Analysis II

Vorlesung, zuerst gehalten im Wintersemester 2014/15

Tomas Sauer

Version 3.0
Letzte Änderung: 6.12.2020

Statt einer Leerseite ... 0

Denn die Doktrin der geschlechtergerechten Sprache macht das Lesen solchermassen „gerechter“ Texte nicht nur fast unerträglich. Sie basiert auch auf einem linguistischen Grundirrtum, weil es das biologische Geschlecht mit dem grammatischen Genus gleichsetzt.

C. Wirz, „Neusprech für Fortgeschrittene“, *NZZ Online, 12.7.2013*

Die wahren Analphabeten sind schließlich diejenigen, die zwar lesen können, es aber nicht tun. Weil sie gerade fernsehen.

L. Volkert, *SZ–Online, 11.7.2009*

$$\frac{(a+b)!}{a!b!} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}}.$$

And it didn't stop being magic just because you found out how it was done.

T. Pratchett, *Wee Free Men*

Wissen Sie, was ich an der Tugend nicht mag? Wer sich ehrlos verhält und nicht erwischt wird, der hat davon einen Vorteil. Wer sich aber tugendsam verhält, der hat in den meisten Fällen gar nichts davon. Das ist der eigentliche Skandal!

H. Martenstein, *Zeit Online, 19.1.2012*

Tomas Sauer
Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverabeitung
Universität Passau
Innstr. 43
94032 Passau

0 Inhaltsverzeichnis

1 Metrik und Topologie **2**
1.1 Metrische und normierte Räume 2
1.2 Offene und abgeschlossene Mengen 5
1.3 Topologische Räume 9
1.4 Folgen, Konvergenz und Stetigkeit 13
1.5 Metrik, Cauchy, Vollständigkeit 15
1.6 Kompakte Mengen 18
1.7 Realismus 24

2 Kurven **28**
2.1 Definition und einfache Eigenschaften 28
2.2 Bogenlänge 29
2.3 Reparametrisierung 33

3 Differentialrechnung in mehreren Variablen **36**
3.1 Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen 36
3.2 Mehrfache partielle Ableitungen 40
3.3 Ableitungen 44
3.4 Die Taylorformel und höhere Ableitungen 51
3.5 Ein Beispiel 59
3.6 Parametrische Flächen 64

4 Extrema **69**
4.1 Notwendige und hinreichende Bedingungen 69
4.2 Extrema unter Nebenbedingungen 75
4.3 Ein bisschen Variationsrechnung 83

5 Implizite Funktionen **88**
5.1 Ein Ableitungstrick und Implizitierung 88
5.2 Der Satz über implizite Funktionen 91
5.3 Der Umkehrsatz 97
5.4 Nochmals Extrema unter Nebenbedingungen 99
5.5 Das Newton–Verfahren 101
5.6 Anwendungen impliziter Funktionen 104

6 Mannigfaltigkeiten **107**
6.1 Dimension, Stetigkeit und Diffeomorphismen 107
6.2 Mannigfaltigkeiten 112
6.3 Tangentialräume und Orientierung 123

Division and multiplication were discovered. Algebra was invented and provided in interesting diversion for a minute or two. And then he felt the fog of numbers drift away, and looked up and saw the sparkling, distant mountains of calculus.

T. Pratchett, *Men at arms*

1 Metrik und Topologie

Bei der Untersuchung von Folgen und deren Konvergenz im Teil I dieser Vorlesung, [26], haben wir einen Abstandsbegriff auf angeordneten Körpern über den **Absolutbetrag** eingeführt. In den Beweisen haben wir dann im wesentlichen verwendet, daß der Betrag nichtnegativ ist und die Dreiecksungleichung erfüllt. Diese Eigenschaft wollen wir jetzt etwas abstrahieren.

1.1 Metrische und normierte Räume

Wir beginnen mit der fundamentalen Definition.

Definition 1.1. Eine reellwertige Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X heißt **Metrik**, wenn

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$, $x, y \in X$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $x, y, z \in X$.

Die Menge X heißt **metrischer Raum**, wenn es auf X eine Metrik gibt, die die Eigenschaften 1)– 3) erfüllt.

Bemerkung 1.2 (Eigenschaften der Metriken)**.**

1. Eine Metrik ist immer **nichtnegativ**, d.h., $d(x,y) \geq 0$, was einfach aus 1) und 3) folgt:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

Zusammen mit nochmals 1) liefert das insbesondere

$$d(x,y) > 0, \qquad x \neq y. \tag{1.1}$$

2. Eine Metrik ist eine Abstraktion des Abstandsbegriffs: Der Abstand zwischen Objekten ist nichtnegativ, symmetrisch und immer höchstens so hoch wie bei einem „Umweg".

Beispiel 1.3 (Metriken)**.**

1. Das Standardbeispiel ist sicherlich $X = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$. Die Eigenschaften aus Defintion 1.1 lassen sich dann einfach verifizieren.

2. Auf dem Folgenraum $X = \{a = (a_n : n \in \mathbb{N}) : a_n \in \{0, 1\}\}$ der 0-1–Folgen kann man die Metrik

$$d(a, a') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - a'_n|}{2^n}$$

verwenden, die bis auf die Identität $0.\overline{9} = 1$ in etwa dem Betrag der Differenz der zugehörigen dyadischen Zahlen

$$.a_1 a_2 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$$

entspricht.

3. Eine ziemlich extreme Metrik, die sich auf jeder Menge X verwenden lässt, ist die **diskrete Metrik**, die als

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X, \tag{1.2}$$

definiert ist und die Axiome der Metrik ziemlich trivial erfüllt. Sie verhält sich manchmal etwas kontraintuitiv und wird in vielen Fällen als Gegenbeispiel verwendet.

Auf Vektorräumen kann man noch ganz besondere Metriken definieren, indem man den Begriff der **Länge** abstrahiert.

Definition 1.4 (Norm)**.** Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ auf einem **Vektorraum**[1] X über einem Körper $\mathbb{K}$ heißt **Norm**, wenn

1. $\|x\| \geq 0$, $x \in X$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. $\|cx\| = |c| \, \|x\|$, $X \in X$, $c \in \mathbb{K}$.[2]

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$.

Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm heißt **normierter Raum**.

[1] Also eine Menge, auf der man sinnvoll addieren und mit Körperelementen multiplizieren kann, für Details siehe z.B. [1, 4]. Wer wirklich an dieser Stelle noch nicht weiss, was ein Vektorraum ist, sollte sich umgehend über dieses fundamentale Konzept der Mathematik informieren.

[2] Dies setzt voraus, daß es eine **Betragsfunktion** $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ gibt. Für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kennen wir sowas ja aus [26].

Beispiel 1.5 (Normen)**.** Beispiele für Normen sind:

1. $X = \mathbb{R}$ und $\|x\| = |x|$.
2. $X = \mathbb{R}^n$ und
$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad \text{oder} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$
In beiden Fällen besteht die Hauptarbeit darin, die Dreiecksungleichung 3) in Definition 1.4 nachzuweisen. Für $\|\cdot\|_1$ ist das eine direkte Konsequenz aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag, für $\|\cdot\|_2$ braucht man die **Cauchy–Schwarz–Ungleichung**.
3. $X = C[0,1]$ und
$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$
4. Ist X die Menge aller Polynome, also aller Funktionen der Form
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j\, x^j, \qquad \mathbb{N}_0 \ni n =: \deg f,$$
so kann man die Normen
$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{oder} \qquad \|f\| = \left(\sum_{j=0}^{\deg f} f_j^2\right)^{1/2}$$
verwenden.

Übung 1.1 Weisen Sie für alle Normen aus Beispiel 1.5 die Normaxiome nach. ♢

Lemma 1.6. *Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem Vektorraum X, so ist $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik auf X, die man als von $\|\cdot\|$ **induzierte Metrik** bezeichnet.*

Beweis: Da für jede Norm $\|x-x\| = \|0\| = 0\|x\| = 0$ gilt, ist die Metrikeigenschaft 1) zu dem Normaxiom 1) äquivalent. Die Symmetrie ergibt sich aus

$$d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$$

und die **Dreiecksungleichung** aus der Dreiecksungleichung:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

□

Durch Normen induzierte Metriken haben eine interessante Eigenschaft: Sie *skalieren*, es gilt nämlich

$$d(cx,cy) = \|cx-cy\| = |c|\,\|x-y\| = |c|\,d(x,y).$$

Damit ist auch schon klar, daß nicht alle Metriken von einer Norm induziert sind: Die diskrete Metrik skaliert offensichtlich nicht, denn sie nimmt ja nur die Werte 0 und 1 an und ist daher auch nicht von einer Norm induziert.

1.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Sobald wir auf einem metrischen Raum einen Abstandsbegriff haben, können wir anfangen, zwischen nahen und fernen Punkten und Umgebungen zu unterscheiden. Von nun an sei X ein metrischer Raum, zumindest wenn nichts anderes gesagt wird.

Definition 1.7 (Kugeln)**.** Zu $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+$ definieren wir die **offene Kugel** $B_{<r}(x)$ und die **abgeschlossene Kugel** $B_{\leq r}(x)$ als

$$B_{<r}(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}, \qquad B_{\leq r}(x) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}. \tag{1.3}$$

Definition 1.8 (Offene und abgeschlossene Mengen)**.**

1. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt **offene Menge**, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $B_{<\varepsilon}(y) \subseteq Y$ ist.
2. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt **abgeschlossene Menge**, wenn ihr **Komplement** $X \setminus Y$ offen ist.

Die kanonischen und einfachsten Beispiele, die man immer parat haben sollte, um sich diese Konzepte zu veranschaulichen, sind die Intervalle. Für komplexere Fragen zu Metrik und Topologie sei [30] als Ergänzung zu [9] empfohlen[3]

Beispiel 1.9 (Offene und abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$)**.** Für die Intervalle in $\mathbb{R}$ liefert unsere schöne neue Terminologie ziemlich genau das, was man auch erwarten würde:

1. Die offenen Intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$ sind offene Mengen.
2. Die abgeschlossenen Intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossene Mengen.
3. Die halboffenen Intervalle $[a,b)$ und $(a,b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

Insbesondere sollte man nicht den gerne begangenen Feher wiederholen, anzunehmen, daß Mengen normalerweise entweder offen oder abgeschlossen sein würden.

Unsere Notation ist tatsächlich konsistent.

Proposition 1.10. *Offene Kugeln sind offene Mengen, abgeschlossen Kugeln abgeschlossene Mengen.*

Beweis: Sei $y \in B_{<r}(x)$, dann ist $r' := d(x,y) < r$ und für jedes $z \in B_{<r-r'}(y)$ liefert die Dreiecksungleichung, daß

$$d(x,z) \leq \underbrace{d(x,y)}_{=r'} + \underbrace{d(y,z)}_{<r-r'} < r \qquad \Rightarrow \qquad z \in B_{<r}(x),$$

[3]Die Topologie bietet noch kontraintuitivere und abgefahrenere Gegenbeispiele als die Analysis und kann als „Analysis auf Speed“ angesehen werden.

und damit ist die offene Kugel offen. Für die zweite Hälfte müssen wir beweisen, daß $X\backslash B_{\le r}(x)$ offen ist. Sei also $y \in X\backslash B_{\le r}(x)$, dann heißt das ja, daß $r' := d(y,x) > r$ sein muss und für jedes $z \in B_{<r'-r}(y)$ ist[4]

$$d(z,x) \ge d(x,y) - d(y,z) > r' - (r'-r) = r \qquad \Rightarrow \qquad B_{<r'-r}(y) \subseteq X \setminus B_{\le r}(x)$$

und damit ist das Komplement offen, also die abgeschlossene Kugel abgeschlossen. □

Übung 1.2 Zeigen Sie, daß

$$d(z,x) \ge d(x,y) - d(y,z), \qquad x,y,z \in X,$$

gilt ◊

Satz 1.11 (Offene Mengen)**.** *Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt*

1. *X und $\emptyset$ sind offene Mengen.*
2. *Jede abzählbare Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen.*
3. *Jeder endliche Durchschnitt von offenen Mengen ist ebenfalls offen.*

Beweis: Da mit $x \in X$ auch $B_{<r}(x) \subseteq X$ für jedes $r > 0$ ist, ist 1) erfüllt, denn für die leere Menge gilt es trivialerweise.

Für 2) seien $Y_j \subseteq X$, $j \in \mathbb{N}$, offene Mengen. Ist nun $x \in \bigcup_j Y_j$, dann gibt es ein j mit $x \in Y_j$ und da Y_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_{<\varepsilon}(x) \subseteq Y_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Y_j.$$

Dabei haben wir noch nicht einmal ausgenutzt, daß wir es mit einer abzählbaren Vereinigung zu hatten, das war nur aus Gründen der einfacheren Notation. In der Tat ist offensichtlich *jede* Vereinigung, auch eine überabzählbare, von offenen Mengen wieder offen.

Für 3) betrachten wir $Y_1, \dots, Y_n$ und bemerken daß es wegen

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} Y_j \qquad \Rightarrow \qquad x \in Y_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

und der Offenheit der Mengen $Y_1, \dots, Y_n$ Zahlen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ gibt, so daß

$$B_{<\varepsilon_j}(x) \subseteq Y_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Setzen wir nun

$$\varepsilon = \min_{j=1,\dots,n} \varepsilon_j,$$

dann ist

$$B_{<\varepsilon}(x) \subseteq B_{<\varepsilon_j}(x) \subseteq Y_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$

[4] Die gute alte **Dreiecksungleichnung nach unten**, siehe [26], gilt auch für Metriken

und somit

$$B_{<\varepsilon}(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} Y_j,$$

der Durchschnitt ist also offen. □

Unendliche Durchschnitte offener Mengen müssen nicht mehr offen sein, wie das Beispiel $X = \mathbb{R}$, $Y_j = (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$ mit $\bigcap_{j=1}^{\infty} Y_j = \{0\}$ zeigt.

Satz 1.12 (Abgeschlossene Mengen)**.** *Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt*

1. *X und $\emptyset$ sind abgeschlossene Mengen.*
2. *Jede endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen.*
3. *Jeder Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist ebenfalls abgeschlossen.*

Beweis: Der Beweis ist im wesentlichen eine Komplementbildung von Satz 1.11. Da X und $\emptyset$ ja komplementär sind, folgt 1) direkt. Ansonsten bemerken wir, daß für beliebige Mengen Y_j, $j \in J$, wobei J je nach Situation eine endliche oder unendliche **Indexmenge** ist, immer

$$x \in \bigcap_{j\in J} Y_j \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \bigcup_{j\in J} (X \setminus Y_j) \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \setminus \bigcup_{j\in J} (X \setminus Y_j) \tag{1.4}$$

und

$$x \in \bigcup_{j\in J} Y_j \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \bigcap_{j\in J} (X \setminus Y_j) \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \setminus \bigcap_{j\in J} (X \setminus Y_j) \tag{1.5}$$

gilt, womit alles weitere direkt aus Satz 1.11 folgt. □

Bemerkung 1.13 (Diskrete Metrik)**.** Eine nette Folgerung ist, daß bezüglich der diskreten Metrik *alle* Teilmengen offen und abgeschlossen sind. Die einpunktigen Mengen sind offen, da $B_{<\varepsilon}(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon \leq 1$ erfüllt ist, damit sind aber auch alle Teilmengen $Y = \bigcup_{y\in Y}\{y\}$ offen und da jede Teilmenge als $Y = X \setminus (X \setminus Y)$ geschrieben werden kann, ist auch jedes Y Komplement einer offenen Menge und damit abgeschlossen.

Definition 1.14. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $B_{<\varepsilon}(x) \subseteq U$.

Bemerkung 1.15. Jede offene Kugel $B_{<\varepsilon}(x)$ um x ist eine Umgebung von x.

Definition 1.16 (Abschluss)**.**

1. $x \in X$ heißt **Berührpunkt** oder **Kontaktpunkt** zu einer Menge $Y \subseteq X$, wenn für jede Umgebung U von x die Beziehung $U \cap Y \neq \emptyset$ erfüllt ist.
2. Der **Abschluss** $\overline{Y}$ von $Y \subseteq X$ ist die Menge aller Kontaktpunkte an Y.

Bemerkung 1.17. Ist $x \in Y$, so gilt trivialerweise $U \cap Y \supseteq \{x\} \neq \emptyset$ für jede Umgebung von x und damit ist x ein Kontaktpunkt zu Y. Also: Jeder Punkt einer Menge ist auch Kontaktpunkt zu dieser Menge.

Lemma 1.18 (Abschluss)**.** *Für $Y, Y' \subseteq X$ gilt:*

1. $Y \subseteq \overline{Y}$ *und* $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$.
2. $\overline{Y \cup Y'} = \overline{Y} \cup \overline{Y'}$.
3. $\overline{Y}$ *ist abgeschlossen.*

Beweis: Jedes $y \in Y$ ist natürlich Kontaktpunkt, da für jede Umgebung U von y ja $U \cap Y \supseteq \{y\} \neq \emptyset$ erfüllt ist. Also ist $Y \subseteq \overline{Y}$, was die erste Aussage in 1) ist. Für die zweite Identität wählen wir $x \in \overline{\overline{Y}}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Definition einen Punkt $x_1 \in B_{<\varepsilon}(x) \cap \overline{Y}$ und mit $\varepsilon_1 = \varepsilon - d(x, x_1) > 0$ gilt $B_{<\varepsilon_1}(x_1) \subset B_{<\varepsilon}(x)$, denn für jedes $z \in X$ mit $d(x_1, z) < \varepsilon_1$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, x_1) + d(x_1, z) < \varepsilon - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Da $x_1 \in \overline{Y}$ ein Kontaktpunkt ist, existiert ein

$$Y \ni y \in B_{<\varepsilon_1}(x_1) \subset B_{<\varepsilon}(x),$$

also $y \in B_{<\varepsilon}(x)$, weswegen $x \in \overline{Y}$ sein muss, also insgesamt $\overline{\overline{Y}} \subseteq \overline{Y}$. Da die erste Aussage von 1) aber auch „$\supseteq$“ liefert, muss letztlich Gleichheit gelten, womit 1) komplett ist.

Für 2) nehmen wir an, es gäbe $x \in \overline{Y \cup Y'}$ mit $x \notin \overline{Y}$ und $x \notin \overline{Y'}$. Dann gibt es $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ mit $B_{<\varepsilon}(x) \cap Y = B_{<\varepsilon'}(x) \cap Y' = \emptyset$ und mit $\eta = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ gilt $B_{<\eta}(x) \cap Y = B_{<\eta}(x) \cap Y' = \emptyset$ und somit auch $B_{<\eta}(x) \cap (Y \cup Y') = \emptyset$, was im Widerspruch zu $x \in \overline{Y \cup Y'}$ steht.

Den Beweis von 3) verschieben wir auf später und beweisen ihn eleganter in einem allgemeineren Kontext in Lemma 1.30. □

Definition 1.19 (Rand)**.** Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** einer Menge $Y \subseteq X$, wenn für jede Umgebung U von x

$$U \cap Y \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus Y) \tag{1.6}$$

erfüllt ist. Die Menge aller Randpunkte nennt man den **Rand** von Y und schreibt ∂Y.

Beispiel 1.20 (Rand)**.**

1. Wie die beiden Intervalle $I_1 = (0, 1)$ und $I_2 = [0, 1]$ mit Rändern $\partial I_1 = \partial I_2 = \{0, 1\}$ zeigen, kann der Rand zur Menge gehören oder auch nicht.
2. Ein anderes Beispiel sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ mit der Betragsmetrik. Beide Mengen bestehen nur aus Randpunkten, haben keine inneren Punkte[5] und ergeben doch zusammen ganz $\mathbb{R}$.

[5] Siehe Definition 1.31.

Einen Teil dieser Mehrdeutigkeit löst die folgende Aussage auf. Dabei verwenden wir die Definition

$$Y \setminus Z = Y \cap (X \setminus Z). \tag{1.7}$$

Proposition 1.21 (Eigenschaften des Randes)**.** *Der Rand* ∂Y *einer Menge* $Y \subseteq X$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $Y \setminus \partial Y$ *ist offen,*
2. $Y \cup \partial Y$ *ist abgeschlossen,*
3. ∂Y *ist abgeschlossen.*

Beweis: Für 1) wählen wir einen Punkt $x \in Y \setminus \partial Y$ und betrachten alle Kugeln[6] $B_{<\varepsilon}(x)$, $0 < \varepsilon \leq 1$, um x. Wäre nun $B_{<\varepsilon}(x) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$, $0 < \varepsilon \leq 1$, dann wäre x ein Randpunkt, also gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $B_{<\varepsilon}(x) \subseteq Y$ für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$. Ausserdem ist aber auch $B_{<\varepsilon}(x) \cap \partial Y = \emptyset$, denn für jedes $y \in B_{<\varepsilon}(x) \cap \partial Y$ und jedes $\varepsilon' < \varepsilon_0 - \varepsilon$ würde die Kugel $B_{<\varepsilon'}(y)$ einerseits zu Y gehören, andererseits aber Punkte aus $X \setminus Y$ enthalten, was ein Widerspruch ist.

Für 2) bemerken wir zuerst, daß per definitionem $\partial Y = \partial(X \setminus Y)$ ist, so daß

$$X \setminus (Y \cup \partial Y) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus \partial Y) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus \partial(X \setminus Y)) = (X \setminus Y) \setminus \partial(X \setminus Y)$$

nach 1) offen ist ist, it $Y \cup \partial Y$ abgeschlossen.

3) folgt schliesslich aus

$$\partial Y = (Y \cup \partial Y) \setminus (Y \setminus \partial Y) = (Y \cup \partial Y) \cap (X \setminus (Y \setminus \partial Y)),$$

was als Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sein muss. □

1.3 Topologische Räume

Das Konzept der offenen Menge wurde durch die Metrik, also einen Abstandsbgriff eingeführt. Das kann man allerdings nochmals abstrahieren, indem man sich nur auf die in Satz 1.11 hergeleiteten Eigenschaften beschränkt.

Definition 1.22 (Topologie)**.** Ein System $\mathscr{T}$ von Teilmengen von X heißt **Topologie**, wenn

1. $X, \emptyset \in \mathscr{T}$.
2. $T, T' \in \mathscr{T} \Rightarrow T \cap T' \in \mathscr{T}$.
3. Ist $T_i \in \mathscr{T}$, $i \in I$, für eine *beliebige* Indexmenge I, dann ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathscr{T}. \tag{1.8}$$

[6] Die obere Schranke für den Radius ist völlig willkürlich!

X heißt **topologischer Raum**, wenn es auf X eine Topologie gibt. Ein Element von $\mathscr{T}$ wird gerne auch als **offene Menge** bezeichnet.

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, wenn es ein $T \in \mathscr{T}$ gibt, so daß $x \in T \subseteq U$.

Bemerkung 1.23. Man kann sich natürlich fragen, ob es diese Abstraktionskaskade wirklich braucht[7], und die Antwort ist wirklich „ja". Es ist oftmals sehr wichtig, sich klarzumachen, welche Eigenschaften eines Konzepts und einer Struktur man wirklich braucht und in welcher Allgemeinheit Resultate gelten. Das wiederum ist sowohl ein wichtiger Vermittlungsaspekt der Mathematik[8] als auch ein wichtiges Konzept der Informatik, wo man sich ebenfalls sehr genau überlegen muss, auch welchen Datentypen man denn da arbeitet. Und in guter Mathematik ist Abstraktion erstaunlich selten ein Selbstzweck.

Jede Metrik definiert offene Mengen der Form $B_{<\varepsilon}(x)$ und diese erzeugen nach Satz 1.11 eine Topologie. Das **Erzeugnis** einer Menge $\mathscr{T}'$ ist das System bestehend aus

$$\bigcap_{j=1}^{N} T_j', \qquad T_j' \in \mathscr{T}', \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{T' \in \mathscr{A}} T', \quad \mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}',$$

das wir erhalten, wenn die Menge $\mathscr{T}'$, die endlich, abzählbar oder überabzählbar sein kann, unter endlicher Durchschnittsbildung und beliebiger Vereinigung komplettieren, also die Durchschnitte und Vereinigungen mit dazunehmen.

Beispiel 1.24. Ist X ein metrischer Raum, dann ist $\mathscr{T}$ die Topologie, die von den offenen Kugeln $B_{<\varepsilon}(x)$, $x \in X$, erzeugt wird.

Die grundlegenden Begriffe, die wir aus den metrischen Räumen kennen, können wir nun auch auf topologische Räume übertragen.

Definition 1.25 (Offen, abgeschlossen, Umgebung)**.**

1. Eine Menge $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, wenn es ein $T \in \mathscr{T}$ mit $x \in T \subseteq U$ gibt.
2. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt **offen**, genauer **offene Teilmenge**[9] von X, wenn es zu jedem $y \in Y$ eine Umgebung U gibt, so daß $U \subseteq Y$ erfüllt ist.
3. $Y \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus Y$ offen ist.
4. $y \in X$ heißt **Kontaktpunkt** von $Y \subseteq X$, wenn $U \cap Y \neq \emptyset$ und **Randpunkt** von Y, wenn $U \cap Y \neq \emptyset$ und $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ für alle Umgebungen U von y gilt.

[7] Und sie ist weder lehrplanrelevant noch für technische Anwendungen der Informatik mit einem direkten Nutzen verbunden.

[8] Man hat dann nämlich wirklich *verstanden*, was man tut und nicht nur gezeigt, daß es korrekt ist.

[9] Im pedantischen Gegensatz zu „**offene Menge**", was ja in Definition 1.22 ein Element der Topologie bezeichnet.

Aber gibt es zu jeder Topologie auch eine Metrik oder ist „Topologie“ ein allgemeineres Konzept als „Metrik“?

Definition 1.26 (Hausdorff–Raum)**.** Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff–Raum**, wenn es zu jedem $x \neq x' \in X$ Umgebungen U, U' der beiden Punkte gibt, für die $U \cap U' = \emptyset$ ist. Man sagt in diesem Fall auch, die Topologie wäre **punktetrennend**.

Lemma 1.27. *Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff–Raum.*

Beweis: Seien $x \neq x' \in X$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}d(x,x')$. Dann sind die offenen Kugeln $B_{<\varepsilon}(x)$ und $B_{<\varepsilon}(x')$ disjunkt, da sich nach der Dreiecksungleichung für jedes $y \in B_{<\varepsilon}(x) \cap B_{<\varepsilon}(x')$ der Widerspruch

$$d(x,x') \leq \underbrace{d(x,y)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x',y)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon < d(x,x')$$

ergeben würde. □

Beispiel 1.28 (Indiskrete Topologie)**.** Bei dieser *minimalen* Topologie auf X wählt man $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ und sieht leicht, daß alle Forderungen aus Definition 1.22 erfüllt sind. Allerdings ist sie nicht punktetrennend und kann daher nicht durch eine Metrik induziert sein. Die indiskrete Topologie ist eine Antipode der diskreten Metrik, bei der ja $\mathscr{T}$ die Menge *aller* Teilmengen von X ist.

Bemerkung 1.29. Wir können also die folgende „Inklusion“ der bisher vorgestellten Konzepte feshalten:

$$\text{Normierter Raum} \subset \text{Metrischer Raum} \subset \text{Topologischer Raum}$$

Im Kontext der Topologie ist nun $Y \subseteq X$ eine **offene Teilmenge**[10] von X, wenn es zu jedem $y \in Y$ eine Umgebung $T \in \mathscr{T}$ von y gibt, so daß $y \in T \subset Y$. Die Umgebungen $T \in \mathscr{T}$ verallgemeinern also die Rolle der Kugeln im metrischen Raum. Damit verallgemeinert sich auch das Konzept der Berührpunkts und des Abschlusses.

Übung 1.3 Beweisen Sie Lemma 1.18 für topologische Räume. ◊

Und jetzt zeigt sich in sehr allgemeinem Kontext, daß der Abschluss *immer* abgeschlossen ist[11].

Lemma 1.30 (Abschluss topologisch)**.** *Der Abschluss* $\overline{Y}$ *einer Teilmenge* $Y \subseteq X$ *eines topologischen Raums ist abgeschlossen.*

[10] Wir unterscheiden jetzt also zwischen *offenen Mengen*, die uns die Topologie liefert und *offenen Teilmengen*, die für jeden Punkt nochmals eine offene Menge enthalten, die ihrerseits wieder den Punkt enthält. Das ist zwar etwas aufwendiger, vermeidet aber Mehrdeutigkeiten.

[11] Sonst wäre der Name ja wohl auch ausgesprochen bescheuert gewählt.

Beweis: Wir zeigen, daß das Komplement des Abschlusses offen ist. Dazu sei $x \in X \setminus \overline{Y}$ ein Punkt, der nicht zum Abschluss gehört[12] und T eine offene Menge aus der Topologie mit $x \in T$. Dann gilt[13]

$$T \cap \overline{Y} \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad T \cap Y \neq \emptyset. \tag{1.9}$$

denn jedes $y \in T \cap \overline{Y}$ mit $y \notin Y$, wäre immer noch ein **Kontaktpunkt** an Y. Für eine beliebige Umgebung $T' \in \mathscr{T}$ von y gehört[14] $T \cap T' \subset T$ ebenfalls zu $\mathscr{T}$ und enthält y und damit, nach der Definition eines Kontaktpunktes auch einen Punkt $y' \in Y$. Also ist

$$\emptyset \neq Y \cap (T \cap T') \subseteq Y \cap T,$$

was impliziert, daß x ein Kontaktpunkt von Y ist, also $x \in \overline{Y}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme und damit ist (1.9) bewiesen.

Da x immer noch kein Kontaktpunkt ist, gibt es aber mindestens ein $T \in \mathscr{T}$ mit $x \in T$ und $T \cap Y = \emptyset$ und wegen (1.9)[15] ist auch $T \cap \overline{Y} = \emptyset$ und damit ist $X \setminus \overline{Y}$ tatsächlich offen. □

Übung 1.4 Geben Sie einen direkten Beweis der entsprechenden Aussage in Lemma 1.18, natürlich unter Verwendung der Beweisidee von Lemma 1.30. ◊

Definition 1.31 (Inneres)**.** Ein Punkt $y \in Y \subseteq X$ heißt **innerer Punkt** von Y, wenn es eine Umgebung U und eine offene Menge $T \in \mathscr{T}$ mit $y \in T \subseteq U$ von X gibt, so daß $U \subseteq Y$ erfüllt ist. Die Menge aller inneren Punkte nennt man **Inneres** von Y und schreibt Y°.

Das Innere einer Menge ist trivialerweise[16] offen und es gilt die folgende nette Identität.

Lemma 1.32 (Rand)**.** *Für $Y \subseteq X$ gilt*

$$\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^\circ. \tag{1.10}$$

Beweis: Da $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ nach Lemma 1.18, ist natürlich $\partial Y \subseteq \overline{Y}$. Ist nun $y \in \overline{Y}$ ein Randpunkt, dann gilt per definitionem für alle Umgebungen U von y, daß $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ ist, es gibt also keine Umgebung von y, die ganz in Y liegt, also gehört y nicht zu Y°. Mit anderen Worten: $\partial Y \subseteq \overline{Y} \setminus Y^\circ$. Sei umgekehrt $y \in \overline{Y} \setminus Y^\circ$ und U eine Umgebung von y. Da y kein innerer Punkt von Y ist, gilt $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ und da $y \in U \cap \overline{Y}$ ist, hat U mit Y und seinem Komplement nichtleeren Schnitt. Da das für alle Umgebungen gilt, ist $y \in \partial Y$, also $\partial Y \supseteq \overline{Y} \setminus Y^\circ$. □

[12] Und damit insbesondere **kein** Kontaktpunkt ist.

[13] Die Umkehrung hiervon ist trivialerweise auch richtig da $Y \subseteq \overline{Y}$, nutzt uns aber nichts.

[14] Hier nutzen wir das Axiom aus, daß $\mathscr{T}$ unter Schnittbildung abgeschlossen ist!

[15] Rückwärts gelesen, wir verwenden die formale Negierung der Aussage.

[16] Um jeden inneren Punkt gibt es eine Umgebung ...

1.4 Folgen, Konvergenz und Stetigkeit

Als nächstes können wir unsere Begrifflichkeiten aus dem letzten Semester für die neue Terminologie umformulieren. Konvergenz ist nämlich eine *topologische* Eigenschaft.

Definition 1.33 (Konvergenz)**.** Eine Folge $a = (a_n : n \in \mathbb{N})$ heißt **konvergent** mit **Grenzwert** $a^* \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von a^* ein $n_0 \geq 0$ gibt, so daß $a_n \in U$, $n \geq n_0$.

Ein Punkt a^* heißt **Häufungspunkt** der Folge a, wenn jede Umgebung U von a^* die Eigenschaft

$$\#\{n : a_n \in U\} = \infty$$

hat.

Bemerkung 1.34 (Grenzwert & Häufungspunkt)**.**

1. Man kann **Grenzwert** und **Häufungspunkt** auch anders beschreiben: In jeder Umgebung eines Grenzwerts liegen **fast alle** Folgenglieder, das heißt, alle bis auf endlich viele, in jeder Umgebung eines Häufungspunkts immer noch unendlich viele.

2. Jeder Grenzwert ist auch Häufungspunkt, die Umkehrung gilt nicht.

3. Klassische Beispiele sind Folgen wie $(-1)^n$ oder auch Folgen wie

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

   die sogar abzählbar viele Häufungspunkte hat, die sich ihrerseits wieder an 0 häufen.

Kovergenz und Grenzwerte haben sehr viel mit Abgeschlossenheit zu tun.

Satz 1.35. *Eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle in X konvergenten Folgen*[17] $a \subset Y$ *der Grenzwert a^* ebenfalls zu Y gehört.*

Beweis: Angenommen, Y wäre abgeschlossen und $a^* \in X \setminus Y$, dann gibt es, da diese Menge offen ist, eine Umgebung $T \in \mathcal{T}$ von a^* mit $T \cap Y = \emptyset$, also $a_n \notin T$, $n \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch zur Definition der Konvergenz darstellt.

Ist umgekehrt a^* Grenzwert einer Folge a, dann liegen für jede Umgebung $T \in \mathcal{T}$ von a^* sogar *unendlich viele* Folgenglieder in T, also $T \cap Y \neq \emptyset$. Damit ist a^* ein **Kontaktpunkt** von Y, also $a^* \in \overline{Y}$, somit $Y = \overline{Y}$ und nach Lemma 1.30 ist Y abgeschlossen. □

In beliebigen Topologien kann das mit der Konvergenz und den Grenzwerten auch ein wenig ausarten.

Beispiel 1.36. In der indiskreten Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ist jeder Punkt $x \in X$ Grenzwert *jeder* Folge a: Jeder Punkt hat nur eine Umgebung[18], nämlich $U = X$ und in dieser Umgebung liegen sogar alle Glieder jeder Folge.

[17] Die Notation „$a \subset Y$" steht für $a_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$.

[18] $\emptyset$ ist *keine* Umgebung, da wir ja immer $x \in U$ fordern.

Natürlich ist die **indiskrete Topologie** ein extremes Beispiel einer Topologie und schon ein wenig akademisch, aber es gibt eine Vielzahl von interessanten Topologien mit sehr überraschenden Eigenschaften, siehe [30]. Nur ist für sowas in einer Analysis–Vorlesung nicht wirklich Platz. Unter gewissen Voraussetzungen sind Grenzwerte aber wieder „brav".

Satz 1.37 (Grenzwerte)**.** *In einem **Hausdorff–Raum** sind die Grenzwerte von Folgen eindeutig.*

Beweis: Seien x, x' Grenzwerte der Folge a, dann gibt es Umgebungen U, U' von x bzw. x', so daß $U \cap U' = \emptyset$. Da beide Grenzwerte sind, gibt es n_0 und n_0', so daß $a_n \in U$, $n \geq n_0$, und $a_n \in U'$, $n \geq n_0'$, also

$$a_n \in U \cap U' = \emptyset, \qquad n \geq \max\{n_0, n_0'\},$$

was ein Widerspruch ist. □

Bemerkung 1.38. Wenn X ein **metrischer Raum** ist, dann gibt es mit Folgen und Konvergenz also keine Probleme, denn metrische Räume sind nach Satz 1.27 ja immer auch Hausdorff–Räume. Deswegen beschränkt man sich in der Analysis oft auf metrische Räume, siehe z.B. [27].

Definition 1.39 (Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : X \to X'$ zwischen topologischen Räumen X, X' heißt **stetig**, wenn für jede konvergente Folge $x_n \to x^*$ in X auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*) \tag{1.11}$$

gilt.

Definition 1.40. Sei $f : X \to X'$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Das **Urbild** einer Teilmenge $Y' \subseteq X'$ von X' ist

$$X \supseteq f^{-1}(Y') := \{x \in X : f(x) \in Y'\}. \tag{1.12}$$

Satz 1.41 (Stetigkeit)**.** *Eine Funktion $f : X \to X'$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.*

Beweis: „⇒": Sei f stetig und $Y' \subset X'$ abgeschlossen mit Urbild[19] Y, also $Y' = f(Y)$. Sei nun $y_n \in Y$ eine in X konvergente Folge mit Grenzwert y, dann ist $y_n' := f(y_n)$ eine Folge in Y', deren Grenzwert

$$y' = \lim_{n\to\infty} y_n' = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$$

zu Y' gehört, da Y' nach Voraussetzung abgeschlossen ist. Damit ist dann aber auch $y \in f^{-1}(Y') = Y$, so daß Y ebenfalls abgeschlossen ist.

„⇐": Sei $x_n \in X$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^* und U' eine beliebige offene Umgebung[20] von $f(x^*)$. Dann ist $X' \setminus U'$ abgeschlossen und

[19] Es kann durchaus passieren, daß $f^{-1}(Y') = \emptyset$ ist, aber die leere Menge ist ja immer offen und abgeschlossen und dann ist überhaupt nichts zu tun.

[20] Beispielsweise eine der offenen Mengen aus der Topologie.

damit, nach Voraussetzung auch $f^{-1}(X' \setminus U')$. Da $x^* \notin f^{-1}(X' \setminus U')$ gehört x^* zu der offenen Menge $X \setminus f^{-1}(X' \setminus U')$, und gibt es eine Umgebung U von x^* mit $U \cap f^{-1}(X' \setminus U') = \emptyset$. Damit ist dann aber $f(U) \subseteq U'$ es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$, $n \geq n_0$, also $f(x_n) \in U'$. Anders gesagt: Zu jeder Umgebung U' von $f(x^*)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $f(x_n) \in U'$ für alle $n \geq n_0$, was nach Definition 1.33 nichts anderes heisst als

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*).$$

Und das ist nun wieder gerade die Stetigkeit von f. □

Korollar 1.42 (Stetigkeit)**.** *Eine Funktion $f : X \to X'$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind.*

Beweis: Eine Folgerung aus Satz 1.41 und der Komplementarität offener und abgeschlossener Mengen. Ist $Y' \subseteq X'$ offen, dann ist $X' \setminus Y'$ abgeschlossen und damit auch $f^{-1}(X' \setminus Y')$, weswegen $X \setminus f^{-1}(X' \setminus Y')$ wieder offen ist. Nun gilt aber für $x \in X$ entweder $f(x) \in Y'$ oder $f(x) \in X' \setminus Y'$ und damit ist $f^{-1}(Y') = X \setminus f^{-1}(X' \setminus Y')$ und daher offen. □

1.5 Metrik, Cauchy, Vollständigkeit

Nach so viel Allgemeinheit[21] werden wir wieder ein wenig konkreter und ziehen uns auf metrische Räume zurück. In diesem Kontext kann man wieder das Konzept der Cauchy–Folge wiederholen.

Definition 1.43 (Cauchy–Folge)**.** Eine Folge $a = (a_n : n \in \mathbb{N})$ in einem metrischen Raum X heißt **Cauchy–Folge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon, \qquad m, n \geq n_0. \tag{1.13}$$

Übung 1.5 Zeigen Sie: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge. **Hinweis:** „Übersetzen“ Sie den Beweis aus Teil I der Vorlesung, [26]. ◇

Definition 1.44 (Vollständigkeit)**.** Ein metrischer Raum X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy–Folge einen Grenzwert hat. Die (metrische) **Vervollständigung** eines metrischen Raumes besteht aus der Menge aller Cauchy–Folgen in diesem metrischen Raum mit der Äquivalenzklassenbildung bezüglich

$$a \sim a' \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(a_n, a'_n) = 0.$$

Bemerkung 1.45 (Vervollständigung)**.** Man kann zeigen, siehe [17], daß die Vervollständigung im wesentlichen eindeutig ist und daß X in seine Vervöllständigung **isometrisch** eingebettet ist, d.h. die Metrik der Vervollständigung ist eine Erweiterung der Metrik von X.

[21] Na gut, so wirklich allgemein war das noch nicht, man kann eine ganze Vorlesung über **mengenwertige Topologie** halten und dann immer noch **algebraische Topologie** draufsetzen.

Bemerkung 1.46. Es ist wichtig, sich an dieser Stelle nochmals den Unterschied zwischen **vollständig** und **abgeschlossen** klarzumachen, denn beides hat ja etwas mit Grenzwerten zu tun, die irgendwo dazugehören. Abgeschlossenheit einer Teilmenge bedeutet, daß ein Grenzwert, der im „übergeordneten" metrischen Raum existieren muss, in einer Teilmenge liegt, wenn alle Folgenglieder in dieser Teilmenge liegen, Vollständigkeit hingegen, daß jede „brave" Folge in diesem metrischen Raum auch einen Grenzwert hat.

Definition 1.47. Eine Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raums X ist **dicht** in X, wenn $\overline{Y} = X$, d.h., wenn es in jeder Umgebung jedes $x \in X$ auch ein $y \in Y$ gibt.

Beispiel 1.48 (Dichte Teilmengen)**.**

1. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$. Das ist ein allgemeineres Prinzip: Jeder metrische Raum ist dicht in seiner Vervollständigung.

2. Die invertierbaren Matrizen sind sogar **offen und dicht** in der Menge aller quadratischen Matrizen[22]. Ist A eine beliebige Matrix, dann ist $A + \varepsilon I$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ invertierbar. Offen bedeutet, daß für jede invertierbare Matrix A und $\|B - A\| < \varepsilon$ auch B invertierbar ist. Offene und dichte Teilmengen sind also „praktisch alles".

3. Die Polynome sind dicht in $C[0,1]$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

In einem metrischen Raum kann man Vollständigkeit noch sehr schön auf eine andere Weise beschreiben. Dazu bemerken wir, daß sich direkt aus den Axiomen die Folgerung

$$x = \bigcap_{\varepsilon>0} B_{<\varepsilon}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} B_{\leq\varepsilon}(x), \qquad x \in X, \tag{1.14}$$

ziehen lässt: Jeder Punkt ist *genau* der Durchschnitt aller ihn umgebenden Kugeln, wobei es egal ist, ob diese Kugeln offen oder abgeschlossen sind.

Satz 1.49 (Vollständigkeit)**.** *Ein metrischer Raum X ist genau dann vollständig, wenn jede Folge*

$$B_{\leq\varepsilon_1}(x_1) \supset B_{\leq\varepsilon_2}(x_2) \supset \cdots, \qquad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{1.15}$$

von ineinander verschachtelten abgeschlossenen Kugeln die Eigenschaft

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_{\leq\varepsilon_j}(x_j) \neq \emptyset \tag{1.16}$$

hat.

[22] Als Abstandsbegriff kann man beispielsweise die **Frobeniusnorm** $\|A\|_F := \left(\sum a_{jk}^2\right)^{1/2}$ verwenden, die die Matrix als Vektor auffasst und dessen euklidische Norm bestimmt.

Beweis: „⇒“: Wir betrachten die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, der Zentren, die wegen der Verschachtelung automatisch die Eigenschaft $x_m \in B_{<\varepsilon_n}(x_n)$, $m \geq n$, hat. Da $\varepsilon_n \to 0$ gibt es daher zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0, so daß

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon_n < \varepsilon, \qquad m \geq n \geq n_0,$$

die Folge der x_n ist also eine **Cauchy–Folge** und hat damit einen Grenzwert x^*, der für jedes n in $B_{\leq\varepsilon_n}(x_n)$ liegen muss. Also gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\leq\varepsilon_n}(x_n) \supseteq \{x^*\} \neq \emptyset.$$

„⇐“: Für eine Cauchy–Folge $x = (x_n : n \in \mathbb{N})$ in X wählen wir zu $k \in \mathbb{N}$ Indizes $n(k) < n(k+1) \in \mathbb{N}$ so, daß $d(x_{n(k)}, x_m) < 2^{-k-1}$ für alle $m \geq n(k)$ ist[23]. Mit $B_k := B_{<2^{1-k}}(x_{n(k)})$ bezeichnen wir die Kugel mit Radius $2/2^k = 2^{1-k}$ um $x_{n(k)}$. Für beliebige $k < k'$ und $y \in B_{k'}$ gilt nun[24]

$$\begin{aligned} d(x_{n(k)}, y) &\leq \sum_{j=k}^{k'-1} \underbrace{d(x_{n(j)}, x_{n(j+1)})}_{\leq 2^{-j-1}} + \underbrace{d(x_{n(k')}, y)}_{<2^{1-k'} \leq 2^{-k}} \\ &< 2^{-k-1} \underbrace{\sum_{j=0}^{k'-k-1} 2^{-j}}_{\leq 2} + 2^{-k} \leq 2^{-k} + 2^{-k} \leq 2^{1-k} \end{aligned}$$

das heißt, $B_k \supset B_{k'}$, $k < k'$. Der nach Voraussetzung nichtleere Schnitt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \supseteq \{x^*\},$$

besteht aus Grenzwerten der Folge x, da für $m \geq n(k)$

$$d(x^*, x_m) \leq \underbrace{d(x^*, x_{n(k)})}_{<2^{1-k}} + \underbrace{d(x_{n(k)}, x_m)}_{\leq 2^{-k-1}} < \frac{5}{2^{k+1}} \to 0$$

gilt und somit so daß fast alle Folgenglieder in jeder beliebig kleinen Umgebung um x^* liegen und die Folge damit konvergiert. □

Zum Abschluss sehen wir uns noch eine wichtige Eigenschaft in metrischen Räumen an, die man zwar an dieser Stelle nicht unbedingt braucht, die aber dennoch interessant ist.

Definition 1.50 (Kontraktion)**.** Eine Abbildung $f : X \to X$ von einem metrischen Raum in sich selbst heißt **Kontraktion**, wenn es eine **Kontraktionskonstante** $0 \leq \rho < 1$ gibt, so daß

$$d\,(f(x), f(x')) \leq \rho\, d(x, x'), \qquad x, x' \in X. \tag{1.17}$$

[23] Daß das möglich ist, folgt aus der Tatsache, daß x eine Cauchy–Folge ist.

[24] Wieder mal nur die gute alte Dreiecksungleichung.

Satz 1.51 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Jede Kontraktion* $f : X \to X$ *auf einem vollständigen metrischen Raum* X *hat genau einen* ***Fixpunkt*** x^**, d.h., genau einen Punkt mit* $f(x^*) = x^*$*.*

Beweis: Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Seien x^*, y^* zwei *verschiedene* Fixpunkte, dann gilt

$$0 < d(x^*, y^*) = d\left(f(x^*), f(y^*)\right) \leq \rho d(x^*, y^*),$$

was zum Widerspruch $\rho \geq 1$ führt. Für die Existenz wählen wir irgendein $x_0 \in X$ und bilden die Folge $x_n := f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d\left(f(x_n), f(x_{n-1})\right) \leq \rho\, d\left(x_n, x_{n-1}\right) \leq \rho^2\, d\left(x_{n-1}, x_{n-2}\right) \\ &= \cdots = \rho^n\, d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

und, nach der **Dreiecksungleichung**

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \left(\rho^{n+m-1} + \rho^{n+m-2} + \cdots + \rho^n\right) d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0)\, \rho^n \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j \\ &\leq d(x_1, x_0)\, \rho^n \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{\rho^n}{1-\rho}\, d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Damit ist die Folge der x_n eine **Cauchy–Folge** und da X vollständig ist, hat sie einen Grenzwert x^*. Für diesen gilt nun für jedes n

$$d(x^*, f(x^*)) \leq d(x^*, x_{n+1}) + d(f(x^*), \underbrace{x_{n+1}}_{=f(x_n)}) \leq \underbrace{d(x^*, x_{n+1}) + \rho d(x^*, x_n)}_{\to 0},$$

und da die rechte Seite der Ungleichung für wachsendes n beliebig klein werden kann, die linke Seite aber unabhängig von n ist, folgt, daß $d(x^*, f(x^*)) = 0$, also $x^* = f(x^*)$. □

1.6 Kompakte Mengen

Wir kehren nun noch einmal zur Topologie zurück, um einen weiteren zentralen Begriff einzuführen.

Definition 1.52 (Kompaktheit)**.**

1. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes X heißt **überdeckungskompakt**, wenn es für jede **Überdeckung**

$$Y \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$$

von Y mit offenen Mengen $\mathscr{U}$ eine endliche Teilüberdeckung $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$ gibt, so daß

$$Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

2. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in Y eine konvergente Teilfolge enthält.

In beliebigen topologischen Räumen müssen Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit nicht dasselbe sein; ein Beispiel ist der unendliche Produktraum I^I mit der **Produkttopologie**, der überdeckungskompakt, aber nicht folgenkompakt ist, siehe [30]. Das zu beweisen[25] fällt dann aber doch etwas aus dem Rahmen. Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß in metrischen Räumen beide Konzepte äquivalent sind und wir daher einfach nur von **kompakt** sprechen können.

Satz 1.53 (Kompaktheit)**.** *Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie folgenkompakt ist.*

Für den Beweis brauchen wir ein bisschen Terminologie.

Definition 1.54 (Netze & Topologie)**.** In einem metrischen Raum X definieren wir die folgenden Begriffe:

1. Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ heißt **ε–Netz** für Y, falls es zu jedem $y \in Y$ ein $a \in A$ mit $y \in B_{<\varepsilon}(a)$ gibt.

2. Y heißt **total beschränkt**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein *endliches* ε–Netz für Y gibt.

3. Y heißt beschränkt, wenn es eine Konstante M gibt, so daß $d(y, y') < M$ ist. Die Größe
$$d(Y) := \sup_{y,y' \in Y} d(y, y') \tag{1.18}$$
bezeichnet man als **Durchmesser** von Y, die Größe
$$r(Y) := \inf_{y \in Y} \sup_{y' \in Y} d(y, y') \tag{1.19}$$
als **Radius** von Y.

Übung 1.6 Zeigen Sie: Bei Kugeln B gilt $d(Y) = 2r(Y)$. Gibt es auch nichtleere Mengen, bei denen $d(Y) = r(Y)$ gilt? ◊

Jede total beschränkte Menge ist beschränkt: Wir wählen einfach ein $\varepsilon > 0$ und dazu ein endliches ε–Netz, sagen wir mit N Elementen. Sind nun $y, y' \in Y$ beliebig, dann können wir das Netz so umnumerieren, daß $y \in B_{<\varepsilon}(a_1)$ und $y' \in B_{<\varepsilon}(a_N)$, also ist
$$d(y, y') \leq d(y, a_1) + d(a_1, a_N) + d(y', a_N) < 2\varepsilon + \max_{a,a' \in A} d(a, a') = d(A) + 2\varepsilon.$$
Wegen der Endlichkeit des Netzes ist dann $d(A) < \infty$ und damit auch $d(Y) \leq d(A) + 2\varepsilon < \infty$. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

[25] Für die Kompaktheit von beliebigen Produkträumen benötigt man beispielsweise den Satz von Tychonov, siehe [33].

Beispiel 1.55. Dazu betrachtet man den unendlichdimensionalen **Folgenraum**

$$\ell_1 = \{x = (x_j : j \in \mathbb{N}) : x_j \in \mathbb{R}, \|x\|_1 < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

Die **Einheitskugel** $B_1(0) = \{x \in \ell_1 : \|x\| \leq 1\}$ ist beschränkt, da

$$\|x - x'\|_1 \leq \|x\|_1 + \|x'\|_1 \leq 2,$$

aber die Einheitsfolgen[26] e_j mit

$$(e_j)_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

haben Abstand $\|e_j - e_k\|_1 = 2$, so daß es keine endlichen Netze für $\varepsilon < 1$ geben kann, denn jeder von denen sollte schon in mindestens einer Kugel $B_{<\varepsilon}(a)$ um ein $a \in A$ liegen, oder, umgekehrt, in jeder ε–Kugel um jedes e_j mindestens ein Element von a. Und da für $\varepsilon \leq 1$ die unendlich vielen Kugeln $B_{<\varepsilon}(e_j)$ disjunkt sind, braucht man auch mindestens unendlich viele Elemente von A.

Totale Beschränktheit erlaubt eine sehr schöne Beschreibung folgenkompakter Mengen.

Satz 1.56. *Eine abgeschlossene Menge $Y \subset X$ in einem vollständigen metrischen Raum ist genau dann folgenkompakt, wenn sie total beschränkt ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei Y folgenkompakt und nehmen wir an, es gebe ein $\varepsilon > 0$ für das *kein* endliches ε–Netz existiert. Ausserdem wählen wir irgendein $y_1 \in Y$. Da es kein endliches ε–Netz gibt, gibt es $y_2 \in Y$ mit $d(y_1, y_2) \geq \varepsilon$, dann auch y_3 mit $d(y_1, y_3) \geq \varepsilon$ und $d(y_2, y_3) \geq \varepsilon$ und somit eine ganze Folge y_j mit $d(y_j, y_k) \geq \varepsilon$, $j \neq k$. Das ist aber ein Widerspruch zur Existenz einer konvergenten Teilfolge mit Limes y^* da es da ja für jedes $\eta > 0$ Indizes j, k geben müsste, die

$$\varepsilon \leq d(y_j, y_k) \leq \underbrace{d(y^*, y_j)}_{<\eta} + \underbrace{d(y^*, y_k)}_{<\eta} < 2\eta$$

erfüllen müssten, was für $\eta < \varepsilon/2$ unmöglich wird.

„$\Leftarrow$“: Ist Y total beschränkt und $y = (y_n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge in Y, dann gibt es für jedes k ein *endliches* $\frac{1}{k}$–Netz $A_k \subseteq Y$. Da A_1 nur endlich viele Elemente hat, gibt es ein $a_1 \in A_1$, so daß[27]

$$\#\left(B_{<1}(a_1) \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \infty,$$

[26] Die interessieren ansonsten nur einmal im Jahr am 3. Oktober.

[27] Der Kombinatoriker nennt das **Schubfachprinzip** und wendet es gerne exzessiv an.

es liegen also *unendlich viele* Folgenglieder in der Kugel $B_{<1}(a_1)$. Diese Teilfolge nennen wir y^1 und finden mit genau diesem Argument $a_2 \in A_2$ und eine unendliche Teilfolge y^2, so daß $y^2_n \in B_{<1/2}(a_2)$ und generell eine unendliche Teilfolge y^k mit

$$y^k \in B_{\frac{1}{j}}(a_j), \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Nun bilden wir die **Diagonalfolge** $y' := (y^n_n : n \in \mathbb{N})$, die per Konstruktion die Eigenschaft

$$d(y'_n, y'_m) \leq \frac{2}{n}, \qquad n \leq m,$$

hat, also eine **Cauchy–Folge** ist und wegen der angenommenen Vollständigkeit von X konvergieren muss und wegen der Abgeschlossenheit von Y auch zu Y gehört. □

Proposition 1.57. *Jede überdeckungskompakte Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raums ist abgeschlossen und beschränkt.*

Die Umkehrung von Proposition 1.57 gilt nicht, wie uns Beispiel 1.55 zeigt, denn die Einheitskugel dort ist abgeschlossen und beschränkt, aber eben nicht kompakt.

Beweis: Eine überdeckungskompakte Teilmenge ist immer sogar **total beschränkt**: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist

$$Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} B_{<\varepsilon}(x)$$

eine triviale Überdeckung von Y durch ein ε–Netz. Da wegen der Überdeckungskompaktheit eine endliche Teilmenge genügt, ist Y total beschränkt.

Für die Abgeschlossenheit betrachten zu $x \in X \setminus Y$ die offenen Mengen

$$U_n := \left\{ y \in Y : d(x, y) > \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \Rightarrow \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq Y,$$

so daß $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine **offene Überdeckung** von Y ist. Wegen der Kompaktheit reicht davon eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir[28] $U_1, \ldots, U_N$, so daß $d(x, y) > \frac{1}{N}$ und für jedes $\varepsilon > \frac{1}{N}$ ist somit $B_{<\varepsilon}(x) \cap Y = \emptyset$. Also ist $X \setminus Y$ offen und damit Y abgeschlossen. □

Beweis von Satz 1.53: „⇒“: Sei Y überdeckungskompakt und damit nach Proposition 1.57 auch **abgeschlossen** und beschränkt. Wir werden zeigen, daß Y vollständig und total beschränkt ist, den Rest erledigt dann Satz 1.56. Für $\varepsilon > 0$ verwenden wir die Überdeckungskompaktheit der (trivialen) Überdeckung

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} B_{<\varepsilon}(y) \qquad \Rightarrow \qquad Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{<\varepsilon}(y_j),$$

[28] Wir wählen N als größten von diesen endlich vielen Indizes und vergrößern die Überdeckung nur. Aber eigentlich auch nicht wirklich.

deren Zentren y_j ein endliches ε**–Netz** für Y bilden, weswegen Y auch schon total beschränkt ist. Wäre Y nicht vollständig, dann gäbe es nach Satz 1.49 eine verschachtelte Folge B_k von nichtleeren, abgeschlossenen Kugeln mit leerem Schnitt, deren Komplemente $X \setminus B_k$ dann aber eine offene Überdeckung von Y wären. Dann gäbe es aber wegen der Überdeckungskompaktheit von Y eine endliche Teilmenge der $X \setminus B_k$, die bereits Y überdeckt und damit hätten bereits endlich viele der B_k leeren Schnitt, es gäbe also ein k_0 so daß $B_k = \emptyset$, $k \geq k_0$. Und das wäre ein Widerspruch.

„$\Leftarrow$": Sei Y folgenkompakt und $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von Y. Nach Satz 1.56 ist Y total beschränkt[29] und es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein endliches $\frac{1}{n}$–Netz A_n, für das

$$Y \subseteq \bigcup_{a \in A_n} B_{<\frac{1}{n}}(a) \tag{1.20}$$

erfüllt ist[30]. Wäre nun Y *nicht* überdeckungskompakt, dann gibt es immer mindestens ein $a \in A_n$, für das $B_{<\frac{1}{n}}(a)$ nicht mit endlich vielen Elementen von $\mathscr{U}$ überdeckt werden kann, und das wir a_n nennen. Da Y folgenkompakt ist, enthält a_n per Definitionem eine konvergente Teilfolge $a_{n(k)} \to a^* \in Y$. Sei $U^* \in \mathscr{U}$ ein Element der Überdeckung mit $a^* \in U^*$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß auch $B_{<\varepsilon}(a^*) \subseteq U^*$. Wählen wir aber nun k so, daß $n(k) > 2/\varepsilon$ and $d(a^*, a_{n(k)}) < \varepsilon/2$, dann ist

$$\begin{aligned} d\left(a^*, B_{<\frac{1}{n(k)}}(a_{n(k)})\right) &:= \sup\left\{d(a^*, y) : y \in B_{<\frac{1}{n(k)}}(a_{n(k)})\right\} \\ &\leq \underbrace{d(a^*, a_{n(k)})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\sup\left\{d(a_{n(k)}, y) : y \in B_{<\frac{1}{n(k)}}(a_{n(k)})\right\}}_{\leq\frac{1}{n(k)}<\frac{\varepsilon}{2}} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

das heißt,

$$B_{<\frac{1}{n(k)}}(a_{n(k)}) \subseteq B_{<\varepsilon}(a^*) \subseteq U^*,$$

so daß diese Kugel sogar mit einem einzigen Element von $\mathscr{U}$ überdeckt werden kann, was unserem Konstruktionsprinzip widerspricht, daß *keine* endliche Teilmenge von $\mathscr{U}$ für eine Überdeckung ausreichen würde. □

Zugegeben, das war jetzt ein bisschen länglich und aufwendig, aber dafür haben wir jetzt auch eine Menge über kompakte Mengen und Räume gelernt und können Kompaktheit nun wie folgt definieren.

Definition 1.58 (Kompaktheit)**.** Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines metrischen Raums X heißt **kompakt**, wenn sie **überdeckungskompakt** oder **folgenkompakt** ist[31].

Korollar 1.59. *Jede kompakte Teilmenge Y eines metrischen Raums X ist abgeschlossen und beschränkt.*

[29] Für diese Richtung des Beweises haben wir Vollständigkeit nicht benötigt.

[30] Bestimmte endliche Überdeckungen gibt es immer, nämlich die in (1.20). Wir müssen aber zeigen, daß *jede* offene Überdeckung, also insbesondere $\mathscr{U}$, eine offene Teilüberdeckung enthält. Das nur zur Erinnerung.

[31] Ist ja, wie wir jetzt wissen, dasselbe.

Proposition 1.60. *Jede abgeschlossene Teilmenge $Y' \subseteq Y$ einer kompakten Teilmenge $Y \subseteq X$ eines metrischen Raums X ist kompakt.*

Beweis: Sei $\mathscr{U}'$ eine offene Überdeckung von Y'. Dann ist[32]

$$(X \setminus Y') \cup \bigcup_{U' \in \mathscr{U}'} U'$$

eine offene Überdeckung von X und damit auch von Y. Wegen der Kompaktheit von Y reicht davon eine endliche Teilüberdeckung

$$Y \subseteq (X \setminus Y') \cup U_1' \cup \cdots \cup U_N',$$

und damit ist $U_1', \ldots, U_N'$ eine endliche Überdeckung von Y'. □

Satz 1.61 (Kompakta & Stetigkeit)**.** *Ist $Y \subseteq X$ kompakt und $f : X \to X'$ stetig, dann ist auch $Y' := f(Y) \subseteq X'$ kompakt.*

Beweis: Für eine offene Überdeckung $\mathscr{U}'$ von Y' ist $\mathscr{U} := \{f^{-1}(U') : U' \in \mathscr{U}'\}$ nach Korollar 1.42 eine offene Überdeckung von Y, die eine endliche Teilüberdeckung $U_1, \ldots, U_N$ von Y enthalten muss. Die spielen wir wieder zurück und erhalten die endliche Überdeckung $U_j' := f(U_j)$, $j = 1, \ldots, N$, von $Y' = f(Y)$:

$$Y' \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(U_j')\right) = \bigcup_{j=1}^{N} f\left(f^{-1}(U_j')\right) = \bigcup_{j=1}^{N} U_j',$$

um es dann auch explizit hinzuschreiben. □

Bemerkung 1.62. Anders ausgedrückt besagt Satz 1.61: *Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt*.

Definition 1.63 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : X \to X'$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$d(x, x') < \delta \qquad \Rightarrow \qquad d\left(f(x), f(x')\right) < \varepsilon. \tag{1.21}$$

Gleichmäßige Stetigkeit ist ein *metrischer*, kein *topologischer* Begriff, im Gegensatz zur Stetigkeit.

Satz 1.64 (Kompakta & gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Ist $f : X \to X'$ stetig und $Y \subseteq X$ kompakt, dann ist f auf Y gleichmäßig stetig.*

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ und $y \in Y$ ist $A(y) := f^{-1}\left(B_{<\varepsilon}(f(y))\right)$ eine offene Menge, die y enthält, so daß es $\delta(y) > 0$ mit $B_{<\delta}(y) \subseteq A(y)$. Da

$$\mathscr{U} = \bigcup_{y \in Y} B_{<\frac{1}{2}\delta(y)}(y)$$

[32] Weil es fast nicht auffällt: Hier brauchen wir, daß Y' abgeschlossen ist, denn dann ist $X \setminus Y'$ offen.

eine offene Überdeckung des Kompaktums Y ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$U_j = B_{<\frac{1}{2}\delta(y_j)}(y_j) =: B_{<\delta_j}(y_j), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

von Y. Mit $\delta := \min\{\delta_j : j = 1, \ldots, N\}$ und $y, y' \in Y$ mit $d(y, y') < \delta$ gibt es dann ein j, so daß $y \in U_j$ ist und es gilt

$$d(y_j, y') \leq \underbrace{d(y_j, y)}_{<\delta_j} + \underbrace{d(y, y')}_{<\delta\leq\delta_j} < 2\delta_j = \delta(y_j)$$

sowie $d(y_j, y) < \delta_j < \delta(y_j)$. Damit ist

$$d\left(f(y), f(y')\right) \leq d\left(f(y), f(y_j)\right) + d\left(f(y_j), f(y')\right) < 2\varepsilon$$

nach der Definition von $\delta(y)$. □

1.7 Realismus

Nach so viel Abstraktion[33] wollen wir wieder etwas konkreter werden und uns die Begrifflichkeiten für den Spezialfall ansehen, daß ein endlichdimensionaler **normierter Raum** vorliegt, den wir immer mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren können. Auf diesem verwenden wir die Standardnormen[34]

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \qquad \|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \tag{1.22}$$

die allesamte Spezial- bzw. Grenzfälle der **p–Norm**

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{1.23}$$

sind, was sich im Fall $n = 1$ alles auf $\|x\| = |x|$ reduziert. Wenn die konkrete Norm keine Rolle spielt, schreiben wir auch im $\mathbb{R}^n$ einfach $\|x\|$.

Übung 1.7 Zeigen Sie: $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$. Oder für Mutige: $B_p \subset B_{p'}$, $p < p'$. ◊

Beginnen wir mit dem allereinfachsten Fall, nämlich mit $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\| = |\cdot|$. Dann sind die Kugeln

$$B_{<r}(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} = (x - r, x + r) \qquad \text{und} \qquad B_{\leq r}(x) = [x - r, x + r]$$

gerade die offenen und abgeschlossenen Intervalle der Länge $2r$ mit Mittelpunkt x. Die offenen Mengen der Topologie sind dann alle endlichen Durchschnitte und beliebige Vereinigungen der offenen Intervalle und alles, was man daraus wieder

[33] Nicht daß das in der Mathematik etwas schlechtes oder gar verwerfliches wäre ...

[34] Es gibt Leute, die sagen, daß es auf dem $\mathbb{R}^n$ eigentlich nur diese drei Normen bzw. diese drei Werte von p gibt, alles andere ist künstlich.

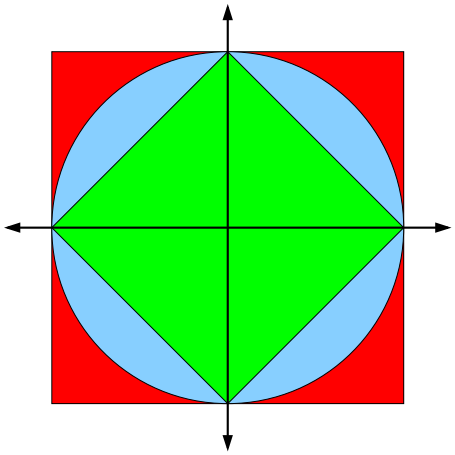

Abbildung 1.1: Die Einheitskugeln $B_p = \{x : \|x\|_p \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^2$ für $p = 1$ (grün), $p = 2$ (blau) und $p = \infty$ (rot). Diese Kugeln sind wirklich ineinander enthalten, sie Übung 1.7.

per Durchschnitt und Vereinigung bilden kann und so weiter. Alle einpunktigen Mengen sind abgeschlossen, da ihr Komplement

$$\mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$$

Vereinigung von offenen Mengen ist.

Übung 1.8 Zeigen Sie, daß für $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $(-\infty, x)$ und (x, ∞) offen sind. ◊

Beispiel 1.65. Die offenen Kugeln $B_{<2^{-k}}\left(\frac{2^k-3}{2^k}\right)$, $k = 2, 3, \ldots$, also $B_{<\frac{1}{4}}(\frac{1}{4})$, $B_{<\frac{1}{8}}(\frac{5}{8})$, $B_{<\frac{1}{16}}(\frac{13}{16}), \ldots$ überdecken zusammen mit den offenen Kugeln $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ gerade $\mathbb{R} \setminus \{1 - 2^{-k} : k \in \mathbb{N}\}$. Damit ist die Menge $\{1 - 2^{-k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ abgeschlossen. Das können wir aber nicht direkt aus den Axiomen folgern[35], aber das Komplement ist ja als Vereinigung offener Mengen offen.

$\{1 - 2^{-k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ ist auch kompakt, die ebenfalls beschränkte Menge $\{1 - 2^{-k} : k \in \mathbb{N}\}$ hingegen nicht, da beispielsweise die Kugeln $B_{<2^{-k-3}}(1 - 2^{-k})$, $k = 1, 2, \ldots$, eine offene Überdeckung dieser Menge bilden, von der keine endliche Teilüberdeckung ausreicht. Eine beliebige offene Kugel um 1 herum „schluckt" andererseits fast alle Elemente der Menge und den Rest kann man mit endlich vielen Kugeln überdecken.

Etwas spannender wird das im metrischen Raum $X = [0, 1]$ mit dem kanonischen Betrag. Hier sind die Kugeln

$$B_{<r}(x) = \begin{cases} (x - r, x + r), & x - r \geq 0,\ x + r \leq 1, \\ [0, x + r), & x - r < 0,\ x + r \leq 1, \\ (x - r, 1], & x - r \geq 0,\ x + r > 1, \\ [0, 1], & x - r < 0,\ x + r > 1, \end{cases}$$

[35] Das geht nur für *endliche* Vereinigungen.

der Schnitt der entsprechenden Kugeln in $\mathbb{R}$ mit $[0,1]$. Insbesondere sind hier jetzt alle Intervalle der Form $[0,x)$ und $(x,1]$, $x \in [0,1]$ *offen*. $X = [0,1]$ ist ein **kompakter metrischer Raum**, denn wir wissen ja aus Teil 1, daß der Raum folgenkompakt und damit auch generell kompakt ist.

Beispiel 1.66. $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder als eigener topologischer Raum mit der induzierten Metrik $d(x,x') = |x-x'|$ hat auch nette Eigenschaften:

1. $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$.
2. $\partial\mathbb{Q} = \partial(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
3. Das Intervall $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ ist weder in $\mathbb{R}$ noch in $\mathbb{Q}$ kompakt: In $\mathbb{R}$ ist es nicht abgeschlossen, $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

Kugeln im $\mathbb{R}^n$ sind dann

$$B_{<r}(x) = \{y : \|x-y\| < r\}, \qquad B_{\le r}(x) = \{y : \|x-y\| \le r\}.$$

Die Gegenstücke zu Intervallen sind, unabängig von der Norm, die **Quader**

$$[a,b] = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n], \qquad a = (a_1,\ldots,a_n), b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.24}$$

Jede beschränkte Menge[36] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich in einen Quader[37] einpassen: Sei $x \in \Omega$ ein beliebiger Punkt, dann ist $\|x-y\|$ für alle $y \in \Omega$ beschränkt und damit auch $|x_j - y_j| \le M_j$, $j = 1,\ldots,n$. Setzen wir $M = (M_1,\ldots,M_n)$, dann ist

$$\Omega \subseteq [x-M, x+M].$$

Wir haben jetzt abgeschlossene Quader definiert, aber ganz analog kann man natürlich auch offene oder halboffenen Quader einführen. Abgeschlossene Quader spielen eine besondere Rolle.

Lemma 1.67 (Quader & Kompaktheit)**.** *Im $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossene Quader kompakt.*

Beweis: Wir zeigen Folgenkompaktheit. Dazu teilen wir den Quader $[a,b]$ mit Hilfe seines Mittelpunkts $\frac{1}{2}(a+b)$ in 2^n Teilquader der Form $x + \frac{1}{2}[a,b]$, $x_j \in \{0, \frac{1}{2}(a_j+b_j)\}$. In mindestens einem der Teilquader finden sich unendlich viele Folgenglieder, und diesen Quader nennen wir $[a^1,b^1]$, wobei

$$b_j^1 - a_j^1 = \frac{1}{2}(b_j^0 - a_j^0) := \frac{1}{2}(b_j - a_j), \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Nun unterteilen wir $[a^1,b^1]$ wieder in 2^n Teilquader finden einen Quader mit unendlich vielen Folgengliedern und so weiter und erhalten so eine Folge $[a^k,b^k]$ von ineinander verschachtelten Teilquader mit Seitenlängen

$$b_j^k - a_j^k = \frac{b_j - a_j}{2^k}, \qquad j = 1,\ldots,n,\ k \in \mathbb{N},$$

[36] Die Schreibweise „Ω“ für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist gebräuchlich und hat sich eingebürgert.
[37] In der Computergrafik und Informatik spricht man hier gerne von der **bounding Box**.

und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, damit auch der von $\mathbb{R}^n$ liefert und das Argument aus Satz 1.49, daß der Durchschnitt der Quader einen Punkt x^* enthält, der Grenzwert der so konstruierten Teilfolge ist[38]. □

So einfach die Beobachtung ist, so schön sind die Folgerungen, die wir aus Lemma 1.67 ziehen können.

Korollar 1.68. *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis: Proposition 1.57 sagt, daß die Richtung „$\Rightarrow$" sogar ein einem allgemeineren Kontext gilt. Für „$\Leftarrow$" sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann gibt es einen abgeschlossenen Quader $[a, b] \supseteq \Omega$ und nach Proposition 1.60 ist Ω als abgeschlossene Teilmenge[39] eines Kompaktums auch kompakt. □

Korollar 1.69. *Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt auf einer kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ ihr Minimum und Maximum an.*

Beweis: Da f stetig ist, ist $f(K)$ nach Satz 1.61 eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und damit nach Korollar 1.68 abgeschlossen und beschränkt. Beschränkt bedeutet, daß es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\sup_{x \in K} f(x) \leq M$$

ist und ist x_n eine Folge mit $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots$ und $f(x_n) \to \sup_K f(x)$, dann enthält diese Folge eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert

$$M \geq y^* = \lim_{k \to \infty} f(x_{n(k)}) \geq \sup_{x \in K} f(x)$$

erfüllt, also $y^* = \max_K f(x)$. □

[38] Sollte das jemandem bekannt vorkommen: Das ist auch das Argument aus dem **Satz von Bolzano–Weierstraß** aus Teil 1 der Vorlesung.

[39] Denn Ω war ja als abgeschlossen und beschränkt vorausgesetzt.

The simplicities of natural laws arise through the complexities of the languages we use for their expression.

E. Wigner

2 Kurven

In diesem Kapitel sehen wir uns kurz Kurven an, also Funktionen von einem Intervall in den $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

2.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 2.1 (Kurve)**.** Eine **Kurve** f ist eine **stetige Abbildung** von einem Intervall I in den $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Manchmal nennt man f auch eine **Parametrisierung** der Kurve und bezeichnet den **Graph** $f(I) \subset \mathbb{R}^d$ als Kurve.

Eine Kurve lässt sich als **Vektor**[40] $f = (f_j : j = 1, \ldots, d)$ schreiben, die f_j bezeichnet man als **Komponentenfunktionen**.

Beispiel 2.2. Eine **polynomiale Kurve** ist eine Kurve, bei der jede Komponentenfunktion ein Polynom, sagen wir vom Grad[41] n ist. Damit ist

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_{1k} x^k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} a_{dk} x^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{dk} \end{pmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

ein Vektor aus Polynomen und ein Polynom mit Vektoren als Koeffizienten sind also dasselbe. Dies nutzt am im **CAGD**[42] auch kräftig aus.

Definition 2.3. Eine Kurve heißt **differenzierbar**, wenn alle Komponentenfunktionen differenzierbar sind. Die **Tangente** einer differenzierbaren Kurve ist

$$f' = \left(f_j' : j = 1, \ldots, d\right) = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_d' \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

[40] Eigentlich reicht **Tupel**, aber die Rechenoperationen des Vektorraums $\mathbb{R}^d$ nutzen wir hier dankbar mit, also ist „Vektor" angemessen.

[41] Da es nur endlich viele Komponenten gibt, können wir immer den höchsten der auftretenden Grade verwenden.

[42] **C**omputer **A**ided **G**eometric **D**esign

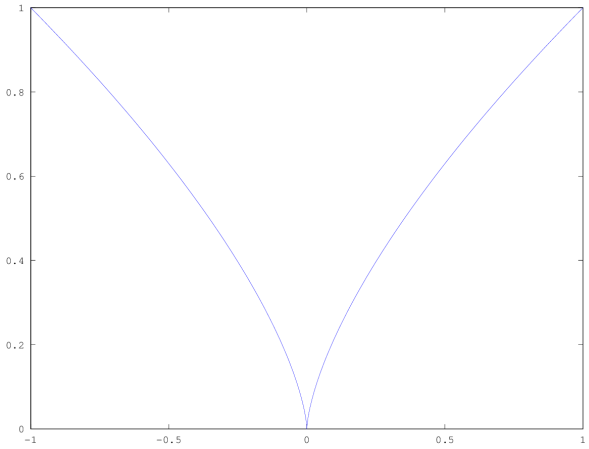

Abbildung 2.1: Die **Neilsche Parabel**

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad x \in [-1, 1],$$

ist eine einfache polynomiale Kurve mit einer sichtbaren Spitze und dort alles andere als glatt im geometrischen Sinne..

Beispiel 2.4 (Differenzierbare Kurven)**.** Offensichtlich ist jede polynomiale Kurve differenzierbar, sogar unendlich oft. Differenzierbare Kurven können aber Ecken haben, wie Abb. 2.1 deutlich zeigt, wo wir eine Spitze für $x = 0$ haben. Sieht man genau hin, stellt man aber auch fest, daß $f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, und daß diese Stelle differentialgeometrisch „böse“ ist.

Definition 2.5. $x \in I$ heißt **singulärer Punkt** der Kurve $f : I \to \mathbb{R}^d$, wenn $f'(x) = 0$ ist. Die Kurve heißt **regulär**, wenn $f'(x) \neq 0$, $x \in I$, ist.

Bemerkung 2.6 (Parametrisierung)**.** Den Unterschied zwischen einer Kurve als Bild und deren Parametrisierung kann man sich sehr einfach am Beispiel

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^n \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = x^n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, , \qquad x \in I = [0, 1],$$

deren Bild $f(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Verbindungsstrecke zwischen $(0, \ldots, 0)$ und $(1, \ldots, 1)$ ist. Die Tangenten hingegen unterscheiden sich je nach n, die Bahn wird also sozusagen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten abgefahren.

2.2 Bogenlänge

Als nächstes wollen wir uns mit der **Länge** einer Kurve beschäftigen, die, der Einfachheit halber, auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ gegeben sein soll.

Geometrisch ist die Idee einfach: Wir tasten die Kurve ab, indem wir die Werte $f(x_j)$, $j = 0, \dots, N$, mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ verwenden und bestimmen dann die Länge des dadurch gegebenen Streckenzugs, siehe Abb, 2.2, wobei

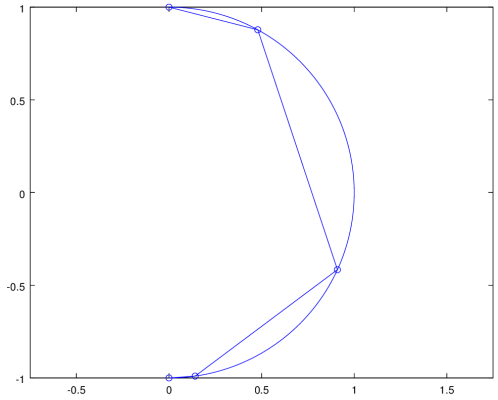

Abbildung 2.2: Grobe Abtastung des Halbkreises $f(x) = (\sin x, \cos x)$, $x \in [0, \pi]$.

sich die Länge des Streckenzugs als

$$Lf(x_0, x_1, \dots, x_N) := \sum_{k=1}^{N} \left\| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right\|_2 \tag{2.2}$$

bestimmt. Diese Länge hängt natürlich von den gewählten Punkten x_j ab, aber intuitiv ist die Länge der Kurve der Grenzwert, der sich ergibt, wenn man die Abtastung fein genug wählt. Funktionen, für die das gilt, haben einen eigenen Namen.

Definition 2.7 (Rektifizierbarkeit)**.** Eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^d$ heißt **rektifizierbar** mit **Länge** L, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle Abtastungen $a = x_0 < \cdots < x_N = b$ mit $|x_j - x_{j-1}| \le \delta$, $j = 1, \dots, N$, die Abschätzung

$$|Lf(x_0, x_1, \dots, x_N) - L| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Die Länge einer rektifizierbaren Funktion bezeichnet man auch als **Bogenlänge**.

Übung 2.1 Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion f ist $Lf(x_0, \dots, x_N) \le L$. ♢

Für differenzierbare Funktionen kann man die Länge auch recht einfach berechnen.

Satz 2.8 (Bogenlänge)**.** *Jede stetig differenzierbare Kurve* $f : I \to \mathbb{R}^d$ *ist rektifizierbar mit Länge*

$$L = \int_I \|f'(x)\|_2 \, dx. \tag{2.3}$$

Bevor wir den Satz beweisen, ein paar Bemerkungen.

Bemerkung 2.9 (Bogenlänge)**.**

1. Die Berechnung der Bogenlänge wird in der Praxis dadurch ein wenig unangenehmer, daß im Integral eine Wurzel auftaucht:
$$L = \int_I \sqrt{\left(f_1'(x)\right)^2 + \cdots + \left(f_d'(x)\right)^2}\, dx. \tag{2.4}$$
2. Bei Teilen des Kreises ist die angenehmer, denn da haben wir
$$L = \int_a^b \left\| \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \right\|_2 dx = \int_a^b \underbrace{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}}_{=\sqrt{1}=1}\, dx = \int_a^b 1\, dx = b - a.$$
3. Dahinter steckt System! Wann immer die Tangenten einer Funktion f überall Länge 1 haben, also $\|f'(x)\|_2 = 1$, dann ist die Bogenlänge einfach die Breite des Intervalls I. Wir werden noch sehen, daß man das immer „erzwingen“ kann.
4. Ist $f \in C^1(I)$ eine differenzierbare Funktion, dann können wir uns den **Graph** dieser Funktion ansehen und dessen Länge bestimmen, also die Bogenlänge der Kurve $x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, die sich dann als
$$L = \int_I \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{2.5}$$
ergibt.

Jetzt machen wir uns aber an den Beweis von Satz 2.8, zuerst mit einer technischen Bemerkung.

Lemma 2.10. *Zu jeder stetig differenzierbaren Kurve $f : I \to \mathbb{R}^d$, I kompakt*[43] *und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so daß*
$$x \neq x',\ |x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left\| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} - f'(x) \right\|_2 < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Beweis: Die Funktionen f_j' sind stetig und damit wegen der Kompaktheit von I auch **gleichmäßig stetig** auf I, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein[44] $\delta > 0$ mit
$$|x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_j'(x) - f_j'(x')| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, d.$$
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung[45] gibt es außerdem Punkte $\xi_j \in [x, x']$, also insbesondere $|\xi_j - x| < \delta$, mit
$$\frac{f_j(x) - f_j(x')}{x - x'} = f_j'(\xi_j), \qquad j = 1, \ldots, d,$$

[43] Weil es im Beweis eine Rolle spielt, sagen wir es jetzt noch einmal explizit dazu.
[44] Erst eines für jedes j und dann das kleinste unter diesen endlich vielen für alle.
[45] Analysis 1! Siehe beispielsweise [12, 49.1, S. 279]

und damit

$$\left|\frac{f_j(x)-f_j(x')}{x-x'}-f_j'(x)\right| = \left|f_j'(\xi_j)-f_j'(x)\right| < \varepsilon,$$

was letztlich die gewünschte Abschätzung

$$\left\|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{d}\left|\frac{f_j(x)-f_j(x')}{x-x'}-f_j'(x)\right|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{d\varepsilon^2} = \sqrt{d}\varepsilon$$

liefert. □

Beweis von Satz 2.8: Wir erinnern uns an die Annäherung des Integrals durch eine **Riemannsumme**, die wir in Teil 1 kennengelernt haben: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Punkte $a = x_0 < \cdots < x_N = b$, $I = [a,b]$, mit $|x_j - x_{j-1}| < \delta$ und

$$\left|\int_a^b \|f'(x)\|_2\,dx - \sum_{j=1}^{N}\|f'(x_j)\|_2\,(x_j-x_{j-1})\right| < \varepsilon$$

Ist δ außerdem so klein, daß es die Voraussetzungen von Lemma 2.10 erfüllt, dann ist[46]

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_j-x_{j-1}) &> \left\|f(x_j)-f(x_{j-1})-f'(x_j)(x_j-x_{j-1})\right\| \\ &\ge \left|\left\|f(x_j)-f(x_{j-1})\right\|_2 - \left\|f'(x_j)(x_j-x_{j-1})\right\|_2\right|\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b \|f'(x)\|_2\,dx - \sum_{j=1}^{N}\|f(x_j)-f(x_{j-1})\|_2\right| \\ &\quad\le \underbrace{\left|\int_a^b \|f'(x)\|_2\,dx - \sum_{j=1}^{N}\|f'(x_j)\|_2\,|x_j-x_{j-1}|\right|}_{<\varepsilon} \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{N}\underbrace{\left|\|f'(x_j)\|_2\,(x_j-x_{j-1}) - \|f(x_j)-f(x_{j-1})\|_2\right|}_{<\varepsilon(x_j-x_{j-1})} \\ &\quad< \varepsilon\left(1+\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{j-1})\right) = \varepsilon(1+b-a),\end{aligned}$$

so daß die Kurve rektifizierbar ist und die angegebene Länge hat. □

Bleibt nur noch die Frage nach einer nicht rektifizierbaren Kurve.

Beispiel 2.11 (Nicht rektifizierbare Kurve)**.** Die Kurve

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ x\cos\frac{\pi}{x}\end{pmatrix}, \qquad x \in (0,1],$$

[46] Wieder einmal die Dreiecksungleichung nach unten ...

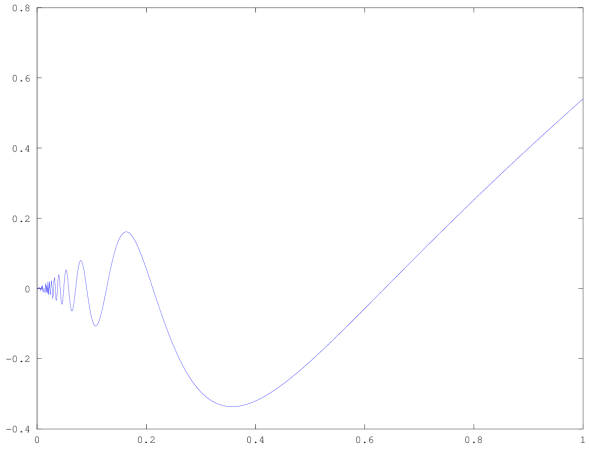

Abbildung 2.3: Die nicht rektifizierbare Kurve aus Beispiel 2.11.

siehe Abb. 2.3, mit der stetigen Fortsetzung $f(0) = (0,0)$ ist *nicht* rektifizierbar. Dazu betrachtet man $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, zusammen mit den Endpunkten $0, 1$. Da

$$f(x_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k}\cos k\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^k \end{pmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|_2^2 &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k-1)}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right)^2 \geq \frac{2}{(k-1)^2}, \end{aligned}$$

also $\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|_2 \geq \frac{1}{k}$. Die Unterteilung basierend auf den Punkten

$$0, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1 = 1$$

hat daher die Länge

$$L = \|f(x_n)\|_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

was sich nicht gleichmäßig in n beschränken lässt.

2.3 Reparametrisierung

Wenn uns nur die Form, also formal der **Graph** einer Kurve interessiert, dann ist es ja reichlich irrelevant, wie die Kurve konkret parametrisiert ist und es gibt viele in diesem Sinne äquivalente Darstellungen einer Kurve.

Definition 2.12 (Reparametrisierung)**.** Eine Funktion $\varphi : I' \to I$ heißt **Reparametrisierung** einer Kurve $f : I \to \mathbb{R}^d$, wenn φ stetig und bijektiv ist. Die Reparametrisierung heißt **regulär**, wenn ausserdem $\varphi \in C^1(I')$ und $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in I'$, erfüllt ist.

Bemerkung 2.13.

1. Offensichtlich ist $f(\varphi(I')) = f(I)$, eine Reparametrisierung ändert also nichts an der Kurve als Punktmenge.

2. Bei der Tangente ist das schon anders, denn die **Kettenregel** liefert für differenzierbares φ, daß

$$\frac{d}{dx} f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\, \varphi'(x). \tag{2.7}$$

3. Reguläre Reparametrisierungen können entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ erfüllen. Im ersten Fall nennt man sie **orientierungstreu**, für den anderen Fall gibt es keinen eigenen allgemein gebräuchlichen Namen.

4. Sind f und φ regulär, so ist wegen (2.7) auch die reparametrisierte Kurve $f \circ \varphi$ regulär.

Zum Abschluss dieses Kapitels konstruieren wir eine besondere Reparametrisierung[47]. Dazu betrachten wir für eine **reguläre Kurve** f die Funktion

$$x \mapsto \ell(x) := Lf(x) := \int_a^x \|f'(t)\|_2 \, dt, \qquad x \in I,$$

die für jedes $x \in [a, b] =: I$ die **Bogenlänge** der Kurve von a nach x misst. Da

$$\ell'(x) = \|f'(x)\|_2 > 0, \qquad x \in I,$$

hat die Funktion $\ell = Lf$ eine Inverse

$$\varphi = Lf^{-1} : [0, L] \to I, \qquad [0, L] \ni s = \int_a^{\varphi(s)} \|f'(t)\|_2 \, dt, \tag{2.8}$$

für die

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\ell'(\varphi(x))} = \left\|f'\left(\varphi(x)\right)\right\|_2^{-1}, \qquad x \in [0, L],$$

gilt. Die Reparametrisierung $f_\varphi := f \circ \varphi$, die wir so erhalten, hat nun eine besondere Eigenschaft.

Definition 2.14. Eine rektifizierbare Kurve $f : I \to \mathbb{R}^d$ heißt **bogenlängenparametrisiert**, wenn $I = [0, L]$ und $Lf(x) = x$, $x \in I$, ist.

Proposition 2.15 (Bogenlängenparametrisierung)**.** *Eine differenzierbare Kurve* f *ist genau dann bogenlängenparamtrisiert, wenn* $\|f'(x)\|_2 = 1$, $x \in [0, L]$ *ist.*

[47] Um nicht zu sagen, *die* Reparametrisierung schlechthin.

Beweis: Ist f bogenlängenparametrisiert, dann ist

$$x = Lf(x) = \int_0^x \|f'(t)\|_2 \, dt \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\int_0^x \|f'(t)\|_2 \, dt = \|f'(x)\|_2.$$

Ist umgekehrt $\|f'(x)\|_2 = 1$, dann ist

$$Lf(x) = \int_0^x \underbrace{\|f'(t)\|_2}_{=1} \, dt = \int_0^x 1 \, dt = x.$$

□

Die Bogenlängenparametrisierung ist eine **intrinsische Eigenschaft** der Kurve und jede differenzierbare Kurve kann mit der Funktion φ aus (2.8) reparametrisiert werden und erfüllt danach

$$\|f'_\varphi(x)\|_2 = \left\|f'\left(\varphi(x)\right)\ \varphi'(x)\right\|_2 = \frac{\|f'(\varphi(x))\|_2}{\|f'(\varphi(x))\|_2} = 1.$$

Zur geometrischen Darstellung einer Kurve[48] verwendet man daher in der Praxis normalerweise eine Bogenlängenparametrisierung.

[48] Also wenn man sich eigentlich nur für deren Graph interessiert.

An educated Bavarian will admit to you that, academically speaking, the North German is more correct; but he will continue to speak South German and to teach it to his children.

J. K. Jerome, *Three Men on the Bummel*

3 Differentialrechnung in mehreren Variablen

Jetzt betrachten wir Funktionen

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

in mehreren Variablen. In der Analysis nennt man so etwas eine **multivariate Funktion**, in der Stochastik steht dieser Terminus hingegen für eine **vektorwertige Funktion**, also eine **Kurve** in unserer Sprechweise[49]. Mit diesen Funktionen wollen wir nun Differentialrechnung betreiben, nachdem die Stetigkeit ja im Kapitel über metrische Räume abgehandelt wurde.

3.1 Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

Die Intuition der partiellen Ableitung nach x_j ist sehr einfach: Wir betrachten die anderen Variablen $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ als Konstanten und leiten die univariate Funktion ab:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = f\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n\right)'.$$

Das geht natürlich auch formal.

Definition 3.1 (Partielle Ableitung)**.**

1. Mit $e_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$, bezeichnen wir den jten **Einheitsvektor** im $\mathbb{R}^n$, also
$$(e_j)_k = e_{jk} = \delta_{jk}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$
2. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt **partiell differenzierbar** nach der jten Koordinate an $x \in U$, wenn der Grenzwert[50]
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} \tag{3.2}$$

[49] Dies nur als weiterer Hinweis auf die durchaus babylonische Sprachverwirrung zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik.

[50] Wieder mit der Grundannahme, daß h immer so klein ist, daß $x + he_j \in U$ ist.

existiert.

3. Die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ nennt man **partielle Ableitung** von f nach x_j. Ist diese Funktion stetig, so heißt f **stetig partiell differenzierbar**.

4. Mit $C^1(U)$ bezeichnet man die Menge aller auf U stetig partiell differenzierbaren Funktionen.

5. Der Vektor
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f \end{pmatrix} (x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) : j = 1, \ldots, n \right) \tag{3.3}$$
heißt **Gradient** von f an der Stelle x.

Die Definition ist wirklich klar und einfach, aber wir sollten uns das trotzdem an ein paar Beispielen ansehen.

Beispiel 3.2.

1. Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^3 - 1$ sind
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 3y^2, \qquad \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 0.$$

2. Für $f(x, y, z) = xy^2z^3$ ergibt sich entsprechend
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = y^2z^3, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 2xyz^3, \qquad \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 3xy^2z^2.$$

Übung 3.1 Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, für die
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$$
ist. ◇

Beispiel 3.3 (Lineare Funktionen)**.** Eine **lineare Funktion**, genauer **affine Funktion**[51], ist gegeben als
$$f(x) = a^T x + b = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + b, \qquad a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R},$$
wobei wir Vektoren jetzt immer als Spaltenvektoren sehen und ein **inneres Produkt** bzw. **Skalarprodukt** $\langle x, y \rangle \mapsto x^T y$ verwenden[52]. Die partiallen Ableitungen sind damit
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = a_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$
also $\nabla f = a$.

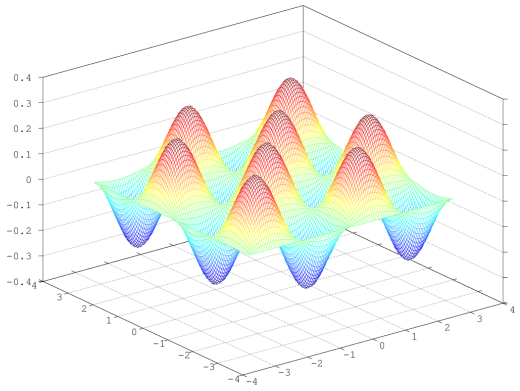

Abbildung 3.1: Die Funktion $f(x,y) = \sin x \cos x \sin y \cos y$ aus Beispiel 3.4.

Da die partiellen Ableitungen ja „ganz normale“ univariate Ableitungen sind, übertragen sich die Rechenregeln wir Produktregel und Kettenregel.

Beispiel 3.4 (Rechenregeln)**.**

1. Der „Eierkarton“

$$f(x,y) = \sin x \cos x \sin y \cos y, \qquad (x,y) \in [-\pi,\pi]^2,$$

hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \sin y \cos y \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f = \sin x \cos x \left(\cos^2 y - \sin^2 y\right),$$

die man ganz normal mit der **Produktregel** bestimmt.

2. Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

ergeben sich mit der **Kettenregel** als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-1/2} 2x_j = \frac{2x_j}{\|x\|_2}, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Die partielle Ableitung ist eine univariate Ableitung in Koordinatenrichtung. Da Koordinaten eigentlich etwas eher künstliches sind, kann man die Sache auch koordinatenfreier angehen.

[51] Will man ganz genau sein, so müsste man beim Vorhandensein eines konstanten Terms von einer affinen Funktionen sprechen, trotzdem ist „linear“ gebräuchlicher.

[52] Und gleich als Warnung: Ganz ohne lineare Algebra geht es in der Analysis II nicht mehr.

Definition 3.5 (Richtungsableitung)**.** Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **richtungsdifferenzierbar** in **Richtung** $y \in \mathbb{R}^n$, wenn der Grenzwert

$$D_y f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hy) - f(x)}{h} \tag{3.4}$$

existiert. Die Funktion $D_y f$ heißt **Richtungsableitung** von f in Richtung y an Stelle x.

Bemerkung 3.6. Die Richungsableitung erhält man, indem man die univariate Funktion

$$f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_y(t) := f(x + ty),$$

betrachtet und dann $D_y f(x) = f_y'(0)$ setzt.

Dank der univariaten Interpretation der Richtungsableitung können wir sofort den Mittelwertsatz und einen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung übertragen.

Definition 3.7. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$[x, y] := \{(1 - \alpha)\, x + \alpha\, y : \alpha \in [0, 1]\} \tag{3.5}$$

die **konvexe Hülle** der beiden Punkte bzw. den **Streckenzug**, der x und y verbindet.

Satz 3.8. *Für $f : U \to \mathbb{R}$, $x \in U$ und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $[x, y] \subset U$ gilt:*

1. ***(Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung)***

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 D_{y-x} f(x + t(y - x))\, dt \tag{3.6}$$

2. ***(Mittelwertsatz)*** *Ist $D_{y-x} f$ stetig auf $[x, y]$, dann gibt es $\xi \in [x, y]$ so daß*

$$f(y) - f(x) = D_{y-x} f(\xi). \tag{3.7}$$

Beweis: Wir setzen wieder $f_y(t) := f(x + t(y - x))$ und erhalten

$$f_y(0) = f(x), \qquad f_y(1) = f(y),$$

sowie aus dem univariaten Hauptsatz, siehe [26],

$$f(y) - f(x) = f_y(1) - f_y(0) = \int_0^1 f_y'(t)\, dt = \int_0^1 D_{y-x} f(x + t(y - x))\, dt,$$

wie in (3.6) behauptet. Wenden wir darauf den **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

$$f_y(1) - f_y(0) = f_y'(\tau), \qquad \tau \in (0, 1),$$

dann folgt (3.7) direkt aus (3.6) mit $\xi = x + \tau(y - x)$. □

Die Identität (3.7) sieht ein wenig so aus, als würde die Entfernung zwischen x und y keine Rolle spielen, sondern nur die Richtung. Dem ist natürlich nicht so.

Proposition 3.9. *Die Richtungsableitung ist* ***homogen*** *in* y*, d.h.*

$$D_{\lambda y} f(x) = \lambda D_y f(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Beweis: Folgt direkt aus

$$\frac{f(x + h\lambda y) - f(y)}{h} = \lambda \frac{f(x + \lambda h\, y) - f(y)}{\lambda h} =: \lambda \frac{f(x + h' y) - f(y)}{h'}$$

und dem Grenzübergang $h' \to 0$. □

3.2 Mehrfache partielle Ableitungen

Was man einfach machen kann, das lässt sich natürlich auch iterieren und führt zu mehrfachen partiellen Ableitungen. Der einfachste Fall ist die **gemischte Ableitung**

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f := \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f \tag{3.9}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f := \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f, \tag{3.10}$$

und diese Unterscheidung ist durchaus sinnvoll.

Beispiel 3.10 (Gemischte Ableitungen)**.** Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0, \end{cases} \qquad (x,y) \in [-1,1]^2, \tag{3.11}$$

siehe Abb. 3.2, erfüllt[53]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \left((x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 4x^2 y^2 \right) = y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$. Analog erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \left((x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 4x^2 y^2 \right) = x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

also $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $x \neq 0$. Damit ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

[53] Auch nochmal eine Möglichkeit, die Rechentechniken einzuüben.

und entsprechend

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1,$$

was insgesamt eben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

liefert.

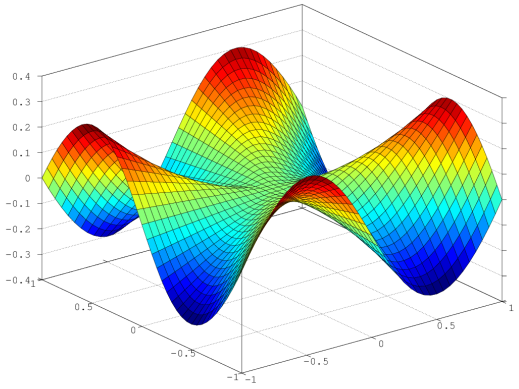

Abbildung 3.2: Die Funktion aus Beispiel 3.10. Sie sieht eigentlich sehr brav, glatt und harmlos aus.

Trotzdem ist die Funktion aus (3.11) glücklicherweise ein seltenes Beispiel. Im Normalfall geht es dann doch gut.

Satz 3.11. *Existieren die gemischten partiellen Ableitungen* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ *und* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, $1 \le j < k \le n$, *der Funktion* f *in einer Umgebung* U *eines Punktes* $x \in \mathbb{R}^n$ *und sind stetig in* x, *dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x). \tag{3.12}$$

Beweis: Seien h_j, h_k so gewählt, daß $x + t_j e_j + t_j e_k$ für $|t_j| \le h_j$ und $|t_k| \le h_k$ in einer in U enthaltenen ε–Umgebung von x liegen und sein $t_j, t_k \neq 0$ passend. Dann ist die Funktion

$$\varphi(t) := f\left((x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n) + t_k\, e_k\right) - f\left(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n\right),$$

nach Voraussetzung für alle $t \in [x_j, x_j + t_j]$ differenzierbar und nach dem[54] **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** ist

$$\varphi(t + t_j) - \varphi(t) = t_j\, \varphi'(\xi), \qquad \xi \in [x_j, x_j + t_j].$$

[54] Inzwischen fast schon altbewährten ...

Für die **Vorwärtsdifferenz**

$$\begin{aligned} F(t_j, t_k) &:= f(x + t_j e_j + t_k e_k) - f(x + t_j e_j) - f(x + t_k e_k) + f(x) \\ &= \varphi(x_j + t_j) - \varphi(x_j) = t_j\, \varphi'(\xi_j) = t_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi + t_k e_k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) \right), \end{aligned}$$

und $\xi = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = x + (\xi_j - x_j)e_j$ ergibt eine weitere Anwendung des Mittelwertsatzes, daß

$$F(t_j, t_k) = t_j t_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\xi'), \qquad \xi' = \xi + (\xi_k - x_k)e_k, \tag{3.13}$$

wobei ξ' im (degenerierten)[55]**Quader** Q liegt, der von x und $x+t_j e_j+t_k e_k$ erzeugt wird. Dieselbe Rechnung mit vertauschten Rollen von j und k liefert ebenfalls

$$F(t_j, t_k) = t_j t_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\xi''), \qquad \xi'' \in Q, \tag{3.14}$$

woraus[56]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\xi') = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\xi'')$$

folgt und da beide Funktionen stetig sind und

$$\lim_{t_j, t_k \to 0} \xi' = \lim_{t_j, t_k \to 0} \xi'' = x$$

ist, folgt (3.12). □

Zweite partielle Ableitung kann man nun sehr schön in einer normalerweise[57] symmetrischen Matrix anordnen:

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) : j, k = 1, \ldots, n \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \ddots & \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix bezeichnet man als **Hesse–Matrix** der Funktion f. Um beliebige partielle Ableitungen höherer Ordnung beschreiben zu können, brauchen wir ein bisschen mehr Notation, denn bei Ausdrücken der Form

$$\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_\ell}$$

wird einem durchaus die Endlichkeit des Alphabets bewusst.

[55] Es ist kein n–dimensionaler Quader sondern nur ein zweidimensionales Rechteck.
[56] Wir haben ja $t_j t_k \neq 0$ vorausgesetzt, also können wir sie rausdividieren.
[57] Im Sinne von Satz 3.11.

Definition 3.12 (Multiindizes & partielle Ableitungen)**.**

1. Ein n–Tupel[58] $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt **Multiindex**. Seine **Länge** oder sein **Betrag** ist die Zahl
$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j. \tag{3.15}$$
Die **Einheitsindizes** sind $\epsilon_j = (\delta_{jk} : k = 1, \ldots, n)$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Die **Fakultät** eines Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist
$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

3. Die **partielle Ableitung** der Ordnung α ist dann
$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \tag{3.16}$$
was natürlich nur dann sinnvoll ist, wenn man die partiellen Ableitungen nach den einzelnen Variablen vertauschen kann.

4. Mit $C^k(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen, für die die partiellen Ableitungen
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(x), \qquad j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad x \in D, \tag{3.17}$$
existieren und **stetig** sind.

Normalerweise verwendet man Multiindizes, um das **Monom**
$$x \mapsto x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
zu definieren. Die partiellen Ableitungen erhält man nach (3.16) dann, wenn man die Variable x *formal*[59] durch $\frac{\partial}{\partial x}$ ersetzt. So wird auch aus jedem **Polynom**
$$p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} p_\alpha \, x^\alpha$$
ein **Differentialoperator**
$$p(D) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} p_\alpha \, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}.$$
Diese Notation ist auf jeden Fall dann sinnvoll, wenn wir Funktionen aus $C^k(D)$ betrachten.

[58] Es ist *kein* Vektor, da $\mathbb{N}_0^n$ keinen **Vektorraum** über irgendeinem Körper bildet!
[59] Also mit Copy/Paste ohne nachzudenken.

Korollar 3.13 (Satz von Schwarz)**.** *Für $f \in C^k(D)$ sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig.*

Beweis: Da differenzierbare Funktionen immer stetig sind, ist $C^k(D) \subset C^{k'}(D)$ für $k' \leq k$. Damit können wir nach Satz 3.11 zwei beliebige benachbarte Einträge in einer partiellen Ableitung wie in (3.17) vertauschen. Mit $1 \leq \ell < k$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} &= \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{\ell-1}}} \frac{\partial^2}{\partial x_{j_\ell} \partial x_{j_{\ell+1}}} \underbrace{\frac{\partial^{k-\ell-1} f}{\partial x_{j_{\ell+2}} \cdots \partial x_{j_k}}}_{\in C^{\ell+1}(D) \supset C^2(D)} \\ &= \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{\ell-1}}} \frac{\partial^2}{\partial x_{j_{\ell+1}} \partial x_{j_\ell}} \frac{\partial^{k-\ell-1} f}{\partial x_{j_{\ell+1}} \cdots \partial x_{j_k}},\end{aligned}$$

was wir solange wiederholen können, bis die partielle Ableitung nach Variablen sortiert und in die Form (3.16) gebracht ist. □

3.3 Ableitungen

Wir können jetzt zwar *partiell* differenzieren, aber richtig ableiten können wir bisher nicht. Um das Konzept der Ableitung auf den multivariaten Fall zu übertragen, erinnern wir uns noch einmal, was die Ableitung in einer Variablen eigentlich war. Dazu multiplizieren wir den Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon(h), \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

mit h durch, was uns

$$f_x(h) := f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \underbrace{(-h\varepsilon(h))}_{=:\eta(h)}, \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\eta(h)}{h} = -\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0, \tag{3.18}$$

liefert. Das können wir nun wieder als eine Aussage über das *Änderungsverhalten* der differenzierbaren Funktion an der Stelle x machen, das durch die **affine Funktion** $h \mapsto \ell(h) := f(x) + hf'(x)$ *lokal* so gut beschreiben wird, daß der Fehler

$$f_x(h) - \ell(h) = \eta(h)$$

schneller als h gegen Null geht, nämlich $\eta(h)/h \to 0$. Diese Idee können wir in eine formale Definition packen.

Definition 3.14 (Ableitung)**.**

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**, wenn sie von der Form $x \mapsto a^T x$ und **affine Funktion**[60], wenn sie von der Form $x \mapsto a^T x + b$ ist, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, ist.

[60] Wie die aufmerksamen Leser sicherlich schon gemerkt haben, ist eine affine Funktion f genau dann linear, wenn $f(0) = 0$ ist.

2. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** an der Stelle $x \in U$, wenn es eine lineare Funktion $\ell : x \mapsto a^T x$ gibt, so daß

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \ell(h)|}{\|h\|} = 0 \tag{3.19}$$

erfüllt ist.

3. Die lineare Funktion $f' := Df = \ell$ aus (3.19) heißt **Ableitung**, **Differential**[61] oder sogar **totales Differential** von f an der Stelle x.

Satz 3.15 (Ableitung). *Für eine in $x \in U$ differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gilt:*

1. *Die Funktion ist stetig in x.*
2. *Die Ableitung Df ist eindeutig.*
3. *f ist **partiell differenzierbar**.*
4. *Die Ableitung $Df(x)$ hat die Form $y \mapsto y^T \nabla f(x)$.*
5. *f ist in jede Richtung **richtungsdifferenzierbar** mit*

$$D_y f(x) = y^T \nabla f(x) = (Df(x))(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.20}$$

Beweis: 1): Aus (3.19) folgt

$$0 = \lim_{h \to 0} |f(x+h) - f(x) - \ell(h)| = \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) - \ell(h),$$

also[62]

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h \to 0} \ell(h) = \lim_{h \to 0} a^T h = 0,$$

und damit ist auch

$$\lim_{x' \to x} f(x') - f(x) = \lim_{h := x' - x \to 0} f(x+h) - f(x) = 0,$$

weswegen f stetig ist.

2): Seien $\ell_1 : x \mapsto a_1^T x$, $\ell_2 = x \mapsto a_2^T x$ zwei lineare Funktionen, die (3.19) erfüllen. Dann ist für $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{|\ell_1(h) - \ell_2(h)|}{\|h\|_2} &= \frac{|(f(x+h) - f(x) - \ell_2(h)) - (f(x+h) - f(x) - \ell_1(h))|}{\|h\|_2} \\ &\le \underbrace{\frac{|f(x+h) - f(x) - \ell_1(h)|}{\|h\|_2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{|f(x+h) - f(x) - \ell_2(h)|}{\|h\|_2}}_{\to 0} \end{aligned}$$

[61] Im Kontext der nummerischen Falsographiereform auch gerne *Differenzial*.
[62] Rechenregeln für Grenzwerte aus Teil I.

und damit für die spezielle Wahl $h = \lambda(a_1 - a_2)$, $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\|h\|_2 \to 0} \frac{|\ell_1(h) - \ell_2(h)|}{\|h\|_2} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{|(a_1 - a_2)^T \lambda (a_1 - a_2)|}{|\lambda| \, \|a_1 - a_2\|_2} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{|\lambda| \, \|a_1 - a_2\|_2^2}{|\lambda| \, \|a_1 - a_2\|_2} = \|a_1 - a_2\|_2, \end{aligned}$$

woraus $a_1 = a_2$ und damit auch $\ell_1 = \ell_2$ folgt.

3): Für $h = h' e_j$, $h' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, erhalten wir, wieder mit $\ell : x \mapsto a^T x$, aus (3.19), daß

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \ell(h)|}{\|h\|_2} \\ &= \lim_{h' \to 0} \frac{|f(x + h'e_j) - f(x) - \ell(h'e_j)|}{|h'|} = \lim_{h' \to 0} \left| \frac{f(x + h'e_j) - f(x)}{h'} - \frac{h' a_j}{h'} \right| \\ &= \left| \lim_{h' \to 0} \frac{f(x + h'e_j) - f(x)}{h'} - a_j \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - a_j \right|, \end{aligned}$$

also ist f partiell differenzierbar mit $\nabla f = a$, was 4) auch gleich erledigt, da $\ell(x) : y \mapsto y^T a = y^T \nabla f(x)$.

5): Für $y \neq 0$ erhalten wir ganz analog, daß

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{|f(x + hy) - f(x) - \ell(hy)|}{\|hy\|_2} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|y\|_2} \left| \frac{f(x + hy) - f(x)}{h} + \frac{h a^T y}{h} \right| = \frac{1}{\|y\|_2} \left| \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hy) - f(x)}{h} + a^T y \right| \\ &= \frac{1}{\|y\|_2} \left| D_y f(x) - y^T \nabla f(x) \right| \end{aligned}$$

□

Wir fassen zusammen: Ist f differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen, also insbesondere auch die partiellen Ableitungen, und die Beziehung zwischen beiden ist sehr einfach, wie in (3.20) zu sehen ist. Die Umkehrung gilt leider nicht.

Beispiel 3.16. Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{3.21}$$

hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)y - 2x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \text{und}^{63} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)x - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

was für $(x,y) \neq (0,0)$ immer wohldefiniert ist und ansonsten direkt berechnet werden kann:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h0}{0^2 + h^2} = 0.$$

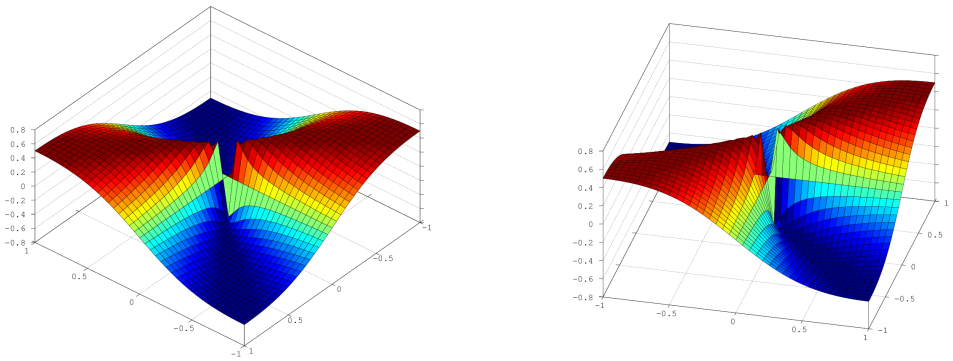

Abbildung 3.3: Die Funktion aus Beispiel 3.16 aus zwei verschiedenen Perspektiven. Rechts kann man die partiellen Ableitungen ganz gut erkennen.

Damit ist $\nabla f(0,0) = 0$. Für Richtungsableitungen mit $uv \neq 0$ gilt hingegen

$$D_{(u,v)} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2 uv}{h^2(u^2+v^2)} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{uv}{u^2+v^2} \to \infty$$

was für $u, v \neq 0$ dann doch sehr stark von $0 = (u,v)^T \nabla f(0,0)$ verschieden ist. Damit kann die Funktion nicht differenzierbar sein, zumal ausser den partiellen Ableitungen gar keine Richtungsableitungen existieren.

Sieht man genau hin, ist die Funktion ja noch nicht einmal stetig, denn für $(x,y) = (hu, hv)$ mit der Normierung $u^2 + v^2 = 1$ ist

$$f(x,y) = \frac{h^2 uv}{h^2(u^2+v^2)} = uv \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

was für $h \to 0$ genau dann 0 ergibt, wenn $u = 0$ oder $v = 0$ erfüllt ist, also genau dann, wenn man die Koordinatenrichtungen verwendet.

Hat die Nichtdifferenzierbarkeit also etwas damit zu tun, daß die meisten Richtungsableitungen nicht existieren? Natürlich nicht.

Beispiel 3.17. Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{3.22}$$

erfüllt für $(x,y) = h(x',y')$, $\|(x',y')\|_2 = 1$ die Identität

$$f(x,y) = \frac{h^3 x' y'^2}{h^2 \|(x',y')\|_2} = h\, x' y'^2,$$

was für Stetigkeit im Ursprung sorgt. In jede Richtung (u,v) hat die Funktion dann die Form

$$t \mapsto \varphi_{u,v}(t) := f\left((0,0) + t(u,v)\right) = f(tu, tv) = \frac{t^3 uv^2}{t^2(u^2+v^2)} = t\frac{uv^2}{u^2+v^2}$$

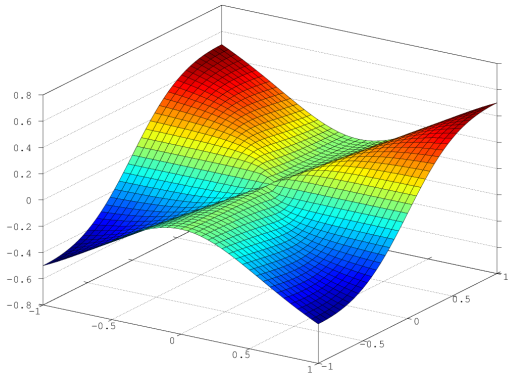

Abbildung 3.4: Die viel glattere Funktion aus Beispiel 3.17. Man kann ihr schon ansehen, daß sie in alle Geradenrichtungen sehr brav ist, allerdings besteht aufgrund der „Knicke“ trotzdem keine Möglichkeit, eine Tangentialebene an den Punkt $(0,0)$ zu legen.

und wir bekommen

$$D_{(u,v)}f(0,0) = \varphi'_{u,v}(0) = \frac{uv^2}{u^2+v^2}, \tag{3.23}$$

das heißt, die Funktion ist in *jede* Richtung **richtungsdifferenzierbar**, die Richtungsableitungen sind stetig und hängen stetig von der Richtung ab. Trotzdem erfüllen sie nicht

$$D_{(u,v)}f(0,0) = (u,v)\underbrace{\nabla f(0,0)}_{=0} = 0,$$

zumindest nicht, wenn $uv \neq 0$ ist. Man kann sich das mittels Abb. 3.4 auch sehr schön veranschaulichen, wenn man einmal versucht, eine Tangente an die Stelle $(0,0)$ anzulegen, die die Fläche nur „auf einer Seite“ berührt, wie man es von Tangenten gewohnt ist[64].

Nach so vielen negativen Beispielen jetzt endlich einmal eine positive Aussage in Form einer *hinreichenden* Bedingung für Differenzierbarkeit.

Satz 3.18 (Differenzierbarkeit)**.** *Ist* $f : U \to \mathbb{R}$ *in einer Umgebung* $U' \subseteq U$ *von* x ***partiell differenzierbar*** *und sind alle partiellen Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *in* x *stetig, dann ist* f *an der Stelle* x ***differenzierbar****.*

Beweis: Als Umgebung enthält U' eine offene Kugel $B_{<\delta}(x) := \{x' : \|x - x'\|_2 < \delta\}$. Für ein $\xi \in B_{<\delta}(0)$ setzen wir

$$y^{(j)} := x + \sum_{k=1}^{j} \xi_k e_k, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

[64] Dies ist aber nur eine **Heuristik** und ersetzt keinesfalls den Beweis.

was[65] $y^{(0)} = x$, $y^{(n)} = x + \xi$ und $y^{(j)} - y^{(j-1)} = \xi_j\, e_j$, $j = 1, \ldots, n$, ergibt. Aus dem univariaten Mittelwertsatz folgt daher

$$f\left(y^{(j)}\right) - f\left(y^{(j-1)}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(y^{(j-1)} + \theta_j \xi_j e_j\right) \xi_j, \qquad \theta_j \in [0,1], \quad j = 1, \ldots, n,$$

und somit

$$f(x+\xi) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} f\left(y^{(j)}\right) - f\left(y^{(j-1)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(\underbrace{y^{(j-1)} + \theta_j \xi_j e_j}_{=:z^{(j)}}\Big) \xi_j. \tag{3.24}$$

mit $z^{(j)} \in B_{<\delta}(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Damit ist

$$\begin{aligned} f(x+\xi) - f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(z^{(j)}\right) \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\ \xi_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(z^{(j)}\right)\right) \xi_j \\ &=: \ell(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(z^{(j)}\right)\right) \xi_j, \end{aligned}$$

und somit, für $\delta \to 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{|f(x+\xi) - f(x) - \ell(\xi)|}{\|\xi\|_2} \\ &= \frac{1}{\|\xi\|_2} \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(z^{(j)}\right)\right) \xi_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(z^{(j)}\right)\right|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|\xi_j|}{\|\xi\|_2}}_{\le 1} \to 0 \end{aligned}$$

da $\|z^{(j)} - x\|_2 \le \|\xi\|_2 < \delta$. Das ist aber genau die Definition (3.19) der Differenzierbarkeit. □

Bemerkung 3.19 (Differenzierbarkeiten)**.** Die Abhängigkeiten fassen wir jetzt nochmals zusammen:

stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow$ **differenzierbar** $\Rightarrow$ **partiell differenzierbar**

wobei die Umkehrungen im Allgemeinen *nicht* gelten. Aber die Stetigkeit der Ableitungen spielt in mehreren Variablen offenbar eine wesentlich bedeutendere Rolle. Das erklärt auch, warum man eine stetig partiell differenzierbare Funktion auch kurz **stetig differenzierbar** nennt. Ist nämlich f stetig (partiell) differenzierbar an x, dann ist ∇f stetig in x und damit hängen auch die linearen Funktionen $\ell_{x'} : y \mapsto y^T \nabla f(x')$ stetig von x' ab, das heißt[66],

$$\lim_{x' \to x} \ell_{x'} = \lim_{x' \to x} y \mapsto y^T \nabla f(x') = y \mapsto y^T \left(\lim_{x' \to x} \nabla f(x')\right) = y \mapsto y^T \nabla f(x) = \ell_x.$$

[65] Die leere Summe hat per definitionem den Wert 0.

[66] Wenn wir für die linearen Funktionen beispielsweise die Norm $\|y \mapsto a^T y\| := \|a\|_2$ verwenden.

Definition 3.20 (Stetig differenzierbar)**.** Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k**–mal stetig differenzierbar** in $x \in U$, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial^k}{\partial x^\alpha}$, $|\alpha| \leq k$, der **Ordnung** k existieren und in x stetig sind. Mit $C^k(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, bezeichnet man die Menge aller Funktionen, die in allen $x \in \Omega$ k–mal stetig partiell differenzierbar sind.

Stetigkeit ist also ausgesprochen wichtig, wenn man sich mit partiellen Ableitungen beschäftigen will. Allerdings ist es auch mit der Stetigkeit nicht so ganz einfach.

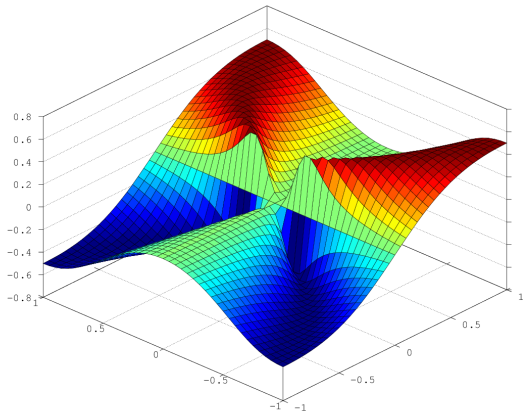

Abbildung 3.5: Die Funktion (3.25) aus Beispiel 3.21. Man sieht, daß es eigentlich sogar vier Unsteigkeiten gibt, nämlich die Kurven $(\pm t, t^2)$, die den Grenzwert $\frac{1}{2}$ haben und die beiden Kurven $(\pm t, -t^2)$ mit Grenzwert $-\frac{1}{2}$.

Beispiel 3.21 (Stetigkeit)**.** Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{3.25}$$

ist entlang jeder Linie durch den Ursprung stetig. Für $\alpha \neq 0$, also für eine Gerade mit Steigung $\alpha \neq 0$ erhalten wir

$$f(t, \alpha t) = \frac{\alpha t^3}{t^4 + \alpha^2 t^2} = t \frac{\alpha}{t^2 + \alpha^2},$$

und für die x-Achse $(t, 0)$ ist

$$f(t, 0) = 0, \qquad t \neq 0,$$

genauso wie für die y-Achse $(0, t)$, die dem Fall $\alpha = \infty$ entsprechen würde. Trotzdem ist die Funktion nicht stetig an $(0, 0)$, denn für die Punkte der Form $(x, y) = (t, t^2)$ erhalten wir

$$f(x,y) = f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2},$$

so daß auch der Grenzwert entlang dieser Kurve $\frac{1}{2}$ sein muss. Und das ist noch nicht einmal die einzige Unstetigkeit, wie Abb. 3.5 zeigt.

Rechenregeln, insbesondere die **Kettenregel**, heben wir uns für später auf, wenn wir Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ betrachten werden.

3.4 Die Taylorformel und höhere Ableitungen

Als nächstes machen wir uns an die Taylorformel für Funktionen in mehreren Variablen. Diese wird wieder relativ einfach aus Richtungsableitungen und univariaten Differentiationsregeln folgen.

Proposition 3.22 (Mehrfache Richtungsableitungen)**.** *Ist* $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* k*–mal stetig differenzierbar an* $x \in U$*, dann gilt:*

$$D_y^k f(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha, \qquad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.26}$$

Beweis: Induktion über k. Für $k = 1$ ist

$$D_y f(x) = y^T \nabla f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, y_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^1 f}{\partial x^{\epsilon_j}}(x)\, y^{\epsilon_j}, \tag{3.27}$$

und für $k \geq 1$ erhalten wir mittels der Induktionshypothese und (3.27)

$$\begin{aligned}
D_y^{k+1} f(x) &= D_y D_y^k f(x) = D_y \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha \\
&= \sum_{j=1}^n y^{\epsilon_j} \frac{\partial^1}{\partial x^{\epsilon_j}} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{\alpha+\epsilon_j}}(x)\, y^{\alpha+\epsilon_j} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k+1} \underbrace{\frac{k!}{(\alpha-\epsilon_j)!}}_{=\frac{(k+1)!}{\alpha!}\frac{\alpha_j}{k+1}} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{k+1}}_{\frac{|\alpha|}{k+1}=1} \\
&= \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha,
\end{aligned}$$

was (3.26) von k auf $k+1$ erweitert. □

Lemma 3.23 (Univariate Funktionen)**.** *Ist* $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* k*–mal stetig differenzierbar an* $x \in U$ *und ist* $y \in \mathbb{R}^n$ *mit* $[x, x+y] \subset U$*, dann gilt für die Funktion*

$$g : t \mapsto f(x + ty), \qquad t \in [0, 1], \tag{3.28}$$

die Identität

$$g^{(j)}(t) = D_y^j f(x + ty), \qquad j = 0, \ldots, k. \tag{3.29}$$

Beweis: Der Fall $k = 1$ ist uns bereits aus Bemerkung 3.6 bzw. aus dem Beweis von Satz 3.8 bekannt. Der Rest ist Induktion mit dem Induktionsschritt

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt} g^{(k)}(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{D_y^k f(x+ty)}_{=:g_k(t)=f_k(x+ty)} = \frac{d}{dt} g_k(t) \\ &= D_y f_k(x+ty) = D_y D_y^k f(x+ty) = D_y^{k+1} f(x+ty). \end{aligned}$$

□

Satz 3.24 (Taylorformel). *Für* $f \in C^{k+1}(\Omega)$ *und* $x, y \in \Omega$ *mit*[67] $[x, y] \subseteq \Omega$ *gibt es ein* $\xi \in [x, y]$*, so daß*

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(\xi)\, y^\alpha. \tag{3.30}$$

Beweis: Mit den Vorarbeiten ist der Beweis der Taylorfomel tatsächlich praktisch univariat. Wir verwenden die Funktion

$$g : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & f(x+ty), \end{cases} \qquad g(0) = f(x), \quad g(1) = f(x+y),$$

und eine univariate Taylorentwicklung[68]

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)\, 1^j + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\theta), \qquad \theta \in [0,1], \tag{3.31}$$

in die wir nun nur noch (3.29) und (3.26) einsetzen müssen,

$$\begin{aligned} f(x+y) = g(1) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)\, 1^j + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\theta) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D_y^{(j)} f(x) + D_y^{(k+1)} f(\underbrace{x+\theta y}_{=:\xi}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \underbrace{\frac{1}{j!} \frac{j!}{\alpha!}}_{=1/\alpha!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha}(\xi)\, y^\alpha, \end{aligned}$$

um (3.30) zu erhalten. □

Es ist auf den ersten Blick ein bisschen unerfreulich, daß wir bei der Verallgemeinerung ins Mehrdimensionale plötzlich diese ganzen Summen in (3.30) bekommen. Daher ist es ganz vernünftig, sich zu überlegen, ob das *natürliche*

[67] Das ist eine echte Forderung und am einfachsten zu vermeiden, indem man fordert, daß Ω eine **konvexe Menge** oder zumindest eine um x **sternförmige Menge** ist. Konvexität bedeutet, daß für beliebige $y, y' \in \Omega$ auch $[y, y'] \subseteq \Omega$ erfüllt ist, Sternförmigkeit, daß zumindest $[x, y] \subseteq \Omega$, $y \in \Omega$, gilt.

[68] Siehe [26].

Objekte sind oder ob wir die Ableitungen einfach nur zu kompliziert ausgedrückt haben.

Zu diesem Zweck betrachten wir einmal das **Polynom**

$$y \mapsto p(y) = D_y^k f(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x)\, y^\alpha$$

und stellen fest, daß für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda y) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x) \underbrace{(\lambda y)^\alpha}_{=(\lambda y_1)^{\alpha_1}\cdots(\lambda y_n)^{\alpha_n}=\lambda^{|\alpha|}y^\alpha} = \lambda^k\, p(y) \tag{3.32}$$

gilt, und somit p eine **homogene Funktion** der Ordnung k oder kurz k**–homogene Funktion** ist, was durch $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ definiert ist. Das homogene Polynom $y \mapsto D_y^k f(x)$ spielt damit also irgendwie die Rolle der k–ten Ableitung von f an der Stelle, was konsistent mit der **Ableitung** von f an der Stelle x ist, nämlich dem *homogenen linearen Polynom* $y \mapsto D_y f(x) = y^T \nabla f(x)$.

Allerdings zwingt uns niemand, in jedem Schritt in dieselbe Richtung abzuleiten, sondern wir könnten die Ableitunsgrichtung variieren. Dazu wählen wir eine Matrix

$$\mathbb{R}^{n\times k} \ni Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)} & \cdots & y^{(k)} \end{bmatrix}$$

mit Spalten $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}$, in denen die entsprechenden Richtungen sitzen. Dann definieren wir

$$D_Y f(x) = D_{y^{(k)}} \cdots D_{y^{(1)}} f(x), \tag{3.33}$$

und betrachten die[69] Funktion

$$D^k f(x) : \begin{cases} (\mathbb{R}^n)^k \simeq \mathbb{R}^{n\times k} & \to \quad \mathbb{R}, \\ \left(y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}\right) & \mapsto \quad D_Y f(x), \end{cases}$$

Diese Funktion hat schöne Eigenschaften.

Lemma 3.25. *Ist f an der Stelle x eine k–mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt:*

1. $D^k f(x)$ *ist* ***symmetrisch****, d.h.,*

$$D^k f(x)\left(y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}\right) = D^k f(x)\left(y^{(\sigma(1))}, \ldots, y^{(\sigma(k))}\right), \tag{3.34}$$

   für jede ***Bijektion*** $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$.

2. $D^k f(x)$ *ist* ***linear*** *in jeder Komponente: Für* $j = 1, \ldots, k$ *ist*

$$\begin{aligned} &D^k f(x)\left(\ldots, \alpha y^{(j)} + \beta z^{(j)}, \ldots\right) \\ &\quad = \alpha\, D^k f(x)\left(\ldots, y^{(j)}, \ldots\right) + \beta\, D^k f(x)\left(\ldots, z^{(j)}, \ldots\right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

[69] ... sozusagen multimultivariate

3. *Die* ***Diagonale*** $D^k f(x)(y,\dots,y)$ *ist* k*–homogen in* y*.*

4. *Es gilt*

$$D^k f(x)(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{\alpha_1},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{\alpha_n}) = \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x), \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| = k. \tag{3.36}$$

Beweis: 1) folgt aus der Tatsache, daß man bei differenzierbaren Funktionen die Reihenfolge der partiellen Ableitungen und damit auch Richtungsableitungen vertauschen darf:

$$D_y D_{y'} f = \sum_{j,k=1}^n y_j y'_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_k} = \sum_{j,k=1}^n y_j y'_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j} = D_{y'} D_y f.$$

Für 2) nutzen wir die Linearität der Richtungsableitungen

$$D_{\alpha y+\beta z} f = (\alpha y + \beta z)^T \nabla f = \alpha y^T \nabla f + \beta z^T \nabla f = \alpha\, D_y f + \beta\, D_z f$$

und 3) ergibt sich aus ebendieser Linearität:

$$D^k f(x)(\lambda y, \lambda y, \dots, \lambda y) = \lambda\, D^k f(x)(y, \lambda y, \dots, \lambda y) = \cdots = \lambda^k\, D^k f(x)(y,\dots,y).$$

4) folgt schließlich aus der Tatsache, daß $\frac{\partial}{\partial x_j} = D_{e_j}$ und damit

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha} = D_{e_1}^{\alpha_1} \cdots D_{e_n}^{\alpha_n} f,$$

was nichts anderes als (3.36) ist. □

Definition 3.26 (Multilinearform)**.** Eine Abbildung $F : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ nennt man k**–Linearform** oder **Multilinearform**, wenn wenn sie linear in jeder Komponente ist und symmetrisch, wenn sie invariant unter Vertauschung der Argumente ist.

Korollar 3.27. *Die Funktion* $D^k f(x)$ *ist eine symmetrische Multilinearform. Jede* k*–Linearform ist* k*–homogen auf der Diagonalen.*

Beispiel 3.28 (Linearformen & Bilinearformen)**.**

1. Eine 1–Linearform oder einfach nur **Linearform** ist die bereits bekannte Funktion der Form $y \mapsto a^T y$ und bei der Ableitung ist dieses a nichts anderes als $\nabla f(x)$.

2. Eine **Bilinearform** hat immer die Gestalt

$$y \mapsto y^T A y, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{3.37}$$

wobei wir annehmen können, daß A eine **symmetrische Matrix** ist: Da

$$y^T A y = \left(y^T A y\right)^T = y^T A^T y,$$

ist

$$y^T A y = \frac{1}{2} y^T A y + \frac{1}{2} y^T A y = \frac{1}{2} y^T A y + \frac{1}{2} y^T A^T y = y^T \left(\frac{A + A^T}{2}\right) y =: y^T \widetilde{A} y,$$

und die Matrix $\widetilde{A}$ ist in der Tat symmetrisch.

3. Im Falle zweiter Ableitungen ist

$$A = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} : j, k = 1, \ldots, n \right]$$

die **Hessematrix**, die ja von Haus aus symmetrisch ist, wenn die partiellen zweiten Ableitungen stetig sind, siehe Korollar 3.13.

4. Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ haben also eine Doppelfunktion: Sie können sowohl lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ repräsentieren als auch Bilinearformen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Daß das schon unterschiedliche Dinge sind, erkennt man nicht zuletzt an der Tatsache, daß für Bilineaformen die **Symmetrisierung** $\frac{1}{2}(A + A^T)$ ausreicht.

Jetzt müssen wir nur noch feststellen, daß symmetrische Multilinearformen und homogene Polynome eigentlich dasselbe sind. Diese schon lange vorher bekannte Beobachtung hat um 1990 bei den Splinefunktionen für einiges Aufesehen gesorgt[70] hat.

Satz 3.29 (Polarisierungsformel/Blossoming)**.** *Zu jedem* k*–homogenen Polynom* p *gibt es genau eine* k*–Linearform* P*, so daß* $p(x) = P(x, \ldots, x)$ *und umgekehrt.*

Beweis: „⇒“: Für

$$p(x) := \sum_{|\alpha|\le k'} p_\alpha x^\alpha$$

ist

$$\lambda \mapsto p(\lambda x) = \sum_{j=0}^{k'} \lambda^j \underbrace{\sum_{|\alpha|=j} p_\alpha x^\alpha}_{=:c_j}$$

ein Polynom in λ, das mit $\lambda^k p(x)$ genau dann übereinstimmt, wenn

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} p_\alpha x^\alpha,$$

also wenn p ein **homogenes Polynom** vom Grad k ist. Für dieses Polynom ist

$$P\left(y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}\right) = \frac{1}{k!} D_Y p(x) = \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} y_{j_1}^{(1)} \cdots y_{j_k}^{(k)} \underbrace{\frac{\partial^k p}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(x)}_{=p_{\alpha(j_1,\ldots,j_k)}},$$

mit

$$\alpha(j_1, \ldots, j_k) = (\#\{\ell : j_\ell = j\} : j = 1, \ldots, n),$$

[70] Wobei es allerdings die *Anwendung* dieses Prinzips war, die dann schon neue Einsichten gewährt hat.

eine von x unabhängige symmetrische k–Linearform, deren Diagonale sich nach (3.26) für[71] $x \in \mathbb{R}^n$ als

$$P(y,\dots,y) = \frac{1}{k!} D_y^k p(x) = \sum_{|\alpha|=k} y^\alpha \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\frac{\partial^k p}{\partial x^\alpha}(x)}_{=\alpha!\, p_\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} p_\alpha y^\alpha = p(y)$$

ergibt. Die Umkehrung „$\Leftarrow$“ ist Punkt 3) von Lemma 3.25. □

Damit können wir nun endlich sagen, was die k–te Ableitung ener Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ ist.

Definition 3.30 (Differenzierbarkeit)**.**

1. Das k–te **Taylorpolynom** oder der **Jet** der Ordnung k an eine k–mal stetig (partiell) differenzerbare Funktion f mit **Entwicklungspunkt** x ist definiert als
$$T_k f : y \mapsto \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)\, (y-x)^\alpha. \tag{3.38}$$

2. Ein Polynom p hat **Höchstgrad** k, wenn es als
$$p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} p_\alpha\, x^\alpha = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} p_\alpha\, x^\alpha}_{=:p_j(x)} =: \sum_{j=0}^{k} p_j(x) \tag{3.39}$$
geschrieben werden kann. Das *homogene* Polynom p_j bezeichnen wir als j–te **homogene Komponente** von p, $j = 0,\dots,k$, und die k–te homogene Komponente[72] p_k heißt **Leitform** von p.

3. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt k**–mal differenzierbar** an der Stelle $x \in U$, wenn es ein Polynom $p = p_x$ vom Grad k gibt, so daß
$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - p(h)|}{\|h\|_2^k} = 0 \tag{3.40}$$
ist. Die **symmetrische Multilinearform** $D^k f(x)$, die der Leitform von p entspricht, nennt man die k**–te Ableitung** von f.

Satz 3.31 (Differenzierbarkeit)**.** *Ist $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, k–mal differenzierbar an $x \in U$, so gilt:*

1. *f ist j–mal differenzierbar an x, $j = 0,\dots,k$. Insbesondere ist f stetig[73].*

2. *Das Polynom p_x aus* (3.40) *ist eindeutig. Damit ist die k–te Ableitung wohldefiniert.*

[71] . . . und unabhängig von . . .
[72] Also die von höchstem Grad.
[73] Das ist der Fall $j = 0$.

3. *Ist* $f \in C^k(\Omega)$ *für ein* $\Omega \ni x$, *dann ist* $p = T_k f$.

Beweis: Eigentlich kopieren wir nur den Beweis von Satz 3.15. Für 1) schreiben wir

$$p(h) = \sum_{|\alpha|\le k} p_\alpha h^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} p_\alpha h^\alpha + \sum_{|\alpha|\le k-1} p_\alpha x^\alpha =: p_k(h) + \widetilde{p}(h)$$

und erhalten unter Ausnutzung der k–Homogenität von p_k, daß

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x+h)-p(h)|}{\|h\|_2^{k-1}} &= \frac{|f(x+h)-p_k(h)-\widetilde{p}(h)|}{\|h\|_2^{k-1}} \\
&= \left|\frac{f(x+h)-\widetilde{p}(h)}{\|h\|_2^{k-1}} - \frac{p_k(h)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| \ge \left|\frac{f(x+h)-\widetilde{p}(h)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| - \left|\frac{p_k(h)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| \\
&= \left|\frac{f(x+h)-\widetilde{p}_x(h)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| - \left|\frac{\|h\|_2^k\, p_k(h/\|h\|_2)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| \\
&= \left|\frac{f(x+h)-\widetilde{p}(h)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| - \|h\|_2\,|p_k(h/\|h\|_2)|
\end{aligned}$$

und da das stetige Polynom[74] p_k auf der Einheitskugel beschränkt ist[75], ergibt sich

$$0 \le \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-\widetilde{p}(h)}{\|h\|_2^{k-1}}\right| \le \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-p(h)|}{\|h\|_2^{k-1}}}_{=0} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\|h\|_2 \overbrace{|p_k(h/\|h\|_2)|}^{\le M<\infty}}_{=0} = 0,$$

was bedeutet, daß f auch $(k-1)$–mal differenzierbar ist, damit aber auch $(k-2)$–mal und so weiter.

Für 2) nehmen wir an, es gäbe p und q, die beide (3.40) erfüllen, und kommen über

$$\frac{|p(h)-q(h)|}{\|h\|_2^k} \le \frac{|f(x+h)-p(h)|}{\|h\|_2^k} + \frac{|f(x+h)-q(h)|}{\|h\|_2^k} \to 0$$

auf

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\|h\|_2^{-k}(p(h)-q(h)) = \lim_{h\to 0}\|h\|_2^{-k}\sum_{j=0}^{k}(p_j(h)-q_j(h)) \\
&= \lim_{h\to 0}\|h\|_2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\|h\|_2^j\,(p_j(h/\|h\|_2)-q_j(h/\|h\|_2)) \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{j=0}^{k}\|h\|_2^{j-k}\,(p_j-q_j)\Big(\frac{h}{\|h\|_2}\Big),
\end{aligned}$$

und da $\|h\|_2^{j-k}$ für $h \to 0$ im Falle $j = k$ gegen 1, ansonsten gegen ∞, „konvergiert", folgt $p_j = q_j$, $j = 0, \dots, k$, also $p = q$.

[74] Polynome sind *immer* stetig!

[75] Siehe Korollar 1.69.

Für 3) benutzen wir die **Taylorformel** (3.30) aus Satz 3.24 in der Form

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha|\le k-1} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x)\,h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x+\theta h)\,h^\alpha \\ &= T_k f(h) + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x+\theta h) - \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x)\right)h^\alpha, \qquad \theta\in[0,1], \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+h)-T_k f(h)|}{\|h\|_2^k} &\le \|h\|_2^k \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x+\theta h) - \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x)\right| |h^\alpha| \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x+\theta h) - \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x)\right|}_{\to 0} \underbrace{\left|\frac{h}{\|h\|_2}\right|^\alpha}_{\le 1} \to 0 \end{aligned}$$

für $h \to 0$. Der Rest ist die Eindeutigkeit aus 2). □

Bemerkung 3.32 (Differenzierbarkeit)**.** Wir fassen noch einmal zusammen:

1. Die Definition (3.40) sagt, uns, was k–malige Differenzierbarkeit wirklich bedeutet[76]:

   > Differenzierbarkeit ist äquivalent zu guter lokaler Approximierbarkeit durch ein Polynom

   Polynome sind „brave“ und elementare Funktionen und „glatte“ Funktionen erben daher deren Eigenschaften – zumindest lokal.

2. Diese gute Approximation ist so gut, daß sie maximal von einem Polynom erfüllt werden kann, das Summe der Ableitungen der Ordnungen $0,\dots,k$ ist. Im „Normalfall“ der Existenz von stetigen partiellen Ableitungen, also einer C^k–Funktion ist dieses Polynom nichts anderes als das **Taylorpolynom** der Ordnung k mit Entwicklungspunkt x, das wir nun auch in der beinahe univariaten Form

   $$T_k f(h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(x)(\underbrace{h,\dots,h}_{j}) \tag{3.41}$$

   schreiben können.

3. Die Sache mit Differenzierbarkeit und guter Approximation überträgt sich auch von einem Punkt auf ganze Bereiche, aber das sind die klassischen Sätze der Approximationstheorie, siehe z.B. [2, 3, 19, 23].

[76] Und hier noch einmal zum Ausschneiden und an die Wand hängen!

3.5 Ein Beispiel

Nach all der abstrakten Theorie wollen wir uns nun einmal an einem expliziten Beispiel ansehen, wie das wirklich funktioniert. Dazu betrachten wir die Funktion[77]

$$f(u) = f(x,y) = e^{x^2-y}, \qquad (x,y) \in [-1,1]^2, \tag{3.42}$$

an der Stelle $u^* = (x^*, y^*) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, siehe Abb. 3.6. Die partiellen Ableitungen

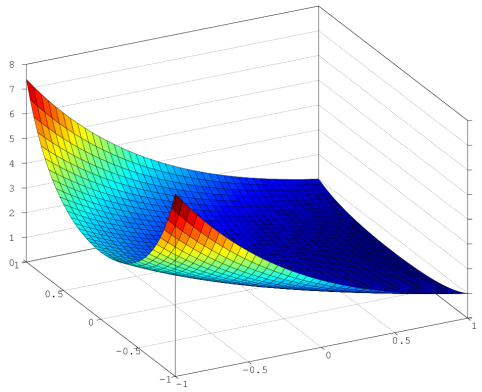

Abbildung 3.6: Die Funktion f aus (3.42). Nicht besonders spektakulär, aber wir wollen ja auch ein gutartiges Beispiel haben.

dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = 2xe^{x^2-y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = -e^{x^2-y}$$

und damit ist die Ableitung an der Stelle u^* die lineare Funktion

$$D^1 f(u^*) : (x,y) \mapsto \nabla f(u^*)^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\frac{3}{4}}(-1,-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -e^{\frac{3}{4}}(x+y).$$

Damit ist

$$f(u^* + v) - f(u^*) = D^1 f(u^*)(v) + \eta(v)$$

bzw.

$$f(u^* + v) = \underbrace{f(u^*) + D^1 f(u^*)(v)}_{= T_1 f(v)} + \eta_1(v), \qquad \frac{\eta_1(v)}{\|v\|_2} \to 0. \tag{3.43}$$

Das Taylorpolynom $T_1 f$ ist damit eine **Näherung erster Ordnung** an die Funktion f, die Ableitung $D^1 f(u^*)$ hingegen eine beste Näherung erster Ordnung an $f(u^* + v) - f(u^*) = f(u^* + v) - T_0 f(v)$. Die Funktionsweise der Ableitung ist in Abb 3.7 zu sehen.

[77] Die uns in Sachen Differenzierbarkeit keine Schwierigkeiten machen wird.

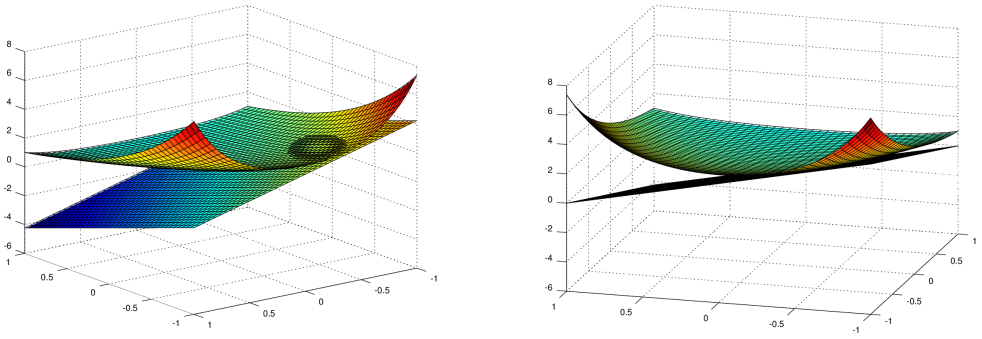

Abbildung 3.7: Die Funktion f und ihre erste Ableitung als **Tangentialebene**, die den Graphen der Funktion an der Stelle u^* berührt.

Für die zweite Ableitung bilden wir zuerst einmal die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,y) = (4x^2+2)e^{x^2-y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y) = -2xe^{x^2-y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y) = e^{x^2-y},$$

und damit die **Hessematrix**

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^2+2 & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix} e^{x^2-y}, \qquad Hf(u^*) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{\frac{3}{4}}.$$

Die zugehörige **Bilinearform** $D^2 f(u^*)$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2\times 2} \ni (u_1, u_2) \mapsto u_1^T \, Hf(u^*) \, u_2 &= e^{\frac{3}{4}} (x_1, y_1) \begin{pmatrix} 3x_2 + y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{\frac{3}{4}} \left(3x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1) + y_1y_2\right) \end{aligned}$$

mit Diagonale

$$p_2(u) = D^2 f(u^*)(u,u) = e^{\frac{3}{4}} \left(3x^2 + 2xy + y^2\right). \tag{3.44}$$

Derartige Funktionen bezeichnet man als **Paraboloid**. Für diese Funktion ist dann

$$f(u^* + v) = f(u^*) + D^1 f(u^*) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2!}} D^2 f(u^*)(v,v) + \eta_2(v), \qquad \frac{\eta_2(v)}{\|v\|_2^2} \to 0,$$

wir haben jetzt also unsere Näherung erster Ordnung in eine Näherung zweiter Ordnung verbessert, die neben der **Steigung** der Funktion f an u^* auch die **Krümmung** berücksichtigt.

Es ist ganz gut, sich einmal die Fehler der Taylorpolynome anzusehen. Das

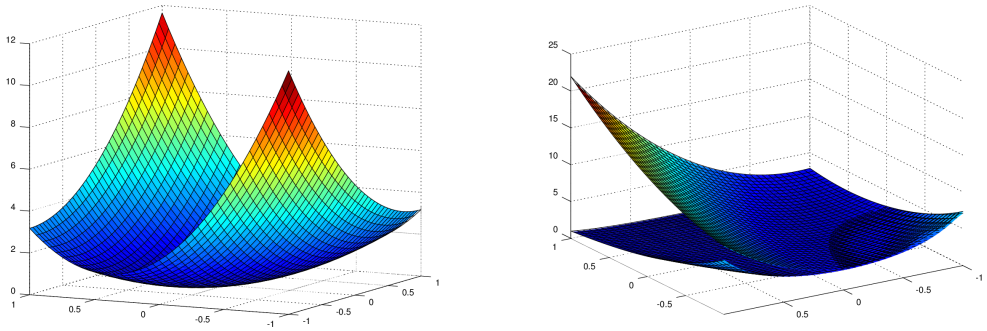

Abbildung 3.8: Das Paraboloid p_2 aus (3.44) *(links)* und die Approximation von f durch das Taylorpolynom zweiter Ordnung *(rechts)*, das auch als **Schmiegeparabel** bezeichnet wird.

ist, siehe Abb. 3.9, erst einmal enttäuschend, denn auf dem Gesamtbereich $[-1,1]^2$ ist der Fehler des Taylorpolynoms zweiter Ordnung signifikant größer. Genau das ist der Unterschied zwischen *lokaler* und *globaler* Approximation und Taylorpolynome sind nur in der Nähe des Entwicklungspunkts mit steigender Ordnung auch immer besser. Das sieht man ganz gut in Abb. 3.10.

Ein bisschen spannender und auch unanschaulicher wird es bei den dritten Ableitungen[78], wo wir wieder einmal zuerst die partiellen Ableitungen ausrechnen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = (8x^3+12x)\,e^{x^2-y}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = -(4x^2+2)\,e^{x^2-y}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = 2x\,e^{x^2-y}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -e^{x^2-y},$$

die wir jetzt in einer dreidimensionalen Struktur anordnen können, nämlich einem $2\times2\times2$–Würfel mit den beiden Ebenen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x\partial x\partial x} & \frac{\partial^3}{\partial x\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial x} & \frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} & \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} & \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial y\partial x\partial x} & \frac{\partial^3}{\partial y\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^3}{\partial y\partial y\partial x} & \frac{\partial^3}{\partial y\partial y\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y} & \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} \\ \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2} & \frac{\partial^3}{\partial y^3} \end{bmatrix}, \tag{3.45}$$

das heißt, den symmetrischen Ebenen

$$\begin{bmatrix} 8x^3+12x & -4x^2-2 \\ -4x^2-2 & 2x \end{bmatrix} e^{x^2-y} \qquad \text{und} \qquad \begin{bmatrix} -4x^2-2 & 2x \\ 2x & -1 \end{bmatrix} e^{x^2-y}.$$

Rechnen wir einmal die **Trilinearform** $D^3f(u^*)$ aus: Mit den Einheitsvektoren

[78] Aber dann sollte das Prinzip so klar sein, daß es keine vierten Ableitungen mehr braucht.

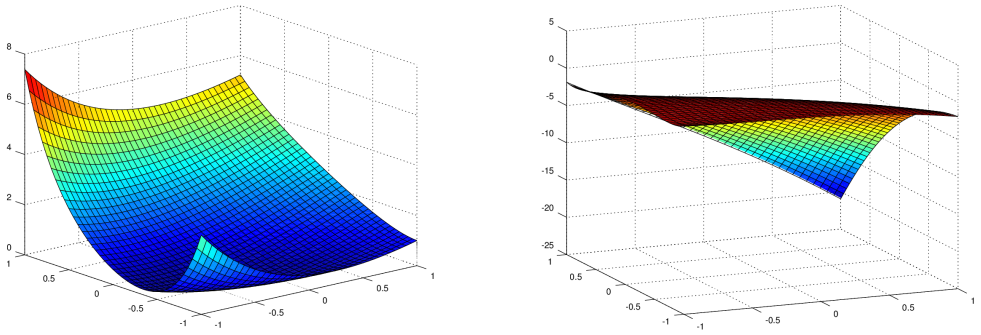

Abbildung 3.9: Abweichung der Taylorpolynome vom Grad 1 *(links)* und Grad 2 *(rechts)*. Man kann erahnen, daß die rechte Funktion in der Nähe von u^* „flacher“ ist, aber auf dem gesamten Bereich $[-1,1]^2$ ist der Fehler größer.

$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir[79]

$$
\begin{aligned}
D^3f(u^*)(u_1,u_2,u_3) &= x_1 D^3f(u^*)(e_x,u_2,u_3) + y_1 D^3f(u^*)(e_x,u_2,u_3) \\
&= x_1x_2 D^3f(u^*)(e_x,e_x,u_3) + x_1y_2 D^3f(u^*)(e_x,e_y,u_3) \\
&\quad + y_1x_2 D^3f(u^*)(e_y,e_x,u_3) + y_1y_2 D^3f(u^*)(e_y,e_y,u_3) \\
&= x_1x_2x_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_x,e_x,e_x)}_{=\frac{\partial f}{\partial x\partial x\partial x}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x^3}(u^*)} + x_1x_2y_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_x,e_x,e_y)}_{=\frac{\partial f}{\partial x\partial x\partial x}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x^2\partial y}(u^*)} \\
&\quad + x_1y_2x_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_x,e_y,e_x)}_{=\frac{\partial f}{\partial x\partial y\partial x}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x^2\partial y}(u^*)} + x_1y_2y_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_x,e_y,e_y)}_{=\frac{\partial f}{\partial x\partial y\partial y}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x\partial y^2}(u^*)} \\
&\quad + y_1x_2x_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_y,e_x,e_x)}_{=\frac{\partial f}{\partial y\partial x\partial x}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x^2\partial y}(u^*)} + y_1x_2y_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_y,e_x,e_y)}_{=\frac{\partial f}{\partial y\partial x\partial y}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x\partial y^2}(u^*)} \\
&\quad + y_1y_2x_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_y,e_ye_x)}_{=\frac{\partial f}{\partial y\partial y\partial x}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial x\partial y^2}(u^*)} + y_1y_2y_3 \underbrace{D^3f(u^*)(e_y,e_ye_y)}_{=\frac{\partial f}{\partial y\partial y\partial y}(u^*)=\frac{\partial f}{\partial y^3}(u^*)} \\
&= x_1x_2x_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(u^*) + (x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(u^*) \\
&\quad + (x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3) \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(u^*) + y_1y_2y_3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(u^*),
\end{aligned}
$$

was das Prinzip hinter den Multilinearformen klarmachen sollte: Zu der partiellen Ableitung $\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(u^*)$ kommen alle Kombinationen von j–mal x und k–mal

[79] Das sieht schlimmer aus als es ist und sollte uns helfen, das System dahinter zu erkennen.

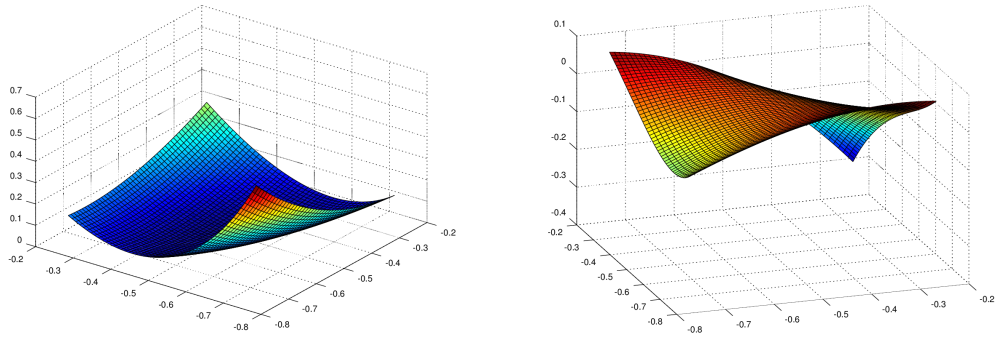

Abbildung 3.10: Abweichung der Taylorpolynome vom Grad 1 *(links)* und Grad 2 *(rechts)* auf dem Bereich $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]^2$. Hier ist die deutlich bessere Annäherung an der Stelle u^* klar zu erkennen.

y. Die Diagonale ist dann

$$\begin{aligned} & D^3 f(u^*)(u,u,u) \\ &= x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(u^*) + 3x^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(u^*) + 3xy^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(u^*) + y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(u^*) \\ &= e^{\frac{3}{4}} \left(-7x^3 - 3x^2 y - xy^2 - y^3\right) \end{aligned}$$

Damit können wir nun eine Näherung dritter Ordnung bilden, siehe Abb. 3.11.

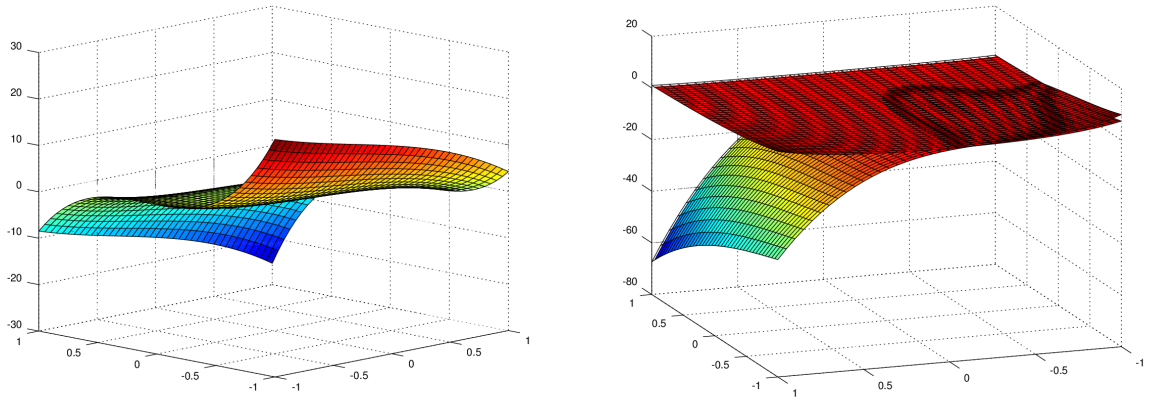

Abbildung 3.11: Die Diagonale der dritten Ableitung *(links)* und das Taylorpolynom der Ordnung 3 zusammen mit der Funktion *(rechts)*. Man sieht, daß die globale Annäherung sogar eher schlechter als besser wird.

Hier sieht man sehr gut den Unterschied zwischen lokaler und globaler Approximation. Die Approximation auf dem „kleinen“ Bereich $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$ um u^* ist

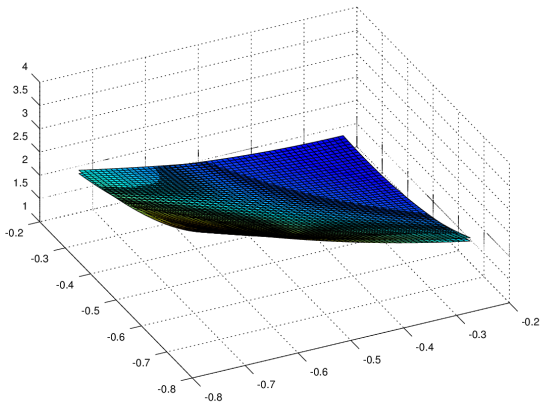

Abbildung 3.12: Approximation des Taylorpolynoms auf dem Bereich $[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}]$. Wie Sie sehen, sehen Sie fast nichts.

hingegen schon ziemlich gut, wie Abb. 3.12 zeigt.

Vierte und höhere Ableitungen schenken wir uns dann, nur noch eine kurze Bemerkung zu den dritten Ableitungen.

Bemerkung 3.33. Die dritten Ableitungen sind immer ein *dreidimensionales* Schema. Die Größe und Anzahl der Ebenen ist hingegen immer n, in drei Variablen stapelt man also drei 3×3–Matrizen übereinander und so weiter, wenn man symmetrische Trilinearformen betrachten will.

3.6 Parametrische Flächen

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir nun noch Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, also die multivariaten Gegenstücke zu den Kurven. Eine derartige Funktion kann man entweder als **parametrische Fläche** ansehen, wie sie im CAD benutzt werden, oder aber physikalisch als ein **Vektorfeld** interpretieren[80]. Wir wollen hier eher unphysikalisch an die Sache herangehen und die „Kurvenanalogie“ verwenden.

Beginnen wir mit den partiellen Ableitungen. Dazu betrachten wir die **Kurve**

$$g : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}^d, \\ t & \mapsto & f(x + ty), \end{cases}$$

über die wir sofort *vektorwertige* Richtungsableitungen und partielle Ableitungen definieren können.

Definition 3.34 (Partielle und Richtungsableitungen)**.** Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt an der Stelle $x \in U$

[80] Eine vektorwertige Funktion auf einem Gebiet. Typische Beispiele sind Strömungen oder Magnetfelder, wo jedem Punkt eine vektorwertige Flußrichtung zugeordnet wird.

1. **partiell differenzierbar** nach x_j, wenn
$$\frac{\partial f}{\partial x_j} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j)-f(x)}{h} \in \mathbb{R}^d,$$
existiert.

2. **richtungsdifferenzierbar** in **Richtung** $y \in \mathbb{R}^n$, wenn
$$D_y f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hy)-f(x)}{h} \in \mathbb{R}^d$$
existiert.

Die partiellen bzw. Richtungsableitungen von f an der Stelle x sind also jetzt die Ableitungen der **Kurve** $g(t) = f(x+te_j)$ bzw. $g(t) = f(x+ty)$ an der Stelle $t = 0$. Dies ist in der Tat so einfach wie es klingt. Schreiben wir $f = (f_j : j = 1,\dots,d)$ bezüglich seiner Komponenten, dann ist natürlich
$$D_y f_j(x) = \nabla f_j(x)^T y, \qquad j = 1,\dots,d,$$
und daher
$$D_y f(x) = \begin{pmatrix} D_y f_j(x) \\ \vdots \\ D_y f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_j(x)^T y \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla f_j(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{d\times n}} y, \tag{3.46}$$
und da die Richtungsableitung ja von der Form „Ableitung × Richtung“ ist, haben wir einen guten Kandidaten für die Ableitung gefunden.

Definition 3.35 (Jacobimatrix)**.** Für eine partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^d$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $x \in U$ bezeichnen wir die Matrix
$$f'(x) := Df(x) := Jf(x) := \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) : \begin{array}{l} j = 1,\dots,d \\ k = 1,\dots,n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_d}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{3.47}$$
als **Jacobimatrix** von f an der Stelle x.

Für $n = 1$, also eine **Kurve** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ ist die Jacobimatrix dann also
$$\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) : \begin{array}{l} j = 1,\dots,d \\ k = 1,\dots,n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx}(x) \\ \vdots \\ \frac{df_d}{dx}(x) \end{bmatrix} = f'(x),$$
die Ableitung der Kurven stimmt also mit der Definition (2.1) überein. Für $d = 1$ und beliebiges n hingegen ist
$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \nabla f(x)^T,$$
so daß das Konzept der Jacobimatrix in den beiden Fällen $n = 1$ und $d = 1$ konsistent ist. Die nächste Definition sollte uns bekannt vorkommen.

Definition 3.36. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt **differenzierbar** an der Stelle $x \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ gibt, so daß

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \ell(h)\|_1}{\|h\|_2} = \sum_{j=1}^{d} \frac{|f_j(x+h) - f_j(x) - \ell_j(h)|}{\|h\|_2}. \tag{3.48}$$

Eine lineare Abbildung $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ kann aber als

$$\ell(y) = Ly, \qquad L \in \mathbb{R}^{d \times n},$$

und natürlich ist diese Matrix $L = Jf(x)$, also die **Jacobimatrix**. Der Beweis ist eine direkte Verallgemeinerung von Satz 3.15.

Bemerkung 3.37 (Jacobimatrix)**.** Um es noch einmal klarzumachen: Die **Jacobimatrix** und damit die **Ableitung**[81] einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ hat als jte **Zeile** den *transponierten* Gradienten der Komponentenfunktion f_j. Allerdings kommt es, vor allem im Optimierungskontext, vor, daß es bequemer ist, mit der Transponierten der Jacobimatrix zu arbeiten, also der Matrix, deren Spalten die Gradienten sind. Und gelegentlich wird diese Matrix dann ebenfalls als „Jacobimatrix“ bezeichnet. Genau hinschauen kann daher nie schaden.

Übung 3.2 Formulieren und beweisen Sie Satz 3.15 für Vektorfelder. ◊

Unter Verwendung der Jacobimatrix können wir einen weiteren Klassiker der Differentialrechnung formulieren.

Satz 3.38 (Kettenregel)**.** *Sind* $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $g : V \to \mathbb{R}^d$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, *Funktionen mit* $f(U) \subset V$, *die an* $x \in U$ *bzw.* $f(x) \in V$ *differenzierbar sind, dann ist die zusammengesetzte Funktion* $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ *differenzierbar und es gilt*

$$\underbrace{J\,(g \circ f)\,(x)}_{\in \mathbb{R}^{d \times n}} = \underbrace{Jg\,(f(x))}_{\in \mathbb{R}^{d \times m}}\ \underbrace{Jf(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \tag{3.49}$$

Beweis: Da f und g differenzierbar sind, ist für $h \in \mathbb{R}^n$ und $h' \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Jf(x)\,h + \varphi(h) \\ g(y+h') &= g(y) + Jg(y)\,h' + \psi(h'), \end{aligned}$$

mit $\|\varphi(h)\|_2/\|h\|_2 \to 0$ für $h \to 0$ und $\|\psi(h')\|_2/\|h'\|_2 \to 0$ für $h' \to 0$. Damit ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x+h) &= g\Big(\underbrace{f(x)}_{=:y} + \underbrace{Jf(x)\,h + \varphi(h)}_{=:\eta}\Big) \\ &= g(f(x)) + Jg(f(x))\,(Jf(x)\,h + \varphi(h)) + \psi\,(Jf(x)\,h + \varphi(h)) \\ &= g(f(x)) + Jg(f(x))\,Jf(x)\,h + Jg(f(x))\,\varphi(h) + \psi\,(Jf(x)\,h + \varphi(h))\,. \end{aligned}$$

Mit der Notation aus (3.52) und (3.53) erhalten wir sofort, daß

$$\frac{\|Jg(f(x))\,\varphi(h)\|_2}{\|h\|_2} \le \|Jg(f(x))\|_2\ \underbrace{\frac{\|\varphi(h)\|_2}{\|h\|_2}}_{\to 0} \to 0,$$

[81] Noch genauer: Die Matrix, die diese Linearform beschreibt.

sowie, für hinreichend kleines[82] h,

$$\|Jf(x)h + \varphi(h)\|_2 \le \left(\|Jf(x)\|_2 + \frac{\|\varphi(h)\|_2}{\|h\|_2}\right) \|h\|_2 \le (\|Jf(x)\|_2 + 1)\ \|h\|_2, \tag{3.50}$$

also auch[83]

$$\begin{aligned}\frac{\psi\left(Jf(x)\,h + \varphi(h)\right)}{\|h\|_2} &= \frac{\psi\left(Jf(x)\,h + \varphi(h)\right)}{\left\|Jf(x)\,h + \varphi(h)\right\|_2} \frac{\left\|Jf(x)\,h + \varphi(h)\right\|_2}{\|h\|_2} \\ &\le \underbrace{\frac{\psi\left(Jf(x)\,h + \varphi(h)\right)}{\left\|Jf(x)\,h + \varphi(h)\right\|_2}}_{\to 0} \left(\|Jf(x)\|_2 + 1\right).\end{aligned}$$

Damit ist

$$(g \circ f)(x + h) = \underbrace{g(f(x))}_{=(g\circ f)(x)} + \underbrace{Jg(f(x))\,Jf(x)}_{=J(g\circ f)(x)}\ h + \eta(h), \qquad \frac{\|\eta(h)\|_2}{\|h\|_2} \to 0, \tag{3.51}$$

was genau die Behauptung des Satzes ist. □

Übung 3.3 Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die **Operatornorm**

$$\|A\|_2 := \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \tag{3.52}$$

wohldefiniert und endlich und erfüllt die Ungleichung

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2\,\|x\|_2. \tag{3.53}$$

♢

Korollar 3.39. *Erfüllen* f, g *die Bedingungen von Satz 3.38, dann ist*

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_k}(x) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial x_\ell}(f(x))\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(x), \qquad j = 1, \dots, d,\ k = 1, \dots, n. \tag{3.54}$$

Beweis: Folgt sofort aus

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_k}(x) = \left(Jg(f(x))\,Jf(x)\right)_{jk}$$

und der Rechenregel für das Matrixprodukt, siehe [1, 4]. □

Die Kettenregel liefert eine interessante Beobachtung für homogene Funktionen, siehe [32].

[82] Da $\lim_{h\to 0} \frac{\|\varphi(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\frac{\|\varphi(h)\|_2}{\|h\|_2} < 1$ für alle $\|h\|_2 < \delta$ erfüllt sein muss.

[83] Nicht vergessen: Nach (3.50) gilt auch $Jf(x)\,h + \varphi(h) \to 0$ für $h \to 0$.

Satz 3.40 (Satz von Euler)**.** *Ist* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine* k***–homogene Funktion*** *und differenzierbar and* $x \in U$*, dann ist*

$$f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x). \tag{3.55}$$

Den Operator in (3.55) bezeichnet man auch als θ**–Operator**.
Beweis: Wir differenzieren die Gleichung $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ nach λ und erhalten mit der Kettenregel

$$k\lambda^{k-1} f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda x)\, x_j,$$

woraus (3.55) mit $\lambda = 1$ folgt. □

[. . .] die Mathematik ist eine ganze Welt für sich, und man muß reichlich lange in ihr gelebt haben, um alles zu fühlen, was in ihr notwendig ist.

R. Musil, *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*

4 Extrema

Als nächstes wollen wir uns mit Extremalstellen, also Minima und Maxima[84] von Funktionen. Da wir dabei Stellen größten bzw. kleinsten Funktionswerts suchen, sollte f nun wieder eine **reellwertige Funktion** sein und da wir Differentiation, also eine *lokale* Eigenschaft, nutzen wollen, wird es auch nur um lokale Extrema gehen.

Definition 4.1 (Extrema)**.** Eine Stelle $x \in D$ heißt **Minimalstelle** bzw. **Maximalstelle** einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn es eine Umgebung U von x gibt, so daß

$$f(x) \leq f(y) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \geq f(y), \qquad y \in U \cap D, \tag{4.1}$$

gilt. Der Wert $f(x)$ heißt **lokales Minimum** bzw. **lokales Maximum** von f in U. Ist x Minimal- oder Maximalstelle[85], dann nennt man x **Extremalstelle** und den Wert $f(x)$ **Extremum** der Funktion f. Ein **striktes Maximum** bzw. ein **striktes Minimum** liegt vor, wenn die Ungleichungen in (4.1) strikt erfüllt sind.

4.1 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Aus Teil I kennen wird bereits eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums an x, nämlich $f'(x) = 0$. Und das überträgt sich auch nahtlos auf mehrere Variablen.

Satz 4.2 (Notwendige Bedingung)**.** *Ist $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine partiell differenzierbare Funktion und $x \in U$ ein lokales Extremum, dann ist $\nabla f(x) = 0$.*

Beweis: Reduktion auf den univariaten Fall. Da f partiell differnzierbar ist, sind die Funktionen $g_j : t \mapsto f(x + te_j)$, $j = 1, \ldots, n$, für $t \in (-\delta, \delta)$ für ein hinreichend kleines[86] δ differenzierbar. Daß x eine Extremalstelle von f ist, bedeutet, daß an

[84] Man kann es leider nicht oft genug sagen: Singular *Minimum/Maximum*, Plural *Minima/Maxima*. Ein Maxima findet man bestenfalls im Goldenen Blatt und selbst da ist es dann eine Maxima.

[85] Was sich nicht ausschließen muss!

[86] Die Menge U ist offen, es gibt also eine Kugel mit positivem Radius um x und in dieser ist δ die Länge der kürzesten achsenparallelen Strecke.

$t = 0$ ein Extremum derselben Art vorliegt und daher ist

$$0 = g_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \qquad j = 1, \dots, n,$$

was nichts anderes als $\nabla f(x) = 0$ ist. □

Wie in einer Variablen ist[87] $f'(x) = 0$ weder ein Garant für das Vorliegen eines Extremums, siehe Abb. 3.4, noch eine Möglichkeit, zwischen Minima und Maxima zu unterscheiden. Dafür benötigen wir Methoden zweiter Ordnung.

Definition 4.3 (Definite Matrizen)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **positiv definit**, wenn

$$y^T A y > 0, \qquad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{4.2}$$

und **positiv semidefinit**, wenn die Ungleichung in (4.2) mit „≥“ erfüllt ist. Die Matrix heißt **negativ definit** bzw. **negativ semidefinit**, wenn $-A$ positiv definit bzw. positiv semidefinit ist. Eine Matrix, die weder positiv noch negativ semidefinit ist, heißt **indefinit**.

Bemerkung 4.4 (Definitheit)**.**

1. Die Terminologie zur Definitheit ist nicht so ganz eindeutig: Im deutschsprachigen Raum unterscheidet[88] man eher zwischen definit und semidefinit, im englischsprachigen Raum zwischen strikt definit und definit. Hier empfiehlt es sich, immer nachzusehen, wie diese Eigenschaften in der jeweiligen Literatur definiert sind.

2. In vielen Fällen enthält die Definition der Definitheit auch noch, daß A eine **symmetrische Matrix** ist, also $A^T = A$ ist. Das ist für die Definition in (4.2) zwar nicht notwendig, wird aber relevant, wenn man mit Matrizen aus dem $\mathbb{C}^{n\times n}$ arbeiten möchte, wo die Bedingung $A = A^H = \overline{A^T}$ daß A eine **hermitesche Matrix** ist, dafür sorgt, daß $y^T A y$ reell und damit überhaupt mit 0 vergleichbar ist.

3. Am einfachsten beschreibt man Definitheit über die Eigenwerte der Matrix. Ein **Eigenwert** von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, zu der es ein $y \neq 0$ gibt, so daß

   $$Ax = \lambda x \tag{4.3}$$

   ist. Jede $n \times n$–Matrix hat n Eigenwerte, eventuell mit passend gezählter Vielfachheit und eine Matrix ist

   positiv definit, wenn alle Eigenwerte > 0 sind,

   positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte ≥ 0 sind,

   negativ definit, wenn alle Eigenwerte < 0 sind,

[87] Nach Definition 3.35, genauer (3.47) ist $f'(x) = Jf(x) = Df(x) = \nabla f(x)^T$ auch eine zulässige Schreibweise in mehreren Variablen!

[88] Bzw. unterschied.

negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte ≤ 0 sind,

indefinit, wenn es mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert gibt.

Übung 4.1 Zeigen Sie:

1. Ist A positiv definit, so ist $a_{jj} > 0$, $j = 1, \ldots, n$.
2. A ist genau dann positiv definit, wenn jede **Hauptuntermatrix**[89]

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

positiv definit ist.

◇

Aus der Linearen Algebra kennt man[90] das folgende Resultat, siehe z.B. [8], das Definitheit über eine Sammlung von Vorzeichen ausdrückt.

Satz 4.5 (Hauptminoren)**.** *Eine* ***symmetrische Matrix*** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ist genau dann* ***positiv definit*** *bzw.* ***positiv semidefinit****, wenn alle* ***Hauptminoren***

$$\det A_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

positiv bzw. nichtnegativ sind.

Zur Erinnerung: Die **Determinante** $\det A$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die eindeutige **alternierende Multilinearform** in den Zeilen oder Spalten der Matrix, die die Normierung $\det I = 1$ erfüllt, siehe [4], oder kann auch explizit über die **Laplacesche Entwicklungsregel**

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det \begin{bmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Allerdings ist die Determinante zwar ein nettes theoretisches Hilfsmittel, für praktische Rechnung jedoch ist sie ungeeignet, da sie numerisch hochgradig instabil und recht aufwendig zu berechnen ist, siehe [14].

[89] Englisch: **principal submatrix**

[90] Oder vielleicht auch nicht.

Mit Hilfe dieser Terminologie können wir nun die Extremaleigenschaften beschreiben. Wir machen das explizit für Minima, es lässt sich aber sehr einfach auf Maxima übertragen, wenn man bedenkt, daß f an der Stelle x genau dann ein Maximum hat, wenn $-f$ an x ein Minimum hat. Mit anderen Worten: Aus *positiv definit* wird in Satz 4.6 dann einfach ein *negativ definit*.

Satz 4.6. *Für $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in U \subset D$, U offen, gilt:*

1. *Hat f an x ein **lokales Minimum**, dann ist $\nabla f(x) = 0$ und die **Hessematrix** $Hf(x)$ ist positiv semidefinit.*
2. *Ist $\nabla f(x) = 0$ und $Hf(x)$ positiv definit*[91]*, dann ist x ein **striktes lokales Minimum**, d.h. es gibt eine Umgebung U' von x, so daß $f(x) < f(x')$, $x' \in U'$.*

Beweis: Beide Resultate folgen aus der Definition 3.30 der zweiten Ableitung, genauer aus der Tatsache, daß für hinreichend[92] kleines h

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T Hf(x)\, h + \eta(h), \qquad \frac{|\eta(h)|}{\|h\|_2^2} \to 0, \tag{4.6}$$

erfüllt ist, siehe Satz 3.31.

Für 1) nehmen wir an, daß f an x ein lokales Minimum hat, daß also, nach Satz 4.2, $\nabla f(x) = 0$ ist. Dann ist wegen der Minimalität und mit (4.6), für alle hinreichend kleinen h

$$\begin{aligned} 0 \;\le\; \frac{f(x+h)-f(x)}{\|h\|_2^2} &= \frac{f(x) + \overbrace{\nabla f(x)^T}^{=0} h + \frac{1}{2} h^T Hf(x)\, h + \eta(h) - f(x)}{\|h\|_2^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{h^T Hf(x)\, h}{\|h\|_2} + \frac{\eta(h)}{\|h\|_2^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\|h\|_2^2}\right)^T Hf(x)\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right) + \underbrace{\frac{\eta(h)}{\|h\|_2^2}}_{\to 0}, \end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right)^T Hf(x)\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right) \ge -2\,\underbrace{\frac{\eta(h)}{\|h\|_2^2}}_{\to 0}, \tag{4.7}$$

und die spezielle Wahl $h = ty$, $t \to 0$, liefert, daß $y^T Hf(x) y \ge 0$ sein muss.

Für 2) sei nun $Hf(x)$ positiv definit und $h \neq 0$ klein genug, sowie $\nabla f(x) = 0$. Da $Hf(x)$ positiv definit ist, ist $y^T Hf(x) y > 0$ für $\|y\|_2 = 1$ und da die Einheitskugel **kompakt** ist, ist

$$0 < m := \min_{\|y\|_2 = 1} y^T Hf(x)\, y. \tag{4.8}$$

Da außerdem

$$\lim_{h \to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|_2} = 0$$

[91] Im strikten Sinne!

[92] Die Verbindungsstrecke $[x, x+h]$ muss ganz in U liegen.

ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\|h\|_2 < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|\eta(h)|}{\|h\|_2} > -\frac{m}{2} \tag{4.9}$$

Mit (4.8) und (4.9) ist dann für $\|h\|_2 < \delta$

$$f(x+h) - f(x) = h^T Hf(x)\, h + \eta(h) = \|h\|_2^2 \Big(\frac{1}{2} \underbrace{\Big(\frac{h}{\|h\|_2}\Big)^T Hf(x) \Big(\frac{h}{\|h\|_2}\Big)}_{>m} + \underbrace{\frac{\eta(h)}{\|h\|_2}}_{>-m/2} \Big) > 0,$$

und damit hat f an der Stelle x ein striktes lokales Minimum. □

Übung 4.2 Gilt für ein striktes lokales Minimum $\nabla f(x) = 0$ und $Hf(x)$ positiv *definit*? ◊

Bemerkung 4.7. Satz 4.6 ist fast eine Charakterisierung für ein Minimum, aber eben nur fast. Also notwendige Bedingung benötigen wir positive Semidefinitheit der Hessematrix, dafür aber unabhänging davon, ob es sich um ein striktes Minimum handelt oder nicht, für die hinreichende Bedingung benötigen wir die stärkere positive Definitheit, bekommen aber im Gegenzug auch mehr dafür, nämlich ein striktes Minimum.

Man kann nun fragen, ob positive *Semi*definitheit in irgendeiner Form ein hinreichendes Kriterium für ein Minimum sein kann und die Antwort ist zuerst einmal „nein“: Man muss sich nur ein Polynom der Form

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \geq 3} p_\alpha\, x^\alpha$$

ansehen, dessen Hessematrix an $x = 0$ die Nullmatrix ist, also positiv *und* negativ semidefinit ist, das Polynom kann aber an der Stelle machen, was es will, von striktem Minimum über einen Sattelpunkt zum strikten Maximum, ohne daß es in der zweiten Ableitung sichtbar wäre[93]. Trotzdem kann einem auch im Fall von Semidefinitheit die Hessematrix helfen, Extrematypen auszuschliessen.

Proposition 4.8. *Für* $f \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $x \in U \subset D$, U *offen, mit* $\nabla f(x) = 0$ *gilt:*

1. *Hat* $Hf(x)$ *einen positiven Eigenwert, so ist* x *kein* ***lokales Maximum****.*
2. *Hat* $Hf(x)$ *einen negativen Eigenwert, so ist* x *kein* ***lokales Minimum****.*

Beweis: Wir zeigen nur 1), der Beweis von 2) funktioniert analog. Für einen normalisierten **Eigenvektor** y, $\|y\| = 1$ zum positiven **Eigenwert** $\lambda > 0$, also $Hf(x)y = \lambda y$, ergibt sich durch Taylorentwicklung

$$f(x + hy) = f(x) + h \underbrace{\nabla^T f(x)}_{=0} y + h^2 y^T Hf(\xi) y, \qquad \xi \in (0, hy),$$

[93] Ein einfacheres Beispiel sind die *univariaten* Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = \pm x^4$.

und da

$$y^T Hf(x)y = y^T(\lambda y) = \lambda\|y\|^2 = \lambda > 0$$

ist, ist auch $y^T Hf(\xi)\, y > 0$ wenn $|h|$ klein genug ist, sagen wir kleiner als $h_0 > 0$. Damit gilt

$$f(x) = f(x + hy) - y^T Hf(\xi)\, y < f(x + hy), \qquad |h| < h_0,$$

weswegen x keine **Maximalstelle** von f sein kann. □

Positive Definitheit der Hessematrix beschreibt eine weitere wichtige Eigenschaft einer Funktion.

Definition 4.9 (Konvexität)**.**

1. Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, genauer **konvexe Menge**, wenn

$$x, x' \in \Omega \qquad \Rightarrow \qquad \Omega \supseteq [x, x'] := \{(1-\alpha)x + \alpha x' : \alpha \in [0,1].\}. \quad (4.10)$$

2. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, genauer **konvexe Funktion**, wenn für $x, x' \in \Omega$

$$f\left((1-\alpha)x + \alpha x'\right) \le (1-\alpha)\, f(x) + \alpha\, f(x'), \qquad \alpha \in [0,1], \quad (4.11)$$

   und sie heißt **strikt konvex**, wenn in (4.11) für $\alpha \in (0,1)$ die *strikte* Ungleichung „$<$“ erfüllt ist.

3. Eine Funktion f heißt **konkav**[94], bzw. **konkave Funktion**, wenn $-f$ konvex ist.

Übung 4.3 Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x_0, \ldots, x_m \in \Omega$ und alle $0 \le \alpha_0, \ldots, \alpha_m$ mit $\alpha_0 + \cdots + \alpha_m = 1$ die Ungleichung

$$f\left(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j\, x_j\right) \le \sum_{j=0}^{m} \alpha_j f(x_j) \quad (4.12)$$

erfüllt ist. ◊

Aus Teil I kennen wir eine Beschreibung konvexer und konkaver Funktionen, nämlich $f'' \ge 0$ bzw. $f'' \le 0$, siehe [26]. Da Konvexität aber durch das Verhalten auf einer Geraden definiert ist, überträgt sich diese Eigenschaft recht einfach in den multivariaten Fall.

Satz 4.10 (Konvexität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene **konvexe Menge**. Dann ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann eine **konvexe Funktion**, wenn $Hf(x)$ für alle $x \in \Omega$ **positiv semidefinit** ist.*

[94] Konkave Mengen gibt es nicht und insbesondere ist eine Menge nicht konkav, nur weil sie nicht konvex ist.

Beweis: Sei $x \in \Omega$. Da Ω offen ist, gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein $\delta > 0$, so daß $x \pm \delta y \in \Omega$. Nun ist f genau dann konvex, wenn für jede solche Wahl von x und y die univariate Funktion

$$g : t \mapsto f(x + t\,\delta y), \qquad t \in [-1, 1],$$

konvex ist, das heißt, wenn

$$0 \le g''(t) = \underbrace{\delta^2}_{>0} D_y^2 f(x + t\,\delta y)$$

ist also wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$0 \le D_y^2 f(x) = y^T H f(x) y$$

ist, also genau dann, wenn die **Hessematrix** positiv semidefinit ist. □

Bemerkung 4.11. Damit können wir Extrema geometrischer wie folgt beschreiben: Ein Minimum liegt vor, wenn der Gradient verschwindet und die Funktion **lokal konvex** ist, ein Maximum, wenn der Gradient verschwindet und die Funktion **lokal konkav** ist.

4.2 Extrema unter Nebenbedingungen

Etwas spannender wird die Sache, wenn wir nicht mehr „allgemeine" lokale Extrema zu beschreiben suchen, sondern die Extremalsuche auf einen Teilbereich des $\mathbb{R}^n$ einschränken.

Beispiel 4.12. Wir wollen die Funktion $f(x, y) = ax + by$, $(a, b) \neq 0$, auf dem **Einheitskreis** $\mathbb{S}^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ oder der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ maximieren.

Da $\nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ ist, hat diese Funktion nach unseren bisherigen Beobachtungen *kein* lokales Extremum, auf den beiden Kompakta $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{D}^2$ hingegen natürlich schon. Diesen „Widerspruch" wollen wir nun auflösen und eine allgemeine Theorie für Extrema unter Nebenbedingungen herleiten. Dafür verwenden wir Methoden aus der *Optimierung*, siehe [28, 25], die nicht nur eleganter und elementarer als die aus der Analysis [11] sind, sondern obendrein auch noch leistungsfähiger.

Übung 4.4 Zeigen Sie: Auf dem n–dimensionalen **Einheitswürfel** $[-1, 1]^n$ hat die Funktion $f(x) = a^T x$, $a \in \mathbb{R}^n$, das Maximum $\|a\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$. ◇

Beim Ableiten auf beschränkten Gebieten müssen wir zuerst eine Verallgemeinerung der „rechtsseitigen" und „linksseitigen" Ableitungen, wie man sie von den Intervallen her kennt.

Definition 4.13 (Tangentialkegel)**.** Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$ bezeichnet man die Menge aller $y \in \mathbb{R}^n$ zu denen es Folgen $x_k \in \Omega$ und $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x, \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha_k (x_k - x) = y \tag{4.13}$$

erfüllt ist, als **Tangentialkegel** $T(\Omega, x)$ von Ω an der Stelle x.

Bemerkung 4.14.

1. Anschaulich gesprochen besteht der Tangentialkegel aus allen Richtungen, die von x aus in die Menge Ω *hinein* zeigen, da es, zumindest im Grenzwert, Punkte von der Form $x + \alpha y$ gibt.

2. Da man beide Seiten von (4.13) mit $\|y\|$ multiplizieren kann, können wir immer annehmen, daß $\|y\| = 1$ ist, und zwar bezüglich welcher Norm auch immer.

Beispiel 4.15. Wie sehen die Tangentialkegel für $\Omega = [-1,1]^2$ aus?

1. Ist $(x,y) \in (-1,1)^2$ ein **innerer Punkt** des Quadrats, dann können wir den Punkt aus allen Richtungen erreichen und $T(\Omega,(x,y)) = \mathbb{R}^n$. Das gilt *immer* für innere Punkte.

2. Ist $(x,y) \in \{\pm 1\} \times (-1,1)$ bzw. $(x,y) \in (-1,1) \times \{\pm 1\}$ ein **Randpunkt** auf einer **Kante** des Quadrats, dann ist

$$T(\Omega,(x,y)) = \{(u,v) : xu \le 0\} \qquad \text{bzw.} \qquad T(\Omega,(x,y)) = \{(u,v) : yv \le 0\}$$

3. In einer **Ecke** $(x,y) \in \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ ist schließlich

$$T(\Omega,(x,y)) = \{(u,v) : xu \le 0, yv \le 0\}.$$

Man sieht hier bereits, daß der Tangentialkegel ganz massiv von der Stelle abhängen kann[95].

Übung 4.5 Bestimmen Sie $T(\mathbb{S}^2,x)$, $x \in \mathbb{S}^2$, und $T(\mathbb{D}^2,x)$, $x \in \mathbb{D}^2$. ◊

Mit Hilfe des Tangentialkegels können wir eine Verallgemeinerung des einen Teils von Satz 4.6 erhalten.

Proposition 4.16. *Hat $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ein lokales Minimum bzw. Maximum an $x \in \Omega$, dann gilt*

$$\nabla f(x)^T y \ge 0, \qquad \textit{bzw.} \qquad \nabla f(x)^T y \le 0, \qquad y \in T(\Omega,x). \tag{4.14}$$

Beweis: Zu $y \in T(\Omega,x)$ gibt es Folgen $\Omega \ni x_k \to x$ und $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\alpha_k (x_k - x) \to y$. Da $x_k \to x$ bedeutet dies, daß

$$\alpha_k \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha_k} = 0.$$

Ist x ein lokales Minimum, so gilt für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$, daß

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; f(x_k) - f(x) = f(x + (x_k - x)) - f(x) = f\Big(x + \alpha_k^{-1} \underbrace{(\alpha_k (x_k - x))}_{=:y_k \to y}\Big) - f(x) \\ &=:\; f\left(x + \alpha_k^{-1} y_k\right) - f(x), \end{aligned}$$

[95] Er kann auch ziemlich wild und obskur werden, siehe [28].

also auch[96]

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{f\left(x+\alpha_k^{-1}y_k\right)-f(x)}{\alpha_k^{-1}} \\ &= \frac{f\left(x+\alpha_k^{-1}y\right)-f(x)}{\alpha_k^{-1}} + \underbrace{\frac{f\left(x+\alpha_k^{-1}y_k\right)-f\left(x+\alpha_k^{-1}y\right)}{\alpha_k^{-1}}}_{=D_{y_k-y}f(\xi_k)\to 0} \to D_y f = \nabla f(x)^T y, \end{aligned}$$

da f stetig differenzierbar ist. Wir haben also gezeigt, daß unter der Annahme eines Minimums

$$y \in T(M,x) \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f(x)^T y \ge 0$$

gilt, was nichts anderes als (4.14) ist. Ein Maximum behandelt man anlog. □

Bemerkung 4.17.

1. Anschaulich ist Proposition 4.16 das, was man erwarten würde: Ein Randpunkt x eines Intervalls ist ein lokales Minimum, wenn an einem linken Randpunkt $f'(x) \ge 0$, also die Funktion steigend oder an einem rechten Randpunkt $f'(x) \le 0$, also die Funktion fallend ist.

2. Den allgemeinen Fall erledigt dann der Tangentialkegel.

3. Ist x ein **innerer Punkt**, dann ist $T(\Omega,x) = \mathbb{R}^n$, also ist $\nabla f(x) \in T(\Omega,x)$ und dann muss für ein Minimum $0 \le \pm\|\nabla f(x)\|_2 = \nabla f(x)^T \nabla f(x)$ sein, was eben nur mit $\nabla f(x) = 0$ zu erreichen ist. Damit sind wir zurück bei Satz 4.6.

Als nächstes beschreiben wir auch die **Nebenbedingungen** des Extremums über Funktionen und zwar mittels $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$. Die zu betrachtende Menge ist dann

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0,\ h(x) \ge 0\}. \tag{4.15}$$

Das „$\ge$“ in (4.15) sollte man aber noch exakt erklären.

Definition 4.18. Für zwei Vektoren[97] $u, v \in \mathbb{R}^k$ verwenden wir die **partielle Ordnung** $u \le v$, was $u_j \le v_j$, $j = 1,\dots,k$, bedeuten soll.

Bei den **Ungleichungsnebenbedingungen** h unterscheiden wir zwei Typen, je nachdem, ob wir uns im Inneren oder auf dem Rand der so definierten Menge befinden.

Definition 4.19 (Aktive Nebenbedingungen)**.** Eine Ungleichungsnebenbedingung h_j heißt **aktiv** an x, wenn $h_j(x) = 0$ ist. Die Menge der an x aktiven Nebenbedingungen bezeichnen wir mit

$$A_h(x) := \{j : h_j(x) = 0\}. \tag{4.16}$$

[96] Mit $\xi_k \in \left[x+\alpha_k^{-1}y_k, x+\alpha_k^{-1}y_k\right]$ aufgrund des Mittelwertsatzes.
[97] Also ganz generisch.

Als nächstes brauchen wir ein Lemma, das ganz massiv an lineare Algebra erinnert, das aber eigentlich eher als **konvexe Analysis**[98] [22] anzusehen ist.

Lemma 4.20 (Farkas–Lemma). *Für* $A \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ *und* $b \in \mathbb{R}^k$ *gibt es genau dann ein* $0 \le x \in \mathbb{R}^\ell$ *mit*[99] $Ax = b$, *wenn*

$$A^T y \ge 0 \qquad \Rightarrow \qquad b^T y \ge 0. \tag{4.17}$$

Beweis: „⇒": Ist $Ax = b$, $x \ge 0$, und $A^T y \ge 0$, dann ist

$$b^T y = (Ax)^T y = \underbrace{x^T}_{\ge 0}\underbrace{A^T y}_{\ge 0} \ge 0.$$

Für „⇐" bemerken wir zuerst, daß es keine nichtnegative Lösung von $Ax = b$ gibt, wenn der Vektor $b \in \mathbb{R}^k$ nicht zu

$$\mathbb{R}^k \supset K_A := A\,\mathbb{R}^\ell_+ = \{Ax \,:\, x \ge 0\} \tag{4.18}$$

gehört. Diese Menge ist ein **konvexer Kegel**:

$$y, y' \in K_A \qquad \Rightarrow \qquad \alpha y + \alpha' y' \in K_A, \qquad \alpha, \alpha' \ge 0, \tag{4.19}$$

denn wenn $y = Ax$ und $y' = Ax'$, dann ist

$$\alpha y + \alpha' y' = \alpha Ax + \alpha' Ax' = A\left(\alpha x + \alpha' x'\right).$$

Man kann nun zeigen, daß sich K_A als

$$K_A = \bigcap_{j=1}^{N} \left\{ y \in \mathbb{R}^k \,:\, v_j^T y \ge 0 \right\} = \{y : Vy \ge 0\}, \qquad y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^k,\ V \in \mathbb{R}^{N\times k} \tag{4.20}$$

schreiben lässt.

Sei jetzt (4.17) erfüllt und nehmen wir an, daß $b \notin K_A$. Nach unserer obigen Bemerkung muß es also ein $v \in \{v_1, \ldots, v_N\}$ geben, so daß $v^T b < 0$ ist, woraus mit (4.17)[100] folgt, daß auch $A^T v \not\ge 0$ ist, daß es also mindestens ein $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so daß $(A^T v)_\ell < 0$ ist. Setzen wir nun $x = e_\ell$, dann ist $Ax \in K_A$ und somit

$$0 \le v^T Ax = \left(A^T v\right)^T x = e_\ell^T \left(A^T v\right) = \left(A^T v\right)_\ell < 0,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist. Also muss $b \in K_A$ gelten. □

Bemerkung 4.21. Die Zerlegung (4.20) und deren Beweis findet sich beispielsweise in [22, 28]. Für $k = \ell$ und invertierbares A kann man sich das leicht klarmachen, denn da ist ja $x = A^{-1}y$ und $x \ge 0$ bedeutet $A^{-1}y \ge 0$, das heißt,

[98] Wenn man denn überhaupt eine strikte Trennung der mathematischen Teilgebiete einführen möchte.

[99] Also eine **nichtnegative Lösung** für das lineare Gleichungssystem. Im Kontext der linearen Optimierung heisst sowas dann **zulässiger Punkt**.

[100] Von rechts nach links gelesen.

(4.20) ist mit $V = A^{-1}$ erfüllbar. Im allgemeinen Fall muss man zuerst $A\mathbb{R}^\ell$ als eventuellen Unterraum von $\mathbb{R}^k$, charakterisiert durch $w_j^T y = 0$, also $\pm w_j^T y \geq 0$, betrachten und dann wieder nach in diesem Unterraum linear unabhängigen Spalten suchen, die man dann passend invertieren kann. Das ist dann auch schon *fast* ein Beweis von (4.20), es muss nur noch sauber ausgearbeitet werden[101].

Mit diesem Hilfsmittel können wir dann die Extrema unter Nebenbedingungen beschreiben. Als ein technisches Hilfsmittel brauchen wir noch die **Linearisierung** der Nebenbedingungen:

$$L(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rcl} \nabla g_j(x)^T y & = & 0,\ j = 1,\dots,p \\ \nabla h_j(x)^T y & \geq & 0,\ j \in A_h(x) \end{array} \right\}. \tag{4.21}$$

Anschaulich enthält $L(x)$ die **Normalenrichtungen** zu den Nebenbedingungen mit korrekter **Orientierung**, positiv dazu geht es dann „in Richtung Menge Ω".

Satz 4.22. *Für $\Omega = \{x : g(x) = 0,\ h(x) \geq 0\}$ sei $x \in \Omega$ eine **Minimalstelle** von $f \in C^1(\Omega')$, $\Omega' \supseteq \Omega$ offen, mit*

$$\left\{ y : z^T y \geq 0, z \in T(\Omega, x) \right\} = \left\{ y : z^T y \geq 0, z \in L(x) \right\}. \tag{4.22}$$

Dann existieren Vektoren $\lambda \in \mathbb{R}^p$ und $\mu \in \mathbb{R}^q_+$, so daß

$$f'(x) - \lambda^T g'(x) - \mu^T h'(x) = 0 \tag{4.23}$$

$$\mu^T h(x) = 0 \tag{4.24}$$

Beweis von Satz 4.22: Sei also $x \in \Omega$ eine Minimalstelle von f bezüglich Ω. Nach Proposition 4.16 und der Annahme (4.22) heißt dies, daß

$$\nabla f(x)^T y \geq 0, \qquad y \in L(x). \tag{4.25}$$

Definieren wir $A \in \mathbb{R}^m$, $m := 2p + \#A_h(x)$ als[102]

$$\begin{aligned} A &:= A(x) = \left[Jg(x)^T, -Jg(x)^T, \nabla h_j(x) \ : \ j \in A_h(x) \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p(x)}{\partial x_1} & -\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial g_p(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_k(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_{k'}(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_p(x)}{\partial x_n} & -\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial g_p(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial h_k(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial h_{k'}(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dann ist[103] nach der Definition von $L(x)$

$$y \in L(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad A^T y \geq 0,$$

und wir können (4.26) umschreiben in

$$A^T z \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^T \nabla f(x) \geq 0. \tag{4.26}$$

[101] Was übrigens eine sehr schöne Übung darstellt.

[102] Zur Erinnerung: $g'(x) = Jg(x)$ erhalten wir dadurch, daß wir die Gradienten transponieren und übereinanderstapeln, und $Jg(x)^T$ durch „Nebeneinanderstellen" der Gradienten.

[103] Unter Verwendung der tiefliegenden Erkenntnis, daß $x = 0$ genau dann, wenn $[x, -x]^T \geq 0$.

Nach dem **Farkas–Lemma**, Lemma 4.20, heißt dies aber, daß die Menge

$$\{\gamma \in \mathbb{R}^m \ : \ A\gamma = \nabla f(x),\ \gamma \geq 0\}$$

nichtleer ist und somit gibt es ein

$$\gamma = \left[\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}, \gamma_k^{(3)} \ : \ j = 1, \ldots, p,\ k \in A_h(x)\right] \in \mathbb{R}_+^{2p+\#A_h(x)},$$

so daß

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= A\gamma = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j^{(1)} \nabla g_j(x) - \sum_{j=1}^{p} \gamma_j^{(2)} \nabla g_j(x) + \sum_{j \in A_h(x)} \gamma_j^{(3)} \nabla h_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\gamma_j^{(1)} - \gamma_j^{(2)}\right)}_{=:\lambda_j} \nabla g_j(x) + \sum_{j \in A_h(x)} \underbrace{\gamma_j^{(3)}}_{=:\mu_j} \nabla h_j(x), \end{aligned}$$

und mit $\mu_j = 0$, $j \notin A_h(x)$, ergibt sich (4.23). Die andere Folgerung, (4.24), sieht man sofort, wenn man das innere Produkt ausschreibt:

$$\mu^T h(x) = \sum_{j \in A_h(x)} \mu_j \underbrace{h_j(x)}_{=0} + \sum_{j \notin A_h(x)} \underbrace{\mu_j}_{=0} h_j(x) = 0.$$

Damit ist der Beweis auch schon komplett. □

Bemerkung 4.23. Formulierung und Beweis von Satz 4.22 kommen aus der Optimierungstheorie, genauer aus [28]. In der Analysis, beispielsweise in [11], verwendet man den Satz über implizite Funktionen zum Beweis einer etwas schwächeren Version, die nur Gleichheitsnebenbedingungen verwenden, dafür aber ohne die etwas komplexeren Tangentialkegel auskommt, kein Wunder, da Tangentialkegel ja vor allem bei Ungleichungsnebenbedingungen relevant werden. Wir werden den Satz im nächsten Kapitel nochmals formulieren und den Beweis zumindest skizzieren.

Bemerkung 4.24.

1. Die Bedingung (4.22) wird in der Optimierungstheorie als **Guingard–Bedingung** bezeichnet, siehe [28], und stellt eine Forderung an die „Bravheit“ der Nebenbedingungen dar.

2. Die Vektoren λ und μ bezeichnet man als **Lagrangemultiplikatoren**. Sie reichern das Gleichungssystem (4.23) um weitere nichtlineare Variablen neben x an, sind aber letztlich für die Lösung irrelevant.

3. Anschaulich betrachtet man gerne auch die **Lagrangfunktion**

   $$F(x) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$$

   und sucht dann eine Nullstelle von deren Gradient, minimiert also global. Warum das aber dann für die passenden Werte von λ und μ ein Minimum unter Nebenbedingungen charakterisiert, wird daraus leider nicht ersichtlich.

4. In der „Praxis“ wird die Suche nach Extrema unter Nebenbedingungen dadurch gelöst, daß man ableitet und gleich Null setzt, also

$$\begin{aligned} f'(x) - \lambda^T g'(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

nach x und λ löst und dann λ vergisst. Das sagt natürlich erst einmal gar nichts, denn Lagrange-Multiplikatoren geben eine *notwendige*, aber eben keine *hinreichende* Bedingung für ein Extremum eines bestimmten Typs, beispielsweise ein Minimum. Das muss *zusätzlich* verifiziert werden.

Beispiel 4.25 (Fortsetzung von Beispiel 4.12)**.** Für eine **lineare Funktion** $f(x) = a^T x$ und die **Einheitssphäre** $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ergibt sich mit $g(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$ die Forderung

$$0 = \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{bmatrix} = a - 2\lambda x$$

und damit $\lambda \neq 0$, denn sonst wäre $a = 0$, und

$$x_j = \frac{a_j}{2\lambda}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Das setzen wir in die Nebenbendingung[104] $\|x\|_2^2 = 1$ ein und erhalten

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j}{2\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4\lambda^2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}_{=\|a\|_2^2} = \left(\frac{\|a\|_2}{2\lambda}\right)^2,$$

also $\lambda = \pm\frac{1}{2}\|a\|_2$, und damit

$$x = \pm\frac{a}{\|a\|}.$$

Das sind tatsächlich zwei Extremalpunkte, nämlich das **Minimum** *und* das **Maximum** von f auf dem Einheitskreis. Hier sieht man auch schon eine große Schwäche der **Lagrangemultiplikatoren** bei Gleichheitsbedingungen: Sie können nicht zwischen den Typen der Extrema unterscheiden.

Beispiel 4.26 (Fortsetzung von Beispiel 4.12)**.** Nun betrachten wir die **Einheitskugel** $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$, also $h(x) = 1 - \|x\|_2^2$. Da[105] $\nabla h = \nabla g$ ist, erhalten wir ebenfalls[106] wieder

$$0 = a + 2\mu x,$$

nun aber wegen (4.24) noch zusätzlich die Aktivierungsbedingung

$$0 = \mu\, h(x) = \mu\left(1 - \|x\|_2^2\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu = 0 \quad \text{oder} \quad \|x\|_2 = 1.$$

[104] Wie immer geht alles mit dem Quadrat einfacher: *Quadratisch, praktisch, ...*

[105] Der konstante Term überlebt die Ableitung nicht.

[106] „Ebenfalls“ bis auf das Vorzeichen.

$\mu = 0$ ist aber unmöglich, da dann sofort $a = 0$ folgen würde, also muss $\|x\|_2 = 1$ und $\mu > 0$ sein und aus

$$1 = \|x\|_2^2 = \left\| -\frac{1}{2\mu} a \right\|_2^2 = \left(\frac{\|a\|_2}{2\mu} \right)^2$$

folgt $\mu = \frac{1}{2}\|a\|_2$ und damit

$$x = -\frac{a}{2\mu} = -\frac{a}{\|a\|_2},$$

was jetzt das Minimum auch eindeutig identifiziert, und zwar auf dem Rand. Allerdings werden Lagrangemultiplikatoren für Ungleichungsbedingungen sehr schnell komplizierter, weil man immer auch noch überprüfen muss, welche der Nebenbedingungen aktiv ist und welche nicht.

Bemerkung 4.27. Satz 4.22 hat auch eine Variante für Maxima. Man kann sich leicht überlegen, daß die Bedingung an die Ungleichungsnebenbedingungen dann $\mu \in \mathbb{R}^q_-$ lauten muss, indem man in Satz 4.22 einfach f durch $-f$ ersetzt und Gleichung (4.23) mit -1 multipliziert, was das Vorzeichen von μ umdreht.

Beispiel 4.28. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Minimierung der **Bilinearform** $f(x) = x^T B x$, wobei wir die **lineare Nebenbedingung** $g(x) = Ax - b$ verwenden. Hierbei können wir wieder annehmen, daß B **symmetrisch** ist, denn sonst ersetzen wir B durch $B' = \frac{1}{2}(B + B^T)$, wofür ja

$$x^T B' x = \frac{1}{2}(x^T B x + \underbrace{x^T B^T x}_{(x^T Bx)^T = x^T Bx}) = x^T B x$$

gilt. Dann ist[107]

$$\nabla f(x) = 2Bx \qquad \text{und} \qquad g'(x) = A$$

und damit erhalten wir aus Satz 4.22 die Bedingung

$$0 = \nabla f(x) - \lambda^T g'(x) = 2Bx - \lambda^T A = 2Bx - A^T \lambda = \begin{bmatrix} 2B & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung $Ax = b$ führt das dann zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} B + B^T & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

im Falle einer nichtsymmetrischen Matrix B. Damit lässt sich auch dieses Minimierungsproblem sehr einfach lösen.

Übung 4.6 Zeigen Sie: Für die Bilinearform $f(x) = \frac{1}{2} x^T B x$ ist $\nabla f(x) = (B + B^T)x$. ♢

[107] Wer's nicht glaubt: Nachrechnen!

4.3 Ein bisschen Variationsrechnung

Man kann Minimierungsprobleme noch ein wenig allgemeiner angehen, indem man nicht eine Funktion bezüglich deren Argument im $\mathbb{R}^n$ minimiert, sondern indem man einen Ausdruck, der von einer Funktion abhängt, bezüglich *dieser Funktion* minimiert. Der zu minimierende Ausdruck ist dann eine Abbildung von einem **Funktionenraum** in die reellen Zahlen, also ein sogenanntes **Funktional**. Die Minimierung von Funktionalen bezüglich ist genau das Thema der **Variationsrechnung** – im Übrigen ein sehr klassisches Gebiet der Analysis mit immens vielen Anwendungen. Sehen wir uns einmal kurz die wesentlichen Ideen an, und zwar in der Darstellung von [10]. Ein **Variationsproblem** befasst sich zuerst einmal mit der Minimierung eines Funktionals der Form

$$L[f] = \int_a^b F(x, f, f')\,dx \tag{4.28}$$

bezüglich der Funktion f, wobei $F(x, y, y') \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in den formalen Variablen x, y, y' ist.

Beispiel 4.29 (Kürzester Weg)**.** Gesucht ist eine Funktion f mit $f(a) = f_a$, $f(b) = f_b$ und kürzester Bogenlänge

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx, \qquad \Rightarrow \qquad F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Das wesentliche Konzept hier ist das **Differential** eines Funktionals, das einer Ableitung des Funktionals nach der Argumentfunktion entspricht. Für ein Funktional L fixieren wir f und betrachten für Funktionen h die Differenz

$$\Delta_h L[f] := L[f + h] - L[f].$$

Wir nennen L **differenzierbar** an f, wenn es ein **lineares Funktional**[108] $\delta L[h](f)$ gibt, so daß

$$\Delta_h L[f] = \delta L[h](f) + \eta(h), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\eta(h)}{\|h\|} = 0.$$

Dazu brauchen wir also einen normierten Raum von Funktionen und es kann nicht schaden, wenn der Funktionenraum auch vollständig ist. Ein derartiger **Banachraum** ist für ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ beispielsweise

$$C(I), \qquad \|f\| = \|f\|_\infty := \max_{x \in I} |f(x)| \tag{4.29}$$

oder

$$C^k(I), \qquad \|f\| = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\infty. \tag{4.30}$$

Lemma 4.30. *Das Differential $\delta L[\cdot](f)$ ist eindeutig.*

[108] Diese Funktional entspricht der Richtungsableitung in Richtung h.

Beweis: Gäbe es zwei Differentiale $h \mapsto \delta_1 L[h](f)$ und $h \mapsto \delta_2 L[h](f)$, dann wäre

$$\delta[h] := \delta_1 L[h](f) - \delta_2 L[h](f) = \Delta_h L[f] - \eta_1(h) - \Delta_h L[h] + \eta_2(h) = \eta_2(h) - \eta_1(h)$$

und da $\delta[\cdot]$ ein lineares Funktional ist, ist für $t > 0$ und $\|h\| = 1$

$$\delta[h] = \frac{\delta[th]}{t} = \frac{\delta[th]}{\|th\|} = \frac{\eta_1(th) - \eta_2(th)}{\|th\|}$$

also

$$\delta[h] = \lim_{t \to 0} \frac{\eta_1(th) - \eta_2(th)}{\|th\|} = 0$$

und damit ist auch

$$\delta[h] = \|h\| \, \delta[h/\|h\|] = 0$$

für *jedes* h, also $\delta = 0$, das heißt, $\delta_1 L[h](f) - \delta_2 L[h](f)$. □

Bemerkung 4.31. Das Funktional $L[f]$ ist normalerweise *nicht* **differenzierbar**, sondern "nur" **konvex**, d.h.

$$L\left[(1-\alpha) f + \alpha g\right] \leq (1-\alpha) L\left[f\right] + \alpha L\left[g\right], \qquad \alpha \in [0,1].$$

In diesem Fall betrachtet man nicht das Differential, sondern das sogenannte **Subdifferential**, siehe z.B. [22], was die Dinge zwar schon etwas schwerer bzw. interessanter aber nicht unmöglich macht.

Proposition 4.32. *Wenn das Funktional* $L[f]$ *an* f^* *ein Minimum hat, dann ist* $\delta L[h](f^*) = 0$ *für alle* h.

Beweis: Ist f^* eine Minimalstelle, dann ist für hinreichend kleines $\|h\|$

$$0 \leq L\left[f^* + h\right] - L\left[f^*\right] = \delta L[h] + \eta(h)$$

weswegen $\delta L[h] \geq 0$ sein muß, da der andere Term schneller als $\|h\|$ gegen Null geht. Nun ist aber wegen der Linearität des Differentials die Bedingung

$$0 \leq \delta L[h] = -\delta L[-h] \leq 0$$

nur mit $\delta L[h] = 0$ zu erreichen. □

Die Bedingung an das Differential ist ja ganz schön, aber es ist in keinster Weise klar, wie man sowas praktisch ausnutzen könnte. Zu diesem Zweck verwenden wir eine Taylor–Entwicklung von F und erhalten aus der Definition von L

$$\begin{aligned} \Delta_h L[f] &= L\left[f+h\right] - L[f] = \int_a^b F\left(x, f+h, f'+h'\right) - F\left(x, f, f'\right) \, dx \\ &= \int_a^b h \, \frac{\partial F}{\partial y}\left(x, f, f'\right) + h' \, \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, f, f'\right) \, dx + \cdots \end{aligned}$$

weswegen

$$\delta L[h] = \int_a^b h \, \frac{\partial F}{\partial y}\left(x, f, f'\right) + h' \, \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, f, f'\right) \, dx \tag{4.31}$$

ist.

Satz 4.33. *Ist eine Funktion f Minimallösung, dann erfüllt sie die* ***Euler–Lagrange–Gleichung***

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f, f') - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f, f') = 0 \tag{4.32}$$

des Variationsproblems.

Die Differentialgleichung (4.32) kann man dann mit den verschiedensten Verfahren numerisch angehen kann.

Der Beweis von Satz 4.33 basiert auf dem folgenden elementaren Lemma.

Lemma 4.34. *Erfüllen die Funktionen $f_0, \dots, f_n \in C[a, b]$ die Identitäten*

$$\int_a^b \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\, h^{(j)}(x) = 0 \tag{4.33}$$

für alle $h \in C^n[a, b]$ mit $h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0$, $j = 0, \dots, n$, dann gilt

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_j^{(j)}(x) = 0, \qquad x \in [a, b]. \tag{4.34}$$

Beweis: Partielle Integration von

$$\int_a^b f(x)\, h^{(j)}(x)\, dx = (-1)^j \int_a^b f^{(j)}(x)\, h(x)\, dx$$

zeigt, daß genau dann $\int_a^b f(x)\, h^{(j)}(x)\, dx = 0$ für alle h, die am Rand verschwinden, gilt, wenn

$$0 = f^{(j)} \qquad \Leftrightarrow \qquad f \in \Pi_{j-1}$$

ist. Sei F_j die $(n-j)$–te Stammfunktion von f_j, also

$$F_j = \int_a^x \cdots \int_a^{t_2} f_j(t_1)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_{n-j},$$

dann ist natürlich $f_j = F_j^{(n-j)}$ und partielle Integration liefert wieder einmal

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f_j(x)\, h^{(j)}(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b F_j^{(n-j)}(x)\, h^{(j)}(x)\, dx \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \int_a^b (-1)^j F_j(x)\, h^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \int_a^b \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F_j(x)\, h^{(n)}(x)\, dx, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} F_j(x) \in \Pi_{n-1} \qquad \Rightarrow \qquad f_n = -\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j F_j + p, \quad p \in \Pi_{n-1}.$$

Damit ist f_n mindestens eine C^1–Funktion, denn alle Funktionen F_j, $j = 0, \ldots, n-1$, auf der rechten Seite sind Stammfunktionen stetiger Funktionen. Nimmt man nun die erste Ableitung, dann ist

$$f_n' - f_{n-1} = -\sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j F_j' + p'$$

wieder eine C^1–Funktion, kann also noch einmal differenziert werden und damit ist

$$(f_n' - f_{n-1})' = f_n'' - f_{n-1}'$$

eine wohldefinierte stetige Funktion. Setzen wir dieses Argument induktiv fort, so erhalten wir schließlich, daß

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_j^{(j)}$$

eine stetige Funktion ist, und eine weitere partielle Integration zeigt, daß

$$0 = \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_j^{(j)} \right)(x)\, h(x)\, dx = 0, \qquad h(a) = h(b) = 0,$$

ist, und da das für alle stetigen h gilt, muß die stetige Funktion in (4.34) in der Tat auf ganz $[a, b]$ verschwinden. □

Übung 4.7 Zeigen Sie: Ist f stetig und erfüllt

$$\int_a^b f(x)h(x)\, dx = 0, \qquad h \in C[a, b], \quad h(a) = h(b) = 0,$$

dann ist $f = 0$. ♢

Beweis von Satz 4.33: Wir wenden einfach Lemma 4.34 auf die Identität

$$0 = \delta L[h] = \int_a^b h \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f, f')}_{f_0} + h' \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}(x, f, f')}_{f_1}\, dx$$

an. □

Beispiel 4.35 (Kürzester Weg, Teil II)**.** In diesem Fall ist $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ und damit

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Euler–Lagrange–Gleichung lautet also

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\partial F}{\partial y'}(x, f, f') = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$

also

$$C^2 = \frac{f'(x)^2}{1 + (f'(x))^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \pm\sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}},$$

also ist f' eine Konstante und die Funktion damit eine Gerade – die Konstante C bestimmt sich dann aus den Randbedingungen, sollte aber nicht gerade ± 1 sein[109].

[109] Überlegen Sie sich, warum das nicht sein kann.

Da ist das Problem, suche die Lösung;. Du kannst Sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.

D. Hilbert

5 Implizite Funktionen

Eine **implizite Funktion** gibt Beziehungen zwischen Variablen x und y nur auf indirekte Weise an, nämlich als

$$F(x,y) = 0, \qquad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad y \in V \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^d. \tag{5.1}$$

Insbesondere kann man ein beliebiges **Gleichungssystem**

$$\begin{aligned} g_j(x) = h_j(x), \quad j = 1,\dots,d, \qquad &\Leftrightarrow \qquad G(x) = H(x) \\ &\Leftrightarrow \qquad (G-H)(x) = 0 \end{aligned}$$

als implizite Gleichung darstellen. Das Ziel bei der Behandlung impliziter Funktionen besteht dann darin, einige Variablen in Abhängigkeit der anderen Variablen auszudrücken, also eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu finden, so daß mit der Notation aus (5.1) dann

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad x \in U, \tag{5.2}$$

erfüllt ist. In diesem Kapitel werden wir herausfinden, unter welchen Voraussetzungen so etwas zumindest lokal möglich ist und wie man implizite Funktionen nutzen kann.

5.1 Ein Ableitungstrick und Implizitierung

Bevor wir loslegen, ein einfaches Beispiel für implizite Funktionen.

Beispiel 5.1 (Kreise & Kugeln)**.** Der Einheitskreis $\mathbb{S}^2$ erfüllt die implizite Funktion

$$0 = F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - 1 \qquad \text{oder} \qquad 0 = F(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Beide Gleichungen sind korrekt, aber bei der ersten ist F wegen der Wurzel nicht differenzierbar. Beim **Auflösen** nach y gelangt man zu der wohlbekannten Fallunterscheidung

$$y = f_\pm(x) = \pm\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1],$$

es gibt also keine[110] Auflösung für alle x und es kann mehrere Lösungszweige geben. Analoges gilt für die Einheitssphären $\mathbb{S}^n$, die durch

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1$$

implizit gegeben sind.

Ein erster Vorteil impliziter Funktionen ist, daß wir Funktionen manchmal sehr einfach differenzieren können, indem wir die **Kettenregel** ausnutzen. Sei also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^d$ differenzierbare Funktionen mit $F(x, f(x)) = 0$. Dann setzen wir $G(x) = F(x, f(x)) = F(g(x))$, $g(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$ und erhalten nach der Kettenregel (3.54)[111] aus der Tatsache, daß $G(x) \equiv 0$ ist, für $j = 1, \dots, d$ und $k = 1, \dots, n$ die Rechnung

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial G_j}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} F(g(x)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_\ell}(g(x)) \underbrace{\frac{\partial g_\ell}{\partial x_k}(x)}_{=\frac{\partial x_\ell}{\partial x_k}=\delta_{k,\ell}} + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_\ell}(g(x)) \underbrace{\frac{\partial g_{n+\ell}}{\partial x_k}(x)}_{=\frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}} \\ &= \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x, f(x)) + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_\ell}(x, f(x)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x, f(x)) + \Big(F'_y(x, f(x))\, f'(x)\Big)_{jk}, \end{aligned}$$

also, wenn wir alles in einer Matrix zusammenfassen,

$$\underbrace{F'_x(x, f(x))}_{\in \mathbb{R}^{d\times n}} = -\underbrace{F'_y(x, f(x))}_{\in \mathbb{R}^{d\times m}} \underbrace{f'(x)}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}}, \tag{5.3}$$

wobei F'_x die Ableitung bzw. die **Jacobimatrix** bezüglich der ersten n Variablen $x_1, \dots, x_n$ bezeichnet und F'_y die Ableitung nach den letzten m Variablen $y_1, \dots, m$. Ist $d = m$ und die dann **quadratische Matrix** $F'_y(x, f(x))$ **invertierbar**, dann ist sogar

$$f'(x) = -F'_y(x, f(x))^{-1}\, F'_x(x, f(x)). \tag{5.4}$$

Beispiel 5.2. Leiten wir doch einmal unsere impliziten Kreise $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ mit $f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ ab, dann ergibt sich, da hier $d = m = 1$ ist, die Ableitung

$$f'(x) = -\frac{2x}{\pm 2\sqrt{1 - x^2}} = \mp\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und das ganz ohne die Wurzel ableiten zu müssen.

[110] Relle, um genau zu sein. Aber Achtung: Differenzierbarkeit von komplexwertigen Funktionen ist nicht so einfach und nennt sich dann **Funktionentheorie**, siehe [15].

[111] Das ist auch gleich noch einmal eine schöne Übung im Umgang mit der Kettenregel.

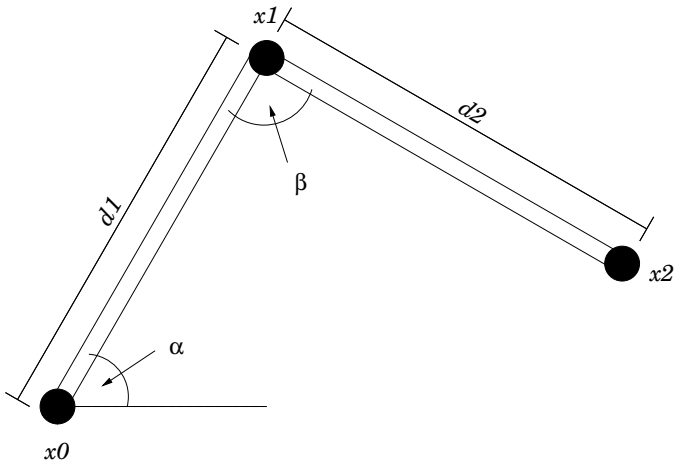

Abbildung 5.1: Der **Zweigelenkroboter**. Die Regelgrößen sind die beiden Winkel α und β, die zu regelnde Größe ist der **Tool Center Point** $x^{(2)}$.

Beispiel 5.3 (Roboter)**.** Wir sehen uns einmal die **Kinematik** eines ganz einfachen Roboters wie in Abb. 5.1 an und wollen wissen, wie der **Tool Center Point** $x^{(2)}$ von den Winkeln α und β abhängt[112]. Dazu bestimmen bestimmen wir zuerst

$$x^{(1)} = x^{(0)} + d_1 \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

und dann

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(1)} + d_2 \begin{bmatrix} \cos\alpha+\beta \\ \sin\alpha+\beta \end{bmatrix} = x^{(0)} + d_1 \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \\ &= x^{(0)} + \begin{bmatrix} d_1\cos\alpha + d_2\cos(\alpha+\beta) \\ d_1\sin\alpha + d_2\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix} =: f(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt (kinematische) **Vorwärtstransformation**, die Abbildung f^{-1} entsprechend (kinematische) **Rückwärtstransformation**. Kritisch sind, wie wir gerade gesehen haben, **singuläre Konfigurationen**, die sich aus der Ableitung

$$f'(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} -d_1\sin\alpha - d_2\sin(\alpha+\beta) & -d_2\sin(\alpha+\beta) \\ d_1\cos\alpha + d_2\cos(\alpha+\beta) & d_2\cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

ergeben. Da wir bei der Determinante beliebig Spalten zueinander addieren

[112] Wir machen das hier jetzt „zu Fuß“, es gibt dafür eine sehr schöne klassische Theorie auf der Basis von Matrizenmultiplikationen, die man beispielsweise in [21] findet und die auch den Standard in der Robotik darstellt.

oder voneinander abziehen dürfen, ist

$$\begin{aligned}\det f'(\alpha,\beta) &= \det\begin{bmatrix} -d_1\sin\alpha & -d_2\sin(\alpha+\beta) \\ d_1\cos(\alpha+\beta)+ & d_2\cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix} \\ &= d_1d_2\left(\cos\alpha\,\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\,\cos(\alpha+\beta)\right) = d_1d_2\sin(\alpha+\beta-\alpha) \\ &= d_1d_2\sin\beta,\end{aligned}$$

und eine Singularität tritt für $\beta \in \{0,\pi\}$ auf, also für den voll zusammengeklappten Roboter und den komplett ausgestreckten Roboter und das sind auch genau die beiden Situationen, die man vermeiden sollte.

Beispiel 5.4 (Roboter II)**.** Durch eine einfache Umformung können wir unser Roboterproblem auch implizit schreiben, nämlich als

$$0 = F(x,\phi) = F(x_1,x_2,\alpha,\beta) = x - f(\phi) = x - x^{(0)} - \begin{bmatrix} d_1\cos\alpha + d_2\cos(\alpha+\beta) \\ d_1\sin\alpha + d_2\sin(\alpha+\beta)\end{bmatrix}.$$

Diese Funktion erfüllt dann

$$0 = F(f(\phi),\phi) = F\left(x, f^{-1}(x)\right).$$

Es gibt aber noch eine andere **Implizitierung**. Die Kenntnis der Winkel ist nämlich äquivalent zur Kenntnis des Punktes $x^{(1)}$, denn kennen wir $x^{(1)}$, dann sind α und β ja die Winkel zwischen $x^{(1)}-x^{(0)}$ und der x–Achse bzw. zwischen $x^{(1)}-x^{(0)}$ und $x-x^{(1)}$. Und für $x^{(1)}$ gibt es eine fast noch schönere implizite Funktion:

$$0 = F\left(x,x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} d_1^2 - \|x^{(1)}-x^{(0)}\|_2^2 \\ d_2^2 - \|x-x^{(1)}\|_2^2\end{bmatrix}.$$

Diese Funktion stellt eine **geometrische Invariante** des Roboters dar: Die Abstände der betrachteten Punkte zueinander sind die Längen der Arme.

5.2 Der Satz über implizite Funktionen

In diesem Abschnitt erhalten wir das wichtigste Resultat über implizite Funktionen, das uns sagt, wann wir nach geeigneten Variablen auflösen können.

Satz 5.5 (Satz über implizite Funktionen)**.** *Zu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ sei $F : U\times V \to \mathbb{R}^m$ **stetig differenzierbar**. Weiter sei $(x^*,y^*) \in U\times V$ ein Punkt mit $F(x^*,y^*)=0$, an dem die Matrix*

$$F'_y = \left[\frac{\partial F_j}{\partial y_k} : j,k = 1,\dots,m\right] \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{5.5}$$

***invertierbar** ist. Dann gibt es $x^* \in U' \subseteq U$ und $y^* \in V' \subseteq V$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U' \to V'$ mit*

$$f(x^*) = y^* \qquad \textit{und} \qquad F(x,f(x)) = 0, \quad x \in U' \tag{5.6}$$

Außerdem gilt

$$F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x), \qquad (x,y) \in U'\times V'. \tag{5.7}$$

Bemerkung 5.6 (Implizite Funktionen)**.**

1. Die Dimension von y und die Anzahl der Komponenten von F müssen jetzt in Satz 5.5 übereinstimmen, denn sonst wäre die Matrix in (5.5) nicht quadratisch und damit auch nicht invertierbar.

2. Man kann das auch anders sehen: Die Anzahl der Komponenten von F gibt die Anzahl der Variablen, nach denen man auflösen kann. Interpretiert man F nun als **Gleichungssystem**, dann heißt das, daß man in jeder Gleichung eine Variable **eliminieren**, also durch andere Variable ausdrücken und dann in den anderen Gleichungen einsetzen kann. Diese Vorgehensweise kennt man auch bei der naiven Lösung von linearen Gleichungssystemen[113]

3. Die Mengen U', V' sorgen für eine **Lokalisierung** der Invertierung. Die Funktion f ist nicht *global* bestimmbar, sondern eben nur *lokal*.

Bevor wir uns an den Beweis von Satz 5.5 machen, zuerst noch eine kleine Vorbemerkung.

Lemma 5.7. *Ist F stetig differenzierbar und ist die Matrix F'_y an einer Stelle (x, y) invertierbar, so ist sie das auch in einer Umgebung von (x, y).*

Beweis: Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn

$$\det F'_y(x, y) \neq 0$$

ist. Diese Determinante ist ein Polynom in den m^2 Variablen $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, m$, die ihrerseits wieder stetige Funktionen sind. Damit ist $\det F'_y(x, y)$ eine stetige Funktion und damit gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\left.\begin{array}{l} \|x' - x\| \\ \|y' - y\| \end{array}\right\} \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\det F'_y(x', y') - \det F'_y(x, y)\right| < \frac{1}{2}\left|\det F'_y(x, y)\right|,$$

und damit hat dann $\det F'_y(x', y')$ für alle solchen x', y' dasselbe Vorzeichen wie $\det F'_y(x, y)$, kann also insbesondere nicht Null werden. Damit ist die Ableitung aber in dieser Umgebung invertierbar. □

Jetzt aber zum Beweis, der ein bisschen länglicher werden wird.
Beweis von Satz 5.5: Nach Voraussetzung ist die Matrix $A := F'_y(x^*, y^*)$ invertierbar und so können wir die Funktion

$$G : (x, y) \mapsto y - A^{-1} F(x, y), \qquad (x, y) \in U \times V, \tag{5.8}$$

definieren, die

$$G'_y = I - A^{-1} F'_y \qquad \Rightarrow \qquad G'_y(x^*, y^*) = I - F'_y(x^*, y^*)^{-1} F'_y(x^*, y^*) = 0$$

[113] Wie es richtig geht, lernt man dann in einer Numerik–Vorlesung.

erfüllt. Wegen der Stetigkeit von F'_y gibt es daher Umgebungen[114] $x^* \in U_1$ und $y^* \in V_1$ des Punktes, so daß

$$\|G'_y(x,y)\| < \frac{1}{2}, \qquad (x,y) \in U_1 \times V_1, \tag{5.9}$$

wobei wir als Matrixnorm beispielsweise wieder die Operatornorm verwenden können. Dann wählen wir ein $\rho > 0$, so daß

$$B_\rho(y^*) \subset V_1$$

ist und eine offene Umgebung $U_2 \subseteq U_1$ von x^*, so daß

$$\sup_{x \in U_2} \left\| G(x,y^*) - y^* \right\| \leq \frac{\rho}{2}. \tag{5.10}$$

Nach der Definition (5.8) ist

$$F(x,y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = G(x,y)$$

und unsere implizite Funktion ist damit äquivalent zu einem **Fixpunktproblem**. Nach (5.9) ist für $x \in U_1$ und $y, y' \in V_1$

$$\begin{aligned} \left\| G(x,y) - G(x,y') \right\| &= \left\| G'_y(x,\eta)\,(y-y') \right\| \leq \underbrace{\left\| G'_y(x,\eta) \right\|}_{\leq \frac{1}{2}} \left\| (y-y') \right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|y-y'\|, \end{aligned}$$

auf der Menge V_1 ist also $G(x,\cdot)$ eine Kontraktion für alle $x \in U_1$. Wählen wir $x \in U_2 \subset U_1$ und $y' = y^*$, dann erhalten wir für $y \in B_\rho(y^*)$ daß

$$\begin{aligned} \|G(x,y) - y^*\| &\leq \|G(x,y) - G(x,y^*)\| + \|G(x,y^*) - y^*\| \\ &\leq \frac{1}{2} \underbrace{\|y-y^*\|}_{\leq \rho} + \underbrace{\sup_{x \in U_2} \|G(x,y^*) - y^*\|}_{\leq \rho/2} \leq \rho \end{aligned}$$

so daß für jedes $x \in U_2$ die Funktion

$$g : y \mapsto G(x,y), \qquad B_\rho(y^*) \to B_\rho(y^*),$$

eine **Kontraktion** auf $B_\rho(y^*)$ ist. Nach Satz 1.51, bekannt als **Banachscher Fixpunktsatz**, hat damit die Funktion g für jedes $x \in U_2$ einen *eindeutigen* **Fixpunkt** $f(x)$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = G(x,f(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = F(x,f(x))$$

und es gibt in $B_\rho(y^*)$ auch keinen weiteren Fixpunkt, also auch kein weiteres $y \in B_\rho(y^*)$ mit $F(x,y) = 0$. Zwischenfazit:

[114] Die wir als Kugeln und damit konvex wählen können.

Es gibt eine lokale Funktion $f : U_2 \to B_\rho(y^*)$ mit $F(x, f(x)) = 0$ und $f(x)$ ist der einzige passende Wert in $B_\rho(y^*)$ zu x.

Nun müssen wir noch zeigen, daß f differenzierbar ist. Dies zeigen wir nur für den „Bezugspunkt" x^*, da dieser beliebig ausgewählt war[115] gilt das für jede Stelle, an der F'_y invertierbar ist und nur solche betrachten wir ja. Wir setzen

$$A_x := F'_x(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad A_y := F'_y(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

und erhalten aus der Differenzierbarkeit von F, daß

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \underbrace{F(x^*,y^*)}_{=0} + A_x(x-x^*) + A_y(y-y^*) + \eta(x,y) \\ &= A_x(x-x^*) + A_y(y-y^*) + \eta(x,y), \quad \frac{\eta(x,y)}{\|(x-x^*, y-y^*)\|_2} \to 0, \end{aligned} \tag{5.11}$$

wobei A_y invertierbar ist. Das liefert

$$\begin{aligned} 0 &= A_y^{-1}0 = A_y^{-1}F(x,f(x)) = A_y^{-1}\left(A_x(x-x^*) + A_y(f(x)-y^*) + \eta(x,y)\right) \\ &= A_y^{-1}A_x(x-x^*) + f(x) - y^* + A_y^{-1}\eta(x,y), \end{aligned}$$

also

$$f(x^*+h) - f(x^*) = f(x^*+h) - y^* = \underbrace{-A_y^{-1}A_x}_{=:f'(x^*)}h - A_y^{-1}\eta(x^*+h, f(x^*+h)). \tag{5.12}$$

Die hier gefundene Definition von $f'(x^*)$ ist bei genauem Hinsehen

$$f'(x^*) = -F'_y(x^*,y^*)^{-1}\,F'_x(x^*,y^*),$$

also nichts anderes als unsere bereits wohlbekannte Formel (5.4). Nach (5.12) ist also f differenzierbar an x^*, wenn

$$\frac{\eta(x^*+h, f(x^*+h))}{\|h\|_2} \to 0. \tag{5.13}$$

Nach (5.11) gibt es $U_3 \subset U_2$ und $0 < \sigma \le \rho$, so daß für $(x,y) \in U_3 \times B_\sigma(y^*)$

$$\|\eta(x,y)\| \le \frac{1}{2\|A_y^{-1}\|}\,\|(x-x^*, y-y^*)\| \le \frac{1}{2\|A_y^{-1}\|}\left(\|x-x^*\|_2 + \|y-y^*\|_2\right),$$

siehe Übung 5.1, und alle Punkte $(x, f(x))$, $x \in U_3$, liegen in $U_3 \times B_\sigma(y^*)$. Dazu wählen wir erst σ klein genug und dann U_3 so, daß es klein genug ist und dann zusätzlich (5.10) erfüllt[116]. Dann ist

$$\|\eta(x,f(x))\| \le \frac{1}{2\|A_y^{-1}\|}\left(\|x-x^*\|_2 + \|f(x)-y^*\|_2\right)$$

[115] Einzige Forderung war ja, daß F'_y an dieser Stelle invertierbar ist.

[116] Dazu müssen wir die Menge ja nur *verkleinern*.

und damit nach (5.12)

$$\begin{aligned}\|f(x^*+h)-y^*\| &\le \|A_y^{-1}A_x h\| + \|A_y^{-1}\eta(x^*+h,f(x^*+h))\| \\ &\le \|A_y^{-1}A_x\|\,\|h\| + \|A_y^{-1}\|\,\|\eta(x^*+h,f(x^*+h))\| \\ &= \|A_y^{-1}A_x\|\,\|h\| + \frac{1}{2\|A_y^{-1}\|}\|A_y^{-1}\|\,(\|h\|_2+\|f(x^*+h)-y^*\|_2) \\ &= \left(\|A_y^{-1}A_x\|+\frac{1}{2}\right)\|h\| + \frac{1}{2}\|f(x^*+h)-y^*\|_2,\end{aligned}$$

also

$$\|f(x^*+h)-y^*\| \le \left(2\|A_y^{-1}A_x\|+1\right)\|h\|_2. \tag{5.14}$$

Damit ist dann aber

$$\begin{aligned}0 \;\leftarrow\; & \frac{\left\|\eta(x^*+h,f(x^*+h))\right\|}{\left\|(h,f(x^*+h)-y^*\right\|} \ge \frac{\left\|\eta(x^*+h,f(x^*+h))\right\|}{\|h\|_2+\|f(x^*+h)-y^*\|_2} \\ \ge\; & \frac{\left\|\eta(x^*+h,f(x^*+h))\right\|}{\|h\|_2+\left(2\|A_y^{-1}A_x\|+1\right)\|h\|_2} = \frac{\left\|\eta(x^*+h,f(x^*+h))\right\|}{\|h\|_2}\,\frac{1}{2\|A_y^{-1}A_x\|+2},\end{aligned}$$

was (5.13) beweist und damit den Beweis der Differenzierbarkeit von f komplettiert, aus der aber nach Satz 3.15 auch die Stetigkeit von f folgt. □

Übung 5.1 Zeigen Sie, daß $\|(x,y)\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$ gilt. (Einzeiler) ◇

Eine Beobachtung des Beweises fassen wir nochmals zusammen.

Korollar 5.8 (Ableitung implizit definierter Funktion). *Ist* $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar,* $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ *und ist* $(x,y) \in U \times V$ *mit* $F(x,y) = 0$ *und* $\det F'_y(x,y) \neq 0$, *dann gilt für die implizit definierte Funktion*[117] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f'(x) = -F'_y(x,f(x))^{-1}\,F'_x(x,f(x)). \tag{5.15}$$

Eine weitere Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist eine Formel für die Ableitung der Inversen.

Satz 5.9 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Ist* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, stetig differenzierbar und erfüllt an der Stelle* $x \in U$ *die Bedingung* $\det f'(x) \neq 0$, *dann ist* f *in einer Umgebung von* x *invertierbar und die Umkehrfunktion* f^{-1} *erfüllt*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = (f'(x))^{-1}. \tag{5.16}$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$F(u,v) = u - f(v), \qquad u,v \in \mathbb{R}^n,$$

für die $F(f(x),x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, und

$$F'_u(u,v) = I, \qquad F'_v(u,v) = -f'(v)$$

[117] Die nach Satz 5.5 existiert.

gilt. Ist $\det f'(x) \neq 0$, dann gibt es nach Satz 5.5 mit $(u^*, v^*) = (f(x), x) =: (y, x)$ eine eindeutige Funktion g mit

$$0 = F(y, g(y)) = y - (f \circ g)(y), \qquad y \in U \ni f(x), \tag{5.17}$$

so daß f eine Umkehrfunktion von g ist. Da $\det f'(x) \neq 0$ ist und da f' stetig ist, gilt $\det f'(x') \neq 0$ auf einer ganzen offenen Umgebung U' von x. Damit ist, für $x \neq x' \in U'$

$$f(x) - f(x') = \underbrace{f'(\xi)}_{\det \neq 0} \underbrace{(x' - x)}_{\neq 0} \neq 0,$$

also ist f **lokal injektiv**. Mit $y = f(x')$ in (5.17) erhalten wir dann $f(x') = f(g(f(x')))$ und wegen der lokalen Injektivität muss $g(f(x')) = x'$ sein, g ist also lokal auch eine Umkehrfunktion[118] von f. Außerdem gilt nach (5.15)

$$g'(y) = -\underbrace{(F'_v(y, g(y)))^{-1}}_{=-f'(g(y))^{-1}} \underbrace{F'_u(y, g(y))}_{=I} = (f'(g(y)))^{-1}$$

und mit nochmals $y = f(x)$ ergibt sich

$$(f^{-1})'(f(x)) = g'(y) = \Big(f'(\underbrace{g(f(x))}_{=x})\Big)^{-1} = (f'(x))^{-1}$$

wie in (5.16) behauptet. □

Definition 5.10. Eine Stelle $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **singulärer Punkt** einer an x differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^n$, wenn $\det f'(x) = 0$ ist.

Singuläre Punkte sind bei Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genauso unangenehm wie bei Kurven, es ist immer besser, wenn x ein **regulärer Punkt** ist, also wenn $\det f'(x) \neq 0$ ist.

Bemerkung 5.11. Ein anderer Blickwinkel an implizite Funktionen ist, daß man implizit gegebene Funktionen in vielen Fällen nach „irgendwelchen" Variablen auflösen kann: Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $d \leq n$, eine stetig differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $F(x) = 0$, dann kann man die Matrix $F'(x) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ betrachten. Hat diese Matrix d linear unabhängige Spalten, dann können wir die zugehörigen Komponenten von x in $\widehat{y} \in \mathbb{R}^d$ zusammenfassen und den Rest in $\widehat{x} \in \mathbb{R}^{n-d}$ zusammenfassen. Nach einer Umnumerierung der Variablen erhalten wir dann eine Funktion $\widehat{F} : \mathbb{R}^{n-d+d} \to \mathbb{R}^d$ mit

$$\widehat{F}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0, \qquad \det \widehat{F}_{\widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y}) \neq 0$$

und damit gibt es wieder ein $f : \mathbb{R}^{n-d} \to \mathbb{R}^d$ mit $\widehat{F}(\widehat{x}, f(\widehat{x})) = 0$. Diese ausgewählten Spalten müssen nicht eindeutig sein, es gibt also eventuell sogar mehrere Möglichkeiten, nach einzelnen Variablen aufzulösen.

[118] Wir haben also folgendes bewiesen: *Ist f eine Umkehrfunktion von g, dann ist auch g eine Umkehrfunktion von f, solange nur die Ableitungen nichtsingulär sind.*

Beispiel 5.12. Wir betrachten $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, also die implizite Definition des Einheitkreises. Hier ist

$$F'(x,y) = [2x, 2y],$$

wo für $xy \neq 0$ beide Spalten[119] Determinanten $\neq 0$, man kann also nach x *oder* nach y auflösen. Für $x = 0$ hingegen müssen wir nach y auflösen, denn $x(y)$ ist an dieser Stelle nicht eindeutig, da es ja immer $\pm\sqrt{1-y^2}$ ist. Analog für $y = 0$.

Beispiel 5.13 (Roboter III)**.** Die „abgefahrene"[120] Größe $(f^{-1})'$ hat nun übrigens eine technische Bedeutung, denn sie gibt uns die Änderung der Winkel, also der Steuergrößen, in Abhängigkeit von der Änderung des Tool Center Point und liefert damit eine Umrechnung von **Bewegungsgeschwindigkeit** in **Winkelgeschwindigkeit**. Das eine ist das, was der Benutzer gerne hätte, das andere das, was wir steuern müssen. Etwas formaler: Der Roboter soll eine Kurve $x(t) = f(\phi(t)) := f(\alpha(t), \beta(t))$ abfahren. Die so resultierende Bahngeschwindigkeit ist[121] dann

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = x'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi)(t) = f'(\phi(t))\,\phi'(t) = f'(\phi(t)) \begin{bmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{bmatrix}$$

und für die Umkehrfunktion $\phi(t) = f^{-1}(x(t))$ liefert das nun gerade

$$\phi'(t) = \left(f^{-1}(x(t))\right)' x'(t) = (f'(\phi(t)))^{-1} x'(t).$$

Das ist die praktische Anwendung von Satz 5.9, denn $f'(\phi(t))$ können wir leicht ausrechnen und invertieren[122], $x(t)$ ist die vorgegebene **Stellgröße** und dann ist die geforderte Winkelstellung $\phi(t)$ nichts anderes als[123] das Integral

$$\phi(t) = \int_0^t \phi'(t)\,dt - \phi(0) = \int_0^t (f'(\phi(t)))^{-1} x'(t)\,dt - \phi(0).$$

Übrigens gibt es nur eine **lokale Inverse** von f, denn für jede nichtsiguläre Stellung des Roboters gibt es immer zwei Konfigurationen mit demselben Ergebnis x, eine bei der $x^{(1)}$ oberhalb der Verbindungsgeraden zwischen $x^{(0)}$ und $x^{(2)}$ liegt und eine, bei der der Punkt darunter liegt.

5.3 Der Umkehrsatz

Eine weitere wichtige Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist die Antwort auf die Frage, wann sich eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ umkehren lässt, also wann die **Umkehrfunktion** F^{-1} existiert. Auch hier spielen die regulären Punkte die entscheidende Rolle. Das folgende Resultat ist eine Reformulierung von Satz 5.9 nach [11]. Bewiesen haben wir es aber schon vorher.

[119] Das sind einfach nur die Zahlen $2x, 2y$.

[120] Wie wir gleich sehen werden, gilt das sogar im Wortsinne.

[121] So können wir auch noch einmal unsere Kettenregel üben.

[122] Es sei denn, der Roboter fährt in die singuläre Position.

[123] Und $\phi(0)$ ist die hoffentlich bekannte Position des Roboters zum Zeitunkt $t = 0$, an dem die Bewegung beginnt.

Satz 5.14 (Umkehrsatz). *Ist* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar und* $x^* \in U$ *ein* ***regulärer Punkt*** *von* f, *d.h.*, $\det f'(x^*) \neq 0$, *dann gibt es eine Umgebung* $U' \subseteq U$ *von* x^* *und eine Umgebung* V *von* $y^* := f(x^*)$, *so daß* $f : U' \to V$ *eine* ***Bijektion*** *ist. Insbesondere existiert auf* V *die* ***Umkehrabbildung*** f^{-1}, *die*

$$\left(f^{-1}\right)'(y^*) = (f'(x^*))^{-1} \tag{5.18}$$

erfüllt.

Mit Hilfe des Umkehrsatzes lassen sich auch globale Eigenschaften einer Funktion beweisen, die wir im Folgenden zusammenstellen wollen.

Satz 5.15. *Ist* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U *offen, eine stetig differenzierbare* ***reguläre Funktion****, d.h.* $\det f'(x) \neq 0$, $x \in U$, *dann gilt:*

1. f *ist eine* ***offene Abbildung***[124]*:*

$$U' \subseteq U \text{ offen} \qquad \Rightarrow \qquad f(U') \text{ offen.}$$

2. *Es gilt das* ***Maximumprinzip****: Die Funktion* $x \mapsto \|f(x)\|$ *besitzt auf* U *kein Maximum.*

3. *Ist* $0 \notin f(U)$, *dann besitzt* f *auch kein Minimum auf G.*

4. *Ist* f ***injektiv****, dann ist die* ***Umkehrfunktion*** $f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar.*

Bemerkung 5.16. Ist U beschränkt und damit der **Abschluss** $\overline{U}$ **kompakt**, dann hat das Maximumprinzip eine stärkere Formulierung:

> Die Funktion $\|f\|$ muss ihr Maximum auf dem Rand ∂U annehmen.

Dies folgt sofort aus Satz 5.15, da die stetige Funktion $\|f\|$ auf dem Kompaktum $\overline{U}$ annehmen muss, auf der offenen Menge U selbst aber nicht – da bleibt dann nur noch der Rand übrig.

Beweis von Satz 5.15: 1): Sei $x \in U' \subseteq U$ und $f(U') \ni y := f(x)$. Nach dem Umkehrsatz ist f auf einer offenen Menge $U'' \subseteq U'$ eine Bijektion und f und f^{-1} sind stetig[125]. Trivialerweise gilt für jedes $V \subset U''$, wo f ebenfalls eine Bijektion ist, daß

$$V = f^{-1}(f(V))$$

sein muss, und damit ist $f(V)$ Urbild der offenen Menge V und offen, da f^{-1} stetig ist. Für jedes $x \in U'$ gibt es also eine offene Umgebung V von x, so daß $f(V)$ offen ist, zu jedem $f(x)$, $x \in U'$, also eine offene Umgebung. Damit ist $f(U')$ offen.

[124] Bitte nicht verwechseln: Bei einer stetigen Funktion sind die *Urbilder*, nicht die *Bilder* offener Mengen offen.

[125] Sie sind ja sogar differenzierbar!

Für 2) nehmen wir an, x^* sei eine **Maximalstelle** der Funktion $g(x) = \|f(x)\|$, das heißt, $\|f(x^*)\| \geq \|f(x)\|$, $x \in U$. Wäre nun $f(x^*) = 0$, dann wäre $\|f(x)\| = 0$, $x \in U$, und damit $f \equiv 0$, also auch $f' \equiv 0$ auf U, was aber nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also ist $\|f(x^*)\| \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz ist f auf einer ganzen Umgebung von $f(x^*)$ umkehrbar, also gibt es eine offene Umgebung V von $f(x^*)$ mit $V \subseteq f(U)$, also auch ein $\rho > 0$ mit $B_\rho(f(x^*)) \subseteq V \subseteq f(U)$. Damit ist aber

$$y := f(x^*) + \frac{\rho}{2\|f(x^*)\|} f(x^*) = \underbrace{\left(1 + \frac{\rho}{2\|f(x^*)\|}\right)}_{>0} f(x^*) \in B_\rho(x^*) \subseteq f(U),$$

es gibt also ein $x \in U$ mit $y = f(x)$, und es ist

$$\|f(x)\| = \|y\| = \|\left(1 + \frac{\rho}{2\|f(x^*)\|}\right) f(x^*)\| = \underbrace{\left(1 + \frac{\rho}{2\|f(x^*)\|}\right)}_{>1} \|f(x^*)\| > \|f(x^*)\|,$$

im Widerspruch zur Maximalität von $\|f(x^*)\|$.

Der Beweis von 3) verläuft entsprechend, nur mit $1 - \frac{\rho}{2\|f(x^*)\|}$ und 4) ist eine direkte Konsequenz aus dem Umkehrsatz, der ja die lokale stetige Differenzierbarkeit an jedem Punkt zur Aussage hatte. □

5.4 Nochmals Extrema unter Nebenbedingungen

Wie in Bemerkung 4.23 angekündigt, wollen wir uns jetzt noch einmal den Satz über Lagrange-Multiplikatoren ansehen und ihn mit Mitteln der Analysis, genauer unter Ausnutzung des Satzes über implizite Funktionen, beweisen. Und das wird sich als ausgesprochen einfach herausstellen.

Korollar 5.17. *Zu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p < n$, stetig differenzierbar, und f besitze in $x^* \in U$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x^*) = 0$, an der g' maximalen Rang p hat. Dann gibt es **Lagrange–Multiplikatoren** $\lambda \in \mathbb{R}^p$, so daß*

$$f'(x^*) - \lambda^T g'(x^*) = 0. \tag{5.19}$$

Bemerkung 5.18. Wir fordern in Satz 5.17, daß die Nebenbedingungen an der Stelle x^* **nichtdegeneriert** sind, das heisst, die Matrix

$$g'(x^*) = \left[\frac{\partial g_j}{\partial x_k} : \begin{array}{l} j = 1, \ldots, p \\ k = 1, \ldots, n \end{array}\right]$$

hat den maximalen Rang $p < n$, so daß es eine quadratusche Teilmatrix

$$\left[\frac{\partial g_j}{\partial x_{k_\ell}} : \; j, \ell = 1, \ldots, p\right]$$

gibt, deren Determinante von Null verschieden ist. Dazu brauchen wir, daß wir nicht zu viele Nebenbedingungen haben, also $p < n$.

Beweis: Wir schreiben $x = (y, z)$, $y \in \mathbb{R}^{n-p}$, $z \in \mathbb{R}^p$, also $g(x) = g(y, z)$ und nehmen an, daß $\det g'_z(x^*) \neq 0$ ist, sonst würden wir die Variablen einfach umbenennen. Nach dem Satz über implizite Funktionen, Satz 5.5, gibt es dann eine Umgebung U^* von x^*, in der alle $x \in U^*$ mit $g(x) = 0$ von der Form $x = (y, \varphi(y))$ sind.

Da nun f an x^* ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ hat, hat

$$\psi : y \mapsto f(y, \varphi(y))$$

ein lokales Extremum[126] ohne Nebenbedingung und es gilt, unter Verwendung von 5.9,

$$\begin{aligned} 0 &= \psi'(x^*) = \left[f'_y, f'_z\right](x^*) \begin{bmatrix} I \\ \varphi' \end{bmatrix}(y^*) = f'_y(x^*) + f'_z(x^*)\,\varphi'(y^*) \\ &= f'_y(x^*) - \underbrace{f'_z(x^*)\,g'_z(x^*)^{-1}}_{:=\lambda_y^T=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-p})} g'_y(x^*) \end{aligned}$$

Ausserdem gilt trivialerweise

$$f'_z(x^*) = \underbrace{f'_z(x^*)g'_z(x^*)^{-1}}_{:=-\lambda_z^T=-(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)} g'_z(x^*),$$

was sich zu

$$f'(x^*) = \left[f'_y, f'_z\right](x^*) = \left[\lambda_y^T g'_y, \lambda_z^T g'_z\right](x^*) = \lambda^T\, g'(x^*)$$

kombinieren lässt und auch schon den Satz beweist. □

Bemerkung 5.19. Die Idee des Beweises ist wirklich einfach und naheliegend: Vermittels des Umkehrsatzes parametrisieren wir die Funktion lokal mit den $n-p$ freien Variablen und nutzen dann das Kriterium für ein lokales Extremum ohne Nebenbedingungen. Der Rest lässt sich so schön einfach hinschreiben und formal verifizieren, weil wir die richtigen Konzepte und angemessene Notation verwenden.

Der analytische Beweis gilt nur für *Gleichheits*bedingungen, deren Anzahl darüber hinaus kleiner als die Anzahl der Variablen sein muss. Bei Gleichheitsbedingungen kann man immer λ durch $-\lambda$ ersetzen, so daß es egal ist, ob man $f' + \lambda g' = 0$ oder $f' - \lambda g' = 0$ fordert und man sich nicht durch unteschiedliche Formulierungen in der Literatur verwirren lassen muss. Was allerdings bleibt, ist die Frage, wie man

$$0 = \begin{bmatrix} f' + \lambda^T g' \\ g \end{bmatrix}$$

wirklich löst, wenn f und g kompliziertere Funktionen sind. Zufällig befassen wir uns mit dieser Frage im nächsten Abschnitt.

[126] Gleicher Art natürlich.

5.5 Das Newton–Verfahren

Der Beweis von Satz 5.5 liefert uns auch die wichtigste Idee für eines der zentralen Resultate und eines der wichtigsten Verfahren der numerischen Mathematik. Wir haben dort ja das Problem $F(x) = 0$ in das **Fixpunktproblem**

$$x = G(x) = x - A^{-1} F(x), \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{5.20}$$

umgewandelt, wobei A prinzipiell zuerst einmal eine beliebige **invertierbare Matrix** sein darf. Allerdings sollte A quadratisch sein, was nur dann funktioniert, wenn $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine Funktion mit genausovielen Komponenten wie Variablen ist. Bei der Suche nach einem **Fixpunkt** verwendet man dann die **Iteration**

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}) = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}), \tag{5.21}$$

und fragt sich, wann $x^{(k)} \to x^*$ mit $F(x^*) = 0$, d.h., $G(x^*) = x^*$. Dabei ist $F'(x^{(k)})^{-1}$ eine Folge von Matrizen, die idealerweise gegen $F'(x^*)$ konvergiert, denn diese Matrix war ja im Beweis von Satz 5.5 die „richtige" Wahl.

Definition 5.20 (Nullstellen)**.** Ein Punkt $x \in U$ heißt **Nullstelle** von $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn $F(x) = 0$ ist und **einfache Nullstelle**, wenn[127] zusätzlich $\det F'(x) \neq 0$, also die Nullstelle kein **singulärer Punkt** ist.

Bemerkung 5.21. Eine Nullstelle von F ist nichts anderes als eine **gemeinsame Nullstelle** der Funktionen $f_1, \ldots, f_n$. Einfache Nullstellen kennen wir auch für univariate Funktionen, hier ist dann einfach $f'(x) \neq 0$ und die Funktion hat einen **Vorzeichenwechsel**. Wie Übung 5.2 zeigt, ist das in mehreren Variablen auch nicht groß anders.

Übung 5.2 Zeigen Sie: Hat F an x eine einfache Nullstelle, dann gibt es eine offene Umgebung U' von x, auf der $F(x') \neq 0$, $x' \in U' \setminus \{x\}$ gilt. ◇

Lemma 5.22. *Ist $x^* \in U$ eine **einfache Nullstelle** der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$, dann gibt es eine Umgebung $x^* \in U' \subseteq U$ und ein $\rho \in (0, 1)$, so daß $G(U') \subseteq U'$ und*

$$\|G(x) - G(x')\| \leq \rho \|x - x'\|, \qquad x, x' \in U', \tag{5.22}$$

wobei

$$G(x) := x - F'(x^*)^{-1} F(x), \qquad x \in U'.$$

Beweis: Da $F(x^*) = 0$ vorausgesetzt war, ist $G(x^*) = x^*$ und ausserdem ist F' auf einer Umgebung U_1 von x^* invertierbar. Jetzt kommt wieder das „Verkleinerungsspiel" wie im Beweis von Satz 5.5: Da

$$G'(x) = I - F'(x^*)^{-1} F'(x) \qquad \Rightarrow \qquad G'(x^*) = I - F'(x^*)^{-1} F'(x^*) = 0,$$

[127] Das setzt natürlich voraus, daß F differenzierbar ist.

gibt es zu $0 < \rho < 1$ eine konvexe Umgebung $U_2 := B_\sigma(x^*) \subset U_1$, $\sigma > 0$, von x^* mit[128]

$$\|G'(x)\|_F \le \frac{1}{2}\rho \quad \text{und} \quad \|G(x) - x^*\|_2 \le \frac{1}{2}\rho, \qquad x \in U_2.$$

Für $x, x' \in U_2$ ist dann mit Hilfe der Fixpunkteigenschaft und dank der Differenzierbarkeit gibt es $\xi \in [x^*, x]$, $\xi' \in [x^*, x']$, so daß

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(x')\|_2 &= \|G(x) - x^* + x^* - G(x')\| \\
&= \left\|G'(\xi)\,(x - x^*) - G'(\xi')(x' - x^*)\right\|_2 \\
&\le \left\|G'(\xi)\,(x - x')\right\|_2 + \left\|(G'(\xi) - G'(\xi'))\,(x' - x^*)\right\|_2 \\
&\le \underbrace{\|G'(\xi)\|_F}_{\le \frac{1}{2}\rho}\,\|x - x'\|_2 + \underbrace{\left\|(G'(\xi) - G'(\xi'))\right\|_F}_{\le n|D^2G|_{U,\infty}\,\|\xi - \xi'\|}\,\underbrace{\|x' - x^*\|}_{\le \sigma} \\
&\le \frac{1}{2}\rho\,\|x - x'\|_2 + \sigma\, n|D^2G|_{U,\infty}\,\underbrace{\|\xi - \xi'\|_2}_{\le \|x - x'\|_2} \le \left(\frac{1}{2}\rho + \sigma\, n|D^2G|_{U,\infty}\right)\|x - x'\|_2 \\
&\le \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma\, n\,|D^2G|_{U,\infty}}{\rho}\right)\rho\|x - x'\|_2,
\end{aligned}$$

siehe Übung 5.3, insbesondere (5.24). Wählen wir jetzt also den freien Parameter σ noch so, daß

$$\sigma \le \frac{\rho}{2n|D^2G|_{U,\infty}},$$

dann ist $U' = U_2 \cap B_\rho(x^*)$ die gesuchte Menge, auf der G eine **Kontraktion** ist. □

Übung 5.3 Die **Frobeniusnorm** einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2}. \tag{5.23}$$

Zeigen Sie:

1. Die Frobeniusnorm ist eine **Norm**, d.h., sie erfüllt die Axiome aus Definition 1.4.

2. Die Frobeniusnorm und die **euklidische Norm** $\|\cdot\|_2$ auf dem $\mathbb{R}^n$ sind **verträglich**, das heißt,
$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F\,\|x\|_2.$$

3. Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetig differenzierbare matrixwertige Funktion und $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist
$$\|F(x) - F(x')\|_F \le n \sup_{\xi\in U} \max_{j,k,\ell=1,\dots,n} \left|\frac{\partial f_{jk}}{\partial x_\ell}(\xi)\right| \|x - x'\|_2.$$

[128] Die Einschränkung auf die euklidische Norm „$\|\cdot\|_2$ und die Frobeniusnorm für Matrizen hat rein technische Gründe.

4. Ist die Funktion F in 3) von der Form $F = G'$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so ergibt sich

$$\|G'(x) - G'(x')\|_F \le n \underbrace{\sup_{\xi \in U} \max_{j,k,\ell=1,\dots,n} \left| \frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x_j \partial x_k}(\xi) \right|}_{=:|D^2 F|_{U,\infty}} \|x - x'\|_2. \tag{5.24}$$

$\diamond$

Der Rest ist dann im wesentlichen nur noch eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, man muss allerdings noch ein bisschen aufpassen, daß $F'(x^{(k)})$ so nahe bei $F'(x^*)$ liegt, daß es da keine Schwierigkeiten gibt. Details dazu lernt man in der Veranstaltung **Numerische Mathematik**, siehe z.B. [16, 24, 31].

Korollar 5.23 (Newton–Verfahren). *Hat die zweifach stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine **einfache Nullstelle** an $x \in U$, dann gibt es eine Umgebung U' von x, so daß für alle Startwerte $x^{(0)} \in U'$ die **Newton–Iteration** (5.21) gegen x konvergiert.*

Die Geometrie des Newton–Verfahrens in einer Variablen ist einfach: Zu einem gegebenen Punkt $x^{(k)}$ schneidet man die **Tangente** an die Funktion f an dieser Stelle mit der x–Achse und verwendet damit die **Nullstelle** dieser Näherung als neue Näherung für die Nullstelle – die Nullstellenbestimmung für lineare Funktionen gilt ja als eher nicht ganz so schweres Problem. Daß das am Ende dann so gut funktioniert, liegt an der optimalen lokalen Annäherung der Funktion durch die Ableitung. In der Tat ergibt sich die Iterationsvorschrift direkt

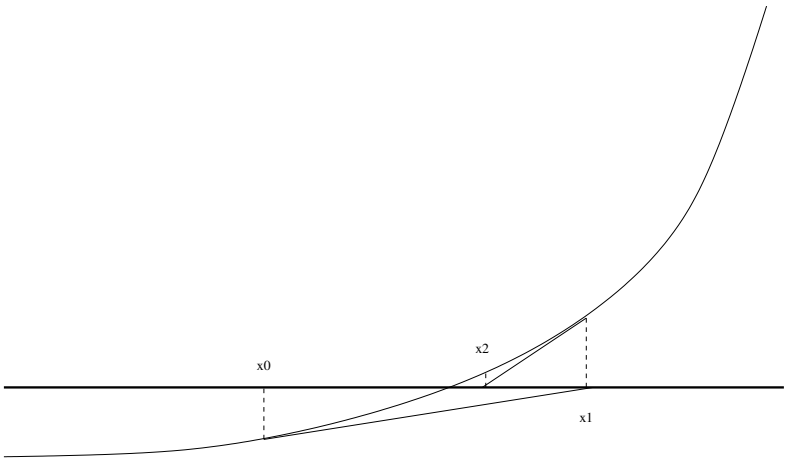

Abbildung 5.2: Das **Newton–Verfahren**, genauer, die ersten beiden Schritte in diesem Verfahren.

aus Nullsetzen der Tangentenformel:

$$0 = \ell(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

In mehreren Variablen liefert uns jedes f_j' einen Gradienten und die Gleichungen

$$0 = \ell_j(x) = f_j(x^{(k)}) + \nabla f_j(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5.25}$$

die einen $n-1$–dimensionalen *affinen* Teilraum, also eine **Hyperebene** im $\mathbb{R}^n$ (als „Parameterraum") definiert. Der Schnitt dieser n Hyperenebenen ist **generisch**, also im Normalfall, ein Punkt, kann aber natürlich beliebig degenerieren. Fasst man nun (5.25) in einer Gleichung zusammen, so erhält man wieder

$$0 = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})\,(x - x^{(k)}) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}\,F(x^{(k)}).$$

5.6 Anwendungen impliziter Funktionen

Eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen haben wir bei dem Roboter ja schon kennengelernt, wo wir die Bahnplanung über die implizite, geometrische Invariante der kinematischen Transformation durchführen konnten. Jetzt sehen wir uns noch ein paar andere Anwendungen an.

Beispiel 5.24 (Höhenlinien)**.** In einer digitalen Karte modelliert man die Höheninformation zu einem Punkt (x, y), heute zumeist im **WGS84**–Referenzsystem angegeben, das von GPS–Systemen ausgegeben wird, als Wert $f(x, y)$ über dem **Referenzellipsoid**. Diese Punkte kann man für praktische Anwendungen als ebene Punkte in einer geeigneten Parametrisierung ansehen, so daß die Höheninformation also als $f(x, y)$, $x, y \in U \times V \subset \mathbb{R}^2$ angesehen werden kann.

Eine wichtige Information ist nun die **Höhenlinie** zur Höhe h, also die Menge aller Punkte mit $f(x, y) = h$ bzw.

$$0 = F(x, y) = f(x, y) - h.$$

Diese Höhenlinien sind dann zumeist geschlossene Kurven[129], die man gerne ermitteln möchte, man hätte also gerne eine Kurve $h(x)$ bzw. $h(y)$ mit

$$0 = F(x, h(x)) \qquad \text{bzw.} \qquad 0 = F(h(y), y).$$

Ist nun

$$0 \neq \nabla F(x, y) = \nabla f(x, y),$$

dann kann man zumindest nach einer der beiden Variablen *lokal* auflösen und so die Höhenlinie berechnen.

Beispiel 5.25 (Schnittberechnung)**.** Sind zwei **implizite Flächen** im $\mathbb{R}^3$ als $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, gegeben, dann ist die Schnittkurve dieser beiden Flächen implizit durch

$$0 = F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

[129] Die Höhendaten sind durchaus als stetig anzunehmen, auch wenn dies ein sehr vereinfachtes Modell ist, ebenso wie das Modell der Funktion $f(x, y)$, aber im „normalen" kartographischen Kontext ist das in Ordnung.

definiert. Kennt man nun einen Punkt x^* auf dieser Schnittkurve, also $F(x^*) = 0$, und ist[130]

$$\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^*) : \begin{array}{l} j = 1,2 \\ k = 2,3 \end{array} \right]$$

invertierbar, dann gibt es eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, g(x_1)) = 0$, $x_1 \in U \ni x_1^*$, was genau eine lokale Parametrisierung der gesuchten Kurve ist. Nun ist

$$g' = (F'_{2,3})^{-1} F'_1$$

aus F berechenbar und wir wissen, daß für hinreichen kleines h

$$0 = F(x_1^* + h, g(x_1^* + h)) = F(x_1^* + h, g(x_1^*) + hg'(\xi)) \approx F(x_1 + h, g(x_1^*) + hg'(x_1^*))$$

und damit erhalten wir näherungsweise einen benachbarten Punkt auf der **Schnittkurve**. Starten wir jetzt das **Newton–Verfahren** mit

$$y^{(k+1)} := (F'_{2,3})^{-1}(x_1^* + h, y^{(k)})\, F_{2,3}\left(x_1^* + h, y^{(k)}\right), \qquad y^{(0)} = g(x_1^*) + hg'(x_1^*),$$

dann konvergiert die Folge der $y^{(k)}$ nach Korollar 5.23 gegen ein y mit

$$F(x_1^* + h, y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = g(x_1^* + h),$$

und wir haben einen weiteren Punkt auf der Schnittkurve gefunden.

Wählt man nun noch in jedem Punkt die Koordinaten $k, k' \in \{1,2,3\}$ so, daß

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k'}}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(x^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k'}}(x^*) \end{array} \right]$$

so invertierbar wie möglich wird, dann wird das Ganze zu einem fast schon funktionierenden Verfahren zur Bestimmung von Schnittkurven.

Beispiel 5.26 (Raytraycing)**.** Auch beim **Raytracing**, also der Strahlverfolgung zur Berechnung beleuchteter Szenen, siehe [5], sind implizite Funktionen leichter zu handhaben. Auch hier stellt man eine Fläche im Raum als $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dar, und modelliert einen **Sehstrahl** als Schnitt zweier Hyperebenen, also als

$$0 = G(x) = \left[\begin{array}{c} g_1^T x - c_1 \\ g_2^T x - c_2 \end{array} \right],$$

so daß sich der Schnittpunkt als Lösung von

$$0 = F(x) = \left[\begin{array}{c} f(x) \\ G(x) \end{array} \right], \qquad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

ergibt, wofür sich als Berechnungsmethode wieder das **Newton–Verfahren** anbietet, die dann einen Punkt x^* mit $F(x^*) = 0$ liefert. Da man beim Raytraycing

[130] Der Einfachheit halber wählen wir die letzten beiden Koorditnaten, generell müssten wir voraussetzen, daß $F'(x^*)$ vollen Rang hat und dann zwei Koordinaten wählen, die zu linear unabhängigen Spalten von $F'(x^*)$ gehören. Aber man kann es auch übertreiben.

dann Reflexionen berechnen muss, um den Strahl weiterzuverfolgen, brauchen wir die **Normale** an die Fläche, also den Vektor, der auf die **Tangentialebene** senkrecht steht. Um diese zu berechnen, nehmen wir an, daß $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x^*) \neq 0$ ist und erhalten eine lokale Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$ und

$$g'(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}(x^*)\right)^{-1} f'_{1,2}(x^*) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Die Tangentialebene ist dann die Menge aller Punkte x der Form

$$x = x^* + \begin{bmatrix} I \\ g'(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} h =: x^* + Ah, \qquad h \in \mathbb{R}^2.$$

Ist nun $\nu \in \mathbb{R}^3$ die bis auf Normierung eindeutige nichttriviale Lösung von $A^T\nu = 0$, dann ist

$$x = x^* + Ah \qquad \Rightarrow \qquad \nu^T x = \nu^T x^* + \underbrace{\nu^T A}_{=0} h \qquad \Rightarrow \qquad \nu^T x - \nu^T x^* = 0,$$

so daß ν die gesuchte Normalenrichtung sein muss. Letztlich normiert man ν dann noch so, daß $\|\nu\|_2 = 1$ ist, die Richtung ist trickreicher, denn $f(x) = 0$ ist ja nur die **Begrenzungsfläche** des darzustellenden Objekts und hat keine Ahnung, wo Innen oder Aussen ist.

I disapprove of certainties [...] They limit one's range of vision. Doubt is one aspect of width.

S. Rushdie, Grimus

6 Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel wollen wir ein bisschen mehr Geometrie betreiben, genauer, uns mit Analysis auf komplexeren Objekten als dem $\mathbb{R}^n$ betreiben.

Beispiel 6.1 (GPS)**.** Das in GPS normalerweise verwendete **WGS84**–System definiert Funktionen auf einem **Ellipsoid** E. Will man also mit diesen Funktionen Analysis betreiben[131], so muss man Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ behandeln. Nun ist zwar $E \subset \mathbb{R}^3$, aber E ist eben keine **offene Menge** und damit wird es schwer, Ableitungen zu definieren oder gar zu integrieren.

Genau diese Frage, nämlich wie man Funktionen auf gekrümmten Flächen untersuchen kann und wie man vor allem diese gekrümmten Flächen beschreiben kann, wird uns in diesem Kapitel beschäftigen.

6.1 Dimension, Stetigkeit und Diffeomorphismen

Naiv gesehen ist **Dimension** eines Objektes eine einfache Sache: Punkte sind nulldimensional, Geraden eindimensional, Ebenen zweidimensional und so weiter. Und natürlich nimmt man an, daß zweidimensionale Objekte auch wirklich „größer" sind als eindimensionale. Dem ist aber erst einmal nicht so.

Lemma 6.2. *Es gibt eine* ***Surjektion*** $f : [0,1] \to [0,1]^2$*, das Intervall ist also mindestens so groß wie das Quadrat.*

Beweis: Für $x \in [0,1)$ sei

$$x = .x_1x_2\cdots = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}, \qquad x_j \in \{0,1\},$$

die **dyadische Darstellung** von x, die wir dadurch eindeutig machen können, daß wir verlangen, daß sie unendlich viele Nullen enthält. Die Mehrdeutigkeit

$$0.100\cdots = .011\ldots$$

[131]Und da ist das Wort **Steigung**, das man ja gerne im Zusammehang mit der **Ableitung** verwendet dann auch endlich im Wortsinne zu verstehen

wird dann nämlich immer im Sinne des Ausdrucks auf der linken Seite aufgelöst: Hätte x nämlich nur endlich viele Nullen, dann gibt es eine letzte Null, sagen wir an x_n, und dann ist

$$x = .x_1 \dots x_{n-1} \underbrace{011\dots}_{=100\dots} = .x_1 \dots x_{n-1} 100 \dots$$

und x ist sogar eine rationale Zahl, siehe Übung 6.1. Nun setzen wir

$$f(x) = (.x_1 x_3 x_5 \dots, .x_2 x_4 x_6 \dots) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{2j-1}\, 2^{-j}, \sum_{j=1}^{\infty} x_{2j}\, 2^{-j} \right)$$

und $f(1) = (1,1)$. Die Funktion ist surjektiv, weil wir jedes $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$ als

$$.x_1 y_1 x_2 y_2 \dots$$

codieren können. □

Übung 6.1 Zeigen Sie: Eine Zahl $x \in [0,1]$ ist rational, wenn ihre dyadische Dastellung endliche viele Nullen oder Einsen enthält. Gilt auch die Umkehrung? ♢

Bemerkung 6.3. f aus Lemma 6.2 ist *keine* **Bijektion**, da wir auf $[0,1]^2$ *keine* Eindeutigkeit gefordert haben, die wir auf $[0,1]$ ja auch nur benötigt haben, damit f **wohldefiniert** war. Und in der Tat ist

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} (0.10\dots, 0.10\dots) &= f(0.110\dots) = f(\frac{3}{4}), \\ (0.01\dots, 0.10\dots) &= f(0.01\underbrace{10}\dots) = f(\frac{3}{8}), \\ (0.10\dots, 0.01\dots) &= f(0.10\underbrace{01}\dots) = f(\frac{5}{6}), \end{cases}$$

es gibt also sogar mehr Urbildpunkte als Bildpunkte, das Intervall enthält somit sogar eher *mehr* Elemente als das Quadrat, was natürlich nicht stimmt, da jede der überabzählbar vielen dünnen, noch nicht einmal offenen Teilmengen $x \times [0,1] \subset [0,1]^2$, $x \in [0,1]$, gerade ein Intervall ist.

Das ist auf den ersten Blick etwas kontraintuitiv, aber vielleicht liegt es ja daran, daß wir mit der Surjektion einfach zu großzügig waren. Betrachtet man nämlich die Folge

$$x_n := 0.00\underbrace{1\dots1}_{2n} \qquad \Rightarrow \qquad f(x_n) = (0.0\underbrace{1\dots1}_{n}, 0.0\underbrace{1\dots1}_{n})$$

dann gilt

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = 0.010\cdots = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

die in Lemma 6.2 verwendete Funktion ist also **unstetig**. Und wenn man so wenig Struktur verwendet, dann kann es natürlich durchaus passieren, daß Dinge schiefgehen. Nur leider hilft Stetigkeit auch nicht weiter.

Satz 6.4 (Peano). *Es gibt eine* ***stetige Surjektion*** $f : [0,1] \to [0,1]^2$.

Beweis: Die klassische stetige Surjektion ist die berühmte **Peanokurve**. Dazu zerlegt man ein Quadrat in neun Subquadrate, die man in der folgenden Art und Weise numeriert:

3	4	9
2	5	8
1	6	7

$$\begin{array}{ccc} \to & \downarrow & \circ \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ \uparrow & \to & \uparrow \end{array}.$$

Für jedes dieser Subdreiecke verwendet man nun wieder eine angepasst Version dieser Zerlegung:

- für $1, 3, 7, 9$ die Originalversion,
- für $2, 8$ eine in x–Richtung gespiegelte Version

9	4	3
8	5	2
7	6	1

$$\begin{array}{ccc} \circ & \downarrow & \leftarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ \uparrow & \leftarrow & \uparrow \end{array}.$$

- für $4, 6$ eine in y–Richtung gespiegelte Version

1	6	7
2	5	8
3	4	9

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \to & \downarrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \to & \uparrow & \circ \end{array}.$$

- für 5 eine in x- und y–Richtung gespiegelte Version:

7	6	1
8	5	2
9	4	3

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \leftarrow & \downarrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \circ & \uparrow & \leftarrow \end{array}.$$

Diese Numerierungen sorgen dafür, daß man einer Ecke des Quadrats beginnt und es auf der gegenüberliegenden verlässt. So lässt sich für $n \in \mathbb{N}$, eine Menge von $N = 9^n$ Quadraten $Q_1^n, \ldots, Q_N^n \subset [0,1]^2$ konstruieren, deren Inneres leeren Durchschnitt hat und die gemeinsam $[0,1]^2$ überdecken. Ausserdem zerlegt sich das Quadrat Q_k^n in $Q_{9(k-1)+1}^{n+1}, \ldots, Q_{9k}^{n+1}$ und Q_k^n und Q_{k+1}^n haben für $k = 1, \ldots, 9^n - 1$ eine gemeinsame Seite. Verbindet man die Mittelpunkte $y_k^n \in [0,1]^2$, $k = 1, \ldots, 9^n$, dieser Quadrate, so erhält man die in Abb 6.1 zu sehenden Kurven, die wir so parameterisieren wollen, daß[132] $f(0) = (9^{-n}, 0)$, $f(1) = (1 - 9^{-n}, 1)$ und

$$f_n(x_k^n) = y_k^n, \qquad x_k^n = 9^{-n}\left(k - \frac{1}{2}\right), \qquad k = 1, \ldots, 9^n,$$

Die zugehörigen stückweise linearen Funktionen f_n sind stetig und beschränkt. Für $x \in [0,1]$ gibt es eine Intervallschachtelung $x \in I_k^n = [(k-1)/9^n, k/9^n]$,

[132] Geometrisch sind die x_k ganz einfach die Mittelpunkte der Intervalle $[(k-1)/9^n, k/9^n]$.

$k \in \{1, \dots, 9^n\}$, und da auch die zugehörigen Quadrate Q_k^n verschachtelt sind und Seitenlänge 3^{-n} existiert genau ein Punkt[133]

$$y = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_k^n = \lim_{n\to\infty} f(x), \tag{6.1}$$

die Kurven konvergieren also punktweise gegen f. Da aber nach Konstruktion

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq 3^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ist, liegt auch **gleichmäßige Konvergenz** vor, und damit ist f in der Tat stetig[134]. Da sich jeder Punkt y als Grenzwert einer Intervallschachtelung wie in (6.1) schreiben lässt, gibt es aber auch zu jedem $y \in [0,1]^2$ auch ein $x \in [0,1]$ mit $y = f(x)$, das heißt, die Funktion f ist, wie behauptet, **surjektiv**. □

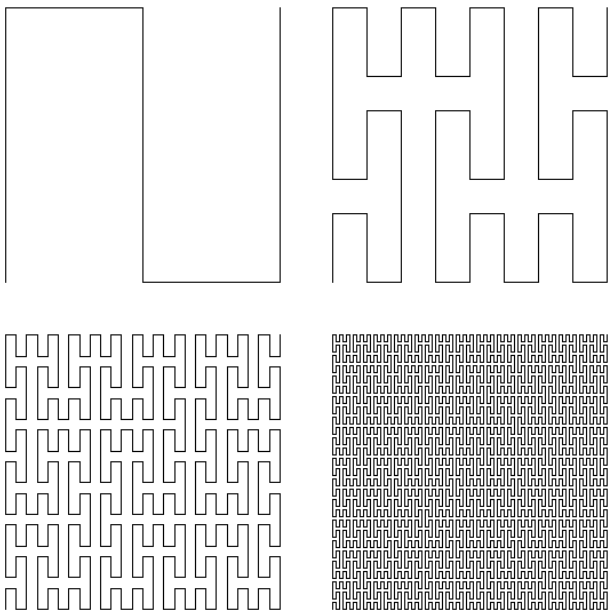

Abbildung 6.1: Die ersten vier Schritte in der Konstruktion einer Peanokurve

Man kann mit Hilfe der Peanokurve noch weitere kontraintuitive Objekte konstruieren, indem man sie mit einer anderen Pathologie kombiniert.

Beispiel 6.5 (Cantorfunktion). Eine Funktion, die stetig und **monoton steigend** ist und dennoch fast überall Ableitung Null hat, kann man folgendermaßen konstruieren:

1. Wir setzen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

[133] Dieses Argument sollte uns aus dem Topologiekapitel bekannt vorkommen!
[134] Siehe Teil I, [26].

2. Auf dem Intervall $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ setzen wir $f(x) = \frac{1}{2}$.

3. Auf $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ setzen wir $f(x) = \frac{1}{4}$ und auf $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ entsprechend $f(x) = \frac{3}{4}$.

4. Für allgemeines $n \geq 1$ weisen wir den Wert

$$\frac{2k+1}{2^n} = \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_{k,j}\, 2^{-j} + 2^{-n}, \qquad k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1, \tag{6.2}$$

entsprechend dem Intervall

$$[x_{k,n}, x_{k,n} + 3^{-n}], \qquad x_{kn} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_{k,j}\, 3^{-j}, \qquad k = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1, \tag{6.3}$$

zu.

Die Idee hinter (6.2) und (6.3) ist einfach: Im ersten Schritt werden die Werte für das Intervall $[0.1, 0.2]$ in ternärer[135] Darstellung festgelegt, also für alle Punkte der Form $.1\epsilon_2\epsilon_3\ldots$, im zweiten für $0.01\ldots$ und $0.21\ldots$, im dritten für $0.001\ldots$, $0.021\ldots$, $0.201\ldots$, $0.221\ldots$ und so weiter. Damit erhalten wir Funktionswerte für alle Stellen mit wenigstens einer 1 in der ternären Entwicklung.

Die so resultierende Funktion ϕ heißt **Cantorfunktion** und sie hat die folgenden Eigenschaften:

1. ϕ ist eine stetige Funktion von $[0, 1] \to [0, 1]$.

2. ϕ nimmt nur **abzählbar viele** verschiedene Werte an, nämlich jede **dyadische Zahl**
$$\frac{k}{2^n}, \qquad k = 0, \ldots, 2^n,\ n \in \mathbb{N},$$
aber $\phi([0, 1])$ liegt **dicht** in $[0, 1]$.

3. ϕ ist **monoton steigend**.

4. ϕ hat **fast überall** Ableitung Null. Genauer: Die Menge der Stellen x, an denen $\phi'(x)$ existiert und $\phi'(x) = 0$ ist, ist offen und dicht[136].

Übung 6.2 Verifizieren Sie die Eigenschaften der Cantorfunktion. ◊

Betrachtet man nun $f \circ \phi$ mit der **Peanokurve** f und der **Cantorfunktion** ϕ, dann erhält man eine Kurve, die überhaupt nur abzählbar viele Werte annimmt, aber trotzdem das Quadrat „ausfüllt", in dem Sinne, daß die Kurve mit jeder noch so kleinen offenen Teilmenge des Quadrats nichtleeren Schnitt hat. Sei also $X \subset [0, 1]^2$ solch eine offene Teilmenge, die eine Kugel $B_\rho(x)$, $x \in X$, $\rho > 0$, enthält.

[135] Also zur Basis 3.

[136] Nämlich die Vereinigung des Inneren aller Intervalle, auf denen ϕ als konstant definiert wurde.

Dann ist natürlich auch $B_\rho(x) \cap f(\phi([0,1]))$ abzählbar, also besteht aus Punkten y_j, $j \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$B_\rho(x) \cap f(\phi([0,1])) \subseteq Y_\lambda := \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_{2^{-j}\lambda}(y_j) \cap B_\rho(x)) \subseteq B_\rho(x), \qquad 0 < \lambda < \rho,$$

eine Teilmenge von X, die durch Wahl von λ beliebig klein gemacht werden kann, der „Anteil" von $B_\rho(x) \cap f(\phi([0,1]))$ an $B_\rho(x)$ ist also Null[137], es gibt also praktisch keine Punkte der Kurve in X. Anders gesagt, siehe [9],

> Die stetige Kurve $f(\phi([0,1]))$ ist fast überall im Einheitsquadrat fast nirgendwo.

Das Fazit ist relativ einfach: Stetigkeit ist anscheinend[138] nicht wirklich ausreichend, um die Dimension eines Objektes zu erfassen. Andererseits muss aber die Peanokurve eine unendliche Länge haben, kann also nicht rektifizierbar und damit auch nicht differenzierbar sein. Deswegen sieht es mit Differenzierbarkeit in Sachen Dimension schon deutlich besser aus, was die folgenden Definition motiviert.

Definition 6.6 (Diffeomorphismus)**.** Eine Funktion $\varphi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn sie bijektiv und stetig differenzierbar ist und ihre **Umkehrfunktion** $\varphi^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Sind φ und φ^{-1} sogar k–mal bzw. beliebig oft stetig differenzierbar, so spricht man von einem **C^k–Diffeomorphismus**[139] bzw. einem **C^∞–Diffeomorphismus**.

Übung 6.3 Zeigen Sie: Die Umkehrfunktion eines Diffeomorphismus ist ebenfalls ein Diffeomorphismus. Nein, war nur ein Scherz. ◊

6.2 Mannigfaltigkeiten

Jetzt können wir Objekte der Dimension k im $\mathbb{R}^n$ definieren.

Definition 6.7 (Mannigfaltigkeit)**.** Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k–dimensionale **Mannigfaltigkeit** oder kurz **k–Mannigfaltigkeit**, $k \leq n$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U von x, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen **Diffeomorphismus** $f : U \to V$ gibt, so daß

$$f(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}. \tag{6.4}$$

Bemerkung 6.8.

[137] In der Sprache der Maßtheorie: Das ist eine **Nullmenge**.

[138] Wirklich bewiesen haben wir ja nichts, nur Belege angegeben, daß Dinge *anscheinend* nicht so richtig funktionieren.

[139] Das beinhaltet also immer Forderungen an die Funktion *und* deren Umkehrfunktion.

1. Anschaulich gesprochen ist eine k–Mannigfaltigkeit immer ein *lokales* Bild des $\mathbb{R}^k$ unter einem Diffeomorphismus und damit auch ein k–dimensionales Objekt.
2. Jeder Punkt des $\mathbb{R}^n$ ist eine 0–Mannigfaltigkeit.
3. Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist immer eine n–Mannigfaltigkeit, man muss nur $V = U$ und $f(x) = x$ wählen.
4. Analog ist die **kanonische Einbettung** des $\mathbb{R}^k$, $x \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ immer eine Mannigfaltigkeit.

Beispiel 6.9 (Ebenen)**.** Der einfachste nichttriviale Fall einer Mannigfaltigkeit ist sicherlich eine k–dimensionale **Ebene** im $\mathbb{R}^n$. Dazu betrachten wir eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, die die **parametrisierte Ebene**

$$E = \left\{Ax + b \,:\, x \in \mathbb{R}^k\right\}, \qquad b \in \mathbb{R}^n,$$

definiert. Wären nun Spalten von A von anderen Spalten **linear abhängig**, dann könnte man diese einfach weglassen, ohne E zu verändern[140] und müsste einfach k entsprechend verkleinern. Nehmen wir also an, sie wären alle linear unabhängig, dann kann man diese Vektoren $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ mit $a_{k+1}, \ldots, a_n$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$ ergänzen, und zwar **orthogonal**, also so, daß $a_j^T a_\ell = 0$, $j = 1, \ldots, k$, $\ell = k+1, \ldots, n$. Die erweiterte Matrix

$$\widehat{A} := [a_1 \ldots a_k\, a_{k+1} \ldots a_n] =: [A\, B], \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times n-k},$$

ist dann invertierbar und $f(y) := \widehat{A}^{-1}(y - b)$, $y \in \mathbb{R}^n$ der gesuchte Diffeomorphismus, und zwar sogar *global*. Schreiben wir nämlich

$$\widehat{A}^{-1} = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}, \qquad G \in \mathbb{R}^{k\times n},\ H \in \mathbb{R}^{n-k\times n},$$

dann ist

$$\begin{bmatrix} I_k & \\ & I_{n-k} \end{bmatrix} = I = \widehat{A}^{-1}\widehat{A} = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} [A\, B] = \begin{bmatrix} GA & GB \\ HA & HB \end{bmatrix},$$

also $HA = 0$, $GB = 0$ und $GA = I_k$, $HB = I_{n-k}$. Für $y \in E$, also $y = Ax + b$ für $x \in \mathbb{R}^k$ ist dann

$$\begin{aligned} f(y) &= \widehat{A}^{-1}(y - b) = \widehat{A}^{-1}Ax = \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} Ax = \begin{bmatrix} GA \\ HA \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} x \\ &= \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k \times \{0\}, \end{aligned}$$

wohingegen wir für $y = (Ax + b) + y'$, $y' = Bx'$, $x' \in \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}$,

$$f(y) = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

[140] Überlegen Sie sich, warum!

erhalten. Mit anderen Worten:

$$y \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad f(y) \in \mathbb{R}^k \times \{0\},$$

die Ebene ist also eine k–Mannigfaltigkeit, wobei k die Anzahl der linear unabhänigen Zeilen von A, also den **Rang** der Matrix, bezeichnet.

Das besondere und auch besonders seltene an Beispiel 6.9 ist die Tatsache, daß das dort definierte f ein **globaler Diffeomorphismus** ist, das heißt, daß die offene Umgebung U aus Definition 6.7 als $\mathbb{R}^n$ gewählt werden kann.

Beispiel 6.10 (Sphären)**.** Das nächsteinfachere Beispiel einer Mannigfaltigkeit ist die **Einheitssphäre** im $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\},$$

die ja **implizit** als

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x : F(x) = 0\}, \qquad F(x) := \|x\|_2^2 - 1 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1,$$

gegeben ist. Da $F'(x) = 2x^T$ ist, ist die Ableitung $\neq 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, das heißt, die Rang–1–Matrix F′ hat auf der ganzen Sphäre den Maximalrang 1, und damit ist immer $x_j \neq 0$ für mindestens ein j, wo auch

$$x_j = \pm \sqrt{1 - \sum_{k \neq j} x_k^2} \tag{6.5}$$

erfüllt sein muss; nehmen wir an, (6.5) gilt mit Vorzeichen „+“ und $j = n$. Die Funktion

$$f(y) = \left(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n - \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2} \right)$$

ist nun auf einer offenen Umgebung[141] von x wohldefiniert, umkehrbar und differenzierbar mit

$$f'(y) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \frac{2y_1}{\sqrt{1-\sum_{k<n} y_k^2}} & \cdots & \frac{2y_{n-1}}{\sqrt{1-\sum_{k<n} y_k^2}} \quad 1 \end{bmatrix},$$

und es ist

$$f_n(y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y_n = \sqrt{1 - \sum_{k<n} y_k^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Damit ist die Sphäre auch, wie es der Anschauung entspricht, eine $n-1$–dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.

Hinter dem Beispiel der Sphäre steckt natürlich ein allgemeineres Prinzip, das wir uns als nächstes ansehen wollen. Der Hintergrund ist natürlich[142] wieder

[141] Nämlich solange y_j dasselbe Vorzeichen wie x_j hat, dann ist auch der Ausdruck unter der Wurzel $\neq 0$ und damit differenzierbar.

[142] Oder?

der Satz über implizite Funktionen, bzw. eine direkte Folgerung daraus. Doch zuerst eine Definition

Definition 6.11 (Rang). Der **Rang**[143]

$$\operatorname{rank} A = \dim A\,\mathbb{R}^m = \dim A^T\mathbb{R}^n \tag{6.6}$$

einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten von A.

Bemerkung 6.12. Daß der in (6.6) definierte **Zeilenrang** und **Spaltenrang** immer übereinstimmen, ist eine bekannte Tatsache aus der linearen Algebra, siehe z.B. [4, 2.8.3].

Satz 6.13. *Ist* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p \le n$, *stetig differenzierbar in einer offenen Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft*

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} f'(x) = p, \qquad x \in U, \tag{6.7}$$

dann ist $f^{-1}(0)$ *eine* $(n-p)$*–dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Als Vorbereitung brauchen wir eine interessante Konsequenz des Umkehrsatzes, Satz 5.14, für „nichtquadratische“ Funktionen.

Satz 6.14. *Ist* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p \le n$, *stetig differenzierbar in einer offenen Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *und gibt es* $x^* \in U$ *mit*

$$f(x^*) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \operatorname{rank} f'(x^*) = p, \tag{6.8}$$

dann gibt es eine offene Umgebung U' *von* x^* *und einen* ***Diffeomorphismus*** $\varphi : U' \to \mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft*

$$(f \circ \varphi)(x) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n), \qquad x \in U'. \tag{6.9}$$

Beweis: Da $\operatorname{rank} f'(x^*) = p$ ist, gibt es Indizes $j_1 < \cdots < j_p$, so daß

$$f'_\nu(x^*) = \det\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_{j_k}}(x^*) : j,k = 1,\dots,p\right] \neq 0.$$

Nehmen wir zuerst einmal an, daß $j_1 = n-p+1, \dots, j_p = n$, und schreiben $x = (u,v)$, $u \in \mathbb{R}^{n-p}$, $v \in \mathbb{R}^n$, und definieren $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als

$$F(x) = F(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ f(u,v) \end{bmatrix}, \qquad x = (u,v).$$

Dann ist

$$F(x^*) = \begin{bmatrix} u^* \\ f(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

[143] Auf Englisch „**rank**“

und

$$F'(x^*) = \begin{bmatrix} I \\ f'_u(x^*) & f'_v(x^*) \end{bmatrix}$$

invertierbar, so daß es nach dem Umkehrsatz, Satz 5.14, eine Umgebung V von $(u^*, 0)$ gibt, auf der die Inverse[144] F^{-1} mit

$$(F^{-1})' = \begin{bmatrix} I \\ -(f'_v)^{-1}\ f'_u & (f'_v)^{-1} \end{bmatrix},$$

existieren muss, zumindest lokal. Ist $\pi_v(x) := \pi_v(u, v) := v$ die **Projektion** auf die letzten p Komponenten, dann ist $f = \pi_v \circ F$ und damit

$$f(u, f_v^{-1}(u, v)) = (f \circ F^{-1})(x) = (\pi_v \circ F \circ F^{-1})(x) = \pi_v(x) = v,$$

also ist $\varphi = F^{-1}$ der gesuchte Diffeomorphismus.

Bleibt der Fall, daß $j_1 < \cdots < j_p$ beliebig sind. Dann sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine **Permutation** der Variablen, so daß

$$g(x) = \left(\cdots, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}\right)$$

Auf die Funktion $\widetilde{f} := f \circ g$ können wir dann das bisher bewiesene anwenden und erhalten einen Diffeomorphismus $\widetilde{\varphi}$, so daß

$$(x_{n-p+1}, \ldots, x_n) = (\widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi})(x) = (f \circ g \circ \widetilde{\varphi})(x) =: (f \circ \varphi)(x).$$

□

Übung 6.4 Zeigen Sie: Jede Permutation ist ein Diffeomorphismen und unter die **Konkatenation** $f \circ g$ von Diffeomorphismen ist wieder ein Diffeomorphismus. Formulieren Sie den zweiten Teil der Aussage korrekt unter Berücksichtigung der Definitionsbereiche. ♢

Übung 6.5 Berechnen Sie die Inverse der **Blockmatrix**

$$\begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{k\times k},\ B \in \mathbb{R}^{n-k\times k},\ C \in \mathbb{R}^{n-k\times n-k},$$

unter der Annahme, daß A und C invertierbar sind. Kann die Matrix für singuläres A oder C invertierbar sein= ♢

Beweis von Satz 6.13: Sei also nun $x \in f^{-1}(0)$, also $f(x) = 0$. Nach der Annahme (6.7) ist dann $\operatorname{rank} f'(x) = p$ und es gibt die Umgebung U von x und den Diffeomorphismus φ aus Satz 6.14. Dann ist $\psi = \varphi^{-1}$ der gesuchte nach Definition 6.7: Schreiben wir nämlich x als $x = \varphi(y)$, dann ist

$$0 = f(x) = (f \circ \varphi)(y) = (y_{n+p-1}, \ldots, y_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_{n-p+1} = \cdots = y_n = 0,$$

[144] Wie man leicht durch Ausmultiplizieren verifiziert, ist $\begin{bmatrix} I & \\ A & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix}$, siehe auch Übung 6.5

was nichts anderes als

$$0 = \psi_{n-p+1}(x) = \cdots = \psi_n(x)$$

ist. □

Mit anderen Worten: Alle *implizit* gegebenen Mengen mit überall *nichtsingulärer* Definitionsfunktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sind $n - p$–dimensionale Mannigfaltigkeiten. Das entspricht auch der anschaulichen Intuition, daß jede Gleichung den „Verlust" einer Dimension bedeutet. Da im Falle von Beispiel 6.9 und Beispiel 6.10 die Ableitungen $F'(x) = A$ (also sogar konstant) und $F'(x) = 2x^T$ sind, folgt die Mannigfaltigkeitseigenschaft nun ganz automatisch.

Korollar 6.15 (Einheitssphären)**.** *Die Einheitssphären $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sind $n - 1$–Mannigfaltigkeiten*[145]*.*

Die folgenden alternative Beschreibung von k–Mannigfaltigkeiten zeigt, daß man diese *lokal* auch **explizit** beschreiben kann.

Satz 6.16. *Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k–Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U von x, eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^k$ und eine stetig differenzierbare Bijektion*[146] *$f : W \to \mathbb{R}^n$ gibt, so daß*

1. $f(W) = M \cap U$,
2. $\operatorname{rank} f'(y) = k$, $y \in W$,
3. $f^{-1} : f(W) \to W$ *stetig ist.*

Definition 6.17 (Koordinatensystem)**.** Die Funktion f aus Satz 6.16 heißt (lokales) **Koordinatensystem** um x.

Beweis von Satz 6.16: „⇒": Sei M eine k–Mannigfaltigkeit und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Diffeomorphismus aus Definition 6.7. Wir setzen

$$W' := \varphi(M \cap U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in \varphi(M) : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\},$$

dann

$$W := \pi_u(W') \in \mathbb{R}^k, \qquad \Rightarrow \qquad W' = W \times \{0\},$$

und $f(u) = \varphi^{-1}(u, 0)$, $u \in \mathbb{R}^k$. Die Funktion ist stetig[147] weil φ ein Diffeomorphismus war und erfüllt nach Konstruktion $f(W) = M \cap U$. Schreiben wir wieder $x = (u, v)$, $u \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^{n-k}$, dann ist, mit $g = \pi_u \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$g(f(u)) = (\pi_u \circ \varphi)(f(u)) = (\pi_u \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(u, 0) = \pi_u(u, 0) = u$$

und daher

$$I = (g \circ f)' = \underbrace{g'(f(u))}_{\in \mathbb{R}^{k \times n}} \underbrace{f'(u)}_{\in \mathbb{R}^{n \times k}}, \tag{6.10}$$

[145] Was auch den oberen Index erklärt.
[146] Bijektion ist die Funktion natürlich nur auf $f(W)$, der Rest interessiert ja nicht.
[147] Und sogar differenzierbar!

weswegen rank $f'(u) = k$ sein muss.

„$\Leftarrow$“: Sei nun f eine Funktion, die 1)– 3) erfüllt und seien $x \in M$, $y \in \mathbb{R}^k$ so, daß $x = f(y)$. Wir nehmen an, daß die ersten k Zeilen von f' linear unabhängig sind, also

$$0 \neq \det\left[\frac{\partial f_j}{\partial y_\ell} : j, \ell = 1, \dots, k\right],$$

ansonsten numerieren wir unser Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ um[148]. Dann setzen wir $g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ als

$$g(x) := g(u, v) := f(u) + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}, \qquad x \in W \times \mathbb{R}^{n-k},$$

und erhalten

$$g'(x) = \begin{bmatrix} f_k'(u) & 0 \\ f_{n-k}'(u) & I \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{n-k} \end{bmatrix},$$

also

$$\det g'(x) = \det f_k'(u) \neq 0.$$

Damit gibt es eine offene Menge V_1 um $(y, 0)$ und eine offene Umgebung V_2 um $g(y, 0)$, so daß $g : V_1 \to V_2$ eine differenzierbare Umkehrfunktion φ hat – das ist, wieder einmal, der **Umkehrsatz**. Da f^{-1} stetig ist, sind die Urbilder offener Mengen bezüglich f^{-1}, also die Bilder offener Mengen bezüglich f, ebenfalls offen und es gibt eine offene Menge U, so daß

$$\{f(u) : (u, 0) \in V_1\} = U \cap f(W).$$

Ersetzen wir U durch $U \cap V_2$ und setzen $V := \varphi(U)$, dann ist

$$U \cap M = \{f(u) : (u, 0) \in V\} = \{g(u, 0) : (u, 0) \in V\},$$

so daß

$$\varphi(U \cap M) = g^{-1}(U \cap M) = g^{-1}\{g(u, 0) : (u, 0) \in V\} = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right),$$

wie in Definition 6.7 gefordert. □

Bemerkung 6.18. Der Name „Koordinatensystem“ ist aus [29] entnommen. In [18] wird eine derartige Funktion als **Immersion** bezeichnet, im Kontext der Differentialgeometrie oder der Riemannschen Geometrie spricht man gerne auch mal von einer **Karte**.

Der Beweis von Satz 6.16 zeigt, daß ein Koordinatensystem im wesentlichen eine Umkehrung des Diffeomorphismus sein muss, allerdings sind weder der Diffeomorphismus noch das Koordinatensystem eindeutig.

[148] Das war ja sehr willkürlich gewählt.

Beispiel 6.19 (Ebene)**.** Bei der Ebene in Beispiel 6.9 ist der Diffeormorphismus die Funktion

$$f(y) = \widehat{A}^{-1}(y - b), \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$

das Koordinatensystem die Funktion

$$f(x) = Ax + b, \qquad x \in \mathbb{R}^k.$$

Jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, deren Spalten $b_1, \dots, b_k$ denselben k–dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ aufspannen wie die Spalten $a_1, \dots, a_k$ von A, ist ebenfalls Koordinatensystem der Mannigfaltigkeit E. Diese Matrizen sind genau von der Form $B = AT$, $T \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $\det T \neq 0$, und damit können wir die Koordinatensysteme als

$$f_T(x) = A_T x + b := ATx + b, \qquad x \in \mathbb{R}^k.$$

parametrisieren. Die zugehörigen Diffeomorphismen sind dann $y \mapsto \widehat{A}_T^{-1}(y-b)$.

Beispiel 6.20 (Sphären)**.** Koordinatensysteme für die Einheitssphären $\mathbb{S}^{n-1}$ wäre die Funktionen

$$f_j(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ \left(1 - \sum_{k\neq j} x_k^2\right)^{1/2} \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Das Koordinatensystem f_j funktioniert in einer Umgebung jedes Punktes $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $x_j \neq 0$. Das heißt, daß mit „wenigen" Ausnahmen alle Koordinatensysteme gewählt werden können.

Beispiel 6.21 (Torus)**.** Auch explizite Parametrisierungen können als Koordinatensysteme funktionieren, wenn sie **regulär** sind, also $\operatorname{rank} f' = k$ ist. Die Parametrisierung des Kreises mit Radius r um den Punkt $(R, 0)$,

$$u \mapsto \begin{bmatrix} R + r\cos u \\ r \sin u \end{bmatrix}, \qquad 0 < r < R,$$

kann man um die z–Achse rotieren und erhält so das Koordinatensystem[149]

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{bmatrix}, \qquad u, v \in \mathbb{T},$$

mit Ableitung

$$f'(u, v) = \begin{bmatrix} (R - r\sin u)\cos v & -(R + r\cos u)\sin v \\ (R - r\sin u)\sin v & (R + r\cos u)\cos v \\ r\cos u & 0 \end{bmatrix}.$$

[149] Erinnerung an Teil 1: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ entspricht dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit „zusammengeklebten" Enden.

Die Determinante der oberen 2×2–Matrix ist

$$\underbrace{(R - r\sin u)}_{>0}\underbrace{(R + r\cos u)}_{>0}\underbrace{\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)}_{=1} > 0,$$

so daß die Jacobimatrix dieser Koordinatenfunktion auch wirklich überall Rang 2 hat. Die resultierende Mannigfaltigkeit $f(\mathbb{T}^2)$ bezeichnet man als **Torus** im $\mathbb{R}^3$. Ihre implizite Gleichung lautet

$$0 = f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 - r.$$

Bemerkung 6.22. Das Konzept der Regularität ist konsistent mit dem, was wir bei der Definition der Kurven kennengelernt haben. Eine reguläre Kurve, also eine Kurve mit $f' \neq 0$ bzw. $\operatorname{rank} f' = 1$ überall ist dann also auch eine **1–Mannigfaltigkeit** und die **Parametrisierung** das **Koordinatensystem**.

Man wäre jetzt versucht zu sagen, eine k–Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ definiere sich einfach als Bild[150] einer regulären Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Dem ist aber nicht so, die Bedingung 3) hat sehr wohl ihren Sinn.

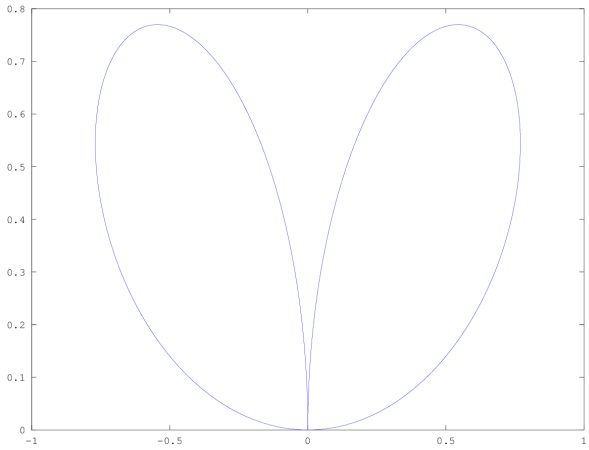

Abbildung 6.2: Die Funktion aus Beispiel 6.23. Die Kurve „schliesst“ sich wieder an der Stelle $(0, 0)$.

Beispiel 6.23. Die Funktion

$$f(t) = \sin 2t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

siehe Abb 6.2, bildet die offene Teilmenge $V := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ regulär nach $\mathbb{R}^2$ ab, aber das Bild $f(V)$ ist *keine* Mannigfaltigkeit, denn es gibt keinen Diffeomorphismus, der eine beliebig kleine Umgebung von $(0, 0)$ gleichzeitig auf Umgebungen von 0, $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ abbilden kann.

[150] Manchmal auch als **Spur** oder **Graph**.

Aber f ist auch kein Koordinatensystem, da f^{-1} nicht stetig ist: Man kann Folgen $x_k \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k \to 0$ definieren, für die $f^{-1}(x_k)$ gegen $-\frac{\pi}{2}$, 0 oder $\frac{\pi}{2}$ konvergiert oder sogar beliebig zwischen diesen Werten wechselt. Bedingung 3) in Satz 6.16 ist also sehr wohl notwendig.

Unsere bisherige Definition einer Mannigfaltigkeit hat immer um jeden Punkt der Mannigfaltigkeit eine Umgebung $f(W)$ gefordert, die ebenfalls zur Mannigfaltigkeit gehört. Zwar ist $f(W)$ normalerweise keine offene Menge[151] im $\mathbb{R}^n$, aber trotzdem hat jeder Punkt eine Umgebung auf der Mannigfaltigkeit, $f(W)$ ist **relativ offen**. Insbesondere ist jeder Punkt von M in dieser Definition ein **innerer Punkt**, die Mannigfaltigkeit hat also keinen Rand, auch wenn sie im Sinne der mengenwertigen Topologie selbst nur Rand ist.

Übung 6.6 Zeigen Sie: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k–Mannigfaltigkeit, $k < n$, dann ist $\partial M = M$. ◊

Um also Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren zu können, brauchen wir ein etwas subtileres Konzept.

Definition 6.24 (Mannigfaltigkeit mit Rand)**.**

1. Der (positive) **Halbraum** $\mathbb{H}^k \subset \mathbb{R}^k$ ist definiert als $\mathbb{H}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}$.

2. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k–dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn zu jedem Punkt $x \in M$ entweder die Forderungen aus Definition 6.7 erfüllt, oder es eine offene Menge $U \ni x$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $f : U \to V$ gibt, so daß

$$f(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{H}^k \times \{0\}\right) = \{y \in V : y_k \geq 0, y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}. \quad (6.11)$$

   und $f_k(x) = 0$.

3. Erfüllt x die Bedingung aus 2), so heißt x **Randpunkt** der Mannigfaltigkeit M. Die Menge aller Randpunkte bildet den **Rand** ∂M der Mannigfaltigkeit[152].

Bemerkung 6.25. Das „entweder ... oder" in Punkt 2) von Definition 6.24 ist absolut korrekt. Wären nämlich $f_1 : U_1 \to V_1$ bzw. $f_2 : U_2 \to V_2$ Diffeomorphismen[153] gemäß Definition 6.7 bzw. Definition 6.24, dann ist $f_2 \circ f_1^{-1} : V_1 \to V_2$ ein Diffeomorphismus im $\mathbb{R}^k$, der eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$, nämlich $\pi_u(V_1)$ auf die nicht offene Teilmen $\pi_u(V_2)$ abbildet; letzere ist nicht offen, da $f_{2,k}(x) = 0$ ist. Das ist dann aber ein Widerspruch zu Satz 5.15, 1), wo gezeigt wurde, daß jede Funktion mit $\det f' \neq 0$ eine **offene Abbildung** sein muss, die offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

[151] Beispiel: Die Sphären $\mathbb{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$

[152] Was jetzt aber nicht mehr im topologischen Sinne von Definition 1.19.

[153] Dafür muss man eventuell U_2 und V_2 so verkleinern, daß $U_2 \subset U_1$ ist, was aber möglich ist, da ja $x \in U_1 \cap U_2$, also $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ eine nichtleere offene Menge ist, die x enthält und damit einen guten Kandidat für U_2 darstellt.

Satz 6.26 (Mannigfaltigkeiten und Rand)**.** *Ist* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* k*–Mannigfaltigkeit mit Rand, dann ist der Rand* ∂M *eine* $k-1$*–Mannigfaltigkeit und* $M \setminus \partial M$ *eine* k*–Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Sei $x \in \partial M$ und $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus wie in Definition 6.24. Dann sind alle Punkte x' mit

$$f(x') \in V \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) = \{y \in V : y_k = \cdots = y_n\}$$

ebenfalls Randpunkte von M, da sie auch Definition 6.24 erfüllen. Jeder Punkt x' mit $f(x') \in V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ mit[154] $f_k(x') > 0$ gehört zwar zur Mannigfaltigkeit M, kann aber nach Bemerkung 6.25 kein Randpunkt sein. Damit ist

$$f(\partial M \cap U) = \{y \in V : y_{k-1} = \cdots = y_n = 0\},$$

weswegen ∂M genau die Definition 6.7 für eine $k-1$–Mannigfaltigkeit erfüllt. Andererseit gilt aber

$$f((M \setminus \partial M) \cap U) = \{y \in V : y_k > 0, y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\}$$

nach einer Verkleinerung auf die offene Menge $V' = \{y \in V : y_k > 0\}$ ein entsprechend angepasstes U' ist

$$f((M \setminus \partial M) \cap U') = \{y \in V' : y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\},$$

was genau der Definition einer k–Mannigfaltigkeit entspricht. □

Beispiel 6.27 (Sphären, Halbkugeln, Kreise)**.** Die Sphären $\mathbb{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ sind ein schönes Beispiel, wie das mit und ohne Rand aussehen kann.

1. Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ selbst ist eine Mannigfaltigkeit *ohne* Rand, ganz im Sinne der ursprünglichen Definition. Dennoch ist sie **beschränkt**, denn alle $x \in M$ erfüllen trivialerweise $\|x\|_2 \leq 1$. So etwas bezeichnet man als **geschlossene Mannigfaltigkeit**.

2. Die **Halbkugel**
$$\mathbb{S}^{n-1}_{\geq} = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x_n \geq 0\}$$
ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ist natürlich
$$\mathbb{S}^{n-2} \times 0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{S}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}\},$$
also eine $n-2$–dimensionale Sphäre, die nun aber wieder eine Mannigfaltigkeit *ohne* Rand ist. Jedes Koordinatensystem $f : \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ergibt sofort ein kanonisches Koordinatensystem $\widehat{f(u)} = (f(u), 0)$ für die $n-2$–Sphäre im $\mathbb{R}^n$.

3. Die *offene* Halbkugel
$$\mathbb{S}^{n-1}_{>} = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x_n > 0\}$$
erfüllt ja
$$\mathbb{S}^{n-1}_{>} = \mathbb{S}^{n-1}_{\geq} \setminus \partial \mathbb{S}^{n-1}_{\geq}$$
und ist wieder eine „normale“ Mannigfaltigkeit.

[154] $f(x') < 0$ ist ausgeschlossen, da der Diffeomorphismus per definitionem auf $\mathbb{H}^k \times \{0\}$ abbildet.

6.3 Tangentialräume und Orientierung

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, was denn nun die **Ableitung** einer k–Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$ ist. Verwendet man um $x \in M$ ein **Koordinatensystem** $f : W \to \mathbb{R}^n$, $u \in W \subset \mathbb{R}^k$, wobei $x = f(u)$ ist, dann kann man natürlich die Ableitung

$$f'(u) \in \mathbb{R}^{n\times k}$$

in irgendeiner Form als Ableitung der Mannigfaltikeit ansehen. Nun sind Koordinatensysteme aber natürlich nicht eindeutig und wäre $g : W' \to \mathbb{R}^n$ ein anderes Koordinatensystem mit $u \in W'$ und $g(u) = x$, dann haben wir keine Garantie, daß $g'(u) = f'(u)$ ist und damit hinge dieses Konzept einer Ableitung massiv von der Parametrisierung ab.

Beispiel 6.28. Setzen wir $g(v) := g_A(v) := f(A(v-u)+u)$, $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertierbar, $v \in W'$, dann ist

$$g'(u) = f'(u)\, A$$

eine lineare Transformation von $f'(u)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $A = I$ ist.

Beispiel 6.28 zeigt, daß die Ableitung des Koordinatensystems keine parametrisierungsunabhängige Größe, also nicht **intrinsisch** ist. Auf der anderen Seite gibt es aber auch eine Idee, was eine intrinische Größe sein könnte, nämlich der **Vektorraum** $f'(u)\,\mathbb{R}^k = g'_A(u)\,\mathbb{R}^k$, der von den Spalten der Ableitungen aufgespannt wird. Das können wir formalisieren.

Definition 6.29 (Tangentialräume)**.**

1. Für $f : V \to \mathbb{R}^n$ und $u \in V$ definieren wir die **lineare Abbildung**

   $$L_u f : v \mapsto f'(u)\,(v-u),$$

   die gerade die **Ableitung**[155] von f an der Stelle u ist.

2. Der **Tangentialraum** der k–Mannigfaltigkeit M an der Stelle $M \ni x = f(u)$, f ein Koordinatensystem, ist definiert als

   $$T_x := x + L_u f(\mathbb{R}^k) = x + \left\{ f'(u)(v-u) : v \in \mathbb{R}^k \right\}. \tag{6.12}$$

   Den linearen Anteil dieses Raums bezeichnen wir mit $M_x := T_x - x$.

3. Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **affiner Teilraum** des $\mathbb{R}^n$, wenn es ein $X \in x$ gibt, so daß

   $$X - x := \{x' - x : x' \in X\}$$

   ein Vektorraum ist.

Bemerkung 6.30. Affine Teilräume des $\mathbb{R}^n$ sind von der Form $A\mathbb{R}^m + b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, haben Dimension $\leq m$ und Dimension m genau dann, wenn $\operatorname{rank} A = m$ ist.

[155] Im Sinne von Definition 3.14.

Lemma 6.31. *Für jedes $x \in M$ ist der Tangentialraum T_x ein k–dimensionaler affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Da f ein Koordinatensystem ist, ist $\operatorname{rank} f'(v) = k$, $v \in V$, also insbesondere $\operatorname{rank} f'(u) = k$, $x = f(u)$, und $T_x - x = f'(u)\,\mathbb{R}^k$ ist ein k–dimensionaler **linearer Teilraum** des $\mathbb{R}^n$. □

Als nächstes zeigen wir, daß T_x tatsächlich nur von M und x abhängt, also **intrinsisch** ist.

Lemma 6.32. *Sind $f : V \to \mathbb{R}^n$ und $g : W \to \mathbb{R}^n$ Koordinatensysteme mit*

$$f(u) = g(v) = x \in M, \qquad u \in V,\, v \in W, \tag{6.13}$$

dann ist

$$L_u f(\mathbb{R}^k) = L_v g(\mathbb{R}^k),$$

und damit ist T_x wohldefiniert.

Beweis: Die Abbildung $g^{-1} \circ f : V' \to W'$ ist auf einer Umgebung $V' \subseteq V$ von u definiert mit Bildbereich W'. Da

$$f = g \circ g^{-1} \circ f,$$

ist nach der Kettenregel und wegen $f(u) = g(v) = x$

$$f'(u) = g'\Big(\underbrace{g^{-1}(f(u))}_{=g^{-1}(x)=v}\Big)\,(g^{-1} \circ f)'(u) = \underbrace{g'(v)}_{\in\mathbb{R}^{n\times k}}\ \underbrace{(g^{-1} \circ f)'(u)}_{\in\mathbb{R}^k}.$$

Die Matrix auf der linken Seite hat Rang k, also müssen auch beide Matrizen auf der rechten Seite Rank k haben, insbesondere ist also $(g^{-1} \circ f)'(u)$ invertierbar. Die Inverse findet man auch leicht, indem man die Identität[156]

$$x = f^{-1} \circ g \circ g^{-1} \circ f$$

differenziert, was

$$I = (f^{-1} \circ g)'(v)\,(g^{-1} \circ f)'(u) \qquad \Leftrightarrow \qquad (f^{-1} \circ g)'(v) = \Big((g^{-1} \circ f)'(u)\Big)^{-1}$$

ergibt. Insbsondere gilt also für jedes Paar von Koordinatensystemen

$$\det(g^{-1} \circ f)'(u') \neq 0, \qquad u' \in V'. \tag{6.14}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} L_u f(\mathbb{R}^k) &= L_u\left(g \circ g^{-1} \circ f\right)(\mathbb{R}^k) = \left(g \circ g^{-1} \circ f\right)'(u)\left(\mathbb{R}^k - u\right) \\ &= g'(v)\,(g^{-1} \circ f)'(u)\Big(\underbrace{\mathbb{R}^k - u}_{=\mathbb{R}^k}\Big) = g'(v)\ \underbrace{(g^{-1} \circ f)'(u)\,\mathbb{R}^k}_{=\mathbb{R}^k} \\ &= g'(v)\left(\mathbb{R}^k - v\right) = L_v g(\mathbb{R}^k), \end{aligned}$$

[156] Dieses Spiel kann man durchaus weitertreiben, man muss allerdings darauf achten, daß die „innerste“ Funktion ein Koordinatensystem, da die Inversen von Koordinatensystem, f^{-1} und g^{-1} nicht auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$, sondern nur auf M definiert sind.

und damit ist T_x in der Tat vom gewählten Koordinatensystem unabhängig. □

Da der Tangentialraum ja genau der affine Teilraum ist, der von den Spalten von f' erzeugt wird, können wir ohne weiteres eine Basis dieses Raums angeben.

Korollar 6.33. *Ist f ein Koordinatensystem mit $x = f(u)$, dann sind die Vektoren*[157]

$$m_\ell := \left[\frac{\partial f_j}{\partial u_\ell}(u) : j = 1, \dots, n\right], \qquad \ell = 1, \dots, k, \tag{6.15}$$

*eine **Basis** von $M_x := T_x - x$, also*

$$T_x = x + \operatorname{span}\{m_\ell : \ell = 1, \dots, k\}. \tag{6.16}$$

Diese Basis hängt allerdings vom gewählten Koordinatensystem ab.

Generell ist ein **Vektorfeld** einfach eine vektorwertige Funktion, also das multivariate Gegenstück zu einer **Kurve**. Will man Vektorfelder entlang einer Mannigfaltigkeit definieren, dann muss man ein bisschen aufpassen.

Definition 6.34 (Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten)**.** Eine Funktion $F : M \to \mathbb{R}^n$ von einer Mannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld** auf der Mannigfaltigkeit, wenn

$$F(x) \in T_x, \qquad x \in M. \tag{6.17}$$

Bemerkung 6.35. Da, wie bereits ausgenutzt, ja $\mathbb{R}^n = x + \mathbb{R}^n$, ist, kann man das Vektorfeld auch als

$$F(x) = x + \tilde{F}(x), \qquad \tilde{F} : \mathbb{R}^n \to M_x,$$

auffassen. Die Anschauung ist dann, daß der Vektor[158] $\tilde{F}(x)$ als an x „angeklebter Pfeil“ gesehen wird. Man kann, wie in [29], auch formal zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n_x$ unterscheiden, wobei letzterer aus Paaren (x, v) besteht, wobei die Vektorraumoperationen nur auf die zweite Komponente v angewendet werden und nicht auf den **Fußpunkt** x.

Alternativ kann man affine Geometrie auch sehr schön über **baryzentrische Koordinaten** beschreiben, siehe [20], was nicht nur klassisch ist sondern auch in der Welt des **CAGD**[159] verwendet wird.

Beispiel 6.36. Ein praktisches Beispiel für ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit wären Windströmungen auf dem Erdellipsoid unter Vernachlässigung von Auf- und Abwärtsbewegungen.

Ist $F : M \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, dann kann man für ein Koordinatensystem $f : W \to \mathbb{R}^n$ die „Koordinatenversion“ $F \circ f : W \to \mathbb{R}^n$ davon betrachten, also die Abbildung $W \ni u \mapsto F(f(u)) \in \mathbb{R}^n$. Wegen $(F \circ f)(u) \in T_{f(u)} = x + f'(u)\,\mathbb{R}^k$ gibt es also einen Vektor $v(u)$, so daß

$$F(f(u)) = x + f'(u)\,v(u) \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(u)\,v(u) = F(f(u)) - x. \tag{6.18}$$

[157] Das sind die *Spalten* von $f'(u)$.

[158] Diesmal und nur diesmal und auch das nur um der Anschaulichkeit willen.

[159] **C**omputer **A**ided **G**eometric **D**esign.

Da der Vektor auf der rechten Seite nach Definition 6.34 im Vektorraum liegt, der von den Spalten von $f'(u)$ aufgespannt wird, existiert immer so ein $v(u)$ und da die Matrix $f'(u)$ vollen Rang hat, ist $v(u)$ sogar eindeutig bestimmt. Ersetzen wir nun $v(u)$ durch $u + v(u)$, „kleben" wir also die **Richtung** $v(u)$ **affin** an u, dann erhalten wir, daß

$$L_u f(v(u)) = x + f'(u)(v(u) - u) = x + f'(u)\,\tilde{v}(u) = x + (F(f(u)) - x) = F(f(u)),$$

was uns zu folgender Beobachtung führt.

Lemma 6.37. *Ist $F : M \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer k–Mannigfaltigkeit M und ist $f : W \to \mathbb{R}^k$ ein zweimal stetig differenzierbares Koordinatensystem für M um einen Punkt $x \in M$, dann gibt es ein beliebig stetig differenzierbares Vektorfeld $v : W \to \mathbb{R}^k$, so daß*

$$(F \circ f)(u) = L_u f(v(u)), \qquad u \in W. \tag{6.19}$$

Beweis: Zu zeigen ist nur noch die stetige Differenzierbarkeit von v und die folgt aus (6.18): Da $f'(x)$ beliebig oft differenzierbar ist und überall vollen Rang hat, gibt es eine **Linksinverse** $g : W \to \mathbb{R}^{k\times n}$ zu f' mit

$$g(u)\, f'(u) = I \in \mathbb{R}^{k\times k},$$

und diese ist so oft differenzierbar wie f'. Dann ist

$$v(u) = g(u)\,(F(f(u)) - x)$$

stetig differenzierbar. □

Noch ganz kurz ein kleines Bisschen zum Thema **Orientierung**. Orientierung ist eine Eigenschaft von *geordneten* Basen $[v_1, \ldots, v_k]$ und $[w_1, \ldots, w_k]$ eines Vektorraums, die man sich am besten als Matrizen vorstellt. Der **Basiswechsel** kann durch eine Matrix A beschrieben werden[160], die durch

$$w_j = \sum_{\ell=1}^{k} a_{j\ell}\, v_\ell, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{6.20}$$

eindeutig bestimmt ist. Die beiden Basen sind **gleich orientiert**, wenn $\det A > 0$ ist und **entgegengesetzt orientiert**, wenn $\det A < 0$ ist. Sind f, g Koordinatensysteme und betrachtet man die Basen (6.15) aus Korollar 6.33, dann sind diese Basen des Tangentialraums genau dann gleich orientiert, wenn

$$\det(g^{-1} \circ f)(u) > 0, \qquad u \in W$$

gilt, also wenn die Beziehung zwischen den beiden Koordinatensystemen **orientierungstreu** ist. Ein Mannigfaltigkeit heißt **orientierbar**, wenn es eine konsistente Orientierung gibt. Das klassische Beispiel für eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit ist das **Möbiusband**, siehe Abb 6.3. Bei einer nicht orientier-

[160] Das ist oftmals die „Standarddefinition" von Matrizen in der linearen Algebra: Als Koeffizienten eines Basiswechsels.

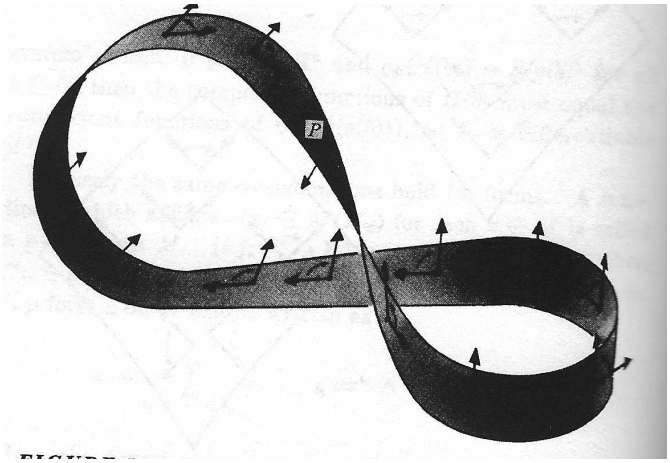

Abbildung 6.3: Das Möbiusband und die Unmöglichkeit, es zu orientieren, aus [29].

baren Mannigfaltigkeit sind auch die Normalen nicht wirklich sauber definiert, da deren Richtung ebenfalls von der „Händigkeit“ des Koordinatensystems abhängt und springt, wenn sich die Orientierung ändert. Das ist genau der bekannte Effekt, daß das Möbiusband als gedrehtes und verklebtes Band keine Ober- und Unterseite hat[161], sondern eben nur eine Seite.

[161] Weswegen in der Stochastik auch selten „Möbiusmünzen“ geworfen werden.

6 Literatur

[1] E. Brieskorn, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*, Vieweg, 1983.

[2] P. J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications, 1975.

[3] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 303, Springer, 1993.

[4] G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg, 1984.

[5] J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, and J. Hughes, *Computer graphics*, 2nd ed., Addison Wesley, 1990.

[6] O. Forster, *Analysis I*, Vieweg, 1976.

[7] _____, *Analysis 2*, 5. ed., Vieweg, 1984.

[8] F. R. Gantmacher, *Matrix Theory. Vol. I*, Chelsea Publishing Company, 1959, Reprinted by AMS, 2000.

[9] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmstedt, *Counterexamples in analysis*, Holden–Day, 1964, Dover reprint 2003.

[10] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of variations*, Prentice–Hall, 1963, Dover reprint, 2000.

[11] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, 2. ed., B. G. Teubner, 1983.

[12] _____, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*, 3. ed., B. G. Teubner, 1984.

[13] _____, *Lehrbuch der Analysis, Teil I*, 3. ed., B. G. Teubner, 1984.

[14] N. J. Higham, *Accuracy and stability of numerical algorithms*, 2nd ed., SIAM, 2002.

[15] E. Hille, *Analytic function theory*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, 1982.

[16] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, 1966.

[17] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Graylock Press, 1957, Dover reprint, 1999.

[18] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer, 1993.

[19] G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, Chelsea Publishing Company, 1966.

[20] A. F. Möbius, *Der barycentrische Calcul*, Johann Ambrosius Barth, 1827.

[21] R. P. Paul, *Robot Manipulators*, MIT Press, 1981.

[22] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[23] T. Sauer, *Approximationstheorie*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, 2002, Online verfügbar, Lehrstuhlseite.

[24] _____, *Einführung in die Numerische Mathematik*, Vorlesungsskript, Universität Passau, 2013.

[25] _____, *Optimierung*, Vorlesungsskript, Universität Passau, 2013.

[26] _____, *Analysis 1*, Vorlesungsskript, Universität Passau, 2014.

[27] G. E. Shilov, *Elementary real and complex analysis*, MIT Press, 1973, Dover reprint, 1996.

[28] P. Spellucci, *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*, Internationale Schriftenreihe zu Numerischen Mathematik, Birkhäuser, 1993.

[29] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Perseus Books, 1965.

[30] L. A. Steen and J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Springer, 1970, Dover reprint, 1995.

[31] J. Stoer, *Einführung in die Numerische Mathematik I*, 4 ed., Heidelberger Taschenbücher, Springer Verlag, 1983.

[32] D. V. Widder, *Advanced calculus*, 2nd ed., Prentice Hall, 1961, Dover reprint 1989.

[33] K. Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer–Verlag, 1965.

Index 6

1–Mannigfaltigkeit, 120
C^∞–Diffeomorphismus, 112
C^k–Diffeomorphismus, 112
θ–Operator, 68
ε–Netz, 19, 22
k–Linearform, 54
k–Mannigfaltigkeit, 112
k–homogene Funktion, 53, 68
k–mal differenzierbar, 56
k–mal stetig differenzierbar, 50
k–te Ableitung, 56
p–Norm, 24
Überdeckung, 18
überdeckungskompakt, 18, 22

abgeschlossen, 10, 16, 21
abgeschlossene Kugel, 5
abgeschlossene Menge, 5
Ableitung, 45, 53, 66, 107, 123
Abschluss, 7, 98
Absolutbetrag, 2
abzählbar viele, 111
affin, 126
affine Funktion, 37, 44
affiner Teilraum, 123
aktiv, 77
algebraische Topologie, 15
alternierende Multilinearform, 71
Auflösen, 88

Banachraum, 83
Banachscher Fixpunktsatz, 93
baryzentrische Koordinaten, 125
Basis, 125
Basiswechsel, 126
Begrenzungsfläche, 106
Berührpunkt, 7
beschränkt, 122
Betrag, 43
Betragsfunktion, 3
Bewegungsgeschwindigkeit, 97
Bijektion, 53, 98, 108
Bilinearform, 54, 60, 82
Blockmatrix, 116
Bogenlänge, 30, 34
bogenlängenparametrisiert, 34
bounding Box, 26

CAGD, 28, 125
Cantorfunktion, 110, 111
Cauchy–Folge, 15, 17, 18, 21
Cauchy–Schwarz–Ungleichung, 4

Determinante, 71
Diagonale, 54
Diagonalfolge, 21
dicht, 16, 111
Diffeomorphismus, 112, 115
Differential, 45, 83
Differentialoperator, 43
differenzierbar, 28, 45, 48, 49, 66, 83, 84
Dimension, 107
diskrete Metrik, 3
Dreiecksungleichnung nach unten, 6
Dreiecksungleichung, 4, 18
Durchmesser, 19
dyadische Darstellung, 107
dyadische Zahl, 111

Ebene, 113
Ecke, 76
Eigenvektor, 73
Eigenwert, 70, 73
einfache Nullstelle, 101, 103
Einheitsindizes, 43
Einheitskreis, 75
Einheitskugel, 20, 81
Einheitssphäre, 81, 114
Einheitsvektor, 36
Einheitswürfel, 75
eliminieren, 92

Ellipsoid, 107
entgegengesetzt orientiert, 126
Entwicklungspunkt, 56
Erzeugnis, 10
euklidische Norm, 102
Euler–Lagrange–Gleichung, 85
explizit, 117
Extremalstelle, 69
Extremum, 69

Fakultät, 43
Farkas–Lemma, 78, 80
fast überall, 111
fast alle, 13
Fixpunkt, 18, 93, 101
Fixpunktproblem, 93, 101
folgenkompakt, 19, 22
Folgenraum, 20
Frobeniusnorm, 16, 102
Fußpunkt, 125
Funktional, 83
Funktionenraum, 83
Funktionentheorie, 89

gemeinsame Nullstelle, 101
gemischte Ableitung, 40
generisch, 104
geometrische Invariante, 91
geschlossene Mannigfaltigkeit, 122
gleich orientiert, 126
gleichmäßig stetig, 23, 31
gleichmäßige Konvergenz, 110
Gleichungssystem, 88, 92
globaler Diffeomorphismus, 114
Gradient, 37
Graph, 28, 31, 33, 120
Grenzwert, 13
Guingard–Bedingung, 80

Häufungspunkt, 13
Höchstgrad, 56
Höhenlinie, 104
Halbkugel, 122
Halbraum, 121
Hauptminoren, 71
Hauptuntermatrix, 71
Hausdorff–Raum, 11, 14

hermitesche Matrix, 70
Hesse–Matrix, 42
Hessematrix, 55, 60, 72, 75
Heuristik, 48
homogen, 40
homogene Funktion, 53
homogene Komponente, 56
homogenes Polynom, 55
Hyperebene, 104

Immersion, 118
implizit, 114
implizite Flächen, 104
implizite Funktion, 88
Implizitierung, 91
indefinit, 70
Indexmenge, 7
indiskrete Topologie, 14
induzierte Metrik, 4
injektiv, 98
innerer Punkt, 12, 76, 77, 121
Inneres, 12
inneres Produkt, 37
intrinsisch, 123, 124
intrinsische Eigenschaft, 35
invertierbar, 89, 91
invertierbare Matrix, 101
isometrisch, 15
Iteration, 101

Jacobimatrix, 65, 66, 89
Jet, 56

kanonische Einbettung, 113
Kante, 76
Karte, 118
Kettenregel, 34, 38, 51, 89
Kinematik, 90
kompakt, 19, 22, 72, 98
kompakter metrischer Raum, 26
Komplement, 5
Komponentenfunktionen, 28
Konkatenation, 116
konkav, 74
konkave Funktion, 74
Kontaktpunkt, 7, 10, 12, 13
Kontraktion, 17, 93, 102

Kontraktionskonstante, 17
konvergent, 13
konvex, 74, 84
konvexe Analysis, 78
konvexe Funktion, 74
konvexe Hülle, 39
konvexe Menge, 52, 74
konvexer Kegel, 78
Koordinatensystem, 117, 120, 123
Krümmung, 60
Kurve, 28, 36, 64, 65, 125

Länge, 3, 29, 30, 43
Lagrange–Multiplikatoren, 99
Lagrangemultiplikatoren, 80, 81
Lagrangfunktion, 80
Laplacesche Entwicklungsregel, 71
Leitform, 56
linear, 53
linear abhängig, 113
lineare Abbildung, 123
lineare Funktion, 37, 44, 81
lineare Nebenbedingung, 82
linearer Teilraum, 124
lineares Funktional, 83
Linearform, 54
Linearisierung, 79
Linksinverse, 126
lokal injektiv, 96
lokal konkav, 75
lokal konvex, 75
lokale Inverse, 97
lokales Maximum, 69, 73
lokales Minimum, 69, 72, 73
Lokalisierung, 92

Möbiusband, 126
Mannigfaltigkeit, 112
Mannigfaltigkeit mit Rand, 121
Maximalstelle, 69, 74, 99
Maximum, 81
Maximumprinzip, 98
mengenwertige Topologie, 15
Metrik, 2
metrischer Raum, 2, 14
Minimalstelle, 69, 79
Minimum, 81
Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 39, 41
Monom, 43
monoton steigend, 110, 111
Multiindex, 43
Multilinearform, 54
multivariate Funktion, 36

Näherung erster Ordnung, 59
Nebenbedingungen, 77
negativ definit, 70
negativ semidefinit, 70
Neilsche Parabel, 29
Newton–Iteration, 103
Newton–Verfahren, 103, 105
nichtdegeneriert, 99
nichtnegativ, 2
nichtnegative Lösung, 78
Norm, 3, 102
Normale, 106
Normalenrichtungen, 79
normierter Raum, 3, 24
Nullmenge, 112
Nullstelle, 101, 103
Numerische Mathematik, 103

offen, 10
offen und dicht, 16
offene Abbildung, 98, 121
offene Kugel, 5
offene Menge, 5, 10, 107
offene Teilmenge, 10, 11
offene Uberdeckung, 21
Operatornorm, 67
Ordnung, 50
orientierbar, 126
Orientierung, 79, 126
orientierungstreu, 34
orthogonal, 113
ortientierungstreu, 126

Paraboloid, 60
parametrische Fläche, 64
parametrisierte Ebene, 113
Parametrisierung, 28, 120
partiell differenzierbar, 36, 45, 48, 49, 65
partielle Ableitung, 37, 43

partielle Ordnung, 77
Peanokurve, 109, 111
Permutation, 116
Polynom, 43, 53
polynomiale Kurve, 28
positiv definit, 70, 71
positiv semidefinit, 70, 71, 74
principal submatrix, 71
Produktregel, 38
Produkttopologie, 19
Projektion, 116
punktetrennend, 11

Quader, 26, 42
quadratische Matrix, 89

Rückwärtstransformation, 90
Radius, 19
Rand, 8, 121
Randpunkt, 8, 10, 76, 121
Rang, 114, 115
rank, 115
Raytracing, 105
reellwertige Funktion, 69
Referenzellipsoid, 104
regulär, 29, 34, 119
reguläre Funktion, 98
reguläre Kurve, 34
regulärer Punkt, 96, 98
rektifizierbar, 30
relativ offen, 121
Reparametrisierung, 34
Richtung, 39, 65, 126
Richtungsableitung, 39
richtungsdifferenzierbar, 39, 45, 48, 65
Riemannsumme, 32

Satz von Bolzano–Weierstraß, 27
Schmiegeparabel, 61
Schnittkurve, 105
Schubfachprinzip, 20
Sehstrahl, 105
singuläre Konfigurationen, 90
singulärer Punkt, 96, 101
singularer Punkt, 29
Skalarprodukt, 37
Spaltenrang, 115
Spur, 120
Steigung, 60, 107
Stellgröße, 97
sternformige Menge, 52
stetig, 14, 43
stetig differenzierbar, 49, 91
stetig partiell differenzierbar, 37, 49
stetige Abbildung, 28
stetige Surjektion, 109
Streckenzug, 39
strikt konvex, 74
striktes lokales Minimum, 72
striktes Maximum, 69
striktes Minimum, 69
Subdifferential, 84
Surjektion, 107
surjektiv, 110
symmetrisch, 53, 82
symmetrische Matrix, 54, 70, 71
symmetrische Multilinearform, 56
Symmetrisierung, 55

Tangente, 28, 103
Tangentialebene, 60, 106
Tangentialkegel, 75
Tangentialraum, 123
Taylorformel, 58
Taylorpolynom, 56, 58
Tool Center Point, 90
Topologie, 9
topologischer Raum, 10
Torus, 120
total beschränkt, 19
total beschrankt, 21
totales Differential, 45
Trilinearform, 61
Tupel, 28

Umgebung, 7, 10
Umkehrabbildung, 98
Umkehrfunktion, 97, 98, 112
Umkehrsatz, 98, 118
Ungleichungsnebenbedingungen, 77
unstetig, 108
Urbild, 14

Variationsproblem, 83

Variationsrechnung, 83
Vektor, 28
Vektorfeld, 64, 125
Vektorraum, 3, 43, 123
vektorwertige Funktion, 36
vertraglich, 102
Vervollständigung, 15
vollständig, 15, 16
Vorwärtsdifferenz, 42
Vorwärtstransformation, 90
Vorzeichenwechsel, 101

WGS84, 104, 107
Winkelgeschwindigkeit, 97
wohldefiniert, 108

Zeile, 66
Zeilenrang, 115
zulässiger Punkt, 78
Zweigelenkroboter, 90