tx, Ty \rangle = |z|^2 \|x\|_2 \|y\|_2 x^T \underbrace{R_\theta^T R_\theta}_{=I} y = (|z| \|x\|_2) (|z| \|y\|_2) \langle x, y \rangle = \|Tx\|_2 \|Ty\|_2 \langle x, y \rangle.$$

Die Determinante der Drehstreckung T zur Multiplikation mit z ist ja $|z|$, so daß die Multiplikation *immer* orientierungstreu ist, solange $z \neq 0$ ist.

Definition 2.2.20 (Konforme Abbildung). Eine differenzierbare Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt KONFORM an $x \in D$ falls $f'(x)$ winkeltreu und orientierungstreu ist und LOKAL KONFORM auf D , falls sie konform an allen $x \in D$ ist.

Aus der Darstellung der komplexen Ableitung über die Jacobimatrix von Real- und Imaginärteil ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage, die uns sagt, warum analytische Bilder von Elementargebieten so interessant sind.

Satz 2.2.21. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, ist genau dann lokal konform auf D , wenn sie analytisch ist und $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, erfüllt.

Beispiel 2.2.22. Besondere Abbildungen von $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind GEBROCHEN LINEARE TRANSFORMATIONEN

$$w := f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, \quad (2.2.16)$$

die man normalerweise als MÖBIUSTRANSFORMATION bezeichnet. Ist $c = 0$ und $d \neq 0$, so nennt man f eine GANZE LINEARE TRANSFORMATION – lineare Funktionen sind ganze Funktionen, siehe¹⁸ Definition 2.3.13. Die Ableitung

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{c^2(z + d/c)}$$

¹⁷Rotationen sind LÄNGENTREU.

¹⁸Die kommt erst später, aber wir geben den Begriff auch nur der Vollständigkeit halber an.

2 Integrale

ist wohldefiniert auf $D := \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ und konform, wenn

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

ist. Ist die Determinante = 0, so ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ und es liegt der Trivialfall

$$f(z) = \frac{\mu(cz + d)}{cz + d} = \mu$$

vor.

Viele geometrische Operationen auf $\mathbb{R}^2$ lassen sich als Möbiustransformationen schreiben, siehe [12, 20].

Beispiel 2.2.23. Eine besondere Wahl in (2.2.16) ist $a = -1$, $d = 1$ und für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$w := f_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\bar{\alpha}^{-1}\}. \quad (2.2.17)$$

Dann ist

$$ad - bc = -1 + |\alpha|^2,$$

die Abbildung ist also für $|\alpha| < 1$ konform. Produkte der Form

$$\prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{\bar{\alpha}_j z - 1}, \quad |\alpha_j| < 1,$$

bezeichnet man dann als BLASCHKEPRODUKT. Sie spielen beispielsweise in der digitalen Signalverarbeitung eine wichtige Rolle.

2.3 Integration und Punktauswertung

Jetzt werden wir sehen, wie man Funktionen mittels Kurvenintegralen an bestimmten Stellen auswerten kann und daraus einige interessante Schlüsse über die Natur analytischer Funktionen ziehen.

2.3.1 Die Cauchysche Integralformel

Wir betrachten jetzt eine ganz besondere Kurve von Kurvenintegralen, nämlich solche über Kreise.

Definition 2.3.1. Wir schreiben

$$\oint_{(z_0, r)} f(\zeta) d\zeta = \oint_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta) d\zeta := \int_\varphi f(\zeta) d\zeta$$

für das KREISINTEGRAL über den Kreis vom Radius $r > 0$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ oder¹⁹ $\varphi(t) = z_0 + re^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$. Ausserdem schreiben wir, in Übereinstimmung mit (2.2.4),

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \quad (2.3.1)$$

¹⁹Nette Übung: Verifizieren Sie, daß beide Darstellungen dasselbe Ergebnis liefern.

2.3 Integration und Punktauswertung

für die KREISSCHEIBE vom RADIUS r um z_0 und

$$\mathbb{D}_r(z_0)^\circ := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad (2.3.2)$$

für ihr Inneres.

Nun können wir eine Entscheidung über „drinnen“ und „draußen“ von a nur vermittle Integration über den Kreisrand treffen.

Lemma 2.3.2. Für $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\oint_{(z_0, r)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & a \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ, \\ 0, & a \notin \mathbb{D}_r(z_0). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Bemerkung 2.3.3. Das Integral aus (2.3.3) ist ein Kurvenintegral über einen Bereich, auf dem die Funktion $\frac{1}{z-a}$ wohldefiniert und analytisch ist, denn die Singularität liegt ja entweder im Inneren der Kreisscheibe oder ausserhalb.

Beweis: Ist $a \notin \mathbb{D}_r(z_0)$, so ist $\frac{1}{z-a}$ analytisch auf dem Sterngebiet $\mathbb{D}_{r+\varepsilon}(z_0)^\circ$ solange $\varepsilon < |a - z_0| - r$ ist und der Cauchysche Integralsatz liefert

$$\oint_{(z_0, r)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta = 0.$$

Für $a = z_0$ ist, mit $\varphi(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, nach der Definition den Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \oint_{(z_0, r)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta &= \int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{\varphi(t) - z_0} \varphi'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{re^{2\pi i t}} 2\pi i r e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i, \end{aligned}$$

und zwar unabhängig von r . Ist nun allgemein $a \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ$, dann gibt es ein $\rho > 0$, so daß $\mathbb{D}_\rho(a) \subset \mathbb{D}_r(z_0)^\circ$ und wir müssen zeigen, daß

$$\oint_{(z_0, r)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta = 2\pi i = \oint_{(a, \rho)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta \Leftrightarrow \oint_{(z_0, r)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta - \oint_{(a, \rho)} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta = 0.$$

Seien φ, ψ so, daß $\oint_{(z_0, r)} = \int_{\varphi}$ und $\oint_{(a, \rho)} = \int_{\psi}$. Die Gerade durch z_0 und a schneidet φ in den Punkten z_1, z_2 und zerlegt φ in zwei Halbkreise φ_1 und φ_2 . Dasselbe gilt für ψ und z_3, z_4 . Wir wählen die Punkte so, daß

$$[z_1, z_3] \cup [z_4, z_2] \subset \mathbb{D}_r(z_0) \setminus \mathbb{D}_\rho(a),$$

siehe Abb. 2.3.3, und schreiben die Differenz der Kurvenintegrale als

$$\begin{aligned} \oint_{(z_0, r)} - \oint_{(a, \rho)} &= \int_{\varphi} - \int_{\psi} = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} - \int_{\psi_1} - \int_{\psi_2} \\ &= \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} - \int_{\psi_1} - \int_{\psi_2} + \int_{[z_1, z_3]} - \int_{[z_1, z_3]} + \int_{[z_4, z_2]} - \int_{[z_2, z_4]} \\ &= \underbrace{\left(\int_{\varphi_1} + \int_{[z_1, z_3]} + \int_{\overleftarrow{\psi_1}} + \int_{[z_4, z_2]} \right)}_{=: \int_{\alpha_1}} + \underbrace{\left(\int_{\varphi_2} - \int_{[z_4, z_2]} + \int_{\overleftarrow{\psi_2}} - \int_{[z_1, z_3]} \right)}_{=: \int_{\alpha_2}}, \end{aligned}$$

2 Integrale

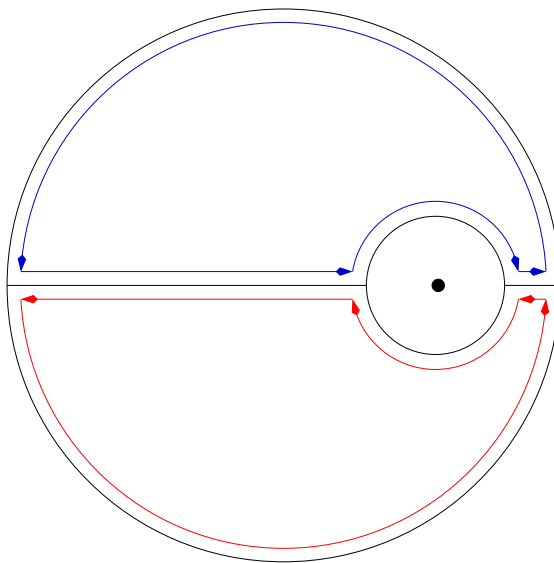


Abbildung 2.3.3: Die Zerlegung im Beweis von Lemma 2.3.2. Die beiden Kreislinien in *unterschiedliche* Richtungen parametrisiert sind, so daß sich das rote und das blaue Kurvenintegral entlang der eingefügten Linienstücke aufheben. Die Kurvenintegrale selbst verlaufen vollständig in einem Elementargebiet, in dem f analytisch ist, weswegen die Kurvenintegrale verschwinden.

siehe . Nun sind aber α_1 und α_2 geschlossene Kurven, die eine Vereinigung von Sterngebieten beranden, auf denen $\frac{1}{z-a}$ analytisch ist, da die Singularität außerhalb liegt, und daher ist

$$\int_{\alpha_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \int_{\alpha_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 0,$$

also

$$\oint_{(z_0, r)} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \oint_{(a, \rho)} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i.$$

wie behauptet. □

Wenn wir uns den Beweis genauer ansehen, dann haben wir eigentlich noch mehr bewiesen.

Korollar 2.3.4. Sind $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ und $r_1, r_2 > 0$ so gewählt, daß $\mathbb{D}_{r_2}(z_2) \subset \mathbb{D}_{r_1}(z_1)^\circ$, dann ist

$$\int_{(z_1, r)} f(\zeta) d\zeta = \int_{(z_2, r_2)} f(\zeta) d\zeta$$

für jede Funktion f die in $\mathbb{D}_{r_1}(z_1)^\circ \setminus \mathbb{D}_{r_2}(z_2)$ analytisch ist.

Nun können wir Funktionswerte durch Integration bestimmen.

Satz 2.3.5 (CAUCHYSCHES INTEGRALFORMEL). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf der offenen Menge D und $\mathbb{D}_r(z_0) \subset D$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ. \quad (2.3.4)$$

Beweis: Wie beginnen mit ein bisschen Standard-Topologie aus Analysis II: Die Funktion $z \mapsto d(z, \partial D)$, die jedem Punkt aus D seinen Abstand zum Rand von D zuordnet, ist stetig und auf der kompakten Menge $\partial \mathbb{D}_r(z_0)$ strikt positiv, nimmt also dort ihr strikt positives Maximum ρ an²⁰, so daß

$$\mathbb{D}_r(z_0) \subset \mathbb{D}_{r+\rho}(z_0) \subseteq D$$

gilt, wir können also annehmen, daß D ebenfalls eine Kreisscheibe mit gleichem Zentrum, aber größerem Radius ist.

Da f analytisch ist, ist die Funktion

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z, \end{cases} \quad w \in D,$$

stetig und an allen Stellen $w \neq z$ analytisch. Für ein r' mit $\mathbb{D}_{r'}(z) \subset D$ ist dann, nach Korollar 2.3.4 und Korollar 2.2.10

$$\oint_{\mathbb{D}_{(z_0, r)}} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\mathbb{D}_{(z, r')}} g(\zeta) d\zeta = 0,$$

also, unter Verwendung von Lemma 2.3.2,

$$0 = \oint_{\mathbb{D}_{(z_0, r)}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\mathbb{D}_{(z_0, r)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\oint_{\mathbb{D}_{(z_0, r)}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=2\pi i},$$

da $z \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ$. Das ist aber genau (2.3.4). □

Bemerkung 2.3.6. Nur nochmals zur Klarstellung: Der Punkt z in Satz 2.3.5 muss nicht der Mittelpunkt des Kreises sein, sondern nur im Inneren des Kreises liegen.

Bemerkung 2.3.7. Die Integralformel (2.3.4) gilt nicht nur für Kreisintegrale, sondern für beliebige Kurvenintegrale, siehe [12], allerdings muss man dann auf den Umlaufsinn der Kurve achten, er muss *positiv* sein. Eine Kurve heißt *POSITIV ORIENTIERT*, wenn es einen Punkt²¹ z_0 gibt, so daß $\arg(\varphi(t) - z_0)$ monoton steigend²² ist. Für Details siehe [12], hier orientieren wir uns aber weiter an [8].

2.3.2 Glattheit analytischer Funktionen

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, genauer, einer Verallgemeinerung davon, werden wir nun wieder eines der zentralen Resultate der Funktionentheorie zeigen, nämlich daß *komplexe* Differenzierbarkeit bereits dazu führt, daß die Funktion *beliebig oft* differenzierbar ist — und das ist die wirkliche Bedeutung von „ANALYTISCH“ bzw. „HOLOMORPH“. Dazu erst ein bisschen reelle Differentialrechnung über die Vertauschung von Ableitung und Integration.

²⁰Ausser die Funktion hat überall den Wert ∞ , was für $D = \mathbb{C}$ der Fall ist, aber dann ist es noch einfacher.

²¹Sozusagen der „Mittelpunkt“ der geschlossenen Kurve.

²²Und zwar modulo 2π .

2 Integrale

Lemma 2.3.8. Sei $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, eine stetige Funktion, deren partielle Ableitung $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ existiert und stetig auf $I \times J$ ist. Dann ist die Funktion

$$g(x) := \int_I f(t, x) dt, \quad x \in J,$$

ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt, \quad x \in J. \quad (2.3.5)$$

Beweis: Für $x, x' \in J$ ist nach dem MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG

$$\frac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \int_I \frac{f(t, x) - f(t, x')}{x - x'} dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t)) dt, \quad \xi(t) \in [[x, x']].$$

Da die partielle Ableitung stetig ist²³, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|t - t'| < \delta, |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t', x') \right| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt für jedes $t \in I$ die Aussage

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x') \right| < \varepsilon, \quad \xi \in [[x, x']]$$

unabhängig von t . Daher ist für $|x - x'| < \delta$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x') dt \right| \\ &= \left| \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t)) dt - \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x') dt \right| \leq \int_I \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x') \right|}_{< \varepsilon} dt < |I| \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei $|I| = b - a$ die LÄNGE des Intervalls $I = [a, b]$ bezeichnet. Damit ist

$$0 = \lim_{x' \rightarrow x} \left| \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x') dt \right| = \left| g'(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|,$$

also genau (2.3.5). □

Diese Aussage, die in [8] als LEIBNIZ-REGEL bezeichnet wird, lässt sich nun einfach ins Komplexe übertragen.

Lemma 2.3.9. Ist $f : I \times D \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, daß $f(t, \cdot)$ für alle $t \in I$ analytisch und die Funktion

$$(t, z) \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(t, z), \quad (t, z) \in I \times D,$$

stetig ist. Dann ist die Funktion

$$g(z) = \int_I f(t, z) dt, \quad z \in D,$$

analytisch und es gilt

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) dt. \quad (2.3.6)$$

²³Als bivariate Funktion in den beiden Variablen t und x .

Beweis: Wir schreiben f als

$$f(t, z) = u(t, x + iy) + i v(t, x + iy)$$

und erhalten mit (1.3.9), daß

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, z) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(t, z), \quad (2.3.7)$$

was stetig in t, x, y ist. Mit der reellen Version, Lemma 2.3.8, ist dann mit

$$g_1(x, y) := \int_I u(t, x + iy) dt, \quad g_2(x, y) := \int_I v(t, x + iy) dt,$$

also $g(x + iy) = g_1(x, y) + i g_2(x, y)$,

$$\begin{aligned} g'(z) &= g'(x + iy) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) \\ &= \int_I \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + iy) dt + i \int_I \frac{\partial v}{\partial x}(t, x + iy) dt = \int_I \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(t, z) \right) dt \\ &= \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) dt, \end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$

Und damit haben wir auch schon alles beisammen, um die erweiterte Form der Cauchyschen Integralformel zu beweisen und festzustellen, daß alle analytischen Funktionen beliebig oft differenzierbar sind.

Satz 2.3.10 (CAUCHYSCHES INTEGRALFORMEL, erweitert). *Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf der offenen Menge D und $\mathbb{D}_r(z_0) \subset D$. Dann f unendlich oft differenzierbar und es gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ. \quad (2.3.8)$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, wobei der Fall $n = 0$ Satz 2.3.5 ist. Sei also die Gültigkeit von (2.3.8) für ein $n \geq 0$ bewiesen. Dann betrachten wir, mit $\varphi(t) = z_0 + r e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta &= \int_\varphi \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta = \int_0^1 \frac{f(\varphi(t))}{(\varphi(t) - z)^{n+2}} \varphi'(t) dt \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\varphi(t))}{(\varphi(t) - z)^{n+1}} \varphi'(t) dt =: \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(t, z) dt, \end{aligned}$$

wobei die Funktion

$$h : (t, z) \mapsto \frac{f(\varphi(t))}{(\varphi(t) - z)^{n+1}} \varphi'(t)$$

auf der offenen Menge $\mathbb{D}_r(z_0)^\circ$ analytisch und stetig ist. Mit Lemma 2.3.9 ist somit

$$g(z) = \int_0^1 h(t, z) dt = \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z), \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ,$$

differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n+1)}(z) = g'(z) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial z}(t, z) dt = (n+1) \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta,$$

woraus wir schließlich

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta$$

erhalten, was den Induktionsschritt komplettiert. $\square$

2 Integrale

Bemerkung 2.3.11.

1. Alle Annahmen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Ableitungen analytischer Funktionen, die wir in früheren Resultaten gemacht haben, siehe z.B. Satz 2.2.14, waren eigentlich überflüssig.
2. Man sollte aber trotzdem keine Eigenschaften verwenden, bevor man sie bewiesen hat, die Gefahr, in einen ZIRKELSCHLUSS zu laufen, wäre zu groß.
3. Damit sind auch die Funktionen $u = \Re f$ und $v = \Im f$ zu einer analytischen Funktion unendlich oft (reell) differenzierbar.

Jede stetige Funktion f , die auf einem Gebiet eine Stammfunktion besitzt ist damit automatisch analytisch: Die Stammfunktion ist per definitionem analytisch und damit unendlich oft differenzierbar, genauso wie ihre Ableitung f . Das ist nun schon ein fundamentaler Unterschied zur reellen Analysis, wo Funktionen Stammfunktionen besitzen konnten ohne selbst differenzierbar zu sein.

Das können wir noch ein wenig formaler aufschreiben und erhalten eine Art Umkehrung zum Cauchyschen Integralsatz.

Korollar 2.3.12 (SATZ VON MORERA). *Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine stetige Funktion, die*

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (2.3.9)$$

erfüllt, so ist f analytisch.

Beweis: Da D offen ist, gibt es zu jedem z ein $r > 0$, so daß $B_r(z) \subset D$ und wir können mit

$$F(z') = \int_{[z, z']} f(\zeta) d\zeta, \quad z' \in B_r(z),$$

eine Stammfunktion auf dieser offenen Menge definieren. Die Voraussetzung (2.3.9) garantiert wieder, daß diese Stammfunktion unabhängig vom Startpunkt wohldefiniert ist. Da F analytisch ist, muss auch $f = F'$ nach Satz 2.3.10 analytisch sein. $\square$

2.3.3 Ganze Funktionen und Algebra

Ganz besonders schön sind natürlich Funktionen, bei denen man als Analytizitätsbereich D die ganze komplexe Ebene wählen kann.

Definition 2.3.13 (Ganze Funktion). Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt GANZ oder GANZE FUNKTION, auf Englisch ENTIRE, wenn sie auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch ist.

Beispiel 2.3.14. Polynome, die Exponentialfunktion sowie Sinus und Cosinus sind ganze Funktionen.

Satz 2.3.15 (SATZ VON LIOUVILLE). *Eine ganze Funktion ist genau dann beschränkt, wenn sie konstant ist.*

2.3 Integration und Punktauswertung

Beweis: Da die konstanten Funktionen trivialerweise ganz und beschränkt sind, müssen wir nur zeigen, daß jede beschränkte ganze Funktion auch konstant ist. Dafür verwenden wir (2.3.8) mit $n = 1$ und erhalten, daß

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad \varphi(t) := z + r e^{2\pi i t}, \quad t \in [0, 1],$$

und somit

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \max_{t \in [0,1]} \underbrace{\left| \frac{1}{(\varphi(t) - z)^2} \right|}_{= |r e^{2\pi i t}|^{-2} = r^{-2}} \underbrace{\ell(\varphi)}_{= 2\pi r} = \frac{1}{r} \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|,$$

was mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null geht, wenn f beschränkt ist. Damit verschwindet f' überall und f ist konstant. $\square$

Mit dieser einfachen aber wichtigen Erkenntnis können wir dann ein zentrales Resultat der Algebra mit analytischen Mitteln beweisen.

Satz 2.3.16 (FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA). *Jedes POLYNOM*

$$p(z) = \sum_{j=0}^n p_j z^j, \quad p_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n, \quad p_n \neq 0, \quad (2.3.10)$$

vom GRAD kann als Produkt von n LINEARFAKTOREN geschrieben werden:

$$p(z) = p_n \prod_{j=1}^n (z - z_j), \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3.11)$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß jedes Polynom, das nicht konstant ist²⁴, mindestens eine Nullstelle hat. Da

$$z^{-n} p(z) = p_n + \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{z^{n-j}} \rightarrow p_n, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

muss

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$$

sein, es gibt also insbesondere ein $r > 0$, so daß

$$|z| \geq r \quad \Rightarrow \quad |p(z)| \geq 1$$

erfüllt ist. Hätte nun p keine Nullstelle, dann ist $1/p$ überall definiert und analytisch, also eine ganze Funktion. Ausserdem ist sie stetig und erfüllt daher

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \max \left(1, \max_{|z| \leq r} |p(z)|^{-1} \right).$$

Damit wäre aber $1/p$ eine beschränkte ganze Funktion, nach Satz 2.3.15 also konstant und wir erhalten den Widerspruch, daß dann auch p konstant sein müsste.

Hat nun p Grad $n \geq 1$ mit $p_n \neq 0$, und ist z' eine Nullstelle von p , so führen wir eine POLYNOMDIVISION mit Rest

$$p(z) = (z - z') q(z) + r, \quad \deg q = n - 1, \quad r \in \mathbb{C},$$

²⁴Also Grad 0 oder $-\infty$ hat. Die Konvention ist es, dem NULLPOLYNOM $p(z) = 0$ den Grad $-\infty$ zuzuordnen.

2 Integrale

durch und Einsetzen von $z = z'$ liefert, daß $r = p(z') = 0$ sein muss, also ist

$$q(z) = \frac{p(z)}{z - z'}$$

ein Polynom vom Grad $n - 1$. Wiederholte Anwendung dieses Vorgehens liefert ein (konstantes)²⁵ Polynom q vom Grad 0 mit

$$q(z) = p(z) / \left(\prod_{j=1}^n (z - z_j) \right) \quad \Rightarrow \quad p(z) = q(z) \prod_{j=1}^n (z - z_j)$$

und ein Vergleich der Leitkoeffizienten liefert $q(z) = p_n$ und damit (2.3.11). $\square$

2.3.4 Das Maximumprinzip

Zum Abschluss noch eine weitere Eigenschaft analytischer Funktionen, die einfach aus der Cauchyschen Integralformel abgeleitet werden kann. Wir halten uns dabei an [12].

Satz 2.3.17 (MAXIMUMPRINZIP, erste Version). *Ist f analytisch in dem Gebiet D und $\mathbb{D}_r(z_0) \subset D$, so gilt*

$$|f(z)| \leq \max_{|z' - z_0| = r} |f(z')|, \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0). \quad (2.3.12)$$

Die Funktion f nimmt also für jede Kreisscheibe ihr Betragsmaximum auf dem Rand an.

Beweis: Ist f analytisch, dann ist auch f^k analytisch²⁶ für $k \in \mathbb{N}$ und die Cauchysche Integralformel (2.3.4) liefert

$$(f(z))^k = \oint_{(z_0, r)} \frac{f^k(z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

also

$$|f(z)|^k = \left| \oint_{(z_0, r)} \frac{f^k(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \max_{|z' - z_0| = r} |f(z')|^k 2\pi r.$$

Ziehen wir daraus die k te Wurzel, so erhalten wir

$$\underbrace{|f(z)| \leq \max_{|z' - z_0| = r} |f(z')| (2\pi r)^{1/k}}_{\rightarrow 1}, \quad (2.3.13)$$

woraus (2.3.12) mit $k \rightarrow \infty$ folgt. $\square$

Korollar 2.3.18. *Eine in $\mathbb{D}_1(0)^\circ$ analytische Funktion, die auf dem Einheitskreis $\partial\mathbb{D}_1(0)$ verschwindet, muss die Nullfunktion sein.*

Wir werden uns mit dem Maximumprinzip später noch genauer beschäftigen.

²⁵Das hat dann auch keine Nullstelle mehr.

²⁶Und $(f^k)' = k f^{k-1} f'$.

Jeder kann sich irren, und er muß sich irren, je mehr er über etwas nachdenkt.

(J. Hasek, *Die Abenteuer des braven Soldaten Schwejk*)

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Folgen und Reihen analytischer Funktionen sowie deren Bezug zu Potenzreihen und deren Entwicklung in Potenzreihen. Das zentrale Resultat wird schließlich der sogenannte *Residuensatz* sein.

3.1 Approximation und Konvergenz

Definition 3.1.1 (Gleichmäßige Konvergenz). Eine Folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $D \subseteq \mathbb{C}$ von Funktionen heißt GLEICHMÄSSIG KONVERGENT gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad z \in D, \quad n \geq n_0. \quad (3.1.1)$$

Die Folge heißt LOKAL GLEICHMÄSSIG KONVERGENT, falls es zu jedem $z \in D$ eine Umgebung U von z gibt, so daß die Einschränkungen $f|_{U \cap D}$ gleichmäßig konvergent sind.

Bemerkung 3.1.2. Es macht bei der gleichmäßigen Konvergenz eine subtilen, aber bedeutsamen Unterschied, ob D kompakt ist oder nicht. Im ersteren Fall hat man dann nämlich auch Konvergenz bezüglich der Norm

$$\|f\|_{D,\infty} := \max_{z \in D} |f(z)|.$$

3.1.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Das folgende Resultat ist aus der Analysis bekannt¹.

Satz 3.1.3. Die Grenzfunktion einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis: Zur Erinnerung: Seien $z \in D$, U die Umgebung von z nach Definition 3.1.1 und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein n , so daß²

$$|f_n(z') - f(z')| < \varepsilon, \quad z' \in D \cap U.$$

Da f_n stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $y, z \in D$

$$|y - z| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(y) - f_n(z)| < \varepsilon$$

¹Oder sollte es sein.

²Hier reicht uns wirklich ein n und nicht „alle $n \geq n_0$ “.

3 Folgen und Reihen

und damit auch

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z')| < 3\varepsilon$$

erfüllt ist. Die Grenzfunktion ist also stetig auf U . □

Lokal gleichmäßige Konvergenz überträgt sich auch auf das Integral.

Proposition 3.1.4. *Ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen mit Grenzwert f , dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi} f_n(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta \quad (3.1.2)$$

für jede stückweise glatte Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow D$.

Beweis: Da $I(\varphi)$ kompakt ist³, ist die Folge f_n sogar gleichmäßig konvergent, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| = 0,$$

und damit konvergiert

$$\left| \int_{\varphi} f_n(\zeta) d\zeta - \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \ell(\varphi) \max_{t \in [a, b]} |f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))|$$

gegen Null für $n \rightarrow \infty$. □

Satz 3.1.5 (Weierstraß). *Sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $D \neq \emptyset$ offen, eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von analytischen Funktionen. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls analytisch und die Folge f'_n , $n \in \mathbb{N}_0$, der Ableitungen konvergiert lokal gleichmäßig gegen f' .*

Beweis: Zu $z \in D$ seien z_1, z_2, z_3 drei Punkte mit $z \in [[z_1, z_2, z_3]] \subset D$, was möglich ist, da D offen ist: Es gibt eine Kugel um z in D , und in diese kann man das Dreieck einpassen. Nach Satz 2.2.1 ist

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f_n(\zeta) d\zeta = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

mit Proposition 3.1.4 folgt, daß

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f_n(\zeta) d\zeta = 0.$$

Nach dem Satz von Morera, Satz 2.3.12, ist f analytisch. Für die Konvergenz der Ableitungen verwenden wir die Integralformel (2.3.8), mit deren Hilfe für alle $z_0 \in D$ mit $\mathbb{D}_r(z_0)^\circ \subseteq D$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z), \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ$$

folgt, wobei die Konvergenz von z unabhängig ist. Das ist aber nichts anderes als die lokale gleichmäßige Konvergenz der Ableitung. □

Durch Iteration von Satz 3.1.5 erhält man sofort die folgende Verallgemeinerung.

³Das Bild kompakter Mengen unter stetigen Funktionen ist kompakt, siehe Analysis II, [6, 10, 17].

Korollar 3.1.6. Ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $D \neq \emptyset$ offen, eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von analytischen Funktionen mit Grenzfunktion f , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1.3)$$

lokal gleichmäßig in D .

Bemerkung 3.1.7. Auch hier ist wieder alles ganz anders als in der reellen Analysis: Dort gibt es den SATZ VON WEIERSTRASS, der besagt, daß sich jede stetige Funktion Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen, also *analytischen* Funktionen ist, siehe [14, 15]. Beispielsweise konvergieren die BERNSTEINPOLYNOME

$$B_n f(x) := \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen die stetige Funktion $f \in C[0, 1]$. Das heißt aber noch lange nicht, daß f differenzierbar sein muss oder daß die Ableitungen der Polynome ebenfalls konvergieren würden⁴

3.1.2 Konvergenz von Funktionenreihen

Aus der Definition der Konvergenz einer Folge von Funktionen folgt dann ganz natürlich auch die Konvergenz einer Reihe von Funktionen.

Definition 3.1.8. Eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad f_n : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

von Funktionen auf der offenen Menge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ heißt (lokal) GLEICHMÄSSIG KONVERGENT, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{j=0}^n f_j, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

(lokal) gleichmäßig konvergent ist.

Und nun noch ein neuer Konvergenzbegriff.

Definition 3.1.9. Eine Funktionenreihe $\sum f_n$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt NORMAL KONVERGENT, wenn es zu jedem $z \in D$ eine Umgebung U von z und eine Folge $M = (M_n : n \in \mathbb{N}_0)$, $M_n \geq 0$, von nichtnegativen Zahlen gibt, so daß

$$|f_n(z')| \leq M_n, \quad z' \in U \cap D, n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty. \quad (3.1.4)$$

Normale Konvergenz ist ein einfaches hinreichendes Kriterium für lokal gleichmäßige Konvergenz und hat sogar einen eigenen Namen.

Proposition 3.1.10 (WEIERSTRASSSCHER M-TEST). Eine normal konvergente Funktionenreihe konvergiert absolut und lokal gleichmäßig und kann daher beliebig umgeordnet werden⁵.

⁴Dann natürlich gegen die Ableitung der Grenzfunktion.

⁵Die Reihenfolge der Funktionen spielt keine Rolle.

3 Folgen und Reihen

Beweis: Die Voraussetzungen sind einfach so daß es klappt: zu $z \in D$ wählen wir die Umgebung U und erhalten, daß die Reihe auf $U \cap D$ durch die Reihe zu M majorisiert wird:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z')| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty, \quad z' \in U \cap D,$$

weswegen die Reihe absolut und auf $U \cap D$ gleichmäßig konvergiert. Die letzte Aussage ist die Umordnungseigenschaft für konvergente Reihen, siehe Analysis I. $\square$

Satz 3.1.11 (Weierstraß). *Ist $\sum f_n$ eine normal konvergente Reihe von analytischen Funktionen auf der offenen Menge $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls analytisch und es gilt*

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n. \quad (3.1.5)$$

Die Reihe $\sum f'_n$ ist normal konvergent.

Beweis: Nach Proposition 3.1.10 ist die Folge der Partialsummen eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, die alle analytisch sind, da sie endliche Summe von analytischen Funktionen sind. Damit ist die Grenzfunktion ebenfalls analytisch. Da

$$\left(\sum_{j=0}^n f_j \right)' = \sum_{j=0}^n f'_j$$

folgt (3.1.5) direkt aus der in Satz 3.1.5 gezeigten Konvergenz der Ableitungen einer Folge gegen die Ableitung der Grenzfunktion. Bleibt „nur“ noch die normale Konvergenz. Dazu wählen wir $z \in \mathbb{C}$, eine Umgebung wie in Definition 3.1.9 und ρ so klein, daß $\mathbb{D}_\rho(z) \subset U \cap D$. Dies geht, weil U und D , also auch $U \cap D$ offen sind. In $\mathbb{D}_\rho(z)$ gibt es nun eine *Majorantenfolge* M_n und die Cauchysche Integralformel liefert

$$|f'_n(z')| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z|=\rho} \frac{f_n(z)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{M_n}{\rho^2}}_{=\max\ldots} \underbrace{2\pi\rho}_{\ell(\phi)} = \frac{M_n}{\rho} =: M'_n$$

und damit erfüllt die Folge der Ableitungen alle Voraussetzungen der normalen Konvergenz. $\square$

Wiederholte Anwendung von Satz 3.1.11 ergibt dann die folgende, stärkere Aussage.

Korollar 3.1.12 (zu Weierstraß). *Ist $\sum f_n$ eine normal konvergente Reihe von analytischen Funktionen auf der offenen Menge $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ mit Grenzfunktion f , dann gilt*

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1.6)$$

und die Reihen $\sum f_n^{(k)}$ sind normal konvergent.

Die Indetität (3.1.6) wird oftmals auch als die Aussage wiedergegeben, daß man *normal konvergente Reihen analytischer Funktionen* GLIEDWEISE DIFFERENZIEREN kann.

Beispiel 3.1.13. Ein Beispiel ist die verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C},$$

wobei

$$n^s := \exp(s \log n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{C},$$

die natürlich Verallgemeinerung von n^α auf komplexe Exponenten ist. Wir betrachten jetzt die Funktionen $f_n(s) = n^{-s}$ und da

$$|n^{-s}| = |\exp(-s \log n)| = |\exp(-\Re s \log n)| \underbrace{|\exp(-\Im s \log n)|}_{=1} = n^{-\Re s},$$

ist die Funktionenreihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (3.1.7)$$

normal konvergent in der HALBEBENE

$$\mathbb{H}_{>1} := \{s \in \mathbb{C} : \Re s > 1\},$$

und konvergiert gleichmäßig⁶ und absolut in jeder Halbebene

$$\mathbb{H}_{\geq 1+\delta} := \{s \in \mathbb{C} : \Re s \geq 1 + \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Die Funktion ζ aus (3.1.7), bekannt als RIEMANNSCHE ZETA FUNKTION ist damit analytisch in $\mathbb{H}_{>1}$.

3.2 Potenzreihen

Definition 3.2.1. Eine POTENZREIHE mit Entwicklungspunkt z_0 ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Durch eine Transformation des Koordinatensystems kann man den Entwicklungspunkt auch einfach als $z_0 = 0$ wählen.

3.2.1 Konvergenz

Für die Konvergenz von Potenzreihen gilt die folgende Aussage, die uns zurück zum Begriff des Konvergenzradius bringt.

Proposition 3.2.2. Für jede Potenzreihe $\sum a_n z^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl⁷

$$r := \sup \left\{ t \geq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n t^n = 0 \right\} = \sup \left\{ t \geq 0 : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |a_n t^n| < \infty \right\} \in [0, \infty], \quad (3.2.1)$$

so daß gilt:

1. die Potenzreihe konvergiert normal in $\mathbb{D}_r(0)^\circ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$,
2. die Potenzreihe divergiert für alle z mit $|z| > r$.

⁶Ohne „lokal“

⁷Genau genommen ist ∞ keine Zahl, aber in diesem Fall bewegen wir uns ausnahmsweise in $[0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, nichtnegativen Anteil der EINKUNKTPAKTIFIZIERUNG der reellen Achse.

3 Folgen und Reihen

Definition 3.2.3. Die Größe r aus (3.2.1) heißt KONVERGENZRADIUS der Potenzreihe $\sum a_n z^n$ und überträgt sich kanonisch auf Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt.

Beweis: Zuerst wiederholen wir⁸, daß die beiden Definitionen von r aus (3.2.1), nennen wir sie r_1 und r_2 , wirklich dasselbe liefern. Da jede Nullfolge beschränkt ist, ist $r_1 \leq r_2$. Ist aber nun

$$|a_n t^n| \leq M, \quad n \in \mathbb{N},$$

für ein $M > 0$, dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\left| a_n \left(\frac{t}{1+\varepsilon} \right)^n \right| = |a_n t^n| \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n} \rightarrow 0,$$

also ist $|a_n (t')^n|$ eine Nullfolge für alle $t' < t$, und daher

$$\left\{ t \geq 0 : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |a_n t^n| < \infty \right\} = \sup \left\{ t \geq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n t^n = 0 \right\},$$

und ein weiteres Supremum ändert daran auch nichts mehr.

Sei also nun r wie in (3.2.1). Da eine konvergente Reihe

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| |z|^n$$

erfüllt sein muss, kann für $|z| > r$ die Reihe nicht konvergieren. Ist nun $|z| < r$, dann gilt für ein beliebiges $t \in (|z|, r)$, daß $a_n t^n$ eine Nullfolge und damit beschränkt ist, also

$$|a_n z^n| = \left| a_n \frac{z^n}{t^n} t^n \right| = |a_n t^n| \underbrace{\left(\frac{|z|}{t} \right)^n}_{< 1} \leq M, \quad (3.2.2)$$

also, mit $\rho := \frac{|z|}{t} < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{M}{1-\rho},$$

die Reihe ist also absolut konvergent und zusammen mit der sogar globalen Beschränktheit aus (3.2.2) sind alle Bedingungen für normale Konvergenz erfüllt. $\square$

Bemerkung 3.2.4. Auf der *offenen* Kreisscheibe $\mathbb{D}_r(0)^\circ$ konvergiert also die Potenzreihe, außerhalb der *abgeschlossenen* Kreisscheibe divergiert sie und auf dem Rand kann sie prinzipiell machen, was sie will, hierüber wird keine Aussage getroffen und kann auch keine getroffen werden.

Polynome sind analytische Funktionen, also ist die Potenzreihe im gesamten Konvergenzbe-
reich analytisch, nach Satz 3.1.11 dürfen wir also gliedweise differenzieren und erhalten für $z \in B_r(z_0)$, daß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Beispiel 3.2.5 (Konvergente Potenzreihen).

⁸Das kann man aus der Analysis I kennen, findet es aber wohl nicht überall.

1. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

zur komplexen Exponentialfunktion hat Konvergenzradius ∞ .

2. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

hat Konvergenzradius 1, da t^n für $t > 1$ schneller wächst als n^2 . Die Potenzreihe konvergiert auch überall auf dem Rand des Konvergenzkreises absolut, da die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Im Gegensatz dazu hat die GEOMETRISCHE REIHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

zwar denselben Konvergenzradius, aber nun gibt es auf dem Rand nur Divergenz.

3. Die LOGARITHMUSREIHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

hat ebenfalls Konvergenzradius 1, konvergiert⁹ an $z = 1$ und divergiert für $z = -1$, wo man die HARMONISCHE REIHE $\sum \frac{1}{n}$ erhält.

Man sieht also, auf dem Rand sind Konvergenz, Divergenz und punktabhängiges Verhalten möglich.

3.2.2 Potenzreihendarstellung analytischer Funktionen

Damit haben wir die nächste Eigenschaft analytischer Funktionen, nämlich ihre Darstellbarkeit als Potenzreihe in Analogie zur TAYLORREIHE der reellen Analysis.

Satz 3.2.6 (Potenzreihenentwicklung). *Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine analytische Funktion und $B_r(z_0) \subset D$. Dann gibt es eine POTENZREIHENENTWICKLUNG*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0)^\circ, \quad (3.2.3)$$

wobei

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.2.4)$$

Beweis: Da die Potenzreihendarstellung eindeutig ist¹⁰, können wir die Konvergenz auch auf der kleinen Kugel $B_\rho(z_0)$, $\rho < r$ nachweisen, deren Abschluss ganz in $B_r(z_0)$ liegt. Dort gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz, Satz 2.2.1, daß

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z - z_0| < \rho. \quad (3.2.5)$$

⁹Ein beliebtes Beispiel in Analysis I.

¹⁰Zwei Potenzreihen sind genau dann gleich, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, sowohl als formale Objekte, aber erst recht wenn Konvergenz im Spiel ist.

3 Folgen und Reihen

Nun schreiben wir den INTEGRATIONSKERN oder CAUCHY-KERN als

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(\frac{\zeta - z_0 + z_0 - z}{\zeta - z_0} \right)^{-1} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Die unendliche Reihe konvergiert dabei absolut und gleichmäßig in ζ , da

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1.$$

Das setzen wir in (3.2.5) ein und erhalten

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, \rho)} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,\end{aligned}$$

wobei wir Summe und Integral wegen Proposition 3.1.4 vertauschen dürfen. Die Identität in (3.2.4) ist ansonsten genau die Cauchysche Integralformel. $\square$

3.2.3 Rechenregeln für Potenzreihen

In diesem Kapitel stellen wir, für den „Werkzeugkasten des kleinen Mathematikers“¹¹ ein paar Regeln zum Rechnen mit Potenzreihen zusammen. Der Einfachheit halber nehmen wir immer den Entwicklungspunkt 0.

Lemma 3.2.7. Sind $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius r_1, r_2 und ist

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad |z| < \min(r_1, r_2),$$

dann ist $a_n = b_n$.

Beweis: Folgt sofort aus

$$f^{(n)}(0) = n! a_n = n! b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

$\square$

Lemma 3.2.8. Sind $\sum a_n z^n$ und $\sum b_n z^n$ Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius r_1, r_2 , dann ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < \min(r_1, r_2),$$

wobei die Koeffizienten c_n als CAUCHYPRODUKT

$$c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.2.6)$$

gebildet werden.

¹¹Und natürlich auch der kleinen Mathematikerin.

Beweis: Ausmultiplizieren ergibt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n z^{m+n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{j+k=n} a_j b_k = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Da wir hier die Reihe umgeordnet haben, muss sie absolut konvergieren, daher die Voraussetzung an den Konvergenzradius. $\square$

Lemma 3.2.9. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und $a_0 \neq 0$. Dann gibt es $r > 0$, so daß

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad |z| < r,$$

wobei die Koeffizienten b_n rekursiv durch

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad (3.2.7)$$

bestimmt werden können.

Beweis: Da $f(0) = a_0 \neq 0$ gibt es aus Stetigkeitsgründen¹² ein $r > 0$, so daß

$$f(z) \neq 0, \quad |z| < r,$$

und damit ist $1/f$ auf $B_r(0)$ analytisch und nach Satz 3.2.6 in eine Potenzreihe¹³ entwickelbar:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z < r.$$

Wir können ausserdem r kleiner als den Konvergenzradius von f wählen. Nach Lemma 3.2.8 ist dann

$$1 = f(z) \frac{1}{f(z)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right), \quad |z| < r,$$

und (3.2.6) wird zu dem Gleichungssystem

$$\delta_{n0} = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $n = 0$ ergibt das $b_0 = 1/a_0$, für $n > 0$ lösen wir einfach nach b_n auf und erhalten sofort (3.2.7). $\square$

Lemma 3.2.10 (DOPPELREIHENSATZ von Weierstraß). Wenn die Potenzreihen

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

alle Konvergenzradius $> r$ haben und die Reihe $\sum f_n$ in $B_r(0)$ normal konvergiert, dann ist die Grenzfunktion F analytisch in $B_r(0)$ und es gilt

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\right) z^n, \quad |z| < r.$$

¹²Da brauchen wir noch nicht einmal Analytizität

¹³Deren Konvergenzradius mindestens r ist.

3 Folgen und Reihen

Beweis: Die Funktionen f_j sind alle analytisch in $B_r(0)$ und somit auch F , das man in eine Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad |z| < r,$$

entwickeln kann, wobei nach Korollar 3.1.12

$$b_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

sein muß. □

Man kann auch das Ineinandereinssetzen, also die KONKATENATION von Funktionen auf der Basis von Potenzreihen betrachten. Dazu seien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n,$$

mit $z_0 = g(z_1) = b_0$, damit die Entwicklungspunkte zusammenpassen. Dann ist auch

$$\begin{aligned} (f \circ g)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-z_0 + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_1)^k \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_1)^k \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n \end{aligned}$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_1 , deren Koeffizienten man entweder durch Ausmultiplizieren unter iterierter Verwendung des Cauchyprodukts (3.2.6) bestimmen kann oder aber einfach durch

$$c_n = \frac{(f \circ g)^{(n)}(z_1)}{n!},$$

also

$$\begin{aligned} c_0 &= f(g(z_1)) = f(z_0) = a_0 \\ c_1 &= f'(g(z_1)) g'(z_1) = f'(z_0) g'(z_1) = a_1 b_1 \\ c_2 &= \frac{f''(z_0) (g'(z_1))^2 + f'(z_0) g''(z_1)}{2} = a_2 b_1^2 + a_1 b_2 \\ c_3 &= \frac{f^{(3)}(z_0) (g'(z_1))^3 + 3f''(z_0) g'(z_1) g''(z_1) + f'(z_0) g^{(3)}(z_1)}{6} \\ &= a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_1 b_3 \end{aligned}$$

und dann wird es langsam unübersichtlich. Allerdings sieht man leicht, daß

$$c_n = p_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

für ein Polynom p_n vom TOTALGRAD $n+1$ in den $2n$ Variablen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Übung 3.2.1 Zeigen Sie per Induktion über n , daß p_n Grad $n+1$ hat und daß

$$p_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = a_1 b_n + \tilde{p}_n(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.2.8)$$

gilt. ◇

Mit dieser Methode können wir dann auch die UMKEHRFUNKTION zu einer konvergenten Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit Entwicklungspunkt z_0 bestimmen. Ist $0 \neq f(z_0) = a_1$, dann ist f in einer Umgebung von z_0 invertierbar und wenn wir die Umkehrfunktion als

$$f^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad b_0 = z_0,$$

ansetzen, dann bedeutet die Eigenschaft, Umkehrfunktion zu sein, nach (3.2.8) nichts anderes als

$$b_n = -\frac{1}{a_1} \tilde{p}_n(a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zum Abschluss noch ein Beispiel, daß der Konvergenzradius für dieselbe Potenzreihe vom Entwicklungspunkt abhängen kann.

Beispiel 3.2.11. Um die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ um einen Punkt z_0 zu entwickeln, verwenden wir denselben Trick wie im Beweis von Satz 3.2.6 und schreiben die Funktion als

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - z_0} \left(1 - \frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)^{-1} = \frac{1}{1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

und der Konvergenzradius dieser Reihe ist $|1 - z_0|$. Am Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ ist das also 1, für $z_0 = \frac{i}{2}$ ergibt sich sogar

$$\sqrt{\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 - \frac{i}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1,$$

und der Nullpunkt ist also sogar in diesem größeren Kreis enthalten. Auf diese Art und Weise kann man analytische, durch Potenzreihen definierte Funktionen dann sogar auf einen größeren Bereich fortsetzen. Der „böse“ Punkt $z = 1$ liegt dann übrigens immer auf dem Rand dieser Konvergenzbereiche.

3.2.4 Beschreibung analytischer Funktionen

Wir haben bisher eine Menge Eigenschaften analytischer Funktionen kennengelernt und so eine Vielzahl von äquivalenten Beschreibungen desselbe Phänomens erhalten. Fassen wir das nochmals zusammen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen, ist ANALYTISCH, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. f ist an allen $z \in D$ komplex differenzierbar (Definition 1.3.11).
2. Die zugehörige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist an allen z total differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. (Korollar 1.3.5).
3. f ist stetig und für alle $[[z_1, z_2, z_3]]$ gilt

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

(Satz von Morera, Satz 2.3.12).

3 Folgen und Reihen

4. f besitzt lokal eine Stammfunktion: Für alle $z \in D$ gibt es eine Umgebung U von z , so daß $f|_U$ eine Stammfunktion besitzt. (Korollar 2.2.8).
5. f ist stetig und für jede Kreisscheibe $\mathbb{D}_r(z_0) \subset D$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}_r(z_0).$$

(Satz 2.3.5 und Satz 2.3.10).

6. f kann lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden: Für jedes $z_0 \in D$ gibt es eine offene Umgebung U von z_0 , so daß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in U,$$

als Potenzreihe entwickelt werden kann. (Satz 3.2.6).

7. f kann in jeder offenen Kreisscheibe, die ganz in D enthalten ist, in eine Potenzreihe entwickelt werden¹⁴.

Bemerkung 3.2.12. Reelle und komplexe Analysis sind also signifikant unterschiedlich, sobald es um Differenzierbarkeit und Potenzreihen geht. Im Reellen gibt es viele Funktionen, die n -mal aber nicht $n+1$ -mal differenzierbar sind¹⁵. Darüber hinaus gibt es das Beispiel von Cauchy für eine *unendlich oft* auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion, nämlich

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(0) = 0,$$

die *nicht* von ihrer Taylorreihe dargestellt wird. Differenzierbarkeit allein ist hier also nicht ausreichend für Darstellbarkeit als Potenzreihe.

3.3 Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen

Definition 3.3.1. Eine Menge $M \subset D$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt **DISKRET**, wenn sie keinen Häufungspunkt in D hat.

3.3.1 Häufungspunkte und Identitätsmengen

Bemerkung 3.3.2. Ob M diskret ist oder nicht, hängt von D ab. So ist beispielsweise $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ diskret in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, aber nicht diskret in $\mathbb{C}$. Eine in D diskrete Menge kann also durchaus in $\mathbb{C}$ Häufungspunkte haben. Das kann man auch lustiger treiben, beispielsweise mit

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ k + \frac{1}{n} : k = 1, \dots, n \right\},$$

was diskret in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist.

¹⁴Was aber nicht bedeuten muss, daß der Konvergenzradius unbedingt mit dem Radius der Kreisscheibe übereinstimmt.

¹⁵Auch wenn die Beispiele für stetige, nirgends differenzierbare Funktionen gar nicht so einfach sind, siehe [3, 4].

3.3 Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen

Definition 3.3.3. Die NULLSTELLENMENGE einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert als¹⁶

$$Z(f) = Z(f, D) = \{z \in D : f(z) = 0\} \subseteq D. \quad (3.3.1)$$

Proposition 3.3.4. Ist $0 \neq f : D \rightarrow \mathbb{C}$ nicht die Nullfunktion auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, dann ist $Z(f)$ diskret.

Beweis: Sei $z^* \in D$ ein Häufungspunkt von $Z(f)$, dann gibt es eine Folge $z_j \in Z(f)$, $j \in \mathbb{N}$, mit $z_j \rightarrow z^*$ und $z_j \neq z^*$. Da f stetig ist, ist

$$f(z^*) = f\left(\lim_{j \rightarrow \infty} z_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{f(z_j)}_{=0} = 0, \quad (3.3.2)$$

also hat die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z^* und Konvergenzradius r die Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z^*)^n = (z - z^*) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z^*)^n, \quad |z - z^*| < r,$$

und somit gilt, daß auf dem Konvergenzkreis von f um z^* auch

$$g_1(z) := \frac{f(z)}{z - z^*} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z^*)^n$$

eine analytische Funktion. Da $g_1(z_j) = 0$ liefert das Stetigkeitsargument wie vorher, daß

$$a_1 = g_1(z^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} g_1(z_j) = 0,$$

und wir können mit

$$g_2(z) = \frac{g_1(z)}{z - z^*} = \frac{f(z)}{(z - z^*)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z^*)^n$$

weitermachen, erhalten $g_2(z^*) = 0$ und auf diese Art und Weise, daß $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Damit ist also $f(z) = 0$, $z \in B_r(z^*)$, also ist jeder Punkt aus $B_r(z^*)$ ebenfalls ein Häufungspunkt von $Z(f)$, die Menge U aller Häufungspunkte von $Z(f)$ ist daher offen. Die Menge V aller Nicht-Häufungspunkte von $Z(f)$ ist ebenfalls offen und es gilt $D = U \cup V$. Da D ein Gebiet, also zusammenhängend ist, muß die lokal konstante Funktion $z \mapsto \chi_U(z)$ konstant sein und da $U \neq \emptyset$ folgt $V = \emptyset$ und $D = U$. Die Funktion f verschwindet also auf D , was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. $\square$

Satz 3.3.5 (IDENTITÄTSSATZ). Für zwei analytische Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem nichtleeren¹⁷ Gebiet D sind äquivalent:

1. $f = g$,
2. Die ÜBEREINSTIMMUNGSMENGE $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ enthält einen Häufungspunkt.
3. Es existiert ein Punkt $z \in D$ mit $f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: „1) $\Rightarrow$ 2)“ ist trivial und „2) $\Rightarrow$ 3)“ sowie „3) $\Rightarrow$ 1)“ haben wir in Proposition 3.3.4 bewiesen, man muss nur f dort durch $f - g$ ersetzen. $\square$

¹⁶ „Z“ steht für ZEROS.

¹⁷ Trivialitäten muss man halt gegebenfalls ausschliessen.

3 Folgen und Reihen

Korollar 3.3.6 (Eindeutigkeit der Fortsetzung). Sei $M \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge mit mindestens einem Häufungspunkt und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es höchstens eine ANALYTISCHE FORTSETZUNG $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ von f , also g analytisch mit

$$g(z) = f(z), \quad z \in M.$$

Mit anderen Worten: Ist f ANALYTISCH FORTSETZBAR, dann ist diese Fortsetzung eindeutig.

Korollar 3.3.7. Die analytischen Fortsetzungen der reellen Funktionen $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$ sind eindeutig.

Bemerkung 3.3.8 (Identitätssatz). Der Identitätssatz besagt, daß analytische Funktionen schon durch ihr Verhalten auf *sehr kleinen* Mengen eindeutig festgelegt sind.

1. Mengen mit Häufungspunkten sind offene Mengen beliebiger Größe, Sterngebiete¹⁸, aber auch Kurvenstücke der Form $\varphi([a, b])$, bei denen jeder Punkt Häufungspunkt ist, oder sogar reelle Intervalle.
2. Es reichen also sogar „dünne Mengen“ vom Maß 0 in $\mathbb{C}$.
3. Jede reelle Funktion, die durch eine konvergente Potenzreihe definiert ist, kann eindeutig analytisch in einer komplexen Umgebung des Intervalls fortgesetzt werden. Das erklärt, warum man auch im Reellen vom KONVERGENZRADIUS spricht, siehe die Definition in (1.1.6).
4. Die Einschränkungen analytischer Funktionen auf reelle Intervalle sind REELL ANALYTISCH, also Funktionen, die lokal durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius dargestellt werden. Das ist — wieder einmal — eine ausgesprochen seltene Eigenschaft und nochmals deutlich stärker als „nur“ unendlichfache Differenzierbarkeit.

3.3.2 Offene Abbildungen

In der Topologie definiert man Stetigkeit einer Funktion durch die Eigenschaft, daß die *Urbilder* offener Mengen wieder offen sein müssen; die Umkehrung, also daß die *Bilder* von offenen Mengen wieder offen sind, ist eine andere Eigenschaft. Analytische Funktionen haben sie.

Satz 3.3.9 (Offene Abbildung). Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant¹⁹ und D ein Gebiet, dann ist $f(D)$ ebenfalls ein Gebiet.

Beweis: Wir müssen zwei Dinge zeigen, nämlich daß $f(D)$ offen, also f eine OFFENE ABBILDUNG²⁰ ist, und daß $f(D)$ bogenzusammenhängend ist. Sei also $z_0 \in D$, dann müssen wir zeigen, daß eine ganze Kugel um $f(z_0)$ ebenfalls in $f(D)$ liegt; indem wir f durch $f(\cdot + z_0) - f(z_0)$ ersetzen²¹, können wir annehmen, daß $z_0 = f(z_0) = 0$ ist. Entwickeln wir f als Potenzreihe um 0, so ist also $a_0 = 0$ und es gibt ein $n > 0$, so daß

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k = z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} z^k \right) =: z^n h(z).$$

¹⁸Hier ist auf jeden Fall das Zentrum ein Häufungspunkt.

¹⁹In diesem Fall wäre $f(D)$ einpunktig und definitiv nicht offen.

²⁰Auf Englisch OPEN MAPPING, nicht überraschend, aber sehr gebräuchlich.

²¹Was ebenfalls analytisch ist.

3.3 Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen

Die Funktion h ist ebenfalls analytisch, hat nach der Definition (3.2.1) denselben Konvergenzradius²² wie f . Nach Bemerkung 2.2.16 hat h eine n -te Wurzel h_0 und damit ist

$$f(z) = z^n (h_0(z))^n = (z h_0(z))^n =: (f_0(z))^n,$$

mit $f_0(0) = 0$ und

$$f'_0(z) = \frac{d}{dz} (z h_0(z)) = h_0(z) + z h'_0(z) \quad \Rightarrow \quad f'_0(0) = h_0(0) = a_n^{1/n} \neq 0.$$

Damit²³ bildet f_0 eine offene Umgebung der 0 auf eine offene Umgebung der Null ab. Es bleibt also nur zu zeigen, daß $z \mapsto z^n$ offene Umgebungen des Ursprungs auf offene Umgebungen abbildet, was aber sofort aus

$$z = |z|e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad \Rightarrow \quad (B_r(0))^n = B_{r^n}(0)$$

folgt. Zusammenhang folgt aus der Stetigkeit von f und damit

$$\varphi(t) \in D \quad \Rightarrow \quad f(\varphi(t)) \in f(D).$$

□

Die Zerlegung von f im Beweis, die wir eigentlich nur gebraucht haben, um eine eventuelle Vielfachheit der Nullstelle von f an $z = 0$ loszuwerden ist durchaus bemerkenswert.

Bemerkung 3.3.10. Jede nichtkonstante analytische Funktion f mit $f(0) = 0$ kann als $f(z) = (h(z))^n$, $n > 0$, geschrieben werden, wobei $h(0) = 0$ und $h'(0) \neq 0$. Damit ist h aber KONFORM, siehe Definition 2.2.20. Mit anderen Worten: Es gibt immer eine Zerlegung in eine konforme Abbildung und eine „mehrfache Drehung“.

3.3.3 Maximumsprinzipien

Satz 3.3.11 (MAXIMUMPRINZIP für Gebiete). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, eine analytische Funktion. Gibt es einen Punkt $z_0 \in D$, so daß

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|, \quad z \in D,$$

dann ist f konstant.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ eine Maximalstelle von $|f|$ und f nicht konstant. Da f dann eine offene Abbildung ist, enthält $f(D)$ eine ganze Kugel $B_r(f(z_0))$ und in dieser findet sich Punkte der Form

$$f_\rho = (1 + \rho)f(z_0) = f(z_\rho), \quad 0 \leq \rho < r,$$

mit $z_\rho \in D$, die natürlich

$$|f(z_\rho)| = (1 + \rho)|f(z_0)| > |f(z_0)|$$

erfüllen, so daß z_0 eben doch keine Maximalstelle sein kann. □

²²Beide hängen nur vom Abklingverhalten der Folge a_n ab und ob man $a_k t^k$ durch $a_{n+k} t^k$ für ein festes n ersetzt oder nicht, spielt für die Beschränktheit der Folge keine Rolle.

²³Dieses Argument braucht man beim SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN, wo man explizit nutzt, daß eine Funktion mit nicht verschwindender Ableitung lokal eine offene Abbildung ist.

3 Folgen und Reihen

Bemerkung 3.3.12. Das Maximumprinzip aus Satz 2.3.17 folgt direkt aus Satz 3.3.11: Der abgeschlossene Einheitskreis ist eine Menge, auf der die stetige Funktion $|f|$ ein Maximum annehmen muss, das Innere des Einheitskreises ein Gebiet, auf dem sie keines annehmen kann, also bleibt nur der Rand übrig.

Korollar 3.3.13. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, eine analytische und nicht konstante Funktion für die $|f|$ ein MINIMUM an $z \in D$ hat, dann ist $f(z) = 0$.

Beweis: Dieselbe Idee wie im Beweis von Satz 3.3.11: Es gibt eine offene Umgebung von $f(z)$ in $f(D)$ und wenn nicht gerade $f(z) = 0$ ist, dann enthält diese Umgebung einen Punkt, der näher am Ursprung liegt und dort hätte $|f|$ einen kleineren Wert. $\square$

Soweit war ja alles sehr einfach und direkt. Jetzt noch ein zentrales Maximumprinzip, für das wir zuerst eine notationelle Vereinfachung einführen.

Definition 3.3.14. Mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0)$ und $\mathbb{D}^\circ = \mathbb{D}_1(0)^\circ$ bezeichnen wir die EINHEITSKREISSCHEIBE beziehungsweise deren Inneres.

Satz 3.3.15 (SCHWARZSCHES LEMMA). Ist $f : \mathbb{D}^\circ \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad |f(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}^\circ, \quad (3.3.3)$$

so erfüllt sie auch

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D}^\circ. \quad (3.3.4)$$

Außerdem gilt: Existiert ein Punkt $z \in \mathbb{D}^\circ \setminus \{0\}$ so daß $|f(z)| = |z|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, dann existiert eine $\theta \in \mathbb{T}$ so daß $f(z) = e^{i\theta} z$, $z \in \mathbb{D}^\circ$, und f ist eine ROTATION um den Nullpunkt.

Beweis: Wir schreiben

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0, wobei (3.3.3) sofort $a_0 = 0$ impliziert. Damit ist wieder

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n =: z g(z),$$

und²⁴ $g : \mathbb{D}^\circ \rightarrow \mathbb{C}$ ist ebenfalls eine analytische Funktion auf dem Inneren des Einheitskreises. Außerdem ist

$$f'(z) = g(z) + z g'(z) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = g(0).$$

Nun gilt aber

$$|g(z)| = \frac{1}{|z|} \underbrace{|f(z)|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{|z|}, \quad z \in \mathbb{D}^\circ,$$

also

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}, \quad |z| = r, \quad 0 < r < 1,$$

also nach dem Maximumsprinzip aus Satz 3.3.11 auch

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}, \quad z \in \mathbb{D}_r(0).$$

²⁴Mit den wohlbekannten Argumenten, siehe Beweis von Satz 3.3.9

3.3 Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen

Mit dem Grenzübergang²⁵ $r \rightarrow 1$ ist somit

$$|g(z)| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}^\circ, \quad (3.3.5)$$

woraus sofort

$$|f(z)| = |z| \underbrace{|g(z)|}_{\leq 1} \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

folgen.

Existiert nun ein $z \in \mathbb{D}^\circ \setminus \{0\}$ mit $|f(z)| = |z|$, dann ist $|g(z)| = |f(z)|/|z| = 1$; wäre $|g(0)| = |f'(0)| = 1$, dann können wir sogar $z = 0$ wählen. Da $|g| \leq 1$ auf $\mathbb{D}^\circ$ gilt, haben wir also ein Maximum von $|g|$ in $\mathbb{D}^\circ$ gefunden und nach dem Maximumprinzip muß g konstant sein, also $g(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$, mit $|c| = 1$, also $c = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{T}$. Und dann ist

$$f(z) = zg(z) = e^{i\theta}z, \quad z \in \mathbb{D}^\circ$$

sogar eine ganze Funktion und eben eine Rotation. $\square$

Als Anwendung dieses Resultats können wir uns nun fragen, welche konformen Abbildungen den Einheitskreis invariant lassen.

Definition 3.3.16. Eine Funktion $w : \mathbb{D}^\circ \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ heißt KONFORME ABBILDUNG, wenn w und w^{-1} auf $\mathbb{D}^\circ$ analytisch sind.

Da Funktionen, die den Einheitskreis und den Nullpunkt invariant lassen, die Voraussetzungen (3.3.3) des Schwarzschen Lemmas erfüllen, wissen wir nun sofort, daß es da nicht sonderlich viele geben kann.

Korollar 3.3.17. Die einzigen bijektiven konformen Abbildungen $w : \mathbb{D}^\circ \rightarrow \mathbb{D}^\circ$, die den Nullpunkt invariant lassen, $w(0) = 0$, sind die Rotationen $w(z) = w_\theta(z) = e^{i\theta}z$.

Jetzt zurück zu den gebrochen rationalen Transformationen aus (2.2.17), den Faktoren der Blaschkeprodukte.

Proposition 3.3.18. Für jedes $a \in \mathbb{D}^\circ$ sind die gebrochen linearen Transformationen

$$w_a(z) := \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad z \in \mathbb{D}^\circ, \quad (3.3.6)$$

analytisch auf $\mathbb{D}^\circ$, bilden $\mathbb{D}^\circ$ bijektiv auf sich selbst ab und erfüllen $w_a(0) = a$, $w_a(a) = 0$ sowie²⁶ $w_a^{-1} = w_a$.

Beweis: Da $|\bar{a}z| = |\bar{a}||z| < |\bar{a}| < 1$, $z \in \mathbb{D}$, ist die Funktion sogar analytisch auf $\mathbb{D}_r(0)$ für ein $r > 1$. Für $|z| < 1$ ist

$$\begin{aligned} |w_a(z)|^2 &= \frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{|z|^2 - 2\Re(\bar{a}z) + |a|^2}{1 - 2\Re(\bar{a}z) + |a|^2|z|^2} = 1 - \frac{1 - |a|^2 - (1 - |a|^2)|z|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= 1 - \underbrace{\frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}}_{>0} < 1, \end{aligned}$$

²⁵ $r \rightarrow 0$ würde uns nicht wirklich helfen, wir machen den Kreis also so groß wie möglich

²⁶Sie sind also SELBSTINVERS.

3 Folgen und Reihen

also $w_a(\mathbb{D}^\circ) \subseteq \mathbb{D}^\circ$. Da

$$w_a(z) - w_a(z') = \frac{(\bar{a}z' - 1)(z - a) - (\bar{a}z - 1)(z' - a)}{(\bar{a}z - 1)(\bar{a}z' - 1)} = \frac{z - z'}{(\bar{a}z - 1)(\bar{a}z' - 1)},$$

ist die Funktion offensichtlich injektiv und da

$$\begin{aligned} w_a(w_a(z)) &= \frac{w_a(z) - a}{\bar{a}w_a(z) - 1} = \frac{z - a - a(\bar{a}z - 1)}{\bar{a}z - 1} \frac{\bar{a}z - 1}{\bar{a}(z - a) - (\bar{a}z - 1)} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)z}{1 - |a|^2} = z, \end{aligned}$$

gibt es zu jedem z ein $z' = w_a(z)$ mit $w(z') = z$, also ist w auch surjektiv. $\square$

Und das sind dann im wesentlichen auch schon alle konformen Abbildungen, die den Einheitskreis auf sich selbst abbilden.

Korollar 3.3.19. *Ist $w : \mathbb{D}^\circ \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ eine konforme Selbstabbildung des Einheitskreises²⁷, dann gibt es $a \in \mathbb{D}^\circ$ und $\theta \in \mathbb{T}$, so daß $w = e^{i\theta} w_a$ ist.*

Beweis: Setzt man $a := w^{-1}(0) \in \mathbb{D}^\circ$, also $w(a) = 0$, dann ist $w \circ w_a$ eine konforme Selbstabbildung mit $w(w_a(0)) = w(a) = 0$, die nach Korollar 3.3.17 von der Form $z \mapsto e^{i\theta} z$ sein muss. $\square$

²⁷Als bijektiv und in beide Richtungen analytisch.

If the math works, why then you should be sure of yourself. That's the whole point of math.

(N. Stephenson, *Cryptonomicon*)

Jetzt wollen wir uns mit Funktionen der Form

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad \exp \frac{1}{z},$$

befassen, die alle an der Stelle $z = 0$ erst einmal nicht definiert sind, so daß 0 für sie eine Singularität darstellt. Manche dieser Singularitäten sind harmlos, manche „etwas böse“, manche ganz schlimm, und genau diese Unterscheidung wird uns nun ein bisschen beschäftigen. Zuerst aber eine Klarstellung, mit welchem Objekt wir uns befassen wollen.

Definition 4.0.1 (SINGULARITÄT). Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt ISOLIERTE SINGULARITÄT oder nur SINGULARITÄT in D , $D \subset \mathbb{C}$ offen, wenn $z_0 \notin D$, aber es ein $r > 0$ gibt, so daß die PUNKTIERTE UMGEBUNG

$$\dot{U}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \quad (4.0.1)$$

in D enthalten ist: $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$.

Bemerkung 4.0.2. Singularität zu sein ist eine Eigenschaft eines Punktes in $\mathbb{C}$, der sozusagen aus einer Menge D „herausgeschnitten“ ist, aber eigentlich dazugehören müsste, da eine ganze punktierte Umgebung dann doch wieder in D liegt. Wenn wir Singularitäten einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, dann geht es um das Verhalten der Funktionen an solchen Stellen bzw. in einer Umgebung davon, aber Singularität bedeutet eigentlich nur, daß die Stelle nicht zu D gehört.

4.1 Singularitäten analytischer Funktionen

Der einfachste Fall ist natürlich der, daß die Singularität gar keine ist, also einfach in D integriert werden kann.

Beispiel 4.1.1. Betrachten wir einmal eine RATIONALE FUNKTION der Form

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^m}{(z - 1)^n} = \frac{(z + 1)^m (z - 1)^m}{(z - 1)^n}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

mit einer Singularität an $z = 1$. Ist $m \geq n$, dann ist das eigentlich gar keine Singularität, denn der Nenner lässt sich wegkürzen, ist hingegen $m < n$, dann wird die Sache ernster.

4 Singularitäten

4.1.1 Hebbare Singularitäten

Die Idee von Beispiel 4.1.1 fassen wir in eine zentrale Definition.

Definition 4.1.2. Eine Singularität¹ z_0 einer analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen heißt **HEBBAR**, wenn f auf $D \cup \{z_0\}$ analytisch fortgesetzt werden kann, das heisst, wenn es eine analytische Funktion $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß $\tilde{f}|_D = f$.

Ist die Singularität hebbar, so können wir wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ unsere Funktion f an z_0 durch

$$f(z_0) = \lim_{D \ni z \rightarrow z_0} \tilde{f}(z) = \lim_{D \ni z \rightarrow z_0} f(z) \quad (4.1.1)$$

definieren, da $\dot{U}_r(z) \subset D$ für ein $r > 0$ und daher auch $z_0 \in \overline{D}$. Hebbbarkeit lässt sich für analytische Funktionen recht einfach beschreiben.

Satz 4.1.3 (RIEMANNSCHE HEBBARKEITSSATZ). *Eine Singularität z_0 einer analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen, ist genau dann hebbbar, wenn es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(z_0)$ gibt, auf der f beschränkt ist.*

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Nach 4.1.3 ist die Funktion f stetig, wenn die Singularität hebbbar ist und damit in hinreichend kleinen Umgebungen² auch beschränkt.

Für „ $\Leftarrow$ “ wählen wir r so, daß f auf $\dot{U}_r(z_0)$ beschränkt ist und betrachten

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0, \end{cases} \quad z \in \dot{U}_r(z_0).$$

Die Funktion ist analytisch in $\dot{U}_r(z_0)$ und wegen der Beschränktheit von f stetig und differenzierbar an z , letzteres wegen

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = (z - z_0) f(z) \quad \Rightarrow \quad g'(z_0) = 0.$$

Also ist g auf $U_r(z_0)$ analytisch und als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 darstellbar:

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{a_0}_{=g(0)=0} + \underbrace{a_1}_{=g'(0)=0} (z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 f(z) \end{aligned}$$

und wir haben eine konvergente Potenzreihendarstellung für f gefunden. □

4.1.2 Außerwesentliche Singularitäten und der Ordnungsbegriff

Definition 4.1.4. Eine Singularität z_0 einer analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen, heißt **AUSSERWESENTLICH**³, wenn es ein $m \geq 0$ gibt, so daß $(z - z_0)^m f(z)$ an z_0 eine hebbare Singularität hat. Eine außerwesentliche aber *nicht* hebbare Singularität heißt **POL** von f .

¹Das bedeutet dann automatisch $z_0 \notin D$.

²Man muss gegebenenfalls von anderen Singularitäten wegbleiben.

³Auf Englisch NON-ESSENTIAL, die Terminologie ist aus [8].

4.1 Singularitäten analytischer Funktionen

Bemerkung 4.1.5. Jede hebbare Singularität ist auch außerwesentlich. Die Umkehrung gilt natürlich nicht.

Bei einer außerwesentlichen Singularität kann man also $(z - z_0)^m f(z)$, wobei wir m minimal wählen wollen und $f \neq 0$ sein soll, analytisch fortsetzen, also an z_0 in eine Potenzreihe entwickeln:

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k.$$

Wäre $n > 0$, dann ließe sich bereits $(z - z_0)^{m-n} f(z)$ in einer Potenzreihe entwickeln, was der Minimalität von m widerspräche. Also ist

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k,$$

die außerwesentlichen Singularitäten lassen sich also schon in die Reihenentwicklung packen. Das minimale m lässt sich auch folgendermaßen beschreiben.

Bemerkung 4.1.6. Hat die analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ an z_0 einen Pol, so gibt es ein eindeutiges (minimales) $m > 0$, so daß $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 hat und $g(z_0) \neq 0$ ist.

Definition 4.1.7. Die eindeutig definierte Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß $g(z) = (z - z_0)^{-m}$ an der Stelle z_0 eine hebbare Singularität hat und $g(z_0) \neq 0$ erfüllt bezeichnet man als **ORDNUNG** der Singularität z_0 , in Zeichen $\text{ord}(f; z_0) := m$. Falls $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ in einer Umgebung von z_0 verschwindet, so vereinbaren wir die Konvention⁴ $\text{ord}(f; z_0) = \infty$.

Bemerkung 4.1.8. Für die Ordnung gilt offensichtlich $\text{ord}(0; z) = \infty$ und

$$\text{ord}(f; z_0) \begin{cases} \geq 0, & z_0 \text{ hebbar,} \\ = 0, & z_0 \text{ hebbar und } f(z_0) \neq 0, \\ < 0, & z_0 \text{ Pol.} \end{cases}$$

Eine Singularität positiver Ordnung entspricht der **VIelfachheit** der Nullstelle, bei negativer Ordnung ist der Absolutbetrag der Ordnung die Vielfachheit des Pols.

Beispiel 4.1.9. Ein Polynom $p(z)$ hat an z_0 entweder Ordnung 0, wenn $p(z_0) \neq 0$ ist, oder aber die Ordnung entspricht der Vielfachheit der Nullstelle. Andererseits ist für ein Polynom von Grad n , also $p_n \neq 0$,

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=0}^n p_j z^{-j} = z^{-n} \sum_{j=0}^n p_{n-j} z^j$$

und wir erhalten $\text{ord}(p(z^{-1}); 0) = -n$. Alternativ können wir auch eine rationale Funktion der Form $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome, betrachten. Die Ordnung einer Singularität an einer Stelle z ist dann nichts anderes als die *Differenz* der Vielfachheiten der Nullstellen von Zähler und Nenner.

Die letzte Bemerkung zu den rationalen Funktionen können wir auch formalisieren und verallgemeinern.

⁴Das braucht man aus Konsistenzgründen, genauso wie $\deg 0 = -\infty$, wenn man möchte, daß sich die Grade eines Produkts addieren.

4 Singularitäten

Proposition 4.1.10. Ist z_0 eine außerwesentliche Singularität der analytischen Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen, dann ist z_0 auch eine außerwesentliche Singularität der analytischen Funktionen

$$f \pm g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad g(z) \neq 0, \quad z \in D,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f \pm g; z_0) &\geq \min(\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)), \\ \operatorname{ord}(fg; z_0) &= \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0), \\ \operatorname{ord}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) &= \operatorname{ord}(f; z_0) - \operatorname{ord}(g; z_0). \end{aligned}$$

Beweis: Sei $m = \min(\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0))$, dann haben $(z - z_0)^{-m}f(z)$ und $(z - z_0)^{-m}g(z)$ eine hebbare Nullstelle, das heißt,

$$h(z) := (z - z_0)^{-m}(f(z) + g(z))$$

ist analytisch fortsetzbar an z_0 . Ist $h(z) \neq 0$, dann ist $\operatorname{ord}(f \pm g; z_0) = m$, ansonsten ist $\operatorname{ord}(f \pm g; z_0) > m$. In den beiden anderen Fällen sei $m = \operatorname{ord}(f; z_0)$ und $n = \operatorname{ord}(g; z_0)$, dann sind

$$(z - z_0)^m f(z) (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^{m+n} (f(z) g(z))$$

und

$$\frac{(z - z_0)^m f(z)}{(z - z_0)^n g(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{f(z)}{g(z)}$$

an z_0 analytisch fortsetzbar und, nach Definition der Ordnung⁵ von Null verschieden. Das komplettiert den Beweis der Ordnungsformeln. $\square$

Hat eine analytische Funktion eine außerwesentliche Singularität mit strikt negativer Ordnung, also einen wirklichen Pol an z_0 , dann ist

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z), \quad g(z_0) \neq 0 \Rightarrow |g(z_0)| > 0,$$

das heißt, es gibt eine Umgebung U von z_0 und ein $M > 0$, so daß

$$|g(z)| > M, \quad z \in U.$$

Damit ist aber

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} > \lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} \frac{M}{|z - z_0|^m} = \infty,$$

an einem Pol muß der Absolutbetrag also divergieren.

4.1.3 Wesentliche Singularitäten

Nun definieren wir nach dem aus Quizsendungen inzwischen popularisierten „Ausschlussprinzip“.

Definition 4.1.11. Eine Singularität einer analytischen Funktion heißt WESENTLICH, wenn sie nicht außerwesentlich ist.

⁵Das ist die Minimalität ...

4.1 Singularitäten analytischer Funktionen

Bemerkung 4.1.12. Wesentliche Singularitäten sind Singularitäten, die „schlimmer“ als jedes Polynom sind, sich also auch durch Multiplikation mit einem Polynom nicht mehr beheben lassen.

An wesentlichen Singularitäten ist auch eine analytische Funktion ziemlich „wild“, denn sie nimmt in einer beliebig kleinen Umgebung dieser Singularität „praktisch“ alle möglichen Werte an. Formal korrekt ist das wie folgt.

Satz 4.1.13 (SATZ VON CASORATI–WEIERSTRASS). *Ist z_0 eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ offen, dann ist das Bild jeder punktierten Umgebung $\dot{U}_r(z_0)$ von z_0 DICHT in $\mathbb{C}$:*

$$f(\dot{U}_r(z_0) \cap D) \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset, \quad z \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0. \quad (4.1.2)$$

Beweis: Angenommen, es gäbe eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(z_0)$ so daß $f(\dot{U}_r(z_0) \cap D)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ wäre. Da heißt, es gibt ein $z_1 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$, so daß

$$|f(z) - z_1| \geq \varepsilon, \quad z \in \dot{U}_r(z_0) \cap D,$$

also

$$\frac{1}{\varepsilon} \geq \left| \frac{1}{f(z) - z_1} \right| =: |g(z)|, \quad z \in \dot{U}_r(z_0) \cap D,$$

die Funktion g ist also auf $\dot{U}_r(z_0) \cap D$ beschränkt und hat daher nach Satz 4.1.3 eine hebbare Singularität an z_0 und wir können g als

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n h(z), \quad h(z_0) \neq 0,$$

schreiben, so daß⁶

$$f(z) = z_1 + \frac{1}{g(z)} = \frac{z_1(z - z_0)^n h(z) + 1}{(z - z_0)^n h(z)} = \frac{z_1(z - z_0)^n + h(z)^{-1}}{(z - z_0)^n} \quad (4.1.3)$$

einen Pol der Ordnung n an z_0 besitzt, also lediglich eine außerwesentliche Singularität. Das ist aber ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 4.1.14. Man könnte im Beweis von Satz 4.1.13 auch die Ordnungsformel anwenden⁷ und dann ist

$$\text{ord}(f; z_0) \geq \min \left(0, \text{ord} \left(\frac{1}{g}; z_0 \right) \right) = \min(0, -\text{ord}(g; z_0)),$$

wobei wegen der Hebbarkeit $\text{ord}(g; z_0) \geq 0$ gelten muss. Das aber eher als Übung für das Rechnen mit Ordnungen.

Es gibt eine wesentlich schärfere Aussage über wesentliche Singularitäten als Satz 4.1.13, der aber über das Maß der „normalen“ Funktionentheorie hinausgeht. Trotzdem wollen wir ihn zumindest angeben, denn er sagt, daß wir viel mehr als Dichtheit haben: Es fehlt höchstens ein Punkt.

Satz 4.1.15 (SATZ VON PICARD). *Wenn die analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ an z_0 eine wesentliche Singularität hat, dann ist entweder $f(\dot{U}_r(z_0) \cap D) = \mathbb{C}$ oder es gibt zu jeder Umgebung ein $c \in \mathbb{C}$, so daß $f(\dot{U}_r(z_0) \cap D) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$.*

⁶Zumindest in einer Umgebung von z_0 , wo $h(z) = 0$ ist; dies ist möglich, da $h(z_0) \neq 0$ ist.

⁷Ohne Einschränkung kann man $z_1 \neq 0$ wählen.

4 Singularitäten

4.1.4 Ein Beispiel: Reelle Integration mit komplexen Mitteln

Zum Abschluss ein Beispiel aus [8]: Wir betrachten wir das uneigentliche reelle Integral mit geradem Integrand

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx, \quad f(x) := \frac{\sin x}{x}, \quad (4.1.4)$$

das wegen der Integration bis ∞ nicht so ganz einfach ist. An der Stelle 0 gilt ja⁸ $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. Für $0 < \varepsilon < R$ nähern wir das Integral⁹ durch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \approx \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx =: \int_{\varphi_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\varphi_3} f(\zeta) d\zeta,$$

wobei wir die reellen Integrale nun als Kurvenintegrale interpretieren. Dazu definieren wir $\varphi_2(t) = \varepsilon e^{i\pi(1-t)}$, $t \in [0, 1]$, und $\varphi_4(t) = R e^{i\pi t}$, $t \in [0, 1]$, als die beiden Halbkreise um 0 in der positiv imaginären Halbebene mit den Radien ε und R . Dann ist

$$\varphi := \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \varphi_3 \rightarrow \varphi_4$$

eine geschlossene Kurve. Jetzt integrieren wir aber erst einmal nicht die Funktion f selbst, sondern die komplexe analytische Funktion

$$g(z) := \frac{\exp(iz)}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Beginnen wir mit

$$\int_{\varphi_4} g(\zeta) d\zeta = \int_0^1 \frac{\exp(i R e^{i\pi t})}{R e^{i\pi t}} i\pi R e^{i\pi t} dt = i\pi \int_0^1 \exp(i R \cos(\pi t) - R \sin(\pi t)) dt,$$

also, unter Verwendung der Symmetrie des Sinus um $\pi/2$,

$$\left| \int_{\varphi_4} g(\zeta) d\zeta \right| \leq \pi \int_0^1 e^{-R \sin \pi t} dt = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-R \sin \pi t} dt.$$

Da der Sinus auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ KONKAV ist¹⁰, ist

$$\sin \pi t \geq 2t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

und damit

$$\left| \int_{\varphi_4} g(\zeta) d\zeta \right| \leq 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2Rt} dt = 2\pi \left[-\frac{1}{2R} e^{-2Rt} \right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0$$

für $R \rightarrow \infty$. Die Integrale über φ_1 und φ_3 betrachten wir gleich gemeinsam:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1} g(\zeta) d\zeta + \int_{\varphi_3} g(\zeta) d\zeta &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

⁸Potenzreihenentwicklung des Sinus an der Stelle 0.

⁹Mit der Intuition $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$.

¹⁰Die zweite Ableitung, $-\sin$, ist negativ.

Schließlich schreiben wir noch

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_2} \frac{\exp(i\zeta)}{\zeta} d\zeta &= \int_{\varphi_2} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \int_{\varphi_2} \frac{\exp(i\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{i\pi(t-1)} (-i\pi\varepsilon) e^{i\pi(1-t)} dt + \int_{\varphi_2} \frac{\exp(i\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta = -i\pi + \int_{\varphi_2} \frac{\exp(i\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

und da die Singularität von $\frac{1}{z}(e^{iz} - 1)$ an Null hebbar und damit die Funktion in einer Umgebung von 0 beschränkt ist, folgt

$$\left| \int_{\varphi_2} \frac{\exp(i\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta \right| \leq \max_{|z|=\varepsilon} \left| \frac{\exp(iz) - 1}{z} \right| \underbrace{\varepsilon \pi}_{=\ell(\varphi_4)} \rightarrow 0$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Insgesamt ist also

$$0 = \int_{\varphi} g(\zeta) d\zeta = 2i \int_{-\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx - i\pi + \delta$$

mit

$$|\delta| \leq \max_{|z|=\varepsilon} \left| \frac{\exp(iz) - 1}{z} \right| \varepsilon \pi + \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) \rightarrow 0$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$. Damit ist also

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (4.1.5)$$

und wir haben dieses reelle Resultat über einen komplexen „Umweg“ erhalten. Diese Vorgehensweise werden wir später beim Residuensatz noch systematischer kennenlernen.

4.2 Laurentreihen

Für die folgenden Resultate erinnern wir uns zuerst wieder an die Definition des KREISRING oder ANNULUS als

$$\mathbb{D}_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}, \quad 0 \leq r < R \leq \infty,$$

und entsprechend die *offene* Variante $\mathbb{D}_{r,R}(z_0)^\circ$. Ist $z_0 = 0$, so lässt man es auch weg,

$$\mathbb{D}_{r,R} := \mathbb{D}_{r,R}(0), \quad \mathbb{D}_{r,R}^\circ := \mathbb{D}_{r,R}(0)^\circ. \quad (4.2.1)$$

4.2.1 Laurentzerlegung und Laurentreihen

Satz 4.2.1 (LAURENTZERLEGUNG). *Jede Funktion $f : \mathbb{D}_{r,R}^\circ \rightarrow \mathbb{C}$, die auf dem Annulus $\mathbb{D}_{r,R}^\circ$ um 0 analytisch ist, kann in*

$$f(z) = g(z) + h(1/z), \quad \begin{array}{ll} g & : \mathbb{D}_R^\circ \rightarrow \mathbb{C}, \\ h & : \mathbb{D}_{1/r}^\circ \rightarrow \mathbb{C}, \end{array} \quad (4.2.2)$$

zerlegt werden, wobei die Funktionen f, g analytisch sind. Wählt man $h(0) = 0$, so ist die Zerlegung eindeutig.

4 Singularitäten

Definition 4.2.2. Die¹¹ Funktion h heißt HAUPTTEIL der LAURENTZERLEGUNG (4.2.2), die Funktion g NEBENTEIL.

Bemerkung 4.2.3. Da die Funktion h für $|z| < 1/r$ analytisch ist, ist $h(1/z)$ für $|z| > r$ analytisch, also *außerhalb* der kleinen Kreisscheibe, und beschreibt so das Verhalten „weit weg“ vom Ursprung, an dem sie ganz automatisch eine Singularität hat, wenn sie nicht gerade konstant ist. Insbesondere ist $z \mapsto h(z)$ hier die analytische Funktion und *nicht* $z \mapsto h(1/z)$. Beide Funktionen wären im wesentlichen ja nur dann analytisch, wenn h konstant wäre und außerdem wäre Satz 4.2.1 ja langweilig, denn dann brächte (4.2.2) ja keinen „Mehrwert“ zur Funktion g .

Um Satz 4.2.1 beweisen zu können, brauchen wir eine Variante des Cauchyschen Integralsatzes.

Lemma 4.2.4. Ist $f : \mathbb{D}_{r,R}^\circ \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf $\mathbb{D}_{r,R}^\circ$, dann gilt für alle r', R' mit $r < r' < R' < R$

$$\oint_{(0,r')} f(\zeta) d\zeta = \oint_{(0,R')} f(\zeta) d\zeta. \quad (4.2.3)$$

Beweis: Der Beweis folgt derselben Idee wie im Beweis von Korollar 2.2.10. Wir zerlegen den Annulus in Segmente

$$S_k := \left\{ z = |z|e^{i\theta} : r' \leq |z| \leq R', \theta \in \left[\frac{2k\pi}{n}, \frac{2(k+1)\pi}{n} \right] \right\}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

die für hinreichend großes n ein Sterngebiet¹² ist. Sei φ_k die Randkurve des Segments, die aus zwei Linienstücken und den Kreissegmenten aussen im positiven und innen im negativen Umlaufsinn besteht. Wegen des Sterngebiets und der Analytizität von f ist

$$\int_{\varphi_k} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

also auch

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varphi_k} f(\zeta) d\zeta = \oint_{(0,R')} f(\zeta) d\zeta - \oint_{(0,r')} f(\zeta) d\zeta,$$

da die Liniensegmente alle wieder zweimal mit unterschiedlichem Vorzeichen auftauchen, siehe Abb. 4.2.1. $\square$

Übung 4.2.1 Formulieren und beweisen Sie eine explizite Bedingung an n im Beweis von Lemma 4.2.4. $\diamond$

Beweis von Satz 4.2.1: Die Funktion g ist auf $\mathbb{D}_R^\circ$ definiert, die Funktion $z \mapsto h(1/z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_r$. Damit sind beide Funktionen auf dem nichtleeren offenen Annulus $\mathbb{D}_{r,R}^\circ$ definiert. Seien nun also g_1, h_1 und g_2, h_2 zwei Zerlegungen, dann sind $g_1 - g_2$ und $h_1 - h_2$ Laurentzerlegungen der Nullfunktion:

$$(g_1 - g_2)(z) + (h_1 - h_2)(1/z) = (g_1(z) + h_1(1/z)) - (g_2(z) + h_2(1/z)) = f(z) - f(z) = 0,$$

¹¹Nach der Normierung von h kann man ja von **der** Funktion sprechen.

¹²Mit Zentrum $R'e^{(2k+1)\pi/n}$. Die Zahl n muss so groß sein, daß das Zentrum die beiden Punkte $r'e^{2k\pi/n}$ und $r'e^{2(k+1)\pi/n}$ „sieht“, was wiederum vom Verhältnis zwischen r' und R' abhängt.

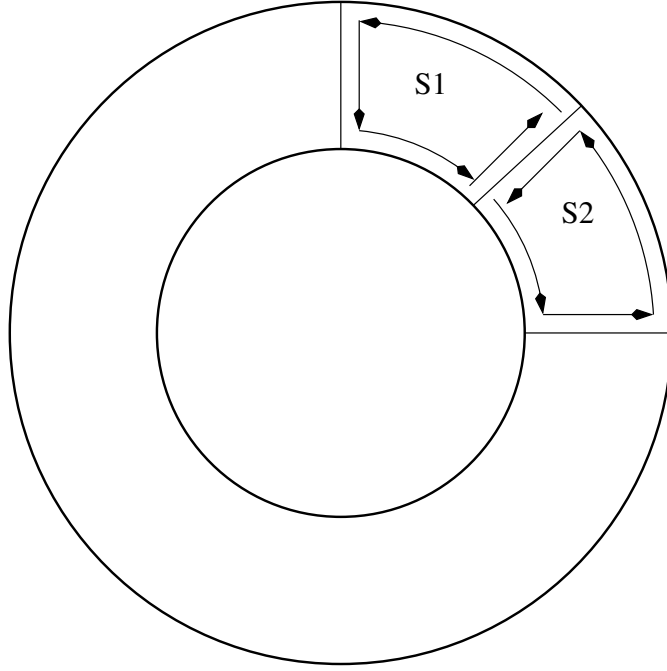


Abbildung 4.2.1: Die ersten beiden Sektoren des Annulus und die Randkurven.

und damit ist $(g_1 - g_2)(z) = -(h_1 - h_2)(1/z)$, $z \in \mathbb{D}_{r,R}$. Das kann man durch $g_1 - g_2$ auf $\mathbb{D}_r^\circ \subset \mathbb{D}_R^\circ$ fortsetzen durch $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}$, d.h. diese Funktion ist ganz. Da aber

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (h_1 - h_2)(1/z) = \lim_{z \rightarrow 0} h_1(z) - \lim_{z \rightarrow 0} h_2(z) = 0$$

$\underbrace{\quad}_{=0} \qquad \underbrace{\quad}_{=0}$

ist, ist diese ganze Funktion beschränkt und daher konstant, wegen des Grenzwerts also die Nullfunktion. Das ist die Eindeutigkeit.

Für die Existenz wählen wir r', R' mit $r < r' < R' < R$, also einen etwas kleineren Annulus, und konstruieren die Laurentzerlegung im *abgeschlossenen* Annulus $\mathbb{D}_{r',R'}$. Wegen der bereits bewiesenen Eindeutigkeit erhalten wir immer dasselbe Resultat, was uns die Zerlegung an jeder Stelle des Original-Annulus definiert. Nun wählen wir ein $z_0 \in \mathbb{D}_{r,R}^\circ$, also auch $z_0 \in \mathbb{D}_{r',R'}^\circ$ für passendes r', R' , und definieren eine Funktion

$$\tilde{g}(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0, \\ f'(z_0), & z = z_0, \end{cases} \quad z \in \mathbb{D}_{r,R}^\circ, \quad (4.2.4)$$

die stetig, also insbesondere beschränkt in $\mathbb{D}_{r,R}$ und analytisch in $\mathbb{D}_{r,R}^\circ \setminus \{z_0\}$ ist. Damit ist die Singularität von $\tilde{g}$ an z_0 HEBBAR und die Funktion *analytisch* fortsetzbar¹³, siehe Satz 4.1.3. Nach Lemma 4.2.4 ist

$$\oint_{(0,r')} \tilde{g}(\zeta) d\zeta = \oint_{(0,R')} \tilde{g}(\zeta) d\zeta,$$

oder, nach der expliziten Definition von $\tilde{g}$ in (4.2.4),

$$\oint_{(0,r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - f(z_0) \oint_{(0,r')} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = \oint_{(0,R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - f(z_0) \oint_{(0,R')} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (4.2.5)$$

¹³Indem wir $\tilde{g}$ durch die Fortsetzung ersetzen, können wir das Wort „fortsetzbar“ auch streichen.

4 Singularitäten

Da $z_0 \in \mathbb{D}_{r', R'}^\circ$ liefern die „Innen–Aussen–Beziehungen“ aus Lemma 2.3.2

$$\oint_{(0, r')} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 0, \quad \oint_{(0, R')} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 2\pi i.$$

Setzen wir das in (4.2.5) ein und ersetzen wir dann z_0 durch z , dann erhalten wir

$$\oint_{(0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \oint_{(0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - 2\pi i f(z_0),$$

und damit eine Zerlegung

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{(0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=: g(z)} - \underbrace{\oint_{(0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=: -h(1/z)}, \quad (4.2.6)$$

bzw. die expliziten Definitionen

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0, R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < R', \quad (4.2.7)$$

und

$$h(z) := - \oint_{(0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1/z} d\zeta = \oint_{(0, r')} \frac{z f(\zeta)}{1 - \zeta z} d\zeta, \quad |z| < \frac{1}{r'}. \quad (4.2.8)$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz sind diese beiden Funktionen analytisch und es gilt $h(0) = 0$. $\square$

Bemerkung 4.2.5. Ist f analytisch auf $\mathbb{D}_R^\circ$, dann ergibt (4.2.7) zusammen mit dem Cauchyschen Integralsatz, daß $g = f$ und damit $h = 0$ ist¹⁴.

Schreiben wir nun g und h als Potenzreihen,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z},$$

dann erhalten wir aus (4.2.2), daß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Grenzwerte derartiger Reihen betrachtet man, in dem man die Teilreihen mit positivem und negativem Index separat untersucht.

Definition 4.2.6. Eine *doppeltunendliche* Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$$

heißt KONVERGENT, wenn die beiden „klassischen“ Reihen $\sum a_n$ und $\sum a_{-n}$ konvergent sind. Eine LAURENTREIHE mit Entwicklungspunkt z_0 ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \neq z_0, \quad (4.2.9)$$

deren absolute, normale und gleichmäßige Konvergenz analog durch die *simultane* Erfüllung der Konvergenzeigenschaften durch *beide* Teilreihen definiert wird.

¹⁴Kann ja vorkommen. Das war nie ausgeschlossen.

Korollar 4.2.7 (LAURENTREIHE). Ist $f : \mathbb{D}_{r,R}(z_0)^\circ \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf dem Annulus $\mathbb{D}_{r,R}(z_0)^\circ$, dann kann man f durch eine normal konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{D}_{r,R}(z_0)^\circ, \quad (4.2.10)$$

darstellen und für die Koeffizienten gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R. \quad (4.2.11)$$

Beweis: Unser Ausgangspunkt ist wieder (4.2.6), wobei wir jetzt allerdings den zweiten CAUCHY-KERN wie in Beispiel 3.2.11 in

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (4.2.12)$$

umformen, wobei die Reihe in einem gewissen Abstand¹⁵ von z_0 absolut und gleichmäßig konvergiert. Also wird das zweite Integral in (4.2.6) zu

$$\begin{aligned} - \oint_{(0, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \oint_{(0, r')} (\zeta - z_0)^n f(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^n} \oint_{(0, r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{1-n}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \oint_{(0, r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \end{aligned}$$

was auch für $\oint_{(z_0, \rho)}$ gilt. Zusammen mit der Potenzreihenentwicklung der Funktion g aus Satz 4.2.1 liefert das die Darstellung (4.2.10) und (4.2.11). Die normale Konvergenz erhält man, indem man aus (4.2.11) die CAUCHY-ABSCHÄTZUNGEN

$$|a_n| \leq \rho \max_{|\zeta - z_0| = \rho} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{\rho^n} \max_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.13)$$

herleitet, die zeigt, daß die Koeffizienten wie ρ^n abklingen bzw. ansteigen, und zwar für jedes $\rho \in (r, R)$. $\square$

Bemerkung 4.2.8. Die Laurentzerlegung einer Funktion $f : \mathbb{D}_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 hätte dann eine Zerlegung der Form

$$f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right),$$

was bei der Funktion g kein großes Problem wäre¹⁶, aber bei h ein wenig sperrig wird. Deswegen ist es meist einfacher, zuerst f durch $f(\cdot - z_0)$ zu ersetzen, also den Mittelpunkt in den Ursprung zu verschieben, oder gleich von vornherein anzunehmen, daß der Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Der Unterschied ist weniger Mathematik als Buchhaltung.

Da die punktierte Kreisscheibe

$$\dot{U}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} = \mathbb{D}_{0,R}(z_0)$$

auch nichts anderes anderes als ein Kreisring bzw. Annulus ist, können wir die Laurentreihe auch nutzen, um Singularitäten zu klassifizieren.

¹⁵Wegen der negativen Potenzen muss man zum Reziprokwert übergehen.

¹⁶Die TRANSLATION einer analytischen Funktion ist wieder analytisch, nur auf einem anderen Gebiet.

4 Singularitäten

Korollar 4.2.9. Sei z_0 eine Singularität der analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Laurent-entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \dot{U}_R(z_0),$$

dann gilt:

1. z_0 ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$, $n < 0$,
2. z_0 ist genau dann ein Pol oder Ordnung n , wenn

$$a_{-n} \neq 0, \quad a_m = 0, \quad m < -n,$$

3. z_0 ist genau dann ein wesentlich, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$ erfüllt ist.

4.2.2 Komplexe Fourierreihen

Als eine Anwendung der Laurentreihen können wir jetzt auch Fourierreihen in einem Bereich der Form

$$\{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < b\} \quad (4.2.14)$$

betrachten, den man HORIZONTALER STREIFEN nennt.

Definition 4.2.10. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt PERIODISCH mit PERIODE ω , wenn

$$f(z + \omega) = f(z), \quad z, z + \omega \in D.$$

Ist f periodisch mit Periode ω , erfüllt natürlich $f_\omega := f(\omega \cdot)$ die Gleichung

$$f_\omega(z + 1) = f(\omega z + \omega) = f(\omega z) = f_\omega(z),$$

und f_ω ist 1-PERIODISCH. Es ist also keine Einschränkung, sich mit 1-periodischen Funktionen zu befassen.

Proposition 4.2.11. Ist f analytisch in dem Streifen

$$D := \{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < b\} \quad (4.2.15)$$

und 1-periodisch, dann kann f als normal konvergente FOURIERREIHE

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i z}, \quad z \in D, \quad (4.2.16)$$

dargestellt werden, wobei der n -te FOURIERKOEFFIZIENT c_n in dieser Darstellung als

$$c_n = c_n(f) = \int_0^1 f(z) e^{2\pi i n z} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z = x + iy \in D, \quad (4.2.17)$$

bestimmt werden kann.

Beweis: Die Abbildung

$$\phi : z \mapsto e^{2\pi i z}, \quad z \in D := \{z \in \mathbb{C} : a < \Im z < b\},$$

ist analytisch und lokal konform¹⁷ und bildet den Streifen D auf den Annulus

$$\mathbb{D}_{r,R}^\circ, \quad r = e^{-2\pi b}, \quad R = e^{-2\pi a},$$

ab und ist 1-periodisch:

$$\phi(z+1) = e^{2\pi i(z+1)} = \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} e^{2\pi iz}.$$

Damit ist natürlich auch $f = g \circ \phi$ für jede analytische Funktion $g : \mathbb{D}_{r,R}^\circ \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion in D . Ist umgekehrt f analytisch auf D , dann muss auch g analytisch sein, da die Funktion ϕ an jeder Stelle von D lokal¹⁸ eine analytische Umkehrfunktion besitzt und damit auch $g = f \circ \phi^{-1}$ analytisch ist. Schreiben wir nun

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

als Laurentreihe um den Nullpunkt¹⁹, dann ergeben sich die Laurentkoeffizienten gemäß Korollar 4.2.7 für $r < \rho =: e^{-2\pi y} < R$ als

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0,\rho)} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \int_0^1 \frac{g(\rho e^{2\pi i t})}{(\rho e^{2\pi i t})^{n+1}} \rho 2\pi i e^{2\pi i n t} dt = \int_0^1 \frac{g(e^{2\pi i(x+iy)})}{e^{2\pi i n(x+iy)}} dx,$$

also

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z} dx, \quad z = x + iy.$$

□

Bemerkung 4.2.12. Das Integral in (4.2.17) ist also ein Integral über eine horizontale Gerade im horizontalen Streifen D .

4.3 Meromorphe Funktionen

Funktionen, die nur Pole haben, aber keine wesentlichen Singularitäten, bilden eine durchaus wichtige Klasse für sich. Dazu *definieren* wir den Wert²⁰ einer Funktion f an einem Pol z als $f(z) = \infty$ und schreiben

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad (4.3.1)$$

für den Wertebereich von komplexwertigen Funktionen mit Polen. Dieser Bereich hat einen eigenen Namen.

¹⁷Ihre Ableitung $\phi'(z) = 2\pi i e^{2\pi i z}$ verschwindet nirgends.

¹⁸Solange $|z' - z| < 1$ ist, kann die periodizitätsbedingte Mehrdeutigkeit der Funktion ϕ keine Rolle mehr spielen.

¹⁹Was zu unserer bisherigen Theorie passt, denn g ist ja auf dem Annulus definiert.

²⁰Wir unterscheiden also *nicht* zwischen dem Vorzeichen dieser Unendlichkeit, behandeln als $1/z$ und $-1/z$ gleich; im Komplexen gibt es ohnehin ein ganzes Kontinuum $e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, von VORZEICHEN.

4 Singularitäten

4.3.1 Riemannsche Zahlenkugel und Definition

Definition 4.3.1. Die Menge $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezeichnet man als RIEMANNSCHE ZAHLENKUGEL.

Bemerkung 4.3.2. Indem man $\overline{\mathbb{C}}$ mit einer TOPOLOGIE versieht, deren offene Mengen

1. alle offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$,
2. alle *Komplemente* von *kompakten* Teilmengen von $\mathbb{C}$

sind, erreicht man, daß $\overline{\mathbb{C}}$ insgesamt ein KOMPAKTER TOPOLOGISCHER RAUM ist, den man auch als EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG von $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Daß die Einpunktkompaktifizierung unter der Topologie aus Bemerkung 4.3.2 kompakt sein muss, sieht man leicht ein: Da ∞ mit keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ erreicht wird, muss eine OFFENE ÜBERDECKUNG von $\overline{\mathbb{C}}$ also mindestens das Komplement einer kompakten Menge K enthalten, die dann vom Rest der Überdeckung kompensiert wird. Da tut es aber wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung, die zusammen mit $\mathbb{C} \setminus K$ dann eine endliche Überdeckung von $\overline{\mathbb{C}}$ darstellt.

Definition 4.3.3. Eine Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$, heißt MEROMORPH, wenn

1. die Menge $P(f) = f^{-1}(\infty)$ ihrer Unendlichkeitsstellen DISKRET in D ist,
2. die Einschränkung $f^* := f|_{D^*}$, $D^* := D \setminus P(f)$, analytisch ist,
3. die Punkte $P(f)$ Pole, also außerwesentliche Singularitäten, von $f^* : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ sind.

Da eine meromorphe Funktion f außerhalb ihrer Pole analytisch ist, kann sie nach Satz 3.3.4 nur diskrete Nullstellen haben, wenn sie nicht die Nullfunktion ist und jede dieser Nullstellen hat eine endliche Ordnung. Damit hat aber auch $1/f$ nur Pole an $Z(f)$ mit

$$\text{ord}\left(\frac{1}{f}; z\right) = -\text{ord}(f, z), \quad z \in Z(f) = P(1/f),$$

und diese Polmenge ist diskret. Mit anderen Worten: Ist $f \neq 0$ meromorph, so ist auch $1/f$ meromorph. Da Summe, Differenz und Produkt meromorpher Funktionen ebenfalls meromorph sind, können wir die folgende Beobachtung festhalten.

Bemerkung 4.3.4. Die meromorphen Funktionen bilden einen KÖRPER.

Beispiel 4.3.5. Das generische Beispiel für eine meromorphe Funktion ist natürlich eine RATIONALE FUNKTION

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p_0 + \cdots + p_m z^m}{q_0 + \cdots + q_n z^n}. \quad (4.3.2)$$

Auch die rationalen Funktionen bilden einen Körper und zwar den QUOTIENTENKÖRPER zum Ring der Polynome; das ist dieselbe Konstruktion wie zur Erzeugung der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen. Ein Beispiel für eine meromorphe Funktion, die nicht rational ist, ist

$$z \mapsto \cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, \quad (4.3.3)$$

mit Polen an $\mathbb{Z}$.

Proposition 4.3.6. Eine meromorphe Funktion f hat in jedem beschränkten Bereich $\Omega \subset D$ mit $\overline{\Omega} \subset D$ nur endlich viele Pole.

Beweis: Ist Ω beschränkt, dann ist der Abschluss $\overline{\Omega}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Gäbe es in Ω nun eine Folge z_n , $n \in \mathbb{N}$, von allesamt verschiedenen Polen, $z_n \neq z_m$, $m \neq n$, dann hat diese Folge in $\overline{\Omega}$ eine konvergente Teilfolge, also einen Häufungspunkt in D . Das ist aber nach Definition 4.3.3 verboten. $\square$

Proposition 4.3.6 sagt uns, daß sich die Pole meromorpher Funktionen wenn überhaupt dann nur an ∞ häufen können. Auf $\mathbb{C}$ ist das kein Problem, auf $\overline{\mathbb{C}}$ wird das allerdings noch interessant werden.

4.3.2 Partialbruchzerlegungen

Zunächst ein Klassiker über rationale Funktionen aus der Sicht der Funktionentheorie.

Satz 4.3.7 (Partialbruchzerlegung). Sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion mit

$$q(z) = \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{\mu_j}. \quad (4.3.4)$$

Dann gibt es Zahlen $a_{j,k}$, $k = 1, \dots, \mu_j$, $j = 1, \dots, m$, und ein Polynom $p_0(z)$, so daß

$$f(z) = p_0(z) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}. \quad (4.3.5)$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über die Anzahl m der Pole. Ist $m = 0$ also²¹ $q = 1$, so ist $p_0 = p$ und es ist nichts zu weiter zu zeigen. Ist nun $m > 0$ und die Behauptung für $m - 1$ bewiesen, dann betrachten wir die Funktion

$$g(z) := (z - z_m)^{\mu_m} f(z),$$

die in einer Umgebung von z_m analytisch ist²² und deswegen um z_m als Potenzreihe entwickelt werden kann:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_m)^n \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+\mu_m} (z - z_m)^n + \sum_{n=-\mu_m}^{-1} \frac{a_{n+\mu_m}}{(z - z_m)^{-n}},$$

und wir erhalten $a_{m,k} = a_{\mu_m-k}$, $k = 1, \dots, \mu_m$. Der Nebenteil von f , die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+\mu_m} (z - z_m)^n = f(z) - \sum_{k=1}^{\mu_m} \frac{a_{mk}}{(z - z_m)^k}$$

ist analytisch in einer Umgebung von z_m , hat Pole an $z_1, \dots, z_{m-1}$ da der Hauptteil von f dort beschränkt ist, und ist als Differenz von zwei rationalen Funktionen wieder eine rationale Funktion. Wir können also die Induktionshypothese anwenden und erhalten

$$\tilde{f}(z) = p_0(z) + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}$$

²¹Die Zerlegung (4.3.4) normiert den LEITKOEFFIZIENT von q zu 1, das Polynom ist also MONISCH.

²²Die Pole $z_1, \dots, z_{m-1}$ sind anderswo.

4 Singularitäten

und daraus

$$f(z) = \tilde{f}(z) + \sum_{k=1}^{\mu_m} \frac{a_{mk}}{(z - z_m)^k} = p_0(z) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k},$$

wie behauptet. $\square$

Bemerkung 4.3.8. Die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen spielt in der digitalen Signalverarbeitung bei der Analyse rekursiver Filter eine zentrale Rolle, siehe [18].

Eine Partialbruchzerlegung, dann allerdings mit möglicherweise unendlich vielen Termen, kann man für beliebige meromorphe Funktionen angeben. Resultat und Beweis sind aus [13].

Satz 4.3.9 (SATZ VON MITTAG–LEFFLER). *Jede meromorphe Funktion $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit abzählbar vielen Polen z_j , $j \in \mathbb{N}$, kann als*

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k} \quad (4.3.6)$$

mit einer analytischen Funktion $f_0 : D \rightarrow \mathbb{C}$ geschrieben werden.

Beweis: Wir nehmen an, daß 0 kein Pol ist, ansonsten ersetzen wir f durch $f(\cdot - c)$ für ein passendes $c \notin P(f)$. Ist $\#P(f) < \infty$, dann ist die Aussage genau Satz 4.3.7, von wo wir auch das Argument mit der lokalen Zerlegung in Hauptteil und Nebenteil um eine Singularität z_j herum übernehmen können. Damit ist (4.3.6) auf jeden Fall ein Ansatz für f , wir müssen allerdings zeigen, daß die Reihe der Hauptteile

$$h_j(z) := \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}$$

konvergiert. Da 0 kein Häufungspunkt der z_j sein kann²³, gibt es ein $r > 0$, so daß $z_j \notin \mathbb{D}_r$, $j \in \mathbb{N}$. Nun entwickeln wir h_j an der Stelle $0 \neq z_j$ in eine Potenzreihe

$$h_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{jn} z^n, \quad |z| < |z_j|,$$

die auf $\mathbb{D}_r$ normal konvergiert. Nach dem Riemannschen Doppelreihensatz, Lemma 3.2.10, konvergiert die Reihe der h_j ebenfalls normal in $\mathbb{D}_r$. Dasselbe Argument funktioniert für jedes $z \in D \setminus P(f)$, so daß

$$g(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}$$

in der offenen Menge $D \setminus \{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ analytisch ist. Die Differenzfunktion

$$f_0(z) := f(z) - g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}$$

ist damit ebenfalls in $D \setminus \{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ analytisch und muss daher nach Satz 3.3.5 mit f übereinstimmen. $\square$

²³Die Pole meromorpher Funktionen dürfen sich nach Definition 4.3.3 nicht häufen und 0 ist nach Annahme kein Pol.

Bemerkung 4.3.10. Da jede Funktion der Form (4.3.6) meromorph mit Polen z_j ist, ist diese Darstellung sogar *äquivalent* dazu, meromorph zu sein.

Als Beispiel sehen wir uns die Partialbruchentwicklung des bereits in (4.3.3) erwähnten KOTANGENS²⁴ $\cot \pi z$ an. Die Funktion hat einfache Pole an den ganzzahligen Stellen, die Hauptteile sind also

$$h_0(z) = \frac{1}{z}, \quad h_j(z) = \frac{1}{z-j} = -\frac{1}{j} \frac{1}{1-z/j} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{j^{n+1}} = -\frac{1}{j} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{j^{n+1}}, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Die Potenzreihen h_j konvergieren auf jedem $\mathbb{D}_R$ unabhängig von j absolut, da für $j > R$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{j^{n+1}} \leq \frac{R}{j^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{j}\right)^n = \frac{R}{j^2} \frac{1}{1-R/j},$$

was bezüglich j summierbar ist. Damit setzen wir den Kotangens als

$$\begin{aligned} \cot \pi z &= f(z) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-j} + \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{j}}_{=0} = f(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{z+j} \right) \\ &= f(z) + \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - j^2}, \end{aligned}$$

wobei die Funktion f die konvergente Reihe der konvergenten Reste der Potenzreihen für die h_j enthält. Um diese Funktionen zu ermitteln, betrachten wir die Funktion

$$(z-j) \cot \pi z = \frac{(z-j) \cos \pi z}{\sin \pi z},$$

mit²⁵

$$\lim_{z \rightarrow j} (z-j) \cot \pi z = \lim_{z \rightarrow j} \frac{\pi(j-z) \sin \pi z + \cos \pi z}{\pi \cos \pi z} = \frac{1}{\pi}.$$

Die Funktion $\pi \cot \pi z$ hat also die Darstellung

$$\pi \cot \pi z = f(z) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-j}, \quad (4.3.7)$$

allerdings ist die Funktion f noch zu bestimmen. Leiten wir (4.3.7) ab, dann erhalten wir auf der linken Seite²⁶

$$(\cot \pi z)' = \frac{-\pi \sin \pi z \sin \pi z - \cos \pi z \pi \cos \pi z}{\sin^2 \pi z} = -\frac{\pi \overbrace{(\sin^2 \pi z + \cos^2 \pi z)}^{=1}}{\sin^2 \pi z} = -\frac{\pi}{\sin^2 \pi z}$$

und auf der rechten Seite

$$f'(z) - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-j)^2},$$

²⁴Eines der Worte, deren Trennung man nicht ungeprüft einem Computerprogramm überlassen sollte.

²⁵Wir betrachten einfach den reellen Limes und verwenden L'Hospital.

²⁶**Übung:** Zeigen Sie, daß $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ auch für komplexe z gilt, was sich direkt aus der Definition (1.1.11) ergibt.

4 Singularitäten

also insgesamt

$$f'(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-j)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \quad (4.3.8)$$

liefert. Die Funktion f ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und da sich die Pole auf der rechten Seite von (4.3.8) gerade wegheben und die Funktion insgesamt 1-periodisch ist, ist $f'(z)$ eine beschränkte ganze Funktion, also konstant. Mit ein bisschen Abschätzen, siehe [13, Part II, S. 38] kann man dann noch zeigen, daß $f' = 0$ ist, also

$$\pi \cot \pi z = c + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-j}$$

und da der Kotangens eine UNGERADE FUNKTION ist, ist

$$-c - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-j} = -\pi \cot \pi z = \pi \cot(-\pi z) = c + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{-z-j} = c - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-j},$$

also $c = 0$. Die Partialbruchzerlegung des Kotangens hat damit die denkbar einfache Form

$$\cot z = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-j\pi}. \quad (4.3.9)$$

4.3.3 Meromorphe Funktionen auf der Zahlenkugel

Wenn meromorphe Funktionen schon ihren Wertebereich in $\overline{\mathbb{C}}$ haben, dann kann man sie auch als Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ ansehen, allerdings mit der entsprechenden Topologie. Die hat nun eine ganz natürliche Beziehung zur Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Lemma 4.3.11. *Eine Teilmenge $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ist genau dann offen, wenn $1/D := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : z^{-1} \in D\}$ offen ist.*

Beweis: Ist D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $0 \notin D$, dann ist $1/D$ offensichtlich ebenfalls offen, ist $0 \in D$, dann schreiben wir D als $D = \mathbb{D}_r \cup D'$, $0 \notin D'$ für hinreichend kleines r und erhalten

$$1/D = \{z : |z| > r\} \cup 1/D'$$

als Vereinigung zweier offener Mengen, also wieder offen. Enthält D den Punkt ∞ , dann ist D Komplement eines Kompaktums, das beschränkt ist, weswegen

$$D \supseteq \{z : |z| > R\}$$

für ein $R > 0$ ist. Damit ist aber die Umgebung $\mathbb{D}_{1/R}^\circ$ des Nullpunkts auch in $1/D$. □

Wir können nun das Konzept von Singularitäten und meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ erweitern, wobei wir nur noch die Stelle ∞ betrachten müssen.

Definition 4.3.12 (Singularitäten). Sei $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ analytisch, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ offen.

1. Eine Singularität von f an der Stelle ∞ heißt **HEBBAR**, **AUSSERWESENTLICH** bzw. **POL** oder **WESENTLICH**, wenn $f(1/z)$ eine entsprechende Singularität an 0 hat.
2. f heißt **MEROMORPH**, wenn f in $D \cap \mathbb{C}$ meromorph ist und die Funktion $f(1/z)$ in $1/D$ meromorph ist.

Der Unterschied zwischen meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ und meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ besteht darin, daß sich die Pole im letzteren Fall nicht an ∞ häufen dürfen.

Beispiel 4.3.13 (Meromorphe Funktionen).

1. Eine RATIONALE FUNKTION hat nur endlich viele Nullstellen und Pole, die sich nirgendwo häufen und ist daher meromorph auf $\mathbb{C}$ und $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Die Pole des Kotangens häufen sich an ∞ , das heißt, $\cot \frac{\pi}{z}$ hat die Pole $\mathbb{Z}^{-1}$ mit Häufungspunkt 0. Die Funktion ist also nicht meromorph auf $\overline{\mathbb{C}}$.

Eigentlich sollte uns das nicht allzusehr überraschen: $\overline{\mathbb{C}}$ ist kompakt und damit enthält jede *unendliche*²⁷ Folge eine konvergente Teilfolge, also mindestens einen Häufungspunkt. Die einzige Chance ist, endlich viele Pole zu haben, und das bedeutet bereits, daß der Nenner ein Polynom sein muss. Wir können also f nach Satz 4.3.9 als

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k}$$

schreiben und f_0 hat eine außerwesentliche Singularität an ∞ , also

$$f_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k \quad f_0(z) = \sum_{k=-\infty}^n a_{-k} z^k,$$

also muss f_0 ein Polynom sein, da es keine Singularität an 0 hat²⁸ und f damit ein Polynom. Das können wir noch schnell zusammenfassen.

Satz 4.3.14. *Die auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen.*

4.4 Der Residuensatz

Wir kehren wieder zurück zu den Variationen des Cauchyschen Integralsatzes, also zu der Frage, wie man Funktionen durch Integration auswerten kann. Für unsere Kreisintegrale ging das alles ganz gut, von komplexeren Kurven haben wir bisher aber eher die Finger gelassen. Das wollen wir jetzt ändern.

4.4.1 Die Windungszahl

Wir beginnen mit der Frage, wie oft eine Kurve eigentlich um einen Punkt herumläuft und ob der Punkt im Inneren oder außerhalb des Bereichs liegt, den eine geschlossen Kurve berandet.

Beispiel 4.4.1. Nehmen wir nochmals unsere Kreiskurven $\varphi(t) = z_0 + r e^{2\pi k t}$, $t \in [0, 1]$. Wir wissen ja bereits, daß

$$\int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \begin{cases} k, & |z - z_0| < r, \\ 0, & |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Mit anderen Worten, das Integral zählt, wie oft die Kurve um einen Punkt herumläuft.

²⁷Konstante Folgen oder Folgen mit nur endlich vielen Werten muss man hier natürlich ausschließen.

²⁸Die würde ja im Hauptteil stecken.

4 Singularitäten

Da die Sache mit „drinnen“ und „draußen“ sehr schnell kompliziert und unintuitiv werden kann, verwendet man eine rein analytische Definition, die aber zumindest im Fall von Kreiskurven das ist, was man gerne hätte.

Definition 4.4.2 (Windungszahl). Die WINDUNGSZAHL einer geschlossenen, stückweise glatten Kurve φ bezüglich eines Punktes $z \notin I(\varphi)$ ist definiert als

$$\chi(\varphi; z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.4.1)$$

Manchmal spricht man auch vom INDEX der Kurve bezüglich z .

Die Windungszahl ermöglicht es uns nun, ein Konzept von „innerhalb“ und „ausserhalb“ des durch eine geschlossene Kurve berandeten Gebiets zu erhalten.

Definition 4.4.3. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve, so definieren wir das INNERE von φ als

$$\text{Int}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C} \setminus I(\varphi) : \chi(\varphi; z) \neq 0\}, \quad (4.4.2)$$

und das ÄUSSERE als

$$\text{Ext}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C} \setminus I(\varphi) : \chi(\varphi; z) = 0\}. \quad (4.4.3)$$

Bemerkung 4.4.4. Die Definition des Inneren und Äußeren ist komplett formal und analytisch, hat aber den Vorteil, daß die Kurve noch nicht einmal geschlossen ist. Da die Funktion $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$ ja abseits von z analytisch ist, hängt das Integral auf einem Sterngebiet oder Elementargebiet nur vom Anfangs- und Endpunkt ab und man kann so gegebenenfalls Kurven vereinfachen, solange diese den Punkt z nicht treffen.

Geschlossene Kurven umlaufen Punkte normalerweise nur ganzzahlig oft.

Proposition 4.4.5. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte geschlossene Kurve und $z \notin I(\varphi)$. Dann gilt

$$\chi(\varphi; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \in \mathbb{Z}. \quad (4.4.4)$$

Beweis: Wir beginnen mit der Beobachtung, daß

$$\int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z} dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \log(\varphi(t) - z) dt.$$

Da $z \notin I(\varphi)$ ist der Integrand überall wohldefiniert, allerdings kann während der Integration entlang von φ der Logarithmus seinen Zweig wechseln. Um jeden Punkt $z_t := \varphi(t) - z$ gibt es aber eine offene Umgebung, auf der das Argument des Logarithmus stetig fortgesetzt werden kann, also

$$\log(z' - z) = \log|z' - z| + \arg(z - z'), \quad z' \in U_{r(t)}(z_t).$$

Die offenen Umgebungen $U_{r(t)}(z_t)$ überdecken die kompakte Menge $I(\varphi)$, also genügt auch eine endliche Teilüberdeckung davon und wir können eine stückweise differenzierbare Argumentfunktion $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow i\mathbb{R}$ entlang der Kurve definieren. Damit ist dann

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta &= \int_a^b \frac{d}{dt} \log|\varphi(t) - z| dt + \int_a^b \alpha'(t) dt \\ &= \underbrace{\log|\varphi(b) - z| - \log|\varphi(a) - z|}_{=0} + \alpha(b) - \alpha(a), \end{aligned}$$

und da $\varphi(a) = \varphi(b)$ ist, muss²⁹

$$2\pi i \mathbb{Z} \ni \log(\varphi(b) - z) - \log(\varphi(a) - z) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

gelten, woraus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

dann auch schon folgt. □

4.4.2 Residuum und Residuenformel

Definition 4.4.6. Sei $f : \dot{U}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Der Koeffizient a_{-1} dieser Entwicklung heißt RESIDUUM von f und ist definiert als

$$\text{Res}(f; z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, \rho)} f(\zeta) d\zeta, \quad (4.4.5)$$

für passende Werte³⁰ von ρ .

Nun können wir endlich viele Singularitäten einer Funktion auf einmal erschlagen.

Satz 4.4.7 (RESIDUENSATZ). Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $Z = \{z_1, \dots, z_m\} \subset D$, $f : D \setminus Z \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\varphi : [a, b] \rightarrow D \setminus Z$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve. Dann gilt die RESIDUENFORMEL

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f; z_j) \chi(\varphi; z_j). \quad (4.4.6)$$

Beweis: Wir entwickeln die Funktion lokal in Laurentreihen,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{jn} (z - z_j)^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

und betrachten wie bei der Partialbruchzerlegung

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - z_j)^n},$$

was nun eine Funktion mit hebbaren Nullstellen ist, die wir analytisch fortsetzen oder gleich als analytisch annehmen können. Da wir es mit einem Sterngebiet zu tun haben und g ana-

²⁹Die einzig mögliche Mehrdeutigkeit des Logarithmus.

³⁰Kleiner als der Konvergenzradius der Reihe.

4 Singularitäten

lytisch ist, ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\varphi} g(\zeta) d\zeta = \int_{\varphi} \left(f(\zeta) - \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(\zeta - z_j)^n} \right) d\zeta \\
 &= \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,-n} \int_{\varphi} \underbrace{\frac{1}{(\zeta - z_j)^n}}_{=0, n>1} d\zeta \\
 &= \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^m \underbrace{a_{j,-1}}_{=\text{Res}(f; z_j)} \int_{\varphi} \underbrace{\frac{1}{(\zeta - z_j)}}_{=2\pi i \chi(\varphi; z_j)} d\zeta \\
 &= \int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta - 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f; z_j) \chi(\varphi; z_j),
 \end{aligned}$$

woraus (4.4.6) durch einfaches Umstellen folgt. $\square$

Dieser wichtige Satz ist einige Bemerkungen wert.

Bemerkung 4.4.8 (Residuensatz).

1. In der Formel (4.4.6) sind nur diejenigen Punkte z_j relevant, bei denen sowohl $\text{Res}(f; z_j) \neq 0$ als auch $\chi(\varphi; z_j) \neq 0$ erfüllt ist, also Stellen, an denen eine *echte*, nicht hebbare Singularität vorliegt und die im Inneren der Kurve $\text{Int}(\varphi)$ liegen.
2. Stellen z_j , an denen f analytisch (fortsetzbar) ist, spielen also genausowenig eine Rolle wie Punkte außerhalb des berandeten Gebiets.
3. Hat insbesondere f an *allen* z_j eine analytische Fortsetzung, dann ist

$$\int_{\varphi} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

was genau unser Cauchyscher Integralsatz ist³¹.

Aus Satz 4.4.7 bekommen wir auch sofort eine allgemeine Version der Cauchyschen Integralformel für beliebige Kurven.

Korollar 4.4.9 (CAUCHYSCHES INTEGRALFORMEL, verallgemeinert). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\varphi : [a, b] \rightarrow D$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve. Dann gilt*

$$\chi(\varphi; z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D \setminus I(\varphi). \quad (4.4.7)$$

Beweis: Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}, \quad z, z_0 \in D,$$

hat auf $D \setminus \{z_0\}$ genau an z_0 eine Singularität mit $\text{Res}(g; z_0) = f(z_0)$. Der Residuensatz 4.4.7 angewandt auf g gibt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} g(\zeta) d\zeta = \text{Res}(g; z_0) \chi(\varphi; z_0) = f(z_0) \chi(\varphi; z_0),$$

was mit z für z_0 genau (4.4.7) ist. $\square$

³¹Das ist aber kein neuer Beweis, denn bei einigen der Resultate, auf denen Satz 4.4.7 basiert, wurde der Cauchysche Integralsatz bereits verwendet.

Bemerkung 4.4.10. Die etwas seltsame Schreibweise von (4.4.7) stellt sicher, daß das Resultat auch für den Fall $\chi(\varphi; z) = 0$ funktioniert ohne daß man durch Null teilen muss³².

An Polen kann man auch einige Rechenregeln für die Residuen angeben.

Proposition 4.4.11 (Rechenregeln für Residuen). *Sei D ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $f, g : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit außerwesentlicher³³ Singularität an z_0 . Dann gilt*

1. Ist $m = \text{ord}(f; z_0) > 0$, dann ist

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left((\cdot - z_0)^m f \right)^{(m-1)}(z_0). \quad (4.4.8)$$

2. Ist $\text{ord}(f; z_0) \geq 0$ und $\text{ord}(g; z_0) = 1$ ³⁴, dann ist

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (4.4.9)$$

3. Ist $f \neq 0$, so gilt

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}; z\right) = \text{ord}(f; z), \quad z \in D. \quad (4.4.10)$$

4. Ist g analytisch und $f \neq 0$, so gilt

$$\text{Res}\left(g \frac{f'}{f}; z\right) = g(z) \text{ord}(f; z), \quad z \in D. \quad (4.4.11)$$

Beweis: Für 1) verwenden wir wie immer die analytische Funktion

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad a_0 = g(z_0) \neq 0,$$

und bemerken, daß der Laurentkoeffizient a_{-1} von f die Eigenschaft

$$a_{-1} = b_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{\left((\cdot - z_0)^m f \right)^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

hat. Für 2) schreiben wir g als $g(z) = (z - z_0) \tilde{g}(z)$, $0 \neq \tilde{g}(z_0) = g'(z_0)$ und multiplizieren die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

an z_0 mit der von f , was uns die Laurentreihe

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \right) (z - z_0)^n$$

mit Residuum $a_0 b_0 = f(z_0)/g'(z_0)$ liefert. Für 3) wählen wir $z' \in D$ und schreiben

$$f(z) = (z - z')^m g(z), \quad m = \text{ord}(f; z'), \quad g(z') \neq 0,$$

³²Was immer noch nicht anzuraten ist.

³³Also möglicherweise hebbbarer.

³⁴Also insbesondere $g(z_0) = 0$.

4 Singularitäten

also

$$f'(z) = m(z-z')^{m-1}g(z) + (z-z')^m g'(z)$$

und damit, wegen $g(z') \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m(z-z')^{m-1}g(z) + (z-z')^m g'(z)}{(z-z')^m g(z)} = \frac{m}{(z-z')} + \frac{g'(z)}{g(z)} \\ &= \frac{m}{(z-z')} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z')^n, \end{aligned}$$

woraus (4.4.11) unmittelbar folgt. 4) verwendet dieselbe Darstellung von f'/f , multipliziert diese aber noch mit der analytischen Funktion:

$$g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \left(g(z') + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z')^n \right) \left(\frac{m}{(z-z')} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z')^n \right)$$

und der Rest ist Ausmultiplizieren³⁵. □

Bemerkung 4.4.12. Da $(\log z)' = \frac{1}{z}$ ist, ergibt die Kettenregel

$$(\log f(z))' = \frac{1}{f(z)} f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

weswegen man den Quotienten $\frac{f'}{f}$ auch als LOGARITHMISCHE ABLEITUNG von f bezeichnet.

4.4.3 Folgerungen aus dem Residuensatz

Die erste Aussage liefert ein Kurvenintegral über die logarithmische Ableitung einer Funktion.

Satz 4.4.13. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph mit $Z(f) \subset D$ und $P(f) \subset D$. Für jede stückweise glatte geschlossene Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow D \setminus (Z(f) \cup P(f))$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in Z(f)} \text{ord}(f; z) \chi(\varphi; z) + \sum_{z \in P(f)} \text{ord}(f; z) \chi(\varphi; z). \quad (4.4.12)$$

Beweis: Wir wenden die Residenformel (4.4.6) mit $Z = Z(f) \cup P(f)$ auf die meromorphe Funktion $\frac{f'}{f}$ an und setzen (4.4.11) ein, um

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \in Z} \text{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z)}; z \right) \chi(\varphi; z) = \sum_{z \in Z} \text{ord}(f; z) \chi(\varphi; z)$$

zu erhalten, was mit der expliziten Zerlegung von Z dann sofort (4.4.12) ergibt. □

Bemerkung 4.4.14. Auf jedem beschränkten Elementargebiet hat nach Proposition 4.3.6 eine meromorphe Funktion nur endlich viele Nullstelle. Da jede stückweise glatte Kurve endliche Bogenlänge hat und daher in einem beschränkten Bereich verlaufen muss, kann man also das D in Satz 4.4.7 also als beschränkt wählen und die Annahme an die Endlichkeit der Nullstellen und Pole ist keine wirkliche Einschränkung.

³⁵Schweigen allein reicht nicht.

Daraus können wir eine Eigenschaft konvergenter Folgen von analytischen Funktionen herleiten, die auf Hurwitz zurückgeht.

Satz 4.4.15. *Ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von analytischen Funktionen mit der Eigenschaft $0 \notin f_n(D)$ und Grenzfunktion f , dann verschwindet diese Grenzfunktion entweder identisch auf D , $f = 0$, oder sie hat keine Nullstelle in D .*

Beweis: f ist analytisch nach Satz 3.1.5; nehmen wir nun an, es wäre $f \neq 0$, aber $Z(f) \neq \emptyset$, also $f(z_0) = 0$ für ein $z \in D$. Da die Nullstellen einer analytischen Funktion diskret sind, Proposition 3.3.4, gibt es $0 < r < R$, so daß $\mathbb{D}_R(z_0) \subset D$ und

$$f(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{D}_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'_n}{f_n} = \frac{f'}{f}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ und daher ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f'_n(\zeta)}{f_n(\zeta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn (4.4.12) sagt, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, r)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \text{ord}(f; z_0) \geq 1$$

sein muss, da f in $\mathbb{D}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ keine Pole und auch keine weiteren Nullstellen hat. $\square$

Korollar 4.4.16. *Ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, eine Folge von injektiven analytischen Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Beweis: Ist f nicht konstant, so wählen wir $z_0 \in D$; da alle f_n injektiv sind, erfüllt die Folge

$$g_n(z) := f_n(z) - f_n(z_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

$g_n(z) \neq 0$, $z \in D \setminus \{z_0\}$. Nach Satz 4.4.15 ist die Grenzfunktion $g(z) = f(z) - f(z_0)$ entweder die Nullfunktion oder hat keine Nullstelle. Da z_0 beliebig war, ist daher f entweder konstant, wenn $g = 0$ ist, oder injektiv, wenn g Nullstellenfrei ist. $\square$

Wir können den Ausdruck in der Residuenformel (4.4.6) auch als Zählen der Nullstellen und der Pole mit ihren jeweiligen Vielfachheiten interpretieren. Oder, um es zu formalisieren.

Definition 4.4.17. Hat f in einem Gebiet D die endlich vielen Nullstellen $Z(f)$ und die endlich vielen Pole $P(f)$, beispielsweise weil f meromorph ist, so definieren wir

$$N(0) = \sum_{z \in Z(f)} \text{ord}(f; z), \quad N(\infty) = - \sum_{z \in P(f)} \text{ord}(f; z) \quad (4.4.13)$$

als Anzahl der Pole mit Vielfachheiten.

Der folgende Aussage ist nur eine Umformulierung der Residuenformel.

4 Singularitäten

Korollar 4.4.18. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Nullstellen und Polen³⁶ auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und φ eine stückweise glatte geschlossene Kurve mit

$$\chi(z; \varphi) = 1, \quad z \in Z(f) \cup P(f), \quad (4.4.14)$$

so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N(0) - N(\infty). \quad (4.4.15)$$

Bemerkung 4.4.19. Die intuitive Bedeutung von (4.4.14) ist, daß die Kurve φ jeden Pol und jede Nullstelle von f genau einmal umläuft.

Hat f keine Pole, so beschreiben die Residuenformel (4.4.6) und ihre Varianten wie (4.4.15) nur die Anzahl der Nullstellen von f mit entsprechenden Vielfachheiten und der Umlaufzahl. Das führt zum folgenden Resultat.

Satz 4.4.20 (ARGUMENTPRINZIP). Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und φ eine geschlossene Kurve mit $I(\varphi) \subset D$ und³⁷ $f(z) \neq 0, z \in I(\varphi)$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \chi(f \circ \varphi; 0) \in \mathbb{Z}. \quad (4.4.16)$$

Beweis: Unter Verwendung der Definition (2.1.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta &= \int_a^b \frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))} \varphi'(t) dt = \int_a^b \frac{(f \circ \varphi)'(t)}{(f \circ \varphi)(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{(f \circ \varphi)(t) - 0} (f \circ \varphi)'(t) dt = \int_{f \circ \varphi} \frac{1}{\zeta - 0} d\zeta = 2\pi i \chi(f \circ \varphi; 0). \end{aligned}$$

Daß $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$ ganzzahlig ist, liefert uns Satz 4.4.13 zusammen mit Proposition 4.4.5, denn nun ist ja alles nur eine Summe über ganzzahlige Werte. $\square$

Als nächste Konsequenz des Residuensatzes ein weiterer Klassiker der Funktionentheorie und ein wichtiger Begriff.

Definition 4.4.21. Eine geschlossene Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt EINFACH GESCHLOSSEN, wenn³⁸

$$\chi(\varphi; z) = 1, \quad z \in \text{Int}(\varphi). \quad (4.4.17)$$

Satz 4.4.22 (SATZ VON ROUCHÉ). Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Elementargebiet und $\varphi : [a, b] \rightarrow D$ eine einfach geschlossene Kurve. Ausserdem seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad z \in I(\varphi). \quad (4.4.18)$$

Dann haben f und $f + g$ dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\text{Int}(\varphi)$ unter Berücksichtigung von Vielfachheiten.

³⁶Das ist im wesentlichen ja die Definition von meromorph.

³⁷Das sorgt dafür, daß das Integral auf jeden Fall wohldefiniert ist.

³⁸Zur Definition von „Int“ siehe Definition 4.4.3.

Beweis: Da für $z \in I(\varphi)$ die Ungleichungen

$$|f(z)| > 0 \quad \text{und} \quad |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

erfüllt sind, sind $1/f$ und $1/(f+g)$ auf $I(\varphi)$ definiert, und können

$$\begin{aligned} & \sum_{z \in Z(f) \cap \text{Int}(\varphi)} \text{ord}(f; z) - \sum_{z \in Z(f+g) \cap \text{Int}(\varphi)} \text{ord}(f+g; z) \\ &= \sum_{z \in Z(f)} \text{ord}(f; z) \underbrace{\chi(\varphi; z)}_{\in \{0,1\}} - \sum_{z \in Z(f+g)} \text{ord}(f+g; z) \underbrace{\chi(\varphi; z)}_{\in \{0,1\}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta) + g'(\zeta)}{f(\zeta) + g(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \left(\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{f'(\zeta) + g'(\zeta)}{f(\zeta) + g(\zeta)} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)(f(\zeta) + g(\zeta)) - f(\zeta)(f'(\zeta) + g'(\zeta))}{f(\zeta)(f(\zeta) + g(\zeta))} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f'(\zeta)g(\zeta) - f(\zeta)g'(\zeta)}{f^2(\zeta)} \frac{1}{1 + g(\zeta)/f(\zeta)} d\zeta \\ &\quad \quad \quad = -(g/f)' = -(1 + g/f)' \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} (\log h)'(\zeta) d\zeta, \quad h(z) := 1 + \frac{g(z)}{f(z)}. \end{aligned}$$

Da $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$ für $z \in I(\varphi)$, ist somit $h(I(\varphi)) \subset \mathbb{D}_1^\circ(1)$, wo der Logarithmus mit seinem Hauptzweig übereinstimmt, was bedeutet, daß

$$\log(h(\varphi(a))) = \log(h(\varphi(b))),$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta = 0.$$

Damit stimmen aber die beiden Summen überein, die wiederum nichts anderes tun, als die Nullstellen und deren Vielfachheit zu zählen. $\square$

4.4.4 Integralberechnung mit dem Residuensatz

Das einfachste Beispiel ist die Berechnung von rational trigonometrischen Integralen.

Proposition 4.4.23. Sind $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ bivariate Polynome mit

$$Q(x, y) \neq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

dann ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt = 2\pi i \sum_{z \in P(f) \cap \mathbb{D}^\circ} \text{Res}(f; z), \quad (4.4.19)$$

wobei

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{P\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}{Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}.$$

4 Singularitäten

Beweis: Nach Definition von Sinus und Cosinus ist

$$f(e^{it}) = \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

also hat nach Annahme f keinen Pol auf dem Einheitskreis³⁹ und nur endlich viele im Inneren, und die Residuenformel liefert

$$2\pi i \sum_{z \in P(f) \cap \mathbb{D}^\circ} \text{Res}(f; z) = \oint_{(0,1)} f(\zeta) d\zeta = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt,$$

was genau (4.4.19) ist. □

Mit (4.4.19) kann man sehr einfach die Identität

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = \frac{2\pi}{1 - a^2}, \quad a \in \mathbb{C}, |a| < 1, \quad (4.4.20)$$

herleiten. Hier ist $P = 1$ und

$$Q(x, y) = 1 + a^2 - 2ax,$$

also

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{1 + a^2 - a(z + z^{-1})} = \frac{1}{i(z(1 + a^2) - az^2 - a)} = \frac{i}{a(z - a)(z - 1/a)},$$

und f hat die beiden Pole a und $1/a$, von denen aber nur a im Einheitskreis liegt. Der Pol ist einfach und das zugehörige Residuum lässt sich durch die stetige Fortsetzung

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{i}{a(z - 1/a)} = \frac{i}{a(a - 1/a)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

ermitteln. Multiplizieren wir das mit $2\pi i$, so erhalten wir (4.4.20).

Wir können die Residuenformel auch verwenden, um ein reelles UNEIGENTLICHES INTEGRAL der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (4.4.21)$$

mit im wesentlichen demselben Trick wie in Kapitel 4.1.4 zu bestimmen, jetzt aber mit Residuen. Dazu nutzen wir die OBERE HALBBEBENE

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$$

und wählen Punkte $z_j \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Mit

$$\varphi_R : t \mapsto Re^{i\pi t}, \quad \text{und} \quad \psi_R : t \mapsto 2Rt - R, \quad t \in [0, 1],$$

bezeichnen wir den Halbkreis mit Radius R in $\mathbb{H}$ und die Strecke von $-R$ nach R in $\mathbb{R}$. Die geschlossene, stückweise glatte Kurve $\alpha_R := \varphi_R \rightarrow \psi_R$ umläuft ihr Inneres genau einmal, hat also dort Windungszahl 1 und ergibt für $R > \max_n |z_n|$ nach dem Residuensatz, Satz 4.4.7, für jede meromorphe Funktion, die die Voraussetzungen erfüllt, das Integral

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\varphi_R} f(\zeta) d\zeta = \int_{\alpha_R} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j).$$

³⁹Als Rand der Einheitskreisscheibe.

Können wir nun noch f so wählen, daß

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi_R} f(\zeta) d\zeta = 0$$

ist, dann hätten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; z_j). \quad (4.4.22)$$

Für rationale Funktionen kann man (4.4.22) relativ einfach sicherstellen.

Proposition 4.4.24. Seien p, q zwei Polynome mit $\deg q \geq \deg p + 2$ und $Z(q) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Dann gilt für die rationale Funktion $f = p/q$, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z \in Z(q) \cap \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f; z). \quad (4.4.23)$$

Beweis: Ist $p(z) = p_0 + \dots + p_n z^n$, dann ist für $z = Re^{i\theta}$

$$p(z) = z^n \sum_{k=0}^n p_k z^{k-n} = z^n \sum_{k=0}^n p_{n-k} z^{-k} = R^n e^{in\theta} \sum_{k=0}^n p_{n-k} \frac{e^{-ik\theta}}{R^k}$$

und daher, falls $p_n \neq 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{p(Re^{i\theta})}{R^n} = p_n.$$

Seien nun also p, q Polynome vom *exakten* Grad m, n , also $n = \deg q \geq \deg p + 2 = m + 2$ und $p_m q_n \neq 0$, dann ist

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{n-m} \frac{p(Re^{i\theta})}{q(Re^{i\theta})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{-m} p(Re^{i\theta})}{R^{-n} q(Re^{i\theta})} = \frac{p_m}{q_n} \neq 0.$$

Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\rho > 0$, so daß

$$\left| \frac{p_m}{q_n} \right| - \varepsilon \leq R^{n-m} \frac{p(Re^{i\theta})}{q(Re^{i\theta})} \leq \left| \frac{p_m}{q_n} \right| + \varepsilon, \quad R > \rho.$$

Für so ein hinreichend großes R ist dann

$$\left| \int_{\varphi_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^1 \underbrace{\left| \frac{p(Re^{i\pi t})}{q(Re^{i\pi t})} \right|}_{\leq |R|^{m-n} \left(\left| \frac{p_m}{q_n} \right| + \varepsilon \right)} |R| \pi dt \leq \pi R^{m-n+1} \left(\left| \frac{p_m}{q_n} \right| + \varepsilon \right),$$

und da $n \geq m + 2$ ist, ist $m - n + 1 < -1$, so daß das Integral in der Tat für $R \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Der Rest ist dann die Idee von oben. $\square$

Bemerkung 4.4.25. Eine berechtigte Frage an dieser Stelle ist: Warum die obere Halbebene und nicht die untere. Die Antwort ist einfach: Wir bilden ein reelles Integral und können daher davon ausgehen, daß die Polynome p, q *reelle* Koeffizienten haben, ansonsten behandeln wir Real- und Imaginärteil separat. Da ein Polynom mit reellen Koeffizienten mit Nullstelle z aber

$$p(z) = 0 = \bar{0} = \overline{p(z)} = \sum_{j=0}^n p_j \bar{z}^j = p(\bar{z}) \quad (4.4.24)$$

erfüllt, treten die Nullstellen also immer in komplex konjugierten Paaren auf und in der unteren Halbebene passiert genau dasselbe wie in der oberen Halbebene. Da die Rechnung aus (4.4.24) auch für konvergente Potenzreihen gilt, müssen auch alle Nullstellen reell-analytischer Funktionen⁴⁰ im Konvergenzkreis eines reellen Entwicklungspunkts als konjugiert komplexe

⁴⁰Also Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen.

4 Singularitäten

Pärchen auftreten.

Bemerkung 4.4.26. Für die Abschätzung des Wertes ρ aus dem Beweis von Proposition 4.4.24 gibt es Ungleichungen und numerische Verfahren, beispielsweise die GERSCHGORIN-KREISE, siehe [9].

Bemerkung 4.4.27. Noch eine Erinnerung, wie so ein UNEIGENTLICHES INTEGRAL

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

zu behandeln ist. Das Integral heißt KONVERGENT, wenn die beiden Grenzwerte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx \quad (4.4.25)$$

existieren. Das ist mehr, als nur zu fordern, daß der CAUCHY-HAUPTWERT

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (4.4.26)$$

existiert, das einfachste Beispiel ist $f(x) = x$, wo der Cauchy-Hauptwert 0 ist, die beiden Integral aus (4.4.25) aber gegen $+\infty$ und $-\infty$ divergieren. Das Integral heißt ABSOLUT KONVERGENT, wenn (4.4.25) für $|f|$ erfüllt ist und dann ist das auch äquivalent zur absoluten Konvergenz des Cauchy-Hauptwerts.

Beispiel 4.4.28. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^{n+1}} dt = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.4.27)$$

Die Funktion $(z^2 + 1)^n = (z + i)^n (z - i)^n$ hat genau eine Nullstelle in $\mathbb{H}$ an i , somit hat $f(z) = (z^2 + 1)^{-n}$ genau einen Pol der Ordnung n an i in $\mathbb{H}$. Dieser ergibt sich nach (4.4.8) als

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; i) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-i)^n f(z) \Big|_{z=i} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{(\cdot + i)^n} \right)^{(n-1)} (i) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = \frac{1}{i} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{i^{2n-2}}}_{=1} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{1}{2^{2n-1}}, \end{aligned}$$

und wir erhalten (4.4.27), indem wir n durch $n+1$ ersetzen und mit $2\pi i$ multiplizieren.

Beispiel 4.4.29. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2k}}{1 + t^{2n}} dt = \frac{\pi}{n \sin\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4.4.28)$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms q mit positivem Imaginärteil sind die EINHEITSWURZELN von -1 , also

$$a_j = e^{\pi i \frac{2j+1}{2n}}, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

denn $\arg a_j \in [0, \pi)$ und

$$a_j^{2n} = e^{i\pi(2j+1)} = \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} \underbrace{e^{2i\pi j}}_{=1} = -1.$$

Die Nullstellen sind einfach⁴¹ und haben nach (4.4.9) das Residuum

$$\operatorname{Res}(f; a_j) = \frac{p(a_j)}{q'(a_j)} = \frac{a_j^{2k}}{2n a_j^{2n-1}} = \frac{1}{2n} a_j^{2k+1} \underbrace{\frac{1}{a_j^{2n}}}_{=-1} = -\frac{a_j^{2k+1}}{2n}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Res}(f; a_j) &= -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j^{2k+1} = -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} (2j+1)(2k+1)\right) \\ &= -\frac{1}{2n} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} (2k+1)\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{i\pi(2k+1)/n}\right)^j = -\frac{1}{2n} e^{i\pi(2k+1)/(2n)} \frac{1 - \overbrace{e^{i\pi(2k+1)}}^{=-1}}{1 - e^{i\pi(2k+1)/n}} \\ &= \frac{1}{n} \left(e^{i\pi(2k+1)/(2n)} - e^{-i\pi(2k+1)/(2n)}\right)^{-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{2i \sin\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)} = -\frac{1}{2n} \frac{i}{\sin\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)}, \end{aligned}$$

und der Rest ist wieder Proposition 4.4.24.

Übung 4.4.1 Berechnen Sie $q'(a_j)$ explizit. ◇

Weitere Integralberechnungen finden sich in [8].

⁴¹Man berechnet leicht (Übung!), daß $q'(a_j) \neq 0$.

*Denn ein Dieb ist doch Dieb nur eigentlich in dem Augenblick, da er diebt,
und nicht zwei Monate später, da er für seine Tat vor dem Richter steht, so
wie der Dichter wesentlich nur Dichter ist, während er schafft, und nicht
etwa, wenn er ein paar Jahre hernach am Mikrophon sein Gedicht vorliest;*

(S. Zweig, *Die unsichtbare Sammlung*)

In diesem Kapitel wollen wir uns damit beschäftigen, wie man analytische Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen und Polen bekommt, bzw. daß diese für beliebige nichthäufende Nullstellen und Pole existieren. Ausserdem wollen wir uns eine ganz besondere Funktion ein wenig genauer ansehen und ein wichtiges Resultat über konforme Abbildungen kennenlernen.

5.1 Die Gammafunktion

Machen wir doch erst einmal klar, wovon wir hier reden, auch wenn wir das Untersuchungsobjekt schon aus der Analysis kennen sollten.

Definition 5.1.1. Die GAMMAFUNKTION ist definiert als

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re z > 0, \quad (5.1.1)$$

mit der Konvention

$$t^z := e^{z \log t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.1.2)$$

5.1.1 Existenz, Funktionalgleichung, elementare Eigenschaften

Zuerst einmal müssen wir sicherstellen, daß das Integral in (5.1.1) überhaupt wohldefiniert¹ ist.

Proposition 5.1.2. Das GAMMA-INTEGRAL

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (5.1.3)$$

konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{H}_+$, also alle z mit $\Re z > 0$ und die Funktion $z \mapsto \Gamma(z)$ ist dort analytisch. Ihre Ableitungen ergeben sich als

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty t^{z-1} (\log t)^k e^{-t} dt. \quad (5.1.4)$$

¹Man beachte an dieser Stelle, daß es im Gegensatz zu normativen Osigraphiereformen in der Mathematik einen wesentlich Unterschied macht, ob man sagt „Das ist wohl definiert“ oder „Das ist wohldefiniert“.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

Beweis: Wir spalten das Integral in die beiden Teile

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

auf und behandeln diese separat. Da

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\log t} e^{-t}| = |e^{i\Im z \log t}| |e^{(\Re z - 1)\log t - t}| = t^{\Re z - 1} e^{-t}$$

und da es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß $t^{\Re z - 1} \leq C e^{t/2}$, $t \geq 1$, ist, können wir das zweite Integral zu

$$\int_1^\infty |t^{z-1} e^{-t}| dt = \int_1^\infty t^{\Re z - 1} e^{-t} dt \leq C \int_1^\infty e^{-t/2} dt = 2C [e^{-t/2}]_{t=\infty}^0 = 2C$$

abschätzen. Für $t \leq 1$ ist $e^{-t} \leq e^0 = 1$ und damit

$$\int_0^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt \leq \int_0^1 t^{\Re z - 1} dt = \frac{1}{\Re z} [t^{\Re z}]_{t=0}^1 = \frac{1}{\Re z},$$

also ist das Integral absolut konvergent. Da, für $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left| \Gamma(z) - \underbrace{\int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt}_{=: f_n(z)} \right| = \left| \int_0^{1/n} t^{z-1} e^{-t} dt + \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \frac{1}{\Re z} n^{-\Re z} + 2C e^{-n/2},$$

konvergieren die analytischen Funktionen $f_n(z)$ LOKAL GLEICHMÄSSIG gegen Γ , wobei die Gleichmässigkeitsumgebung in der Nähe der imaginären Achse immer kleiner werden. Damit ist Γ analytisch. Für die Formel (5.1.4) verwenden wir die Leibniz-Regel aus Lemma 2.3.8 und erhalten, daß

$$f'_n(z) = \int_{1/n}^n \frac{\partial}{\partial z} e^{(z-1)\log t} e^{-t} dt = \int_{1/n}^n e^{(z-1)\log t} \log t e^{-t} dt,$$

und der Rest ist der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und Induktion über k . □

Übung 5.1.1 Bestimmen Sie für $x > 0$ die Konstante C , so daß

$$t^{x-1} \leq C e^{t/2}, \quad t \geq 1,$$

erfüllt ist. ◇

Proposition 5.1.3. Es ist $\Gamma(1) = 1$ und

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re z > 0. \quad (5.1.5)$$

Beweis: Man berechnet ganz einfach

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [e^{-t}]_{t=\infty}^0 = 1$$

und verwendet partielle Integration, um

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \underbrace{[-zt^{z-1} e^{-t}]_{t=0}^\infty}_{=0} + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

zu erhalten. □

Aus der Funktionalgleichung (5.1.5) folgt sofort, daß die Gammafunktion eine kontinuierliche und sogar analytische Fortsetzung der Fakultät ist.

Korollar 5.1.4. *Es gilt*

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.1.6)$$

Über die Funktionalgleichung kann man die Gammafunktion auch für Parameter mit negativem Realteil fortsetzen, denn aus ihr folgt ja auch

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.1.7)$$

Das ist bereits wohldefiniert für alle z mit $\Re z \notin -\mathbb{N}_0$ und an $-\mathbb{N}_0$ hat die Funktion einen Pol der Ordnung 1, an dem wir das Residuum ganz einfach als

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

berechnen können. Fassen wir zusammen.

Satz 5.1.5 (Gammafunktion). *Die Gammafunktion kann auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden, hat ihre Pole an $-\mathbb{N}_0$ mit*

$$\text{Res}(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (5.1.8)$$

und ist in jedem vertikalen Streifen $\{z : a \leq \Re z \leq b\}$, $0 < a \leq b$, beschränkt.

Beweis: Bis auf die Beschränktheit haben wir schon alles bewiesen und die folgt aus der im Beweis von Proposition 5.1.2 hergeleiteten und benutzten Tatsache, daß

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^\infty |t^{z-1} e^{-t}| dt \leq \int_0^\infty t^{\Re z-1} e^{-t} dt = \Gamma(\Re z)$$

ist. □

Die hergeleiteten Eigenschaften legen die Gammafunktion dann auch schon mehr oder weniger eindeutig fest.

Satz 5.1.6 (Wielandt). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit*

$$V := \{z : 1 \leq \Re z < 2\} \subset D$$

und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit den Eigenschaften

1. *f ist beschränkt auf V ,*
2. *f erfüllt die Funktionalgleichung $f(z+1) = z f(z)$ für alle $z \in D$ mit $z+1 \in D$.*

Dann ist $f(z) = f(1)\Gamma(z)$, $z \in D \setminus (-\mathbb{N}_0)$.

Beweis: Wegen (5.1.7) ist f auf ganz $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ analytisch fortsetzbar und diese Fortsetzung² erfüllt natürlich die Funktionalgleichung $f(z+1) = z f(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. An $-\mathbb{N}_0$ hat f einfache Pole mit

$$\text{Res}(f; -n) = \frac{(-1)^n}{n!} f(1). \quad (5.1.9)$$

²Die wir wieder f nennen.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

Bis auf den Faktor $f(1)$ sind das dieselben Residuen wie bei der Gammafunktion, weshalb die Funktion

$$h(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z)$$

in $(-\mathbb{N}_0)$ nur noch hebbare Singularitäten hat, also zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden kann. Außerdem gilt

$$h(z+1) = f(z+1) - f(1)\Gamma(z+1) = zf(z) - zf(1)\Gamma(z) = z(f(z) - f(1)\Gamma(z)) = zh(z),$$

sowie

$$h(1) = f(1) - f(1)\underbrace{\Gamma(1)}_{=1} = f(1) - f(1) = 0.$$

Außerdem ist f beschränkt auf jedem Streifen Form $0 < a \leq \Re z \leq b < 2$, für $a \geq 1$ ist das die Voraussetzung und Satz 5.1.5, für $a < 1$ folgt dies aus

$$f(z) = \frac{f(z+1)}{z} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| = \frac{|f(z+1)|}{|z|},$$

ist $|z| > 1$, dann nutzen wir die Beschränktheit auf V und die Menge aller z mit $0 < a \leq \Re z \leq b < 2$ und $|z| \leq 1$ ist kompakt, so daß die stetige Funktion h dort ebenfalls beschränkt ist. Die ganze Funktion $z \mapsto g(z) := h(z)h(1-z)$ erfüllt nun

$$g(z+1) = zh(z)h(\underbrace{1-(z+1)}_{=-z}) = -h(z)\underbrace{(-z)h(-z)}_{=h(-z+1)} = -h(z)h(1-z) = -g(z),$$

und damit ist $|g|$ eine 1-periodische Funktion, g selbst eine 2-periodische Funktion. Da g auf $0 \leq \Re z < 1$ beschränkt ist, ist g damit auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und nach dem Satz von Liouville, Satz 2.3.15, konstant, also

$$g(z) = g(1) = h(1)h(0) = 0.$$

Ist nun $z_n \in D$ eine in D konvergente Folge, dann folgt aus

$$0 = g(z_n) = h(z_n)h(1-z_n),$$

daß mindestens eine der beiden Identitäten $h(z_n) = 0$ oder $h(1-z_n) = 0$ für unendlich viele n erfüllt ist und nach Proposition 3.3.4 ist $h = 0$ oder $h(1-\cdot) = 0$, was auch nichts anderes als $h = 0$ ist. Somit ist

$$0 = h(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

wie behauptet. □

5.1.2 Unendliche Produkte

Das nächste Ziel ist eine Produktdarstellung der Gammafunktion als *unendliches Produkt* der Form

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Sind alle $b_k > 0$ und damit insbesondere reell, so kann man das Produkt als

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \log b_k\right)$$

schreiben und dann die Konvergenz der Reihe der Logarithmen untersuchen. Im Komplexen, wo der Logarithmus ein wenig komplexer ist, ist das nicht so einfach und erfordert etwas mehr Sorgfalt.

Bemerkung 5.1.7. Die Menge $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ bildet mit der Multiplikation eine GRUPPE, deren neutrales Element die Null ist. Damit also eine unendliches Produkt vernünftig konvergiert, sollten die einzelnen Produktglieder gegen 1 konvergieren, so wie bei einer Reihe die einzelnen Folgenglieder gegen 0 konvergieren müssen. Nullelemente in unendlichen Produkten sollte man aber vermeiden, da durch sie das Produkt sofort und unwiederbringlich den Wert Null haben würde.

Wir können die Standardargumente von der Reihen ganz einfach auf unendliche Produkte übertragen, wobei wir immer berücksichtigen müssen, daß 0 bei der Multiplikation eine Rolle spielt wie ∞ bei der Addition.

Definition 5.1.8 (UNENDLICHES PRODUKT). Sei $b_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Das unendliche Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k$$

heißt KONVERGENT, wenn die Folge der Partialprodukte

$$p_n := \prod_{k=1}^n b_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegen eine *von Null verschiedene* Zahl $b \neq 0$ konvergiert. Diese heißt GRENZWERT des Produkts. Divergiert die Folge der p_n oder konvergiert sie gegen Null, so heißt das Produkt DIVERGENT.

Ist ein reelles unendliches Produkt konvergent³, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit

$$|p_n - p| < |p|\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{p_n}{p} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_n}{p} = 1 + z, \quad |z| < \varepsilon,$$

für alle $n > n_0$. Damit gilt für $m, n \geq n_0$, daß

$$\frac{p_n}{p_m} = \frac{1+z}{1+z'} = 1+a$$

mit

$$|a| = \left| \frac{1+z}{1+z'} - 1 \right| = \left| \frac{z-z'}{1+z'} \right| \leq 2 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Wählen wir also zu vorgegebenem η ein $\varepsilon < \frac{\eta}{2+\eta}$ und das dazugehörige n_0 , so ist

$$\frac{p_n}{p_m} = 1 + z, \quad |z| < \eta, \quad n_0 < m < n. \quad (5.1.10)$$

Daraus folgt sofort, daß

$$\left| \prod_{k=m+1}^n b_k - 1 \right| = \left| \frac{p_n}{p_m} - 1 \right| < \varepsilon, \quad n_0 < m < n, \quad (5.1.11)$$

was das multiplikative Gegenstück zum allgemeinen CAUCHY-KRITERIUM FÜR REIHEN ist. Daraus folgt mit $n = m + 1$, $m > n_0$ sofort die notwendige Bedingung für die Konvergenz eines unendlichen Produkts.

³Hier brauchen wir, daß der Grenzwert $\neq 0$ ist.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

Satz 5.1.9. Ist das unendliche Produkt $\prod b_k$ konvergent, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1. \quad (5.1.12)$$

Aus diesem Grund empfiehlt sich die folgende **Konvention**: Wir schreiben

$$b_k := 1 + a_k, \quad a_k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (5.1.13)$$

und betrachten die Folge a_k , die nun nach Satz 5.1.9 eine NULLFOLGE sein muss, wenn das Produkt konvergiert. Da außerdem $\log$ in einer Umgebung von $z = 1$ analytisch ist und die Reihenentwicklung⁴

$$\log(1+z) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1, \quad (5.1.14)$$

hat, können wir bei einer Folge b_n mit $|a_n| < 1$ für fast alle n nun die Zerlegung

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \left(\prod_{n=1}^N (1 + a_n) \right) \exp \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \log(1 + a_n) \right)$$

verwenden. Die absolute Konvergenz der Reihe kann man nun wieder einfach beschreiben.

Lemma 5.1.10. Die Reihe $\sum \log(1 + a_n)$ ist genau dann absolut konvergent wenn die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent ist.

Beweis: Für $|z| \leq \frac{1}{2}$ ist unter Verwendung von (5.1.14)

$$|\log(1+z)| \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n+1} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2|z| \quad (5.1.15)$$

sowie

$$|\log(1+z)| \geq |z| \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{2}|z|. \quad (5.1.16)$$

Ist nun $\sum \log(1 + a_n)$ absolut konvergent, dann ist $\log(1 + a_n)$ eine Nullfolge, also a_n eine Nullfolge und damit $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$. Mit (5.1.16) ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |\log(1 + a_n)|.$$

Ist umgekehrt $\sum a_n$ absolut konvergent, dann liefert dasselbe Argument, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\log(1 + a_n)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |\log(1 + a_n)| + 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|,$$

womit der Beweis komplett ist. □

Das motiviert dann auch die folgende Definition.

⁴Das ist Potenzreihenalkül:

$$(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad \Rightarrow \quad \log(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}.$$

Daraus folgt dann (5.1.14) durch Indexverschiebung.

Definition 5.1.11 (Absolut konvergentes Produkt). Das unendliche Produkt $\prod (1 + a_n)$, $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ heißt ABSOLUT KONVERGENT, wenn die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent ist.

Proposition 5.1.12. Ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von analytischen Funktionen auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, deren zugehörige Reihe $\sum f_n$ normal konvergent ist, dann definiert das konvergente unendliche Produkt

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)), \quad z \in D, \quad (5.1.17)$$

eine analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis: Da die f_n normal konvergieren, gibt es zu jedem kompakten $K \subset D$ ein n_0 mit $|f_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$ und $z \in K$. Damit ist aber

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) = \prod_{n=1}^{n_0-1} (1 + f_n(z)) \exp \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + f_n(z)) \right)$$

und die Reihe der Logarithmen konvergiert normal gegen eine analytische Funktion, sagen wir $g(z)$. Dann ist

$$f(z) = \prod_{n=1}^{n_0-1} (1 + f_n(z)) e^{g(z)},$$

Produkt endlich vieler analytischer Funktionen und damit ebenfalls wieder analytisch. $\square$

Differentiation von (5.1.17) ergibt⁵

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z)}{1 + f_n(z)} f'_n(z)$$

oder, für die logarithmische Ableitung,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{1 + f_n(z)}, \quad (5.1.18)$$

was im Komplement von $\bigcup_n Z(1 + f_n)$ definiert ist und dort auch normal konvergiert.

Definition 5.1.13 (Normal konvergentes Produkt). Das unendliche Produkt $\prod (1 + f_n)$ heißt NORMAL KONVERGENT, wenn die zugehörige Reihe $\sum f_n$ normal konvergent ist.

5.1.3 Die Produktdarstellung der Gammafunktion

Wir wollen nun die Gammafunktion als ein unendliches Produkt von Funktionen darstellen; das hat den offensichtlichen Vorteil, daß die Nullstellen der einzelnen Koeffizienten — und die werden einfach abzulesen sein — auch gleichzeitig die Nullstellen des Produkts sein werden.

Proposition 5.1.14. Das unendliche Produkt

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}), \quad (5.1.19)$$

definiert eine ganze Funktion mit der Eigenschaft $Z(f) = -\mathbb{N}$.

⁵Eine unendlichfache Anwendung der Produktregel. Natürlich steckt dahinter eigentlich ein Grenzübergang. **Übung!**

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

Beweis: Mit Blick auf Lemma 5.1.10 betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} - 1 \right). \quad (5.1.20)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} (1+z)e^{-z} &= e^{-z} + ze^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right) z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-n)z^n}{n!} \\ &= 1 + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-n)(-z)^{n-2}}{n!} = 1 - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} (-z)^n =: 1 - z^2 h(-z), \end{aligned}$$

für eine ganze Funktion h , die auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ beschränkt ist⁶, es gilt also auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$, daß

$$|(1+z)e^{-z} - 1| \leq C|z|^2, \quad z \in K, \quad C := \max_{z \in K} e^{|z|},$$

und damit

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} - 1 \right| \leq C \frac{1}{n^2}, \quad C := \max_{z \in K} |z|^2 e^{|z|},$$

so daß die Reihe aus (5.1.20) auf jedem Kompaktum absolut und gleichmäßig, also auch normal konvergiert. Damit konvergiert auch das Produkt normal mit Grenzwert $\neq 0$ solange alle Faktoren von Null verschieden sind, und die Grenzfunktion ist analytisch. Daß $Z(f) = -\mathbb{N}$ ist, ist offensichtlich aus der Definition (5.1.19). $\square$

Definiert man⁷ die Folge

$$\gamma_n := \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.1.21)$$

dann ist $\gamma_1 = 1$ und⁸

$$e^{\gamma_n - \gamma_{n+1}} = e^{-\frac{1}{n+1}} e^{\log(n+1) - \log n} = e^{-\frac{1}{n+1}} \frac{n+1}{n} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \frac{n+1}{n} = 1,$$

also $\gamma_n \geq \gamma_{n+1}$ sowie

$$e^{\gamma_n} = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n e^{1/k} \geq \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{n} > 1,$$

also $\gamma_n > 0$, so daß die Folge der γ_n *monoton fallend* und *nach unten beschränkt* ist und damit konvergiert.

Definition 5.1.15. Den Grenzwert der Folge γ_n aus (5.1.21) bezeichnet man als EULER–MASCHERONI–KONSTANTE $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$. Es gilt $\gamma = .57721 \dots$

⁶Für jedes z ist $|h(z)| \leq e^{|z|}$.

⁷Ganz spontan und ohne Nebengedanken ...

⁸Unter Verwendung der Abschätzung

$$e^{-t} = 1 - t + e^{-\xi} \geq 1 - t, \quad \xi \in (0, t), \quad t > 0,$$

die sich aus Taylor erster Ordnung mit Restglied ergibt.

Wir brauchen die Euler–Mascheroni–Konstante, um die Funktion f aus (5.1.19) noch passend zu normalisieren, und eine weitere Darstellung der Gammafunktion zu erhalten.

Satz 5.1.16. *Die Funktionenfolge*

$$g_n(z) := z e^{-z \log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5.1.22)$$

konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine ganze Funktion g ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = g(z) = z e^{\gamma z} f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5.1.23)$$

mit f aus (5.1.19), und es gilt

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1) \cdots (z+n). \quad (5.1.24)$$

Beweis: Für die Konvergenz schreiben wir g_n als

$$\begin{aligned} g_n(z) &= z e^{-z \log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) = z \exp \left(z \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \\ &= z e^{\gamma_n z} f_n(z), \end{aligned}$$

mit den Partialprodukten f_n von f aus (5.1.19) und die obigen Konvergenzüberlegungen aus Proposition 5.1.14 und zu γ ergeben (5.1.23). Natürlich hat damit g auch dieselben Nullstellen wie f . Für (5.1.24) schreiben wir zuerst g_n als

$$g_n(z) = z \underbrace{e^{-z \log n}}_{=n^{-z}} \prod_{k=1}^n \frac{z+k}{k} = z \frac{n^{-z}}{n!} \prod_{k=1}^n (z+k),$$

was die rechte Identität ergibt. Schließlich weisen wir noch nach, daß $1/g$ die charakterisierenden Bedingungen aus Satz 5.1.6 erfüllt. Da für $z \in V$

$$|n^{-z}| = n^{-\Re z} \quad \text{und} \quad |z+k| \geq \Re z + k$$

ist

$$|g_n(z)| \geq \underbrace{|z|}_{\geq \Re z} n^{-\Re z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\Re z}{k}\right) \geq \min_{x \in [1,2]} \frac{n^{-x}}{n!} \prod_{k=0}^n (x+k) \rightarrow \min_{x \in [1,2]} x e^{\gamma x} f(x),$$

und da f auf dem Kompaktum $[1,2]$ keine Nullstelle hat, ist $|g_n|$ auf V nach unten für hinreichend großes n durch eine positive Konstante beschränkt und daher $|1/g_n|$ nach oben. Für die Funktionalgleichung beobachten wir, daß

$$z g_n(z+1) = z \frac{n^{-z-1}}{n!} (z+1) \cdots (z+n+1) = \frac{z+n+1}{n} g_n(z) = \left(1 + \frac{z+1}{n}\right) g_n(z)$$

ist, was wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der g_n dann zu $z g(z+1) = g(z)$ führt, also

$$z \frac{1}{g}(z) = \frac{1}{g}(z+1).$$

Schließlich ist noch

$$g_n(1) = \frac{n^{-1}}{n!} \prod_{k=0}^n (k+1) = \frac{1}{n} \frac{(n+1)!}{n!} = 1 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

also $\frac{1}{g}(1) = 1$. Nach Satz 5.1.6 ist also $\Gamma(z) = \frac{1}{g(z)}$. □

Da g eine ganze Funktion ist, hat sie keine Pole und wir können die folgende Beobachtung machen.

Korollar 5.1.17. *Die Gammafunktion hat keine Nullstellen, $\Gamma(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.*

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

5.1.4 Formeln für die Gammafunktion

Proposition 5.1.18 (Vervollständigungsformel). *Es gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (5.1.25)$$

Beweis: Die Funktion $f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ erfüllt⁹

$$f(z+1) = \Gamma(z+1)\Gamma(-z) = z\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\Gamma(z) \underbrace{(-z)\Gamma(-z)}_{=\Gamma(-z+1)} = -\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -f(z),$$

ist also 1-quasiperiodisch und 2-periodisch. Sie hat einfache Pole an $\mathbb{Z}$ und gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{Res}(f; -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z)\Gamma(1-z)\Gamma(1+n) \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = n! \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n,$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; n) &= \Gamma(n) \lim_{z \rightarrow n} (z-n)\Gamma(1-z) = \Gamma(n) \lim_{1-z \rightarrow -(n-1)} -((1-z) + (n-1))\Gamma(1-z) \\ &= -(n-1)! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Genau dieselben Residuen hat auch die Funktion $\frac{\pi}{\sin \pi z}$. Nun betrachten wir die Funktion

$$g(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$

die an $\mathbb{Z}$ nun hebbare Singularitäten hat¹⁰, also eine ganze Funktion ist. Außerdem ist g auf dem Streifen $0 \leq \Re z < 2$ beschränkt, periodisch und auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Als ganze Funktion muss g damit konstant sein und da

$$\begin{aligned} g(-z) &= \Gamma(-z)\Gamma(1+z) + \frac{\pi}{\sin \pi z} = -(-z)\Gamma(-z)\Gamma(z) + \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{\sin \pi z} - \Gamma(z)\Gamma(1-z) \\ &= -g(z) \end{aligned}$$

ist, ist $g \equiv 0$. □

Korollar 5.1.19. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und allgemein gilt

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.1.26)$$

sowie

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (5.1.27)$$

⁹Wer hier ein déjà vu hat, hat recht, wir haben dieses Argument schon einmal im Beweis von Satz 5.1.6 kennengelernt.

¹⁰Beide Funktionen haben an $\mathbb{Z}$ Pole der Ordnung -1 , die Laurententwicklungen beginnen also bei -1 , und es ist $\operatorname{Res}(g; z) = 0$, $z \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Da

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi,$$

folgt $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und (5.1.26) ist eine einfache Induktion unter Berücksichtigung von

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-2} \left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Die Formel (5.1.27) ergibt sich durch Einsetzen von (5.1.23) in

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)},$$

also

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{z} \frac{n^{-z} n^z}{(n!)^2} (z(-z)) \prod_{k=1}^n ((k+z)(k-z)) = z \prod_{k=1}^n \frac{k^2 - z^2}{k^2}.$$

□

Bemerkung 5.1.20. Aus (5.1.27) folgt auch die Faktorisierung

$$\operatorname{sinc} z := \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (5.1.28)$$

des SINUS CARDINALIS sinc , der in der digitalen Signalverarbeitung, insbesondere im ABTASTSATZ von Shannon, eine zentrale Rolle spielt. Die zentrale Eigenschaft dieser Funktion ist

$$\operatorname{sinc}(k) = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

was es ermöglicht Funktionen an den ganzen Zahlen durch

$$g := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \operatorname{sinc}(\cdot - k) \quad \Rightarrow \quad g(\mathbb{Z}) = f(\mathbb{Z})$$

zu INTERPOLIEREN.

Proposition 5.1.21 (VERDOPPLUNGSFORMEL). *Es gilt*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.1.29)$$

Beweis: Die Funktion

$$f(z) = 2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

ist auf V beschränkt und erfüllt

$$zf(z) = 2 \frac{z}{2} 2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2^z \underbrace{\frac{z}{2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}_{=\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{z+2}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = f(z+1)$$

sowie

$$f(1) = 2^0 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = \sqrt{\pi},$$

so daß nach Satz 5.1.6 $f(z) = \sqrt{\pi}\Gamma(z)$ ist.

□

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

5.1.5 Die Stirlingformel

Zum Abschluss des Γ -Kapitels noch eine Formel, die die Gammafunktion als Verallgemeinerung der Fakultät mit ein paar anderen Funktionen in Beziehung setzt.

Definition 5.1.22. Wir schreiben $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ für die GESCHLITZTE EBENE aus der alle nicht-positiven reellen Zahlen entfernt wurden.

Satz 5.1.23 (STIRLINGFORMEL). *Es gilt*

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{h(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad (5.1.30)$$

wobei

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(z + n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) - 1 \right). \quad (5.1.31)$$

Definition 5.1.24. Die Reihe in (5.1.31) bezeichnet man als GUDERMANN-REIHE¹¹.

Lemma 5.1.25. *Die Reihe*

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(z + n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{z+n} \right) - 1 \right)$$

konvergiert normal in $\mathbb{C}_-$ und definiert dort eine analytische Funktion.

Beweis: Wir setzen

$$h_0(z) = \left(z + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{z} \right) - 1 = \left(z + \frac{1}{2} \right) (\log(z+1) - \log z) - 1, \quad (5.1.32)$$

so daß

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_0(z+n).$$

Mit der Variablentransformation $w = \frac{1}{2z+1}$ ist

$$h_0(z) = \frac{1}{2w} \log \frac{1+w}{1-w} - 1 =: h_0(w)$$

mit $h_0(-w) = h_0(w)$ und $h_0(0) = 0$. Die Taylorentwicklung dieser Reihe ist¹²

$$h_0(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{2n}}{2n+1} = w^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{2n+3}, \quad |w| < 1,$$

so daß für $|w| \leq \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$|h_0(w)| \leq \frac{|w|^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{4}{9} |w|^2 \leq \frac{1}{2} |w|^2$$

erfüllt ist. Nun $|w| \leq \frac{1}{2}$ äquivalent zu

$$2 \leq |2z+1| \quad \Rightarrow \quad \left| z + \frac{1}{2} \right| \geq 1,$$

¹¹Gudermann war der Doktorvater von Weierstraß.

¹²Laut [8] eine „einfache Rechnung“ ...

und somit gilt die Abschätzung

$$|h_0(z)| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2z+1} \right|^2, \quad z \in \mathbb{C}_-, \quad \left| z + \frac{1}{2} \right| \geq 1. \quad (5.1.33)$$

Betrachten wir nun die Reihe h , so gibt es für jedes z maximal einen Wert von $n \in \mathbb{N}$, so daß $z+n \in \mathbb{D}_1(-\frac{1}{2})$, für alle anderen klingt es wie in (5.1.33), also wie $|z+n|^{-2} \simeq n^{-2}$, ab, was dafür sorgt, daß die Reihe absolut konvergiert. $\square$

Beweis von Satz 5.1.23: Nach Lemma 5.1.25 ist die Funktion

$$f(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{h(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

als Produkt von analytischen Funktionen selbst ebenfalls analytisch. Da außerdem¹³

$$\begin{aligned} h(z) - h(z+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_0(z+n) - \sum_{n=0}^{\infty} h_0(z+n+1) \\ &= h_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} h_0(z+n) - \sum_{n=1}^{\infty} h_0(z+n) = h_0(z), \end{aligned}$$

ist, mit Einsetzen von (5.1.32),

$$\begin{aligned} f(z+1) &= (z+1)^{z+\frac{1}{2}} e^{-z-1} e^{h(z+1)} = e^{(z+\frac{1}{2}) \log(z+1)} e^{-z-1} e^{h(z)-h_0(z)} \\ &= e^{-z} e^{h(z)} \exp \left(\left(z + \frac{1}{2} \right) \log(z+1) - 1 - \left(\left(z + \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{z+1}{z} \right) - 1 \right) \right) \\ &= e^{-z} e^{h(z)} \underbrace{\exp \left(\left(z + \frac{1}{2} \right) \log z \right)}_{= z^{z+\frac{1}{2}} = z z^{z-\frac{1}{2}}} = z f(z+1), \end{aligned}$$

so daß f ebenfalls die Funktionalgleichung der Gammafunktion erfüllt. Bleibt noch die Beschränktheit. Wegen (5.1.33) ist $h(z)$ und damit auch $e^{h(z)}$ beschränkt¹⁴, e^{-z} ist ebenfalls beschränkt, es bleibt also nur die Betrachtung von

$$z^{z-\frac{1}{2}}, \quad a \leq \Re z \leq b, \quad 0 < a < b.$$

Da

$$\Re \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \log z \right) = \left(\Re z - \frac{1}{2} \right) \log |z| - \Im z \arg z$$

und da $\Re z - \frac{1}{2}$ auf dem Streifen beschränkt ist, ist das Verhalten des Imaginärteils relevant.

Da

$$\lim_{\Im z \rightarrow \pm \infty} \arg z = \pm \frac{\pi}{2}$$

und da $|\Im z|$ schneller gegen ∞ geht, ist

$$\lim_{\Im z \rightarrow \pm \infty} \Re \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) \log z \right) = -\infty,$$

also

$$\lim_{\Im z \rightarrow \pm \infty} \left| z^{z-\frac{1}{2}} \right| = \lim_{\Im z \rightarrow \pm \infty} e^{\Re((z-\frac{1}{2}) \log z)} = 0, \quad a \leq \Re z \leq b,$$

und damit ist auch $z^{z-\frac{1}{2}}$ beschränkt. Also ist nach Satz 5.1.6 f ein Vielfaches der Gammafunktion und dieses bestimmt man als $\sqrt{2\pi}$, siehe [8]. $\square$

¹³Das ist das *Konstruktionsprinzip* der Funktion h !

¹⁴Für $|z| \rightarrow \infty$ geht $h(z) \rightarrow 0$.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

5.1.6 Die Partialbruchzerlegung

Die Gammafunktion hat auch eine Partialbruchzerlegung, die wir sehr einfach aus dem Satz von Mittag-Leffler, Satz 4.3.9 herleiten können. Der sagt uns wegen der einfachen Pole an $-\mathbb{N}_0$, daß

$$\Gamma(z) = f(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} = f(z) + \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(\frac{1}{z+n} \right), \quad (5.1.34)$$

der Hauptteil der Laurentzerlegung in jedem der Pole ist also $h(z) = e^{-z}$. Bleibt also nur der ganze Anteil

$$f(z) = \Gamma(z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

zu ermitteln. Dazu schreiben wir

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

und stellen fest, daß

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{z+n}}{z+n} \right]_{t=0}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \end{aligned}$$

gerade der Anteil der Partialbrüche ist, was uns dann auch schon die Partialbruchzerlegung

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}, \quad \Re z > 0, \quad (5.1.35)$$

liefert, die auf Prym zurückgeht.

5.2 Die Produktformel von Weierstraß

Jetzt haben wir inzwischen einiges über analytische Funktionen gelernt und es wird Zeit, uns die Frage zu stellen, wie „reichhaltig“ die Menge der analytischen Funktionen ist. Da eine analytische Funktion ja vor allem durch ihre Nullstellen bzw. eine meromorphe Funktion durch ihre Nullstellen und Pole, sowie jeweils deren Vielfachheit zumindest lokal beschrieben wird¹⁵, stellt sich die Frage, ob diese beliebig wählbar sind oder ob es Einschränkungen gibt.

Beispiel 5.2.1. Analytische Funktionen mit endlich vielen Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ sind ganz einfach die Polynome $(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ und deren Vielfache. Haben die Nullstellen Vielfachheit $\mu_1, \dots, \mu_n$, so wählt man entsprechend

$$\prod_{j=1}^n (z - z_j)^{\mu_j}.$$

¹⁵Das sind die Laurentreihen.

5.2.1 Analytische Funktionen

Wie sieht es nun aber mit unendlich vielen Nullstellen aus? Wenn die Funktion, die an diesen Punkten verschwinden soll, analytisch und nichttrivial, also $\neq 0$, sein soll, dann müssen nach Proposition 3.3.4 diese Nullstellen DISKRET sein, dürfen also keinen Häufungspunkt enthalten.

Problem 5.2.2. Sei $Z \subset D \subseteq \mathbb{C}$ diskret und $M = (\mu(z) : z \in Z) \in \mathbb{N}^Z$. Gibt es eine ANALYTISCHE FUNKTION $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

1. $Z(f) = Z$,
2. $\text{ord}(f; z) = \mu(z)$, $z \in Z$.

Bemerkung 5.2.3 (Normalisierung). Interessant ist Problem 5.2.2 natürlich nur für $\#Z = \infty$, sonst ist die Antwort ein einfaches „ja“, siehe Beispiel 5.2.1. Da $(\mathbb{D}_R(0) \cap Z) < \infty$ für alle $R > 0$, sonst hätte Z einen Häufungspunkt, können wir die Nullstellen der Größe nach ordnen:

$$Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \quad (5.2.1)$$

Wir setzen dann $\mu_n := \mu(z_n)$. Außerdem können wir annehmen, daß $0 \notin Z$, denn sonst würden wir einfach das f zu $z \in Z \setminus \{0\}$ bestimmen und dann $z^{\mu(0)} f(z)$ verwenden.

Der Ausschluß von 0 hat einen einfachen Grund: Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n)^{\mu_n}$$

wird normalerweise nicht konvergieren¹⁶, aber für das modifizierte Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{\mu_n} \quad (5.2.2)$$

stehen die Chancen schon besser, da die $\frac{z}{z_n}$ auf jedem Kompaktum eine Nullfolge bilden.

Übung 5.2.1 Zeigen Sie: Für $\mu_j = 1$ und $z_j = j^2$ konvergiert das Produkt normal. $\diamond$

Wie Übung 5.2.1 zeigt, klappt der Ansatz in (5.2.2) manchmal, aber leider nicht immer¹⁷, man muss das unendliche Produkt also ein wenig anders gestalten, und zwar als

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\mu_n}, \quad (5.2.3)$$

wobei $E_n(1) = 0$ und $E_n(z) \neq 0$ für $z \neq 1$. Solche Funktionen hat Weierstraß 1876 gefunden. Wir folgen hierbei der Darstellung aus [12].

Definition 5.2.4 (ELEMENTARFUNKTION). Für $p \in \mathbb{N}_0$ ist die WEIERSTRASSSCHE ELEMENTARFUNKTION der Ordnung p als¹⁸

$$E(z, p) = (1 - z) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right). \quad (5.2.4)$$

¹⁶Ist beispielsweise $z_j = j$ und $\mu_j = 1$, dann divergieren alle Koeffizienten der Reihe.

¹⁷Finden Sie ein Gegenbeispiel! Welche Eigenschaft müssen solche Nullstellen z_j haben?

¹⁸Man beachte die **Konvention**: Das leere Produkt hat Wert 1.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

Da¹⁹

$$\left(\log \frac{1}{1-z}\right)' = -(\log(1-z))' = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

ist

$$\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

und der Ausdruck in der Exponentialfunktion in (5.2.4) ist daher die p -te Partialsumme der MACLAURIN-REIHE von $\log \frac{1}{1-z}$. Der Clou an $E(\cdot, p)$ ist ein gewisses Abklingverhalten.

Satz 5.2.5. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|E(z, p) - 1| \leq |z|^{p+1}, \quad |z| \leq 1. \quad (5.2.5)$$

Beweis:²⁰ Für $p = 0$ ist (5.2.5) offensichtlich, für $p > 0$ schreibt man

$$E(z, p) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} z^n,$$

und macht sich über die Koeffizienten a_{pk} ein bisschen Gedanken. Da

$$\begin{aligned} E(z, p)' &= -\exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right) + (1-z) \left(\sum_{j=1}^p z^{j-1}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right) \left(-1 + (1-z) \sum_{j=0}^{p-1} z^{j-1}\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right) (-1 + 1 - z^p) \\ &= -z^p \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right), \end{aligned}$$

und da

$$\exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{pn} z^n$$

mit $b_{pn} \geq 0$, folgt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{p, n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{pn} z^{n-1} = E(z, p)' = -z^p \sum_{n=1}^{\infty} b_{pn} z^n = \sum_{n=p}^{\infty} b_{p, n-p} z^n$$

und somit

$$a_{p1} = \dots = a_{pp} = 0, \quad a_{pk} = \frac{b_{p, n-p-1}}{n} < 0, \quad n = p+1, p+2, \dots$$

Damit ist

$$0 = E(1, p) = 1 + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_{pn} = 1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{pn}| \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{pn}| = 1,$$

¹⁹Kaum nähert sich die Vorlesung ihrem Ende, schon fangen wir an, uns an, uns an das Potenzreihen-kalkül zu gewöhnen.

²⁰Der Beweis hat auch in [12] eine Fußnote, in der er angibt, ihn von seinem Lehrer Marcel Riesz gelernt zu haben, der ihn wiederum Fejér zuschreibt.

so daß all diese Koeffizientenreihen absolut konvergieren. Damit ist für $|z| \leq 1$

$$|E(z, p) - 1| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{pn}| |z|^n = |z|^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{pn}| \underbrace{|z|^{n-p-1}}_{\leq 1} \leq |z|^{p+1} \underbrace{\sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{pn}|}_{=1} = |z|^{p+1},$$

wie behauptet. □

Das gibt uns dann den Weierstraßschen Faktorisierungssatz.

Satz 5.2.6 (WEIERSTRASSSCHER FAKTORISIERUNGSSATZ). *Zu jeder Folge $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, ohne Häufungspunkt und alle $\mu_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, gibt es eine ganze Funktion f mit*

$$Z(f) = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \text{Ord}(f; z_n) = \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.2.6)$$

und zwar

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right) \right)^{\mu_n} \quad (5.2.7)$$

für eine passend²¹ gewählte Folge p_n , $n \in \mathbb{N}$.

Mit Bemerkung 5.2.3, insbesondere was die Behandlung einer Nullstelle an $z_0 = 0$ betrifft, können wir Satz 5.2.6 folgendermaßen umformulieren.

Korollar 5.2.7. *Mit $z_0 = 0$, $\mu_0 \in \mathbb{N}_0$ und $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sowie $\mu_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, ist f von der Form*

$$f(z) = z^{\mu_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left(E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right) \right)^{\mu_n} \quad (5.2.8)$$

und erfüllt entsprechend

$$Z(f) = \{z_n : n \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{und} \quad \text{Ord}(f; z_n) = \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.2.9)$$

Beweis von Satz 5.2.6: Wir bleiben bei unserer Konvention $|z_n| \leq |z_{n+1}|$. Sei nun $R > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $|z_n| > R$, $n \geq n_0$. So ein n_0 muss es immer geben, denn sonst hätte die Folge unendlich viele Glieder in einem Kompaktum und damit einen Häufungspunkt²². Nach Satz 5.2.5 ist dann

$$\left| E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right) - 1 \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1}, \quad |z| \leq R, \quad n \geq n_0, \quad (5.2.10)$$

was also *gleichmäßig* auf $\mathbb{D}_R(0)$ gilt. Da der Faktor $E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right)$ im Produkt μ_n -fach auftritt, ist die nach Lemma 5.1.10 zu betrachtende Reihe von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \left(E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right) - 1 \right),$$

und damit diese auf $\mathbb{D}_R$ gleichmäßig und absolut konvergiert, müssen wir also p_n so wählen, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} \quad (5.2.11)$$

²¹Wie werden wir im Beweis sehen.

²²Sogar eine konvergente Teilfolge.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

auf *allen* Kreisscheiben $\mathbb{D}_R(0)$ konvergiert, unabhängig davon, wie groß R ist. Die Wahl von diesen p_n wird nun im wesentlichen von den Vielfachheiten μ_n der Nullstellen abhängen: wir wählen

$$p_n > \log(n^2 \mu_n) - 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.2.12)$$

und, zu vorgegebenem $R > 0$, einen Index $n_0 = n_0(R)$, so daß

$$|z_n| > eR, \quad n \geq n_0.$$

Dann ist für $|z| \leq R$

$$\mu_n \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} \leq \mu_n \left| \frac{R}{z_n} \right|^{p_n+1} \leq \mu_n e^{-(p_n+1)} \leq \mu_n e^{-\log(n^2 \mu_n)} = \frac{\mu_n}{n^2 \mu_n} = \frac{1}{n^2},$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p_n\right) - 1 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Damit konvergiert das unendliche Produkt und ist an allen $z \notin Z$ von Null verschieden²³ und an Z hat es genau die vorgegebene Ordnung. $\square$

Bemerkung 5.2.8 (Beweis von Satz 5.2.6). Gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{|z_n|^{k+1}} < \infty$$

ist, dann könnte man sogar $p_n = k$, $n \in \mathbb{N}$, wählen. Das setzt allerdings ein gewisses Wachstum der z_n und eine Beschränktheit der μ_n voraus, für $\mu_n > |z_n|^n$, $n \in \mathbb{N}$, kann man beispielsweise kein passendes k finden. Im Falle der Existenz von solch einem k nennt man

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(E\left(\frac{z}{z_n}, k\right) \right)^{\mu_n} \quad (5.2.13)$$

KANONISCHES PRODUKT für die Funktion f .

Gut, wir haben also ein Darstellung der ganzen Funktion f auf der Basis ihrer Nullstellen, aber wie eindeutig ist diese? Ganz eindeutig kann sie ja wohl nicht sein, denn jede Wahl von p_n , die (5.2.12) erfüllt, liefert ja ein konvergentes unendliches Produkt mit dem vorgegebenen Nullstellenverhalten. Dennoch hat man „fast Eindeutigkeit“.

Satz 5.2.9. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2.6 hat jede Funktion, die (5.2.6) die Form*

$$g(z) = f(z) e^{h(z)}, \quad (5.2.14)$$

mit dem f aus (5.2.7) für eine beliebige passende Wahl von p_n und einer analytischen Funktion $g: D \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis: Erfüllt g die Bedingungen (5.2.6), dann hat g/f nach Proposition 4.4.11 weder Nullstellen noch Pole²⁴ und ist eine ganze Funktion. Da $\mathbb{C}$ ein Elementargebiet ist, kann also g/f gemäß Satz 2.2.14 als $e^{h(z)}$ geschrieben werden, also als analytischer Zweig des Logarithmus. Und daraus folgt (5.2.14) auch schon unmittelbar. $\square$

²³Hier zählt es sich aus, daß wir den „Grenzwert 0“ bei konvergenten unendlichen Produkten ausgeschlossen haben.

²⁴Die Ordnung ist nun überall 0.

5.2.2 Beispiele

Beispiel 5.2.10. Eine Funktion, die an $\mathbb{N}^2 = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ verschwindet, ist besonders einfach. Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2}$$

für jedes z im Absolutbetrag durch $|z| \sum n^{-2} < \infty$ beschränkt ist, konvergiert die Reihe normal und wir können hier $p_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, wählen, die Funktion hat also die einfache Faktorisierung

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right),$$

die ebenfalls normal konvergiert.

Beispiel 5.2.11. Für eine ganze Funktion, die einfach an $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ verschwindet, also $z_{2n-\epsilon} = (-1)^\epsilon n$, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, müssen wir $p_n = 1$ wählen, da dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{n} \right|^2 \leq |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert, $p_n = 0$ würde es nicht tun. Als kanonisches Produkt erhalten wir somit nach (5.2.13)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

wobei wir das Produkt wegen der absoluten Konvergenz der zugehörigen Reihe beliebig umstellen durften. Aber dieses Produkt kennen wir aus (5.1.28), es ist nichts anderes als die sinc-Funktion, unser guter alter Sinus Cardinalis.

Bemerkung 5.2.12. Der Sinus Cardinalis ist das kanonische Produkt einer Funktion, die an $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ verschwindet, also **die** Funktion mit dieser Eigenschaft. Shannon [19] und Whittaker [21] wussten also wohl sehr genau, was sie taten.

Und zum Abschluss noch ein etwas „theoretischeres“ Beispiel.

Beispiel 5.2.13. Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen, die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind²⁵. Diese Punkte erzeugen ein GITTER²⁶

$$L(w_1, w_2) = w_1 \mathbb{Z} + w_2 \mathbb{Z} = \{w_{jk} := j w_1 + k w_2 : j, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C},$$

in dem alle Punkte verschieden sind, denn

$$j w_1 + k w_2 = j' w_1 + k' w_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{k' - k}{j - j'} w_2$$

definiert für $j' \neq j$ eine lineare Abhängigkeitsrelation über $\mathbb{Q}$ und damit über $\mathbb{R}$. Wir suchen nun nach einer ganzen Funktion f , die auf dem gesamten Gitter einfach verschwindet. Diese ist dann eine Funktion in *einer* komplexen Variablen, die aber als reelle Funktion in *zwei* Variablen angesehen werden kann.

²⁵ $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ zu betrachten ist ein stetiger Quell ewiger Freude.

²⁶Das zugehörige englische Wort heißt LATTICE, daher der Buchstabe „L“.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

In diesem Beispiel empfiehlt es sich, die Punkte z_{jk} nicht ganz ausschliesslich nach dem Absolutbetrag zu ordnen, sondern in Teilgittern²⁷

$$L_n(w_1, w_2) := \{z_{jk} : n = \|(j, k)\|_\infty := \max(|j|, |k|)\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

innerhalb derer man die Punkte beliebig anordnen kann, beispielsweise gegen den Uhrzeigersinn²⁸, beginnend mit $(n, 0)$. Was wir wirklich bei der Anordnung $w_{jk} \rightarrow z_n$ brauchen, ist die Eigenschaft, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty.$$

Klar ist

$$|w_{jk}| \leq |j| |w_1| + |k| |w_2| \leq \|(j, k)\|_\infty \max(|w_1|, |w_2|).$$

Da

$$w_{jk} \simeq \begin{pmatrix} \Re w_{jk} \\ \Im w_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re w_1 & \Re w_2 \\ \Im w_1 & \Im w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

und da A nach Voraussetzung invertierbar ist, also von Null verschiedene Eigenwerte hat, ist

$$|w_{jk}|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \Re w_{jk} \\ \Im w_{jk} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}^T A^T A \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \geq \lambda \left\| \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \right\|_2^2,$$

wobei λ der *kleinere* Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix

$$A^T A = \begin{pmatrix} (\Re w_1)^2 + \Re w_2 \Im w_1 & \Re w_1 \Re w_2 + \Im w_1 \Im w_2 \\ \Re w_1 \Re w_2 + \Im w_1 \Im w_2 & (\Re w_2)^2 + \Re w_1 \Im w_2 \end{pmatrix}$$

ist. Da außerdem

$$\left\| \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \right\|_2^2 = j^2 + k^2 \geq \|(j, k)\|_\infty^2$$

gilt, erhalten wir letztlich auch

$$\sqrt{\lambda} \|(j, k)\|_\infty \leq |w_{jk}| \leq \|(j, k)\|_\infty \max(|w_1|, |w_2|), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (5.2.15)$$

das heißt die Länge der w_{jk} und $\|(j, k)\|_\infty$ sind ÄQUIVALENT. Nun noch eine kleine Abschätzung.

Lemma 5.2.14. Für die oben definierten Punkte $z_n \leftarrow w_{jk}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^3 < \infty, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5.2.16)$$

Beweis: Da $\#L_n(w_1, w_2) = 8n$ können wir unter Verwendung von (5.2.15) die Summe folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w \in L_n(w_1, w_2)} \left| \frac{z}{w} \right|^3 \\ &= |z|^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w \in L_n(w_1, w_2)} \underbrace{\left| \frac{1}{w} \right|^3}_{\leq (\sqrt{\lambda} n)^{-3}} \leq \left| \frac{z}{\sqrt{\lambda}} \right|^3 \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\#L_n(w_1, w_2)}_{=8n} \frac{1}{n^3} = \left| \frac{2z}{\sqrt{\lambda}} \right|^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Und das konvergiert für alle z . □

²⁷Das sind ja eigentlich auch Kreise im Sinne einer Einheitskugel, aber halt eben eckige.

²⁸Das wäre dann die oft fälschlich als MATHEMATISCHER UHRZEIGERSINN bezeichnete POSITIVE ORIENTIERUNG, die wir von den Kreisintegralen $\oint$ kennen, und die aber auch nur eine *Konvention* ist. Was allerdings nicht heissen soll, daß in der Mathematik die Uhren nicht anders gehen würden.

Beispiel 5.2.15 (Beispiel 5.2.13, Fortsetzung). Bemerkung 5.2.8 und Lemma 5.2.14 legen nahe, es wieder mit einer kanonischen Faktorisierung, diesmal aber mit $k = 2$, zu versuchen, also

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n}\right)^2\right),$$

was wir auch²⁹ als

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \sigma(z, L) = \prod_{j, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w_{jk}}\right) \exp\left(\frac{z}{w_{jk}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w_{jk}}\right)^2\right) \\ &= \prod_{w \in L \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

schreiben können. Die Funktion σ in (5.2.17) bezeichnet man dann auch als WEIERSTRASSSCHE SIGMAFUNKTION des Gitters L . Ihre logarithmische Ableitung

$$\zeta(z, L) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right) \quad (5.2.18)$$

nennt sich dann folgerichtig WEIERSTRASSSCHE ZETA-FUNKTION. Leitet man die Zetafunktion nochmals ab, so erhält man eine Partialbruchzerlegung

$$-\zeta(z, L)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \quad (5.2.19)$$

im Sinne des Satzes von Mittag-Leffler, Satz 4.3.9, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine wichtige Rolle spielt.

5.2.3 Meromorphe Funktionen

Wir können also für ganze Funktionen beliebige Nullstellen vorschreiben, wie aber sieht es mit den Polen aus? Die folgende Umkehrung von Satz 4.3.9 gibt die Antwort: Wir können Lage und Natur des Pols vorschreiben. Die Darstellung dabei folgt [12].

Satz 5.2.16. *Zu jeder Folge³⁰ $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, ohne Häufungspunkt und jede Folge p_n , $n \in \mathbb{N}$, von Polynomen mit $p_n(0) = 0$, gibt es eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die an z_n den Hauptteil p_n hat und sonst analytisch ist.*

Beweis: Wir entwickeln für $a \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $\frac{a^m}{(z-a)^m} = \frac{1}{(z/a-1)^m}$ um die Stelle $z = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z/a-1)^m} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{m+k} (-m) \cdots (-m-k+1) \left(\frac{z}{a}\right)^k \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m \cdots (m+k-1)}{k!} \left(\frac{z}{a}\right)^k, \end{aligned}$$

²⁹Mit zugegebenermaßen beschränktem Erkenntnisgewinn, aber auch hier fließt wieder ein, daß wir das Produkt wegen der absoluten Konvergenz der zugehörigen Reihe beliebig umordnen dürfen.

³⁰Natürlich mit $z_j \neq z_k$, $j \neq k$.

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

was für $|z| < a$ konvergiert. Mit $p_n(z) = \sum p_{nm} z^m$ und $m_n = \deg p_n$ ist dann

$$\begin{aligned} p_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right) &= \sum_{m=0}^{m_n} \frac{p_{nm}}{(z - z_n)^j} = \sum_{m=0}^{m_n} p_{nm} (-z_n)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m \cdots (m+k-1)}{k!} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \underbrace{\frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{m_n} (-1)^m p_{nm} \frac{m \cdots (m+k-1)}{z_n^{m+k}}}_{=: q_{nk}} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{nk} z^k \end{aligned}$$

eine Potenzreihe, die für $|z| \leq \frac{1}{2}|z_n|$ absolut konvergiert. Für $n = 1, 2, 3, \dots$ wählen wir nun k_n so groß, daß

$$\left| p_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right) - \sum_{k=0}^{k_n} q_{nk} z^k \right| \leq 2^{-n}, \quad |z| \leq \frac{1}{2}|z_n|, \quad (5.2.20)$$

und erhalten eine absolut konvergente Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right) - \sum_{k=0}^{k_n} q_{nk} z^k \right) =: \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

die für $|z| \leq \frac{1}{2}|z_1|$ sogar normal konvergiert³¹. Sei nun $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $z_n \notin K$, $n \in \mathbb{N}$, und seien $\varepsilon, R > 0$ so gewählt, daß

$$K \subseteq \mathbb{D}_R(0), \quad |z - z_n| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}, z \in K. \quad (5.2.21)$$

Auf dieser Menge K ist die Reihe gleichmäßig konvergent, denn da $\lim |z_n| = \infty$ gibt es $n_0 > 0$ mit $|z_n| > 2R$ für $n \geq n_0$ und daher ist nach (5.2.20)

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(z)$$

gleichmäßig auf K absolut konvergent; die endliche Summe

$$\sum_{n=1}^{n_0} f_n(z)$$

ist auch wohldefiniert, da K von den Singularitäten wegbeschränkt ist. Also konvergiert die Reihe auf K gegen eine analytische Funktion

$$f(z) = - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} q_{nk} z^k}_{=: g(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right) \quad (5.2.22)$$

mit einer ganzen Funktion g und Hauptteil p_n an z_n . □

Bemerkung 5.2.17. In (5.2.22) findet sich die „explizite“ Form der gewünschten meromorphen Funktion.

Das war ein ziemlich allgemeines Resultat. Wenn die Beträge der Pole hinreichend schnell divergieren und die Pole nur einfach sind, dann gibt es ein Gegenstück zum kanonischen Produkt.

³¹Hier erinnern wir uns an die Konvention, daß die z_n nach aufsteigendem Betrag geordnet sind.

Satz 5.2.18. Ist, in Erweiterung der Voraussetzungen von Satz 5.2.16, $p_n(z) = z$, $n \in \mathbb{N}$, und gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-k} = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-k-1} < \infty, \quad (5.2.23)$$

so kann man f als

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} + \frac{z}{z_n^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{z_n^k} \right) \quad (5.2.24)$$

wählen.

Beweis: Wir schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} + \frac{z}{z_n^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{z_n^k} \\ &= \frac{z_n^k}{(z - z_n) z_n^k} + \frac{(z - z_n) z_n^{k-1}}{(z - z_n) z_n^k} + \frac{(z - z_n) z z_n^{k-2}}{(z - z_n) z_n^k} + \cdots + \frac{(z - z_n) z^{k-1}}{(z - z_n) z_n^k} \\ &= \frac{1}{(z - z_n) z_n^k} \left(z_n^k + \sum_{j=1}^k \left(z^j z_n^{k-j} - z^{j-1} z_n^{k-j+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(z - z_n) z_n^k} \left(z_n^k + \sum_{j=1}^k z^j z_n^{k-j} - \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_n^{k-j} \right) = \frac{1}{(z - z_n) z_n^k} (z_n^k + z^k - z_n^k) \\ &= \frac{z^k}{(z - z_n) z_n^k} \end{aligned}$$

und erhalten wie vorher für $|z| \leq R < \frac{1}{2}|z_n|$, daß

$$|f_n(z)| = \left| \frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right| \leq 2 \frac{|z|^k}{|z_n|^{k+1}},$$

woraus wir unter Verwendung von (5.2.23) wie im Beweis von Satz 5.2.16 auf Konvergenz schließen können. $\square$

Bemerkung 5.2.19. Wenn wir einen Pol an 0 hinzufügen wollen, so müssen wir in der Darstellung (5.2.22) einen Term $p_0(\frac{1}{z})$ bzw. in (5.2.24) den Term $\frac{1}{z}$ ergänzen. Dann gilt

Zwei meromorphe Funktionen f_1, f_2 , die die Bedingungen von Satz 5.2.16 erfüllen, haben die Eigenschaft, daß $f_1 - f_2$ nur noch hebbare Singularitäten hat, also analytisch ist. Damit folgt die nächste Aussage.

Korollar 5.2.20. Seien $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und p_n wie in Satz 5.2.16 und sei

$$f(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} q_{nk} z^k + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right)$$

eine Funktion, die an z_n Hauptteil p_n hat. Die Menge aller Funktionen mit dieser Eigenschaft ergibt sich dann als

$$f(z) + g(z), \quad g \text{ ganze Funktion.}$$

5 Konstruktionsprinzipien und spezielle Funktionen

5.2.4 Fazit

Korollar 5.2.21. Seien $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Folge ohne Häufungspunkt und $\mu_n \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion f mit

$$\operatorname{ord}(f; z_n) = \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.2.25)$$

und $\operatorname{ord}(f; z) = 0$ sonst. Solange sie sich nicht häufen kann man also Nullstellen und Pole beliebig vorschreiben.

Der Riemannsche Abbildungssatz

6

*Den mir kennen keine Schuhlerer nichd braugen, die wo sich zu fiel einbil-
den und fieleicht gar das Mäu aufreisen gengen die Obrikeid.*

(L. Thoma, Briefwechsel eines bayrischen Landtagsabgeordneten)

Zum Abschluss der Vorlesung kehren wir noch einmal zurück zu den Elementargebieten, die wir bisher in 2.2.2 ja nur sehr indirekt definiert haben, und die wir uns nun etwas genauer ansehen wollen. Es wird sich zeigen, daß es „eigentlich“ nur zwei Typen von Elementargebieten gibt, nämlich $\mathbb{C}$ und den Einheitskreis $\mathbb{D}^\circ = \mathbb{D}_1^\circ(0)$.

6.1 Definitionen und Formulierung

Das fundamentale Konzept hier ist wieder die KONFORME ABBILDUNG, die wir nochmals einführen wollen.

Definition 6.1.1. Eine Abbildung $f : D \rightarrow D'$, $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt KONFORM, wenn sie bijektiv und analytisch ist.

Proposition 6.1.2. Ist f bijektiv und analytisch, dann ist f^{-1} analytisch fortsetzbar.

Beweis: Als bijektive Abbildung in eine offene, also nicht einpunktige, Menge ist f nicht konstant und nach Satz 3.3.9 ist $f(U) \subset D'$ offen für jedes offene $U \subset D$. Da $f(U)$ das Urbild von U bezüglich f^{-1} ist, sind alle Urbilder offener Mengen von f^{-1} offen, also ist f stetig¹. Damit ist dann aber f^{-1} auch schon analytisch in der offenen Menge $D' \setminus f(Z(f'))$ und da $f' \neq 0$ analytisch ist, ist nach Proposition 3.3.4 die Menge $Z(f')$ diskret, und damit auch $Z := f(Z(f'))$. Da f^{-1} stetig ist, ist f^{-1} beschränkt auf punktierten Umgebungen von Z und der Riemannsche Hebbarkeitssatz, Satz 4.1.3, sagt uns, daß f^{-1} auf Z analytisch fortsetzbar ist. $\square$

Bemerkung 6.1.3. Wir können also bei konformen Abbildungen immer verwenden, daß sowohl f als auch f^{-1} analytisch ist, und damit ist die Definition von Konformität komplett *symmetrisch* in f und f^{-1} beziehungsweise in D und D' .

Definition 6.1.4. Zwei Gebiete $D, D' \subset \mathbb{C}$ heißen KONFORM ÄQUIVALENT, wenn es eine konforme Abbildung $f : D \rightarrow D'$ gibt².

Im Sinne dieser Terminologie können wir Proposition 2.2.18 auch etwas anders formulieren: Jedes Gebiet, das zu einem Elementargebiet konform äquivalent ist, ist wieder ein Elementargebiet.

¹Topologische Standarddefinition von Stetigkeit.

²Diese Formulierung beinhaltet dann auch $f(D) = D'$.

6 Der Riemannsche Abbildungssatz

Bemerkung 6.1.5. Es gibt mindestens zwei nicht konform äquivalente Elementargebiete, und zwar $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}^\circ$, denn jede ganze Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ erfüllt $|f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$, und ist daher nach dem Satz von Liouville konstant, also eben leider nicht konform. Es gibt aber sehr wohl stetige Bijektionen zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}^\circ$, und zwar

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}^\circ, \quad f(z) = \frac{z}{1+|z|}, \quad f^{-1}(z) = \frac{z}{1-|z|}.$$

In der Tat ist

$$f^{-1}\left(\frac{z}{1+|z|}\right) = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{1 - \left|\frac{z}{1+|z|}\right|} = \frac{z}{1+|z|} \frac{1+|z|}{1+|z|-|z|} = z.$$

Bemerkung 6.1.6. Man kann die konformen Abbildungen von D nach D auch algebraisch betrachten: Mit der Verknüpfung $f \circ g$ bilden sie eine GRUPPE, die AUTOMORPHISMENGRUPPE $\text{Aut}(D)$. Sind nun $f, g: D \rightarrow D'$ zwei konforme Abbildungen, dann sind $f^{-1} \circ g$ und $g^{-1} \circ f$ Automorphismen auf D , zwei konforme Abbildungen unterscheiden sich also nur um einen solchen Automorphismus.

Satz 6.1.7 (RIEMANNSCHE ABILDUNGSSATZ). *Jedes Elementargebiet $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$ ist konform äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^\circ$.*

6.2 Beweis

Wir zerlegen den Beweis von Satz 6.1.7 in mehrere Schritte, die wir jeweils separat formulieren werden. Es beginnt recht unschuldig und unscheinbar.

6.2.1 Einfache Transformationen

Lemma 6.2.1. *Zu jedem Elementargebiet $D \subset \mathbb{C}$ gibt es ein konform äquivalentes Gebiet $D_1 \subset \mathbb{C}$, so daß $\mathbb{C} \setminus D_1$ eine Kreisscheibe $\mathbb{D}_r(w)$ enthält.*

Beweis: Wegen $D \neq \mathbb{C}$ gibt es ein $v \in \mathbb{C} \setminus D \neq \emptyset$. Die Funktion $z - v$ ist analytisch in D und verschwindet dort nicht, also gibt es $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g^2(z) = z - v$, $z \in D$. Da für $z, z' \in D$

$$g(z) = g(z') \quad \Rightarrow \quad g^2(z) = g^2(z') \quad \Rightarrow \quad z = z' \quad (6.2.1)$$

ist g injektiv und damit eine konforme Abbildung³ $g: D \rightarrow D_1 := g(D)$, so daß D_1 konform äquivalent zu D ist. Das Argument aus (6.2.1) zeigt ausserdem auch, daß

$$g(z) = -g(z') \quad \Rightarrow \quad z = z', \quad z, z' \in D. \quad (6.2.2)$$

Da D_1 offen ist, ist $D_1 \neq \{0\}$ und enthält eine Kreisscheibe $\mathbb{D}_r(-w)$, $0 \neq -w = g(z)$ mit $0 \notin \mathbb{D}_r(-w)$. Wegen (6.2.2) muss dann $w \notin D_1$ gelten und somit ist $-\mathbb{D}_r(-w) = \mathbb{D}_r(w)$ die gewünschte Kugel. $\square$

Übung 6.2.1 Zeigen Sie: $\{-z: z \in \mathbb{D}_r(w)\} = \mathbb{D}_r(-w)$. $\diamond$

Lemma 6.2.2. *Zu jedem Elementargebiet $D \subset \mathbb{C}$ gibt es ein konform äquivalentes Gebiet $D_2 \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in D_2 \subset \mathbb{D}^\circ$.*

³Surjektivität ist trivial.

Beweis: Wir beginnen mit dem konform äquivalenten Gebiet D_1 und der Kreisscheibe $\mathbb{D}_r(w)$ aus Lemma 6.2.1 und verwenden die Möbiustransformation

$$g: z \mapsto \frac{1}{z-w},$$

die auf dem $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_r(w) \supseteq D_1$ analytisch und bijektiv, also konform ist. Da $|z-w| > r$ für $z \in D_1$ gilt außerdem

$$|g(z)| = \frac{1}{|z-w|} < \frac{1}{r}, \quad z \in D_1,$$

so daß $g(D_1)$ beschränkt ist und indem man g passend durch $a + bg$, $a, b \in \mathbb{C}$, ersetzt, kann man erreichen, daß $0 \in D_2 := g(D_1) \subseteq \mathbb{D}^\circ$. Schaltet man die beiden konformen Abbildungen hintereinander, was wieder konform ist, so folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 6.2.3. Diese beiden ersten Schritte aus den Lemmata 6.2.1 und 6.2.2, die zeigen, daß man ein Elementargebiet $D \neq \mathbb{C}$ immer konform äquivalent in $\mathbb{D}^\circ$ einbetten kann, verwenden die Annahme „Elementargebiet“, um die Wurfelfunktion g mit $g^2 = f$ zu bestimmen, die uns Satz 2.2.14 liefert, wofür er aber ein Elementargebiet als Voraussetzung benötigt.

6.2.2 Annäherung an die Kreisscheibe

Lemma 6.2.4. Zu jedem Elementargebiet D mit $0 \in D \subset \mathbb{D}^\circ$ gibt es eine konforme Abbildung $f: D \rightarrow D' := f(D) \subseteq \mathbb{D}^\circ$ mit den Eigenschaften

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad |f'(0)| > 1. \quad (6.2.3)$$

Beweis: Wegen $D \subset \mathbb{D}^\circ$ gibt es ein $a \in \mathbb{D}^\circ \setminus D$ mit dessen Hilfe wir die konforme Möbiustransformation⁴

$$h(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D},$$

definieren können. Da $0 \notin h(D)$ gibt es wieder eine Wurzel $g: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g^2(z) = h(z)$, die D konform und injektiv⁵ auf eine Teilmenge von $\mathbb{D}^\circ$ abbildet. Die Funktion

$$f(z) := \frac{g(z) - g(0)}{\overline{g(0)}g(z) - 1}, \quad z \in D,$$

ist ebenfalls eine Möbiustransformation, also konform, und erfüllt $f(0) = 0$ sowie $|f(z)| < 1$ nach Proposition 3.3.18. Bleibt noch die Ableitung, die sich als

$$f'(z) = \frac{\left(\overline{g(0)}g(z) - 1\right)g'(z) - (g(z) - g(0))\overline{g(0)}g'(z)}{\left(\overline{g(0)}g(z) - 1\right)^2} = \frac{(|g(0)|^2 - 1)g'(z)}{\left(\overline{g(0)}g(z) - 1\right)^2}$$

bestimmt und

$$f'(0) = \frac{(|g(0)|^2 - 1)g'(0)}{\left(\overline{g(0)}g(0) - 1\right)^2} = \frac{g'(0)}{|g(0)|^2 - 1} \quad (6.2.4)$$

liefert. Leiten wir die Definitionsgleichung

$$g^2(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \quad \Rightarrow \quad g^2(0) = a$$

⁴Siehe Beispiel 2.2.22

⁵Dasselbe Argument wie in Lemma 6.2.1.

6 Der Riemannsche Abbildungssatz

nach z ab, so ergibt sich

$$2g(z)g'(z) = \frac{(\bar{a}z - 1) - (z - a)\bar{a}}{(\bar{a}z - 1)^2} = \frac{|a|^2 - 1}{(\bar{a}z - 1)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2} \frac{|a|^2 - 1}{g(0)}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \frac{1}{2} \frac{|a|^2 - 1}{\sqrt{|a|}} \frac{1}{||a| - 1|} = \left| \frac{(|a| + 1)(|a| - 1)}{2\sqrt{|a|}(|a| - 1)} \right| = \frac{|a| + 1}{2\sqrt{|a|}} \\ &= \frac{(|a| - 1)^2 + 2\sqrt{|a|}}{2\sqrt{|a|}} = 1 + \underbrace{\frac{(|a| - 1)^2}{2\sqrt{|a|}}}_{>0} > 1 \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Dieses Lemma hat eine recht faszinierende Konsequenz über das Verhalten der konformen Abbildungen $D \rightarrow \mathbb{D}^\circ$.

Definition 6.2.5. Für ein Elementargebiet D mit $0 \in D \subset \mathbb{D}^\circ$ bezeichne $\mathcal{K}(D)$ die Menge aller injektiven konformen Abbildungen⁶ von D nach $\mathbb{D}^\circ$, die 0 invariant lassen:

$$\mathcal{K}(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{D}^\circ : f \text{ konform, } f(0) = 0\}.$$

Proposition 6.2.6. Gibt es ein $f \in \mathcal{K}(D)$ mit

$$|f'(0)| = \max\{|g'(0)| : g \in \mathcal{K}(D)\},$$

dann ist f surjektiv auf $\mathbb{D}^\circ$.

Beweis: Ist eine konforme Abbildung $g : D \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ nicht surjektiv, dann können wir nach Lemma 6.2.4 ein konformes $f : g(D) \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ finden, so daß

$$\left| (f \circ g)'(0) \right| = |f'(g(0))g'(0)| = \underbrace{|f'(0)|}_{>1} |g'(0)| > |g'(0)|,$$

also hat g nicht die Maximalitätseigenschaft. Die Proposition ist dann die äquivalente Umkehrung dieser Beobachtung. □

Das ist die wesentliche Idee im Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes: Gibt es so ein maximales f wie in Proposition 6.2.6 betrachtet? Wenn ja, dann liefert es die gewünscht Äquivalenz: Mit Hilfe von Lemma 6.2.2 bestimmen wir zuerst eine konform äquivalente *Teilmenge* der Kreisscheibe und mit Proposition 6.2.6 erreichen wir die konforme Äquivalenz zur vollen Kreisscheibe — genau das ist ja der Nutzen der Surjektivität.

6.2.3 Der Satz von Montel

Um uns dem gerade erwähnten Maximum⁷ zu nähern, definieren wir

$$M := \sup \{|f'(0)| : f \in \mathcal{K}(D)\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (6.2.5)$$

⁶Also Abbildungen mit $f(D) \subseteq \mathbb{D}^\circ$, wobei nicht unbedingt Gleichheit eintreten muss.

⁷Von dem wir noch nicht wissen, daß es existiert!

und betrachten eine Folge f_n mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = M, \quad (6.2.6)$$

wobei der Fall $M = \infty$ natürlich Divergenz der Folge der Beträge bedeutet.

Die nächste Aussage ist wieder technischer Natur, liefert aber eine wichtige Eigenschaft von analytischen Funktionen auf Kompakta.

Lemma 6.2.7. *Zu jeder offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$, jedem Kompaktum $K \subset D$, jeder Konstanten $C > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein δ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede analytische Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f(D)| \leq C$ gilt*

$$|z - z'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z')| < \varepsilon. \quad (6.2.7)$$

Beweis: Wir nehmen zuerst an, daß $K = \mathbb{D}_r(z_0)$ für ein $z_0 \in D$, wobei r so klein ist, daß $\mathbb{D}_{2r}(z_0) \subset D$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, 2r)} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} \right) d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{(z_0, 2r)} \frac{\zeta - z' - \zeta + z}{(\zeta - z)(\zeta - z')} f(\zeta) d\zeta \right| = \frac{|z - z'|}{2\pi} \left| \oint_{(z_0, 2r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{|z - z'|}{2\pi} \frac{4}{\pi} \frac{C}{r^2} = \frac{2C}{r} |z - z'|, \quad z, z' \in K, \end{aligned}$$

die Funktion f ist auf K also gleichmäßig LIPSCHITZ-STETIG und die Konstante hängt nur von der Konstante C ab, durch die f auf D beschränkt ist. Und offensichtlich ist

$$\delta < \min\left(r, \frac{r}{2C}\varepsilon\right)$$

völlig ausreichend⁸. Ist $K \subset D$ beliebig, so gibt es, weil D offen ist, zu jedem $z \in K$ ein $r(z)$ mit der Eigenschaft $\mathbb{D}_{2r(z)}(z) \subset D$. Da

$$K \subset \bigcup_{z \in K} \mathbb{D}_{r(z)}^\circ(z)$$

eine offene Überdeckung eines Kompaktums ist, reichen endlich viele dieser Kreisscheiben,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^N \mathbb{D}_{r(z_k)}^\circ(z_k)$$

zu jeder dieser Kreisscheiben gibt es ein $\delta_k > 0$ und das kleinste dieser endlich vielen δ_k ist immer noch positiv und erfüllt (6.2.7). $\square$

Bemerkung 6.2.8. Entscheidend ist also: Dank des Cauchyschen Integralsatzes hängt die gleichmäßige Lipschitzstetigkeit nur von der Schranke für die Funktion ab.

Lemma 6.2.9. *Sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen eine Folge von gleichmäßig beschränkten analytischen Funktionen:*

$$|f_n(z)| \leq C, \quad z \in D, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.2.8)$$

Konvergiert die Folge f_n punktweise auf einer dichten Teilmenge D' von D , so konvergiert sie lokal gleichmäßig.

⁸Die erste Bedingung sorgt nur dafür, daß die Punkte auch in K sind und ansonsten könnte man immer $C \geq \frac{1}{2}$ und $\varepsilon < 1$ wählen, kleine Konstanten und großes ε sind uninteressant.

6 Der Riemannsche Abbildungssatz

Beweis: Ist $D = \mathbb{C}$, dann müssen alle f_n konstant sein und die Aussage ist klar. Sei nun also $K \subset D \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\varepsilon > 0$ und δ dazu wie in Lemma 6.2.7. Da D' dicht ist, ist

$$K \subset \bigcup_{z \in K \cap D'} \mathbb{D}_\delta^\circ(z)$$

eine offene Überdeckung, von der eine endliche Teilüberdeckung ausreichend ist:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N \mathbb{D}_\delta^\circ(z_j), \quad z_j \in D' \cap K.$$

Zu jedem $z \in K$ gibt es also ein z_j mit $|z - z_j| < \delta$ und für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq \underbrace{|f_m(z) - f_m(z_j)|}_{< \varepsilon} + |f_m(z_j) - f_n(z_j)| + \underbrace{|f_n(z_j) - f_n(z)|}_{\varepsilon} \\ &\leq 2\varepsilon + \max_{j=1, \dots, N} |f_m(z_j) - f_n(z_j)|, \end{aligned}$$

was wegen der punktweisen Konvergenz auf D' für $m, n \geq n_0$ ebenfalls $< \varepsilon$ wird. Damit ist die Folge der f_n eine Cauchyfolge auf K und konvergiert damit gleichmäßig auf K . Da K beliebig war, konvergieren die f_n also in der Tat lokal gleichmäßig in D . $\square$

Satz 6.2.10 (SATZ VON MONTEL). *Ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $\emptyset \neq D$ offen, eine gleichmäßig beschränkte Folge von analytischen Funktionen, also*

$$|f_n(z)| \leq C, \quad z \in D, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.2.9)$$

Dann gibt es eine Teilfolge $f_{k(n)}$, die lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Sei $D \supset D' = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von D , beispielsweise $D' = D \cap \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Nach dem SATZ VON BOLZANO–WEIERSTRASS⁹ gibt es eine Teilfolge $f_{1,k(n)}$, die an z_1 konvergiert, davon eine Teilfolge $f_{2,k(n)}$, die an z_1 und z_2 konvergiert und somit eine Folge von Teilfolgen $f_{j,k(n)}$, die an $z_1, \dots, z_j$ konvergiert. Die DIAGONALFOLGE

$$f_{k(n)} := f_{n,k(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.2.10)$$

konvergiert dann punktweise auf ganz D' und die Beschränktheit sorgt zusammen mit Lemma 6.2.9 für die lokal gleichmäßige Konvergenz. $\square$

6.2.4 Finale

Da die Funktionen f_n , die wir in (6.2.6) definiert haben, ja allesamt analytische Funktionen $D \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ sind, sind sie beschränkt und es gibt nach dem Satz von Montel, Satz 6.2.10, eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge mit Grenzfunktion f . Diese ist nach Satz 3.1.5 ebenfalls analytisch, so daß $M = |f'(0)| < \infty$ ist. Außerdem gilt natürlich $f(0) = 0$.

Beweis von Satz 6.1.7: Wir bilden zuerst D mittels Lemma 6.2.1 und Lemma 6.2.2 mit einer konformen Abbildung g auf eine Teilmenge von $D_2 \subset \mathbb{D}^\circ$ ab. Danach konstruieren wir das maximale f mittels (6.2.6) und dem Satz von Montel zu diesem D_2 . Dieses f ist analytisch, injektiv wegen Korollar 4.4.16, surjektiv auf $\mathbb{D}^\circ$ und wegen Satz 3.3.9 ist $f(D_2)$ offen. Damit ist f eine analytische Bijektion zwischen D_2 und $\mathbb{D}^\circ$ eine konforme Abbildung und $f \circ g$ stellt die konforme Äquivalenz zwischen der Ausgangsmenge D und $\mathbb{D}^\circ$ her. $\square$

Dieser doch etwas aufwendigere Satz verlangt natürlich noch ein paar Bemerkungen.

⁹Kennt man aus der Analysis, er basiert auf Intervallschachtelungen.

Bemerkung 6.2.11 (Riemannscher Abbildungssatz).

1. Die konforme Funktion, die die Äquivalenz herstellt, ist *nicht* eindeutig. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{D}^\circ$ eine derartige Funktion und g ein AUTOMORPHISMUS von $\mathbb{D}^\circ$, also eine konforme Abbildung $\mathbb{D}^\circ \rightarrow \mathbb{D}^\circ$, dann ist $g \circ f$ ebenfalls eine konforme Abbildung von D nach $\mathbb{D}^\circ$.
2. Auch wenn der Beweis eine konforme Funktion konstruiert, ist er alles andere als KONSTRUKTIV, denn die Existenz des Grenzwerts basiert auf einem reinen Existenzbeweis. Praktische, anwendbare oder gar algorithmische Methoden zur Berechnung dieser Funktion scheint es nicht zu geben.
3. Eigentlich hat der Beweis gar nicht verwendet, daß wir es mit Elementargebieten zu tun haben, meistens reichte es, daß die Mengen offen sind.
4. Ein großer Teil der Beweise sind eigentlich eher topologischer Natur. Konzepte der „richtigen“ Funktionentheorie haben wir eigentlich nur bei den Möbiustransformationen und natürlich in Proposition 6.2.6 verwendet.

Nun kam es an den Tag, was für ein Geschöpf der Mensch ist: er ist weise, klug und vernünftig in allen Dingen, die den anderen und nicht ihn selbst angehen.

(N. W. Gogol, *Die toten Seelen*)

Bisher ging es in dieser Vorlesung um den „Standardstoff“ zur Funktionentheorie, wie er sich eigentlich in allen einschlägigen Büchern finden sollte und wie er auch im Staatsexamen¹ abgefragt wird. Zum Abschluss, als ergänzendes Material, folgt jetzt noch ein bisschen Mathematik, bei der Funktionentheorie eine wichtige Rolle spielt.

7.1 Geometrie der Möbiustransformationen

Wir haben die Möbiustransformation als gebrochen rationale Transformation ja schon in Beispiel 2.2.22 kennengelernt und sind ihnen dann auch nochmal im Beweis von Lemma 6.2.4 begegnet. Das war natürlich kein Zufall, daß sie dort aufgetaucht sind, und wir werden uns nun ein paar Eigenschaften ansehen, die das auch nochmal rechtfertigen und begründen. Das sind Eigenschaften geometrischer Natur, das Material stammt im wesentlichen aus [12].

Dazu beginnen wir² mit der Definition.

Definition 7.1.1. Unter eine MÖBIUSTRANSFORMATION verstehen wir eine gebrochen lineare rationale Funktion der Form

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d, \in \mathbb{C}, \quad 0 \neq ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (7.1.1)$$

Manchmal schreiben wir die Möbiustransformation auch in Operatorenschreibweise als $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $Tz = w(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Die Intuition bei der Schreibweise aus (7.1.1) ist, daß man es mit zwei Kopien von $\mathbb{C}$ zu tun hat, in der man einmal Punkte der Form $z = x + iy$ und einmal der Form $w = u + iv$ hat. Manchmal spricht man sogar von der z -Ebene und der w -Ebene, die durch eine Möbiustransformation miteinander verbunden sind.

Bemerkung 7.1.2 (Möbiustransformationen).

1. Jede Möbiustransformation ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ und eine ganze Funktion genau dann, wenn $c = 0$. In diesem Fall müssen wegen (7.1.1) dann aber $ad \neq 0$ sein, wobei wir $d = 1$ annehmen können, so daß dann $w(z)$ ein Polynom vom Grad exakt 1 ist.

¹Bayern, Stand Juni 2021, so etwas kann sich ja im Laufe der Zeit ändern, auch wenn man das vom bayerischen Staatsexamen nicht wirklich erwarten sollte.

²Spät, aber nicht zu spät.

7 Noch ein bisschen Mathematik

- Die Parameter a, b, c, d sind immer nur bis auf einen von Null verschiedenen gemeinsamen Faktor definiert, das heißt, $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d$, $\lambda \neq 0$, definieren exakt dieselbe Möbiustransformation.

7.1.1 Gruppeneigenschaften

Möbiustransformationen bilden die komplexe Ebene eineindeutig auf sich selbst ab.

Proposition 7.1.3. *Die Umkehrabbildung der Möbiustransformation*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

bestimmt sich als

$$z = z(w) = \frac{a'w + b'}{c'w + d'} = \frac{-dw + b}{cw - a} \quad (7.1.2)$$

und ist ebenfalls eine Möbiustransformation.

Beweis: Für $cz + d \neq 0$ erhalten wir

$$-dw + b = -d \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) + b = \frac{-adz - bd + cbz + bd}{cz + d} = \frac{(bc - ad)z}{cz + d}$$

und

$$cw - a = c \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) - a = \frac{caz + bc - caz - ad}{cz + d} = \frac{bc - ad}{cz + d},$$

was in (7.1.2) eingesetzt gerade

$$z(w(z)) = \frac{(bc - ad)z}{cz + d} \cdot \frac{cz + d}{bc - ad} = z$$

ergibt und sich stetig für alle $z \in \mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Wegen

$$a'd' - b'c' = (-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$$

ist $z(w)$ wirklich eine Möbiustransformation. □

Bemerkung 7.1.4. Der Beweis von Proposition 7.1.3 funktioniert nur deswegen, weil $ad - bc \neq 0$ ist und man daher beim Einsetzen in (7.1.2) kürzen kann. In Beispiel 2.2.22 war diese Eigenschaft notwendig, damit $w'(z) \neq 0$ ist. Das passt also alles gut zusammen.

Korollar 7.1.5. *Auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ist jede Möbiustransformation eine konforme Abbildung, deren Umkehrabbildung auf $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ definiert ist.*

Korollar 7.1.6. *Die Möbiustransformationen bilden bezüglich der Komposition eine Gruppe.*

Als nächstes sehen wir uns besonders einfache Typen von Möbiustransformationen an, die eine besonders einfache geometrische Interpretation haben.

Definition 7.1.7. Spezielle Möbiustransformationen sind

- die TRANSLATION $w(z) = z + b$,
- die DILATATION $w(z) = az$

7.1 Geometrie der Möbiustransformationen

3. die INVERSION $w(z) = \frac{1}{z}$.

Bemerkung 7.1.8. Man könnte die Dilatationen mit $a = |a|e^{i\theta}$ noch aufspalten in eine Multiplikation mit $|a|$, also eine echte Streckung und eine mit $e^{i\theta}$, also eine Rotation.

Translation und Dilatation als Operationen in der komplexen Ebene kennen wir bereits, letztere auch als Drehstreckung. Die Inversion besteht wegen

$$z = |z|e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta} = \frac{\bar{z}}{|z|}$$

aus einer Spiegelung an der reellen Achse und einer am Einheitskreis; letztere steht für den Reziprokwert des Absolutbetrags. Diese drei Operationen sind dann auch schon ausreichend, um *jede* Möbiustransformation zu generieren.

Proposition 7.1.9. *Jede Möbiustransformation lässt sich als Komposition von Translationen, Dilatationen und Inversionen schreiben.*

Beweis: Wie unterscheiden zwei Fälle, nämlich $c = 0$ und $c \neq 0$. Im ersten Fall ist $d \neq 0$ und

$$w = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = w_1 + \frac{b}{d}$$

die Hintereinanderausführung³ der Dilatation $z \mapsto w_1 = \frac{a}{d}z$ und der Translation $w_1 \mapsto w = w_1 + \frac{b}{d}$.

Für $c \neq 0$ bemerken wir, daß

$$\frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad + acz + ad}{c(cz + d)} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d},$$

so daß wir hier vermittels

$$w_1 = z + \frac{d}{c}, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad w_3 = \frac{bc - ad}{c^2} w_2, \quad w = w_4 = w_3 + \frac{a}{c}$$

eine Translation, eine Inversion, eine Dilatation und nochmals eine Translation hintereinanderschalten. $\square$

Die Gruppe der Möbiustransformationen, siehe Korollar 7.1.6, enthält auch einige interessante Untergruppen⁴ mit geometrischer Bedeutung.

Beispiel 7.1.10. Die Möbiustransformationen der Form

$$w = ax + b, \quad |a| = 1, \quad \text{also } a = e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{T}, \quad (7.1.3)$$

sind STARRE BEWEGUNGEN, englisch RIGID MOTIONS in der komplexen Ebene, bei der ein Objekt bewegt und gedreht wird. Damit kann man, beispielsweise in der Computergraphik, ebene Transformationen, die sich nur aus Rotationen und Translationen zusammensetzen, effizient durch komplexe Multiplikation und Addition implementieren. Das Gegenstück in

³Wir schreiben es einmal ganz ausführlich in diesem einfachsten Fall.

⁴Zur Erinnerung: Eine UNTERGRUPPE einer Gruppe ist eine Teilmenge, die abgeschlossen unter der Gruppenoperation ist und mit jedem Element auch dessen Inverses enthält. Damit muss das neutrale Element zur Untergruppe gehören, es sei denn die Menge ist die leere Menge — wo nichts drin ist, da braucht man auch kein Inverses davon.

7 Noch ein bisschen Mathematik

drei Dimensionen sind dann auch QUATERNIONEN, sozusagen die große Schwester der komplexen Zahlen, siehe [1]. Daß wir es wirklich mit einer Untergruppe zu tun haben, ergibt sich aus der Umkehrformel (7.1.2), die uns wegen $d = 1$

$$z = \frac{-w + b}{-a} = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}, \quad \left| \frac{1}{a} \right| = |a|^{-1} = 1,$$

liefert.

Beispiel 7.1.11. Eine zweite wichtige Untergruppe der Möbiustransformationen wird durch das Blaschkeprodukt

$$w_a(z) := \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1, \quad (7.1.4)$$

erzeugt, das wir aus Proposition 3.3.18 kennen, und von dem wir wissen, daß es die analytischen Funktionen beschreibt, die den Einheitskreis invariant lassen. Die Inverse von w_a ist

$$z = \frac{w - a}{\bar{a}w - 1},$$

es handelt sich also sogar um eine PROJEKTION, $T^2 = I$. Achtung: Die Identität ist kein Blaschkeprodukt der Form (7.1.4), sondern die Gruppe besteht aus allen Möbiustransformationen der Form

$$w_{a,b} = b \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}, \quad |a| < 1 = |b|,$$

siehe auch Korollar 3.3.19.

7.1.2 Kreise und Geraden

Da in einem Möbiusprodukt nicht gleichzeitig a und c verschwinden können, weil dann ja auch $ad - bc = 0$ wäre, könnte man einen von den beiden Faktoren herausdividieren und hat⁵ im wesentlichen drei Parameter für die Möbiustransformation, die man frei wählen kann. Die einfachste Vorgabe wäre per INTERPOLATION:

Zu vorgegebenen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ finde man eine Möbiustransformation, so daß $w(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$, ist.

Und ja, das geht, und zwar sogar sehr gut.

Satz 7.1.12. Zu jeder Wahl $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ mit⁶

$$(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1) \neq 0 \quad (7.1.5)$$

gibt es genau eine Möbiustransformation $w = \frac{az+b}{cz+d}$ mit der Eigenschaft

$$w(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7.1.6)$$

Beweis: Für die Existenz stellen wir fest, daß

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

⁵Um den Preis einer Fallunterscheidung

⁶Das heisst nur, daß alle z_j und alle w_j verschieden sein müssen, eine Standardvoraussetzung bei der Interpolation.

7.1 Geometrie der Möbiustransformationen

eine Beziehung zwischen w und z herstellt, die für die drei Paare z_j, w_j erfüllt ist⁷ Das ist äquivalent zu

$$(w - w_1)(z - z_2)(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) = (w - w_2)(z - z_1)(w_3 - w_1)(z_3 - z_2),$$

also

$$w = \frac{w_1(z - z_2)(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) - w_2(z - z_1)(w_3 - w_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) - (z - z_1)(w_3 - w_1)(z_3 - z_2)},$$

und somit zu

$$\begin{aligned} a &= w_1(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) - w_2(w_3 - w_1)(z_3 - z_2) \\ b &= w_2 z_1(w_3 - w_1)(z_3 - z_2) - w_1 z_2(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) \\ c &= (w_3 - w_2)(z_3 - z_1) - (w_3 - w_1)(z_3 - z_2) \\ d &= z_1(w_3 - w_1)(z_3 - z_2) - z_2(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

führt. Damit ist⁸

$$ad - bc$$

$$\begin{aligned} &= w_1 z_1(w_3 - w_2)(z_3 - z_1)(w_3 - w_1)(z_3 - z_2) + w_2 z_2(w_3 - w_1)(z_3 - z_2)(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) \\ &\quad - w_2 z_1(w_3 - w_1)(z_3 - z_2)(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) - w_1 z_2(w_3 - w_2)(z_3 - z_1)(w_3 - w_1)(z_3 - z_2) \\ &= (w_1 z_1 - w_2 z_1 - w_1 z_2 + w_2 z_2)(w_3 - w_1)(z_3 - z_2)(w_3 - w_2)(z_3 - z_1) \\ &= \pm(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1) \neq 0, \end{aligned}$$

wir haben es also auch wirklich mit einer Möbiustransformation zu tun, und zwar aufgrund der Voraussetzung (7.1.5). Eine Lösung haben wir also gefunden, und das sogar explizit.

Als nächstes schreiben wir (7.1.6) für $j = 1, 2, 3$ als

$$\frac{az_j + b}{cz_j + d} = w_j \quad \Leftrightarrow \quad az_j + b - cz_j w_j - d w_j = 0$$

und fassen das als homogenes lineares Gleichungssystem in a, b, c, d auf:

$$\begin{pmatrix} z_1 & 1 & -z_1 w_1 & -w_1 \\ z_2 & 1 & -z_2 w_2 & -w_2 \\ z_3 & 1 & -z_3 w_3 & -w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0. \quad (7.1.8)$$

Diese Matrix hat Rang 3. Um das zu sehen, multiplizieren wir die erste und zweite Spalte jeweils mit w_1 und addieren sie zur dritten bzw. vierten und erhalten die äquivalente Matrix⁹ gleichen Rangs

$$\begin{pmatrix} z_1 & 1 & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & z_2(w_1 - w_2) & w_1 - w_2 \\ z_3 & 1 & z_3(w_1 - w_3) & w_1 - w_3 \end{pmatrix}$$

deren rechte 3x3-Teilmatrix die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & z_2(w_1 - w_2) & w_1 - w_2 \\ 1 & z_3(w_1 - w_3) & w_1 - w_3 \end{pmatrix} = (w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(z_2 - z_3) \neq 0$$

⁷Für z_2, w_2 nehmen wir natürlich den Reziprokwert beider Seiten.

⁸Nach Wegfall offensichtlich identischer Terme

⁹Das ist wie Gauss-Elimination, die könnte man auch machen.

7 Noch ein bisschen Mathematik

hat und damit invertierbar ist, so daß das Gleichungssystem (7.1.8) bis auf Normalisierung genau eine nichttriviale, also von Null verschiedene Lösung hat. Das beweist die Eindeutigkeit. $\square$

Kreise und Geraden in der Ebene können wir über die impliziten Funktionen

$$(c-d)(x^2+y^2)+ax+by=d, \quad a^2+b^2>4d(d-c), \quad (7.1.9)$$

parametrisieren. Für $c=d$ und $(a,b) \neq 0$ ist das offensichtlich eine Gerade¹⁰, ansonsten ein Kreis, und jeder Kreis kann auch in dieser Form geschrieben werden. Dazu setzen wir

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2,$$

was man als

$$(x^2+y^2) + (-2x_0)x + (-2y_0)y = r^2 - (x_0^2+y_0^2)$$

mit

$$a = -2x_0, \quad b = -2y_0, \quad c = 1+d, \quad d = r^2 - (x_0^2+y_0^2)$$

schreiben kann. Dann ist wegen $r > 0$

$$a^2+b^2 = 4(x_0^2+y_0^2) > 4(x_0^2+y_0^2-r^2) = 4d \underbrace{(d-c)}_{=-1},$$

was die Nebenbedingung in (7.1.9) erklärt.

Definition 7.1.13. Mit $\mathcal{L}$ bezeichnen wir die Menge aller Kreise und Gerade in $\mathbb{C}$, also die Menge aller Punktmenge der Form

$$\mathcal{L} \ni L = \{z = x + iy : (c-d)(x^2+y^2) + ax + by = d, a^2+b^2 > 4d(d-c)\}. \quad (7.1.10)$$

Satz 7.1.14 (Möbiustransformationen, Kreise und Geraden). *Jede Möbiustransformation bildet $\mathcal{L}$ auf sich selbst ab: $T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$.*

Beweis: Wir verifizieren die Behauptung nur für die elementaren Möbiustransformationen aus Definition 7.1.7, wobei Translationen und Dilatationen klar sind. Bleibt also nur die Inversion. Dazu nehmen wir an, daß $z = x + iy$ die Gleichung (7.1.9) mit passenden Parametern erfüllt und setzen $w = u + iv = z^{-1}$, d.h. $z = w^{-1} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}$. Damit ist $x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2+v^2}$

$$0 = (c-d) \frac{1}{u^2+v^2} + a \frac{u}{u^2+v^2} - b \frac{v}{u^2+v^2} - d = \frac{1}{u^2+v^2} ((c-d) + au - bv - d(u^2+v^2)),$$

also

$$d(u^2+v^2) - au + bv = d - c$$

und

$$(-a)^2 + b^2 = a^2 + b^2 > 4d(d-c) = 4(d-c)(d-c-d)$$

zeigt, daß auch die Nebenbedingung eingehalten wird. $\square$

Übung 7.1.1 Zeigen Sie, daß Translationen und Dilatationen Kreise und Geraden wieder auf Kreise und Geraden abbilden, indem Sie die Bilder explizit angeben. $\diamond$

Da jedes Element von $\mathcal{L}$ durch drei Punkte *eindeutig* definiert ist¹¹, erhalten wir aus Satz 7.1.12 und Satz 7.1.14 das folgende interessante Korollar.

¹⁰ $a = b = 0$ definiert entweder die leere Menge oder ganz $\mathbb{C}$, aber keine Gerade.

¹¹ Liegen die Punkte auf einer Geraden, so ist das die Gerade, ansonsten ein Kreis.

7.1 Geometrie der Möbiustransformationen

Korollar 7.1.15. Zu je zwei Elementen $L, L' \in \mathcal{L}$ gibt es eine eindeutige Möbiustransformation, mit $TL = L'$.

Übung 7.1.2 Zeigen Sie: Durch drei verschiedene, nicht kollineare Punkte in $\mathbb{R}^2$ gibt es genau einen Kreis. $\diamond$

7.1.3 Fixpunkte

Was einen bei einer Abbildung immer interessiert, ist die Frage, ob sie auch Fixpunkte hat, also Punkte der Form $f(z) = z$. Allgemeine Fixpunktsätze sind eine Kunst für sich, aber bei Möbiustransformationen kann man auch hier etwas sagen.

Versuchen wir doch einmal, Fixpunkte einer Möbiustransformation zu bestimmen und betrachten daher die Gleichung

$$z = w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \Leftrightarrow \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0, \quad (7.1.11)$$

und wir erhalten

1. keinen Fixpunkt falls $c = 0$, $d = a$ und $b \neq 0$,
2. einen Fixpunkt $z^* = \frac{b}{d-a}$ falls $c = 0$ und $d \neq a$
3. zwei Fixpunkte

$$z_{1/2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c},$$

falls $c \neq 0$.

Das ist auch einleuchtend: Im ersten Fall ist $w(z) = z + b$ eine Verschiebung und damit Fixpunktfrei, im zweiten Fall haben wir

$$w(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad \frac{a}{d} \neq 1$$

und der rotatorische Anteil von w sorgt für wenigstens einen Fixpunkt. In beiden Fällen ist $w(\infty) = \infty$ und in diesem Fall nehmen wir ∞ als zweiten Fixpunkt hinzu.

Bemerkung 7.1.16. Eine Möbiustransformation mit $a = 0$ und damit $c \neq 0$ erfüllt immer $w(\infty) = 0$ und eine mit $ac \neq 0$

$$w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a|z|e^{i\theta} + b}{c|z|e^{i\theta} + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{ae^{i\theta} + b/|z|}{ce^{i\theta} + d/|z|} = \frac{a}{b},$$

und somit bewegen diese Transformationen den Punkt $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ in die komplexe Ebene, lassen also ∞ nicht invariant.

Unter diesen Konventionen hat jede Möbiustransformation zwei Fixpunkte und sie heißt LOXODROMISCH, wenn die beiden Fixpunkte verschieden sind und PARABOLISCH, wenn es einen doppelten Fixpunkt gibt, wenn also

$$c \neq 0 \quad \text{und} \quad (d - a)^2 + 4bc = 0$$

ist.

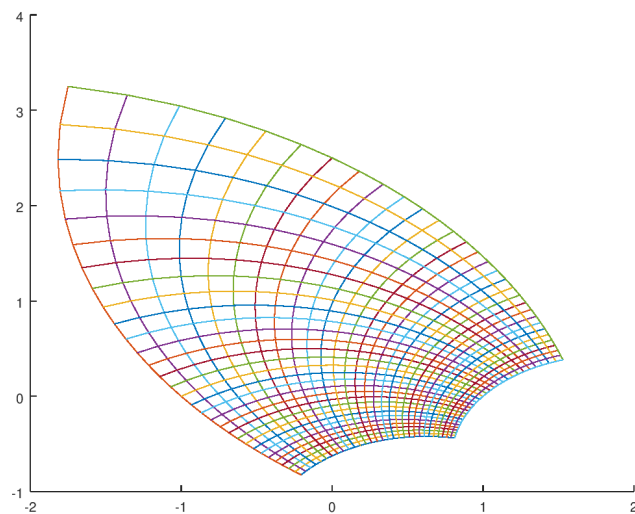


Abbildung 7.1.1: Bild eines Gitters von $[-1, 1] + i[-1, 1]$ unter den Möbiustransformationen mit den Fixpunkten ± 1 und zusätzlich den Werten $w(0) = .3 + .3i$. Man sieht schön, daß Möbiustransformationen konform sind, und daß sich deswegen die Gitterlinien, obwohl sie verzerrt sind, immer im rechten Winkel schneiden.

Im Zusammenspiel mit Satz 7.1.12 können wir nun sehr einfach loxodromische Möbiustransformationen mit vorgegebenen Fixpunkten generieren. Dafür wählen wir zwei Fixpunkte z_1, z_2 , setzen $w_1 = z_1$, $w_2 = z_2$ und geben uns für ein beliebiges $z_3 \in \mathbb{C}$ den Wert $w_3 \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ vor. Die Parameter der zugehörigen Möbiustransformation errechnen sich dann mit der Formel (7.1.7), so daß wir die Möbiustransformation explizit angeben können, zumindest wenn beide Fixpunkte $z_1, z_2 \neq \infty$ erfüllen.

Beispiel 7.1.17. Wir wählen die Fixpunkte $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ und bestimmen die loxodromischen Transformationen, indem wir den Punkt 0 durch die komplexe Ebene schieben. Im ersten Beispiel schreiben wir $w(0) = .3 + .3i$ vor und sehen uns einfach einmal das resultierende Bild in Abb. 7.1.1 an. Man sieht, daß die Seiten des Quadrats $[-1, 1] + i[-1, 1]$ deutlich verzerrt werden, daß sich alle Gitterlinien immer im rechten Winkel schneiden: Nach Korollar 7.1.5 ist eine Möbiustransformation eine konforme Abbildung und damit isogonal, also Winkeltreu.

Bemerkung 7.1.18. Isogonalität spielt bei Texturen von Oberflächen eine wichtige Rolle, weshalb in diesem Kontext auch konforme Abbildungen sehr präsent sind, wenn auch in einem etwas komplexeren Umfeld von Laplace-Beltrami-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten und ähnlichem.

Beispiel 7.1.19. Wir fixieren¹² wieder die beiden Fixpunkte ± 1 und lassen nun $w(0)$ entlang der reellen Achse nach rechts rücken. Da wir nun *drei* Punkte auf der reellen Achse haben, wird diese von der Möbiustransformation auf sich selbst abgebildet, was auch zeigt, daß es

¹²Warum wohl würden sie sonst so heißen.

7.1 Geometrie der Möbiustransformationen

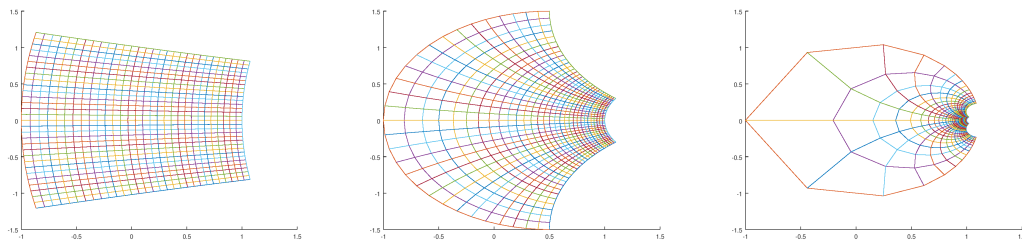


Abbildung 7.1.2: Bild desselben Gitters wie in Abb. 7.1.1 unter den Möbiustransformationen mit den Fixpunkten ± 1 und zusätzlich den Werten $w(0) = .1$ (*links*), $w(0) = .5$ (*mitte*) und $w(0) = .9$ (*rechts*). Man sieht sehr schön, daß sich am rechten Fixpunkt schön langsam eine Singularität aufbaut.

natürlich viele Möbiustransformationen gibt, die $\mathbb{R}$ invariant lassen. In Abb. 7.1.2 sieht man das für die Werte $.1$, $.5$ und $.9$ für $w(0)$ und da wir für $w(0) = 1$ ja die Voraussetzungen von Satz 7.1.12 verletzen würden, ist es naheliegend, daß irgendetwas seltsames passieren muss. Natürlich muss $w(0)$ nicht zwischen den beiden Fixpunkten liegen, sondern kann auch nach draussen wandern, Abb. 7.1.3 zeigt den Fall $w(0) = 2$.

Beispiel 7.1.20. Korollar 7.1.15 sagt, daß es für jedes Paar von Kreisen und Linien eine Möbiustransformation gibt, die sie aufeinander abbildet. Bilden wir also einmal die reelle Gerade auf den Einheitskreis ab, indem wir $w(0)$ auf den Einheitskreis schieben. Auch hier hängt das Ergebnis natürlich sehr stark davon ab, *welchen* Punkt des Einheitskreises wir wählen, siehe Abb. 7.1.4. Daß diese Möbiustransformationen Singularitäten haben müssen, versteht sich fast von selbst.

7 Noch ein bisschen Mathematik

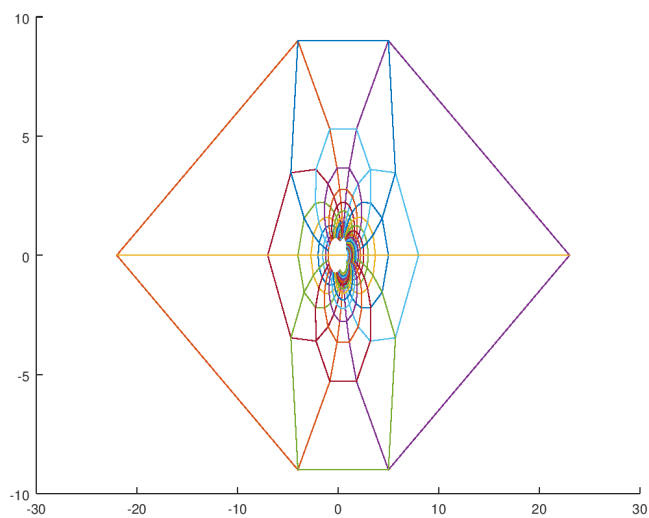


Abbildung 7.1.3: Dasselbe Spiel wie in Abb. 7.1.3, nur diesmal mit $w(0) = 2$, was ja ebenfalls nicht verboten ist. Das Bild wird jetzt allerdings wilder und die Reihenfolge der Linien dreht sich ein wenig um.

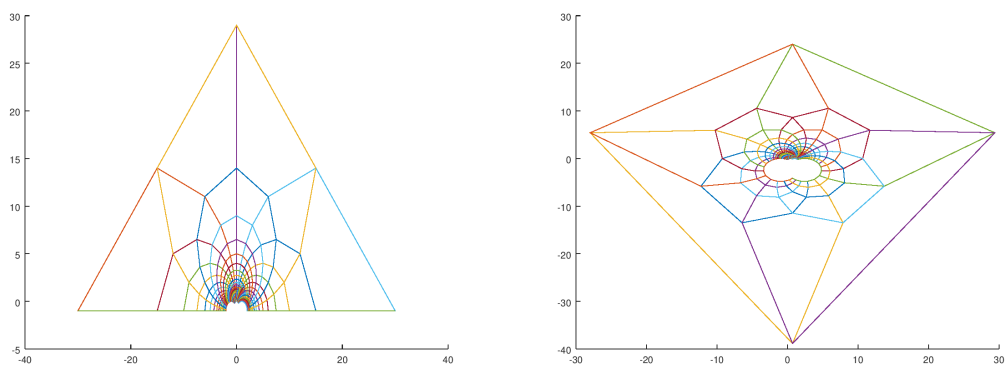


Abbildung 7.1.4: Möbiustransformationen, die die reelle Achse auf den Einheitskreis abbilden, und zwar durch $w(0) = i$ und $w(0) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Literaturverzeichnis

- [1] S. L. Altmann, *Rotations, quaternions, and double groups*, Oxford University Press, 1986, Dover reprint 2005.
- [2] L. van Ceulen, *Van Den Circkel*, Jan Andrieß, Boeckvercooper, Delft, 1596.
- [3] G. Faber, *Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion*, Jahresber. DMV **16** (1907), 538–540.
- [4] ———, *Über stetige Funktionen*, Math. Ann. **66** (1909), 81–94.
- [5] O. Forster, *Analysis I*, Vieweg, 1976.
- [6] ———, *Analysis 2*, 5. ed., Vieweg, 1984.
- [7] ———, *Analysis 3. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen*, 3. ed., Vieweg, 1984.
- [8] E. Freitag and R. Busam, *Funktionentheorie 1*, 4th ed., Springer, 2006.
- [9] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis. Volume 2*, Wiley, 1977.
- [10] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, 2. ed., B. G. Teubner, 1983.
- [11] ———, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, 3. ed., B. G. Teubner, 1984.
- [12] E. Hille, *Analytic function theory*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, 1982.
- [13] Knopp, *Theory of functions. Part I and II*, Dover Publications, 1945, Dover reprint 1996.
- [14] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, University of Toronto Press, 1953.
- [15] T. Sauer, *Approximationstheorie*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, 2002, Online verfügbar, Lehrstuhlseite.
- [16] ———, *Analysis I*, Vorlesungsskript, Universität Passau, 2014.
- [17] ———, *Analysis 2*, Vorlesungsskript, Universität Passau, 2015.
- [18] H. W. Schüßler, *Digitale Signalverarbeitung*, 3. ed., Springer, 1992.
- [19] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948), 379–423.
- [20] R. A. Silverman, *Introductory complex analysis*, Prentice Hall, 1967, Dover reprint 1972.
- [21] E. T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansions of the interpolation–theory*, Edinb. R. S. Proc. **35** (1915), 181–194.

Index

- 1-periodisch, 72
- 2π -periodisch, 7
- π , 6
- n -te Einheitswurzeln, 8
- Äußere, 80
- Übereinstimmungsmenge, 55
- äquivalent, 110

- Ableitung, 12, 25
- Ableitungsfunktion, 11
- absolut konvergent, 4, 89, 96, 97
- Absolutbetrag, 3
- Abtastsatz, 101
- analytisch, 15, 25, 26, 28–30, 35, 37, 38, 40, 48, 53, 56, 62, 67, 69–71, 73, 75, 76, 81, 91, 105, 115
- analytisch fortsetzbar, 56
- analytische Fortsetzung, 56
- analytische Funktion, 97, 104, 105, 112, 119
- analytischer Zweig, 31, 108
- angeordneter Körper, 4
- Annulus, 26, 67, 69, 71, 73
- Arcuscosinus, 7
- Argument, 8
- Argumentprinzip, 85
- außerwesentlich, 62, 64, 78
- außerwesentliche Singularität, 64
- Automorphismengruppe, 116
- Automorphismus, 121

- Bernsteinpolynome, 45
- beschränkt, 30
- bestimmtes Integral, 19
- Bijektion, 9
- bijektiv, 115
- Blaschkeprodukt, 34, 59, 126
- Bogenlänge, 21
- bogenzusammenhängend, 24, 25

- Cauchy–Abschätzungen, 71
- Cauchy–Hauptwert, 89
- Cauchy–Kern, 50, 71
- Cauchy–Kriterium für Reihen, 95
- Cauchy–Riemann Differentialgleichungen, 13, 14, 17
- Cauchyprodukt, 5, 50
- Cauchysche Integralformel, 36, 39, 82
- Cauchyscher Integralsatz, 25, 82
- Cosinus, 5

- Diagonalfolge, 120
- dicht, 65
- Differentialoperator, 16
- differenzierbar, 10
- Differenzierbarkeit, 37
- Dilatation, 124
- diskret, 54, 74, 105, 115
- divergent, 95
- Doppelreihensatz, 51
- Drehstreckung, 13, 33, 125
- Drehung, 13
- Dreieckspfad, 26
- Dreiecksungleichung, 20, 28

- Eindeutigkeit, 7
- einfach geschlossen, 86
- Einheitskreis, 115
- Einheitskreisscheibe, 58
- Einheitskugel, 110
- Einheitswurzeln, 90
- Einpunktkompaktifizierung, 47, 74
- Einschränkung, 21
- Elementarfunktion, 105
- Elementargebiet, 31, 32, 84, 86, 115, 116
- entire, 40
- Euler–Mascheroni–Konstante, 98
- eulersche Gleichung, 5
- Eulersche Zahl, 5

- Fakultät, 92
- Folge, 4, 45
- Fourierkoeffizient, 72
- Fourierreihe, 72
- Fundamentallemma der Funktionentheorie, 26
- Fundamentalsatz der Algebra, 41

Index

Funktionalgleichung, 93, 99

Gamma-Integral, 91

Gammafunktion, 91, 93, 97, 99, 103

ganz, 40

ganze Funktion, 40, 59, 94, 97, 99, 100, 116, 123

ganze lineare Transformation, 33

Gebiet, 24, 26, 55, 57

gebrochen lineare Transformationen, 33

geometrische Reihe, 49

Gerschgorin-Kreise, 89

geschlitzte Ebene, 16, 102

geschlossen, 23

geschlossene Kurve, 24, 25, 86

geschlossener Polygonzug, 28

Gitter, 109

glatt, 20

gleichmäßig konvergent, 43–45

gliedweise differenzieren, 46

Grad, 41

Grenzwert, 95

Gruppe, 95, 116, 124

Gudermann-Reihe, 102

Häufungspunkt, 55, 105

Halbebene, 47

harmonische Funktion, 16

harmonische Reihe, 49

Hauptteil, 68, 75, 104

Hauptzweig, 9, 86

hebbbar, 62, 69, 72, 78

hebbare Singularität, 63

holomorph, 15, 37

horizontaler Streifen, 72

Identitätssatz, 55

Imaginärteil, 3

Index, 80

injektiv, 15

Innere, 80

Integral, 19

Integrationskern, 50

integrierbar, 19

Interpolation, 126

interpolieren, 101

Invarianz, 22

Inversion, 124, 128

isogonal, 33, 130

isolierte Singularität, 61

Jacobimatrix, 12

Körper, 3, 74

kanonische Produkt, 109

kanonisches Produkt, 108, 109

Kettenregel, 11, 22, 84

kompakter topologischer Raum, 74

Kompaktum, 119

komplex konjugiert, 3

komplexe Zahl, 3

komplexe Zahlenebene, 3

konform, 33, 57, 115, 117

konform äquivalent, 115, 116

konforme Abbildung, 32, 59, 115, 116, 120, 124, 130

Konkatenation, 52

konkav, 66

konstruktiv, 121

Konturintegral, 21

konvergent, 4, 70, 89, 95, 96

Konvergenzradius, 4, 47, 48, 51, 53, 56, 57

konvex, 30

konvexe Hülle, 26

Kotangens, 77

Kreisintegral, 34

Kreisring, 26, 67

Kreisscheibe, 35

Kreiszahl, 6

Kurve, 20, 24

Kurvenintegral, 21

Länge, 38

längentreu, 33

Laplacegleichung, 16

Laplaceoperator, 16

Lattice, 109

Laurentreihe, 70, 71, 81, 83

Laurentzerlegung, 67, 68, 104

Leibniz-Regel, 38, 92

Leitkoeffizient, 75

lineare Funktion, 12

lineares Funktional, 22

Linearfaktoren, 41

Linearität, 20

Lipschitz-stetig, 119

logarithmische Ableitung, 84, 97, 111

Logarithmus, 16, 31, 108

- Logarithmusreihe, 49
- lokal gleichmäßig, 92, 119, 120
- lokal gleichmäßig konvergent, 43
- lokal konform, 33, 73
- lokal konstant, 14, 32
- loxodromisch, 129
- Ludolf'sche Zahl, 6

- Möbiustransformation, 117
- Maclaurin-Reihe, 106
- mathematischer Uhrzeigersinn, 110
- Maximumprinzip, 42, 57
- Maximumsprinzip, 58
- meromorph, 74, 78, 84, 85, 93
- meromorphe Funktion, 104, 111
- Metrik, 4, 9
- metrischer Raum, 4
- Minimum, 58
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 38
- Möbiustransformation, 33, 123, 124
- monisch, 75
- Monom, 11

- Nebenteil, 68, 75
- non-essential, 62
- Norm, 4
- normal konvergent, 45, 46, 97
- Nullfolge, 96
- Nullfunktion, 55
- Nullpolynom, 41
- Nullstellenmenge, 55

- obere Halbebene, 88
- offene Überdeckung, 74
- offene Abbildung, 56, 57
- offene Kugel, 25
- open mapping, 56
- Ordnung, 63, 72
- orientierungstreu, 33

- parabolisch, 129
- Parametrisierung, 20
- Partialbruchzerlegung, 81, 104, 111
- Partialsumme, 4, 106
- Periode, 72
- periodisch, 7, 72
- Permanenzeigenschaften, 11
- Pfad, 20
- Phase, 8

- Pol, 62, 64, 72, 73, 78
- Polardarstellung, 8, 9, 13
- Polygonzug, 28, 29
- Polynom, 4, 41
- Polynomdivision, 41
- positiv orientiert, 37
- positive Orientierung, 110
- Potentialfunktion, 16
- Potenzreihe, 4, 47, 58
- Potenzreihenentwicklung, 49
- Produktdarstellung, 94
- Produktregel, 11
- Projektion, 126
- punktierte Umgebung, 61, 65

- Quaternionen, 125
- Quotientenkörper, 74
- Quotientenkriterium, 5
- Quotientenregel, 11, 32

- Radius, 35
- rationale Funktion, 61, 63, 74, 79
- Realteil, 3
- reell analytisch, 56
- reelle Zahl, 3, 4
- reellwertige Funktion, 14
- regulär, 15, 20
- Reihe, 4, 45
- Reparametrisierung, 22
- Residuenformel, 81, 85
- Residuensatz, 67, 81
- Residuum, 81
- Riemann-Integral, 19
- Riemannsche Zahlenkugel, 74
- Riemannsche Zetafunktion, 47
- Riemannscher Abbildungssatz, 116
- Riemannscher Hebbbarkeitssatz, 62
- Riemannsumme, 20
- rigid motions, 125
- Rotation, 58

- Satz über implizite Funktionen, 57
- Satz von Bolzano-Weierstraß, 120
- Satz von Casorati-Weierstraß, 65
- Satz von Liouville, 40, 116
- Satz von Mittag-Leffler, 76
- Satz von Montel, 120
- Satz von Morera, 40, 53
- Satz von Picard, 65

Index

- Satz von Rouché, 86
- Satz von Weierstraß, 45
- Schwarzsches Lemma, 58
- selbstinvers, 59
- Singularität, 61, 62
- Sinus, 5
- Sinus Cardinalis, 101, 109
- stückweise glatt, 21
- Stammfunktion, 20, 22–25, 30, 40, 54
- starre Bewegungen, 125
- Sterngebiet, 25, 26, 29, 30, 68
- stetig, 9, 21
- stetige Funktion, 19
- Stetigkeit, 56, 115
- Stirlingformel, 102
- Streckung, 13
- Streifen, 73
- Substitutionsregel, 20, 22

- Taylorentwicklung, 28
- Taylorreihe, 49, 54
- Teilfolge, 120
- Topologie, 56, 74
- Torus, 9
- totales Differential, 12
- Totalgrad, 52
- Translation, 71, 124
- trigonometrische Funktion, 5

- Umkehrfunktion, 7, 9, 15, 53
- uneigentliches Integral, 88, 89
- Unendliches Produkt, 95
- ungerade Funktion, 78
- Untergruppe, 125

- Vektorraum, 109
- Verdopplungsformel, 101
- Vielfachheit, 63
- Vorzeichen, 73

- Weierstraßsche Elementarfunktion, 105
- Weierstraßsche Sigmafunktion, 111
- Weierstraßsche Zetafunktion, 111
- Weierstraßscher Faktorisierungssatz, 107
- Weierstraßscher M–Test, 45
- wesentlich, 64, 72, 78
- wesentliche Singularität, 65
- Windungszahl, 80, 88
- winkeltreu, 33

- Wurzel, 31
- Zahlenebene, 8
- Zentrum, 26, 29, 56
- zeros, 55
- Zirkelschluss, 40
- zusammenhängend, 32
- Zwischenwertsatz der Integralrechnung, 25