Analysis I

Tomas Sauer

Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung
FORWISS
University of Passau
Innstr. 43
94032 Passau

Version 1.3
Letzte Änderung: 4.9.2019

Statt einer Leerseite …

Denn die Doktrin der geschlechtergerechten Sprache macht das Lesen solchermassen „gerechter“ Texte nicht nur fast unerträglich. Sie basiert auch auf einem linguistischen Grundirrtum, weil es das biologische Geschlecht mit dem grammatischen Genus gleichsetzt.

C. Wirz, „Neusprech für Fortgeschrittene“, *NZZ Online, 12.7.2013*

Die wahren Analphabeten sind schließlich diejenigen, die zwar lesen können, es aber nicht tun. Weil sie gerade fernsehen.

L. Volkert, *SZ–Online, 11.7.2009*

Alles andere als ein Sieg ist ja erst einmal eine Niederlage.

B. Becker, Januar 2014,
Quelle: *Nürnberger Nachrichten, 23.1.2014*

The most incredible thing about miracles is that they happen.

G. K. Chesterton, *The Innocence of Father Brown*

And it didn't stop being magic just because you found out how it was done.

T. Pratchett, *Wee Free Men*

Inhaltsverzeichnis

Vorwort | 1

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

(Galileo Galilei, *Il Saggiatore, Cap V*)

Normalerweise braucht ein Vorlesungsskript kein Vorwort, oder sollte zumindest keines brauchen, aber bei Analysis 1 ist es doch etwas anders, denn Analysis 1 ist eine Eintrittskarte in die Welt der Mathematik. Hier erwirbt man nicht nur Wissen, sondern lernt grundsätzliche Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik kennen und wird auch in die Sprache der Mathematik[1] eingeführt. Analysis ist deutlich älter als Lineare Algebra, eine ihrer „Geburtsstunden" ist sicherlich die *Principia Mathematica* von Isaac Newton. Fast alle anderen Gebiete der Mathematik, von der Stochastik über die Numerik bis zu Funktionentheorie und Differentialgleichungen nutzen analytische Terminologie und bauen darauf auf.

Analysis betreibt man in der einen oder anderen Form auch in der Schule, leider oft genug[2] in der anderen. Mathematische Konzepte werden unsauber, gelegentlich falsch, eingeführt und verwendet, Notation missbraucht und inkorrekt verwendet. Daher ist diese Vorlesung auch eine Art Sprachkurs, eine Einführung in die Sprache der Mathematik und deswegen sollte man Aufgaben immer in Sprache, Terminologie und Notation dieses Skripts bearbeiten. Das Einüben des korrekten Formalismus, die Fähigkeit, diesen für korrekte Argumente zu nutzen, ist neben dem reinen Wissen ein nicht zu unterschätzender Aspekt jeder Einführung in die Analysis.

[1] Das Galilei–Zitat oben ist normalerweise als *„Das Buch der Naturwissenschaften ist in der Sprache der Mathematik geschrieben"* wiedergegeben.

[2] Oder zumindest definitiv zu oft.

In diesem Sinne, um einen anderen großen Italiener zu zitieren: „*Lasciate ogni speranza, voi ch'entrate!*“. Wir sind ja nicht (mehr) in der Schule . . .

2 Zahlen und Figuren

Der Erste, der durch Zeichen jenes einfache Verhältniss $2 \times 2 = 4$ *ausdrückte, erfand die Mathematik, jene mächtige Wissenschaft, welche wirklich den Menschen auf den Thron der Welt erhob.*

(J. A. Brillat–Savarin, *Physiologie des Geschmacks*)

Analysis funktioniert nicht auf beliebigen Mengen, um „Kurvendiskussionen" vernünftig durchführen zu können, benötigt man gewisse Strukturen, die wir uns zuerst einmal ansehen wollen. Dabei verwenden wir[1] die in der Mathematik gebräuchliche AXIOMATIK, die Objekte und Begrifflichkeiten durch Angabe ihrer Eigenschaften definiert und damit festlegt.

2.1 Körper

Um Analysis betreiben zu können, benötigen wir als erstes wir eine mathematische Struktur, in der alle Grundrechenarten „funktionieren".

Definition 2.1.1 (Körper)**.** Eine Menge $\mathbb{K}$ mit den Operationen[2] ADDITION „+" und MULTIPLIKATION „·" heißt KÖRPER, wenn die folgenden Bedingungen für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ erfüllt sind:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ASSOZIATIVGESETZ).
2. $x + y = y + x$ (KOMMUTATIVGESETZ).
3. Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft $x + 0 = x$, $x \in \mathbb{K}$.
4. Zu jedem $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $y \in \mathbb{K}$ mit $x + y = 0$. Dieses Element wird mit $-x$ bezeichnet.

[1]Dieses „wir" meint nicht den Verfasser des Skripts und den Dozenten, ebensowenig wie einen *Pluralis Majestatis* sondern bezieht den Leser mit ein. Wer sich nicht einbezogen fühlt, hat einfach Pech gehabt.

[2]In mathematischer Sprechweise bedeutet „mit den Operationen" immer, daß das Ergebnis der Operation wieder zur Menge gehört, in unserem Fall also:

$$x, y \in \mathbb{K} \qquad \Rightarrow \qquad x + y, x \cdot y \in \mathbb{K}.$$

5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

6. $xy = yx$.

7. Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft $1 \cdot x = x,\ x \in \mathbb{K}$.

8. Zu jedem $x \neq 0$ gibt es ein Element $y \in \mathbb{K}$ mit $xy = 1$, das dann mit $\frac{1}{x}$ oder x^{-1} bezeichnet wird.

9. $x(y+z) = xy + xz$ (DISTRIBUTIVGESETZ).

In algebraischer Sprechweise bedeuten 1)– 4), daß $\mathbb{K}$ bezüglich der Addition eine KOMMUTATIVE GRUPPE bzw. ABELSCHE GRUPPE bildet, 5)– 8) sagen, daß $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet und 9) ist die Eigenschaft, die eine Beziehung zwischen Addition und Multiplikation herstellt.

Bemerkung 2.1.2. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder man akzeptiert, daß ein TRIVIALER KÖRPER $\mathbb{K} = \{0\}$ existiert wir beispielsweise in [19], oder man fordert, wie in [15] zusätzlich die NICHTTRIVIALITÄT $1 \neq 0$, so daß jeder Körper mindestens zwei Elemente enthält, und zwar auf jeden Fall 0 und 1. Das ist dann auch schon der kleinste endliche Körper $\mathbb{F}_2$ mit der Rechenregel[3] $1 + 1 = 0$.

Als erstes sehen wir uns nun ein paar „offensichtliche“ Eigenschaften der Körper an, die dennoch eines Beweises bedürfen, auch wenn dieser sehr leicht aus den Axiomen abgeleitet werden kann. Dabei verwenden wir Kommutativ- und Assoziativgesetz ohne das noch explizit anzugeben.

Proposition 2.1.3 (Elementare Eigenschaften)**.**

1. *Die Elemente* 0 *und* 1 *sind eindeutig*[4].

2. $-x$ *und* $\frac{1}{x}$ *sind eindeutig.*

3. *Es gilt* $0 \cdot x = 0,\ x \in \mathbb{K}$.

4. *Körper sind* NULLTEILERFREI*:* $xy = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$ *oder*[5] $y = 0$.

Beweis: Für 1) nehmen wir an, es gäbe zwei Nullelemente, $0 \neq 0'$ mit $x + 0 = x + 0' = x,\ x \in \mathbb{K}$. Aber dann ist insbesondere $0 = 0 + 0' = 0'$, was ein offensichtlicher Widerspruch ist. Identisch bekommt man auch $1 = 1 \cdot 1' = 1'$.

[3] Das ist dann so klar wie daß $1 + 1 = 2$ ist.
[4] Was aber nicht bedeuten muss, daß sie verschieden sind, siehe Bemerkung 2.1.2.
[5] Das ist ein nichtausschliessliches oder, also kein „entweder oder“, sondern bedeutet, daß auch x *und* y den Wert Null haben können.

2): Sei y irgendeine Zahl mit $x+y=0$. Dann ist $-x=-x+0=-x+x+y=y$ nach Definition von $-x$. Ensprechend folgt aus $xy=1$ auch daß $1/x = 1/x\cdot 1 = 1/x\cdot x\cdot y = y$.

3): Das Distributivgesetz 9) liefert $x\cdot 0 = x(0+0) = x\cdot 0 + x\cdot 0$, aber andererseits ist ja auch $x\cdot 0 = x\cdot 0 + 0$. Also

$$x\cdot 0 + 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\cdot 0 = 0,$$

wenn wir auf beiden Seiten $(-x)\cdot 0$ addieren und nochmals das Distributivgesetzt verwenden.

Die Richtung „$\Leftarrow$" von 4) folgt sofort aus 3). Für „$\Rightarrow$" nehmen wir an, daß einer der beiden Faktoren $\neq 0$ ist, sagen wir x, dann existiert $\frac{1}{x}$ und wir erhalten

$$0 = \frac{1}{x}\cdot 0 = \frac{1}{x}\cdot x\cdot y = y;$$

ist umgekehrt $y \neq 0$, dann liefert dasselbe Argument $x = 0$, mindestens einer der beiden Faktoren ist also sicher $=0$. $\square$

Übung 2.1.1 Zeigen Sie: $0 = -0$, $(-1)x = -x$ sowie $(-x)y = -(xy)$ und $(-x)(-y) = xy$, $x, y \in \mathbb{K}$. $\diamondsuit$

Bauen wir uns doch einfach einmal einen Körper konstruktiv aus den Rechenoperationen zusammen.

Beispiel 2.1.4 (Rationale Zahlen)**.** Nach Definition 2.1.1 enthält ein Körper mindestens die Elemente 0 und 1. Addieren wir, unter Verwendung der „normalen" Rechenregeln nun immer wieder 1 zu sich selbst, so erhalten wir die Zahlen $2 := 1+1$, $3 := 1+1+1 = 2+1$, und so weiter, also die Menge $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$, die man NATÜRLICHE ZAHLEN nennt. Alternativ[6] kann man auch $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ verwenden.

Zu jedem Element x von $\mathbb{N}_0$ gibt es auch $-x$, was uns die negativen Zahlen $-1,-2,\dots$ einbringt und insgesamt die Menge $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N}$, die man als GANZE ZAHLEN bezeichnet. Damit sind wir mit der Addition durch und die Multiplikation ist auf $\mathbb{Z}$ ebenfalls wohldefiniert.

Bleibt also die Division, die ja bei ganzen Zahlen nicht immer so wirklich aufgeht und für die wir nun Brüche einführen müssen, also Zahlen der Form

$$x = \frac{p}{q}, \qquad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},$$

wobei wir ganz willkürlich das Vorzeichen in den Zähler schieben. Die Multiplikationsformel

$$\frac{p}{q}\frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{q'q}$$

überträgt nur die Multplikationsformel aus $\mathbb{Z}$ auf die Brüche, die Additionsformel

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$$

[6] Wie beispielsweise in den Peano–Axiomen.

hingegen ist eine Konsequenz aus dem Distributivgesetz, das ja immer noch gelten muss.

Aber das Fazit ist interessant: Wenn wir nur mit den beiden minimalen Bestandteilen des Körpers, 0 und 1, anfangen und dann nur dafür sorgen, daß alle „normalen“ Rechnoperationen auch ein Ergebnis haben, dann landet man bereits bei allen Brüchen und erhält RATIONALE ZAHLEN, die mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet werden.

Beispiel 2.1.5 (Endliche Körper)**.** In Beispiel 2.1.4 war immer von „normalen“ Rechenoperationen die Rede, also von einer Addition, die nicht die Eigenschaft $1+\cdots+1=0$ hat. Lässt man das zu, dann bekommt man auch ENDLICHE KÖRPER wie zum Beispiel $\mathbb{F}_2$, was die Menge $\{0,1\}$ mit der Rechenoperation $1+1=0$ darstellt. Das ist, wie man leicht nachrechnet, ein Körper.

Übung 2.1.2 Zeigen Sie, daß $\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ mit den Operationstafeln

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ein Körper ist. ◊

Noch einmal zurück zu den rationalen Zahlen, die auch aus einem anderen Grund ein Beispiel sind, aus dem man lernen kann. Jede rationale Zahl $x = p/q$ kann ja durch den ZÄHLER $p \in \mathbb{Z}$ und den NENNER $q \in \mathbb{N}$ dargestellt werden, also kann man Brüche ja als Paare von Zahlen darstellen.

Definition 2.1.6. Für Mengen X, Y bezeichnet das PRODUKT $X \times Y$ die Menge aller Paare aus X, Y, also

$$X \times Y := \left\{ (x,y) \,:\, x \in X, y \in Y \right\}. \tag{2.1.1}$$

Natürlich kann man auch Produkte höherer Ordnung bilden:

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \,:\, x_j \in X_j, j = 1,\dots,n \right\},$$

und ein Spezialfall ist $X^n = X \times \cdots \times X$.

Ist also $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$? Die Antwort ist nein, denn $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind in $\mathbb{Q}$ dieselbe Zahl, in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ aber unterschiedliche Paare. Wir brauchen also noch ein bisschen mehr.

Definition 2.1.7 (Äquivalenzen)**.**

1. Eine RELATION $\sim$ auf X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$ und man schreibt $x \sim x'$ wenn $(x, x') \in R$ ist.

2. Eine ÄQUIVALENZRELATION „$\equiv$“ auf X ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation, das heißt,

   a) $x \equiv x$ (REFLEXIV),

   b) $x \equiv y \Leftrightarrow y \equiv x$ (SYMMETRISCH),

   c) $x \equiv y,\ y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$ (TRANSITIV).

3. Zu jedem $x \in X$ definiert eine Äquivalenzrelation die ÄQUIVALENZKLASSE
$$[x] := \{x' \in X \,:\, x \equiv x'\}. \tag{2.1.2}$$
   x heißt REPRÄSENTANT der Äquivalenzklasse $[x]$.

Man kann sich nun fragen[7], inwieweit die Bedingungen an eine Äquivalenzklasse redundant sind. Immerhin legt das überzeugende Argument

$$x \equiv x' \qquad \Rightarrow \qquad x' \equiv x \qquad \Rightarrow \qquad x \equiv x$$

nahe, daß Symmetrie (erstes „$\Rightarrow$“) und Transitivität (zweites „$\Rightarrow$“) bereits die Reflexivität implizieren. Allerdings ist hier ein kleiner Denkfehler, denn es setzt voraus, daß es ein y gibt, so daß $x \equiv y$ erfüllt ist. Genaugenommen gilt also die folgende Aussage.

Lemma 2.1.8. *Ist $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation, dann gilt für jedes $x \in X$ entweder $x \not\sim x'$, $x' \in X$, oder $x \sim x$.*

Lemma 2.1.9. *Für $x, x' \in X$ gilt*

$$[x] = [x'] \qquad \Leftrightarrow \qquad x \equiv x'. \tag{2.1.3}$$

Beweis: Ist $x \equiv x'$, so gilt für jedes $y \in [x]$, daß

$$y \equiv x \equiv x' \qquad \Rightarrow \qquad y \equiv x' \qquad \Rightarrow \qquad y \in [x'],$$

also[8] $[x] \subseteq [x']$. Dasselbe Spiel mit vertauschten Rollen von x und x' liefert aber auch $[x'] \subseteq [x]$ und damit schließlich $[x] = [x']$.

Ist umgekehrt $y \in [x] = [x']$, dann bedeutet das nach (2.1.2)

$$x \equiv y \equiv x' \qquad \Rightarrow \qquad x \equiv x',$$

und der Beweis ist komplett. □

Beispiel 2.1.10.

[7] Eigentlich sollte man sowas immer tun.

[8] Mehr bekommen wir erst einmal nicht. Bei Beweisen muss man halt schon ein wenig aufpassen.

1. Die Äquivalenzrelation
$$x \equiv y \qquad \Leftrightarrow \qquad x - y \in 2\mathbb{Z}$$
teilt $\mathbb{Z}$ in gerade und ungerade Zahlen, denn $x \equiv y$ gilt ja genau dann, wenn die Differenz der beiden Zahlen gerade ist.

2. Die natürliche Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist natürlich
$$(p,q) \equiv (p',q') \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \qquad \Leftrightarrow \qquad pq' = p'q, \tag{2.1.4}$$
wobei die letzte Identität in (2.1.4) den Vorteil hat, daß man sie in $\mathbb{Z}$ verifizieren kann.

Satz 2.1.11 (Rationale Zahlen)**.** *Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich* (2.1.4) *in* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *bildet mit den Operationen*
$$[(p,q)] + [(p',q')] = \left[(pq' + p'q, qq')\right], \qquad [(p,q)] \cdot [(p',q')] = \left[(pp',qq')\right] \tag{2.1.5}$$
einen Körper mit $0 = [(0,1)]$ *und* $1 = [(1,1)]$*.*

Beweis: Man kann die gesammelten Körperaxiome aus Definition 2.1.1 einfach nachrechnen[9]. Beispielsweise egeben sich die Assoziativ- und Kommutativgesetze direkt aus (2.1.5) und ihren Varianten auf $\mathbb{Z}$; das Distributivgesetz erhält man aus
$$[(p,q)]\,([(a,b)] + [(c,d)]) = [(p,q)]\,[(ad+bc,bd)] = [(adp+bcp,bdq)]$$
und
$$\begin{aligned} [(p,q)]\,[(a,b)] + [(p,q)]\,[(c,d)] &= [(ap,bq)] + [(cp,dq)] = [(apdq+bcpq,bqdq)] \\ &= [(apd+bcp,bdq)] \end{aligned}$$
unter Verwendung von Übung 2.1.3.

Trotzdem ist noch etwas zu beweisen, nämlich daß die Rechenoperationen (2.1.5) unabhängig von dem gewählten Repräsentanten sind. Dazu sei $[(p,q)] = [(r,s)]$, also $ps = qr$, dann ist[10]
$$\begin{aligned} [(p,q)] + [(p',q')] &= \left[(pq' + p'q, qq')\right] = [(\underbrace{pq's}_{=qrq'} + p'qs, qq's)] \\ &= \left[(qrq' + p'qs, qq's)\right] = \left[(rq' + p's, q's)\right] \\ &= [(r,s)] + [(p',q')] \end{aligned}$$

[9] Übung! Hier hilft nur, es einmal selbst gemacht zu haben.

[10] Aus der Schule ist dieser Prozess als ERWEITERN bzw. KÜRZEN bekannt, siehe Übung 2.1.3.

und

$$\begin{aligned}[(p,q)]\cdot[(p',q')] &= [(pp',qq')] = [(pp's,qq's)] = [(qrp',qq's)] \\ &= [(rp',sq')] = [(r,s)]\cdot[(p',q')],\end{aligned}$$

und damit ist die Rechnung unabhängig vom gewählten Repräsentanten. □

Übung 2.1.3 Beweisen Sie die KÜRZUNGSREGEL $[(p,q)] = [(pr,qr)]$, $r \in \mathbb{N}$. ◊

Nun sind die rationalen Zahlen nach Art von Satz 2.1.11 nicht wirklich Brüche, sondern Äquivalenzklassen von Paaren in $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, die sich allerdings bezüglich der Rechenoperationen verhalten wie $\mathbb{Q}$ und die vermittels $\frac{p}{q} \simeq [(p,q)]$ zu jedem Bruch eine passende Äquivalenzklasse vorhalten und umgekehrt. Der vornehme Mathematiker sagt, die beiden Körper sind zwar nicht gleich, aber ISOMORPH zueinander und das ist nun wieder so gut wie gleich.

2.2 Ordnung

Als nächstes wollen wir ein wenig Ordnung in unsere Körper bringen[11].

Definition 2.2.1 (Ordnungen)**.** Eine Relation „<" auf X heißt

1. (strikte) PARTIELLE ORDNUNG, wenn sie TRANSITIV ist, d.h.:

   $$x<y, \quad y<z \qquad \Rightarrow \qquad x<z$$

   und für jede Wahl von $x,y\in X$ *höchstens* eine der drei Möglichkeiten $x<y$, $x=y$ oder $y<x$ erfüllt ist, siehe [15].

2. TOTALE ORDNUNG, wenn außerdem für alle $x,y\in X$ entweder $x<y$, $x=y$ oder $y<x$ gilt.

Die Notation $x>y$ bezeichne $y<x$.

Bemerkung 2.2.2 (Ordnungen)**.**

1. Man kann alternativ auch eine Relation „≤" über die Forderung der Transitivität und die beiden Bedingungen

   a) $x\le x$,

   b) $x\le y,\ y\le x \Rightarrow x=y$

   einführen, siehe [29]. Dann ist $x<y \Leftrightarrow x\le y,\ x\ne y$.

[11] Ein Schuft ist . . .

2. Kritisch oder interessant ist hierbei die Sache, daß $x \le y$ und $y \le x$ nur dann erfüllt sein darf, wenn $x = y$ ist, auch bei einer partiellen Ordnung. Sonst könnte man auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ die Ordnung

$$(x, y) \le (x', y') \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y \le x' + y'$$

einführen, die offensichtlich transitiv ist, aber eben einen ganzen Haufen „gleicher“ Elemente hat.

Beispiel 2.2.3 (Ordnungen)**.**

1. Eine partielle Ordnung auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ wäre $[(p, q)] < [(p', q')]$ falls $p < p'$ und $q < q'$. Dann sind beispielsweise die Elemente $[(1,2)]$ und $[(2,1)]$ nicht vergleichbar.

2. Eine totale Ordnung wäre hingegen durch

$$\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'} \qquad \Leftrightarrow \qquad pq' < p'q$$

definiert, wobei „<“ rechts die natürliche totale Ordnung auf $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Das ist die KANONISCHE ORDNUNG auf $\mathbb{Q}$.

Definition 2.2.4. Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt ANGEORDENTER KÖRPER oder GEORDNETER KÖRPER, wenn es eine TOTALE ORDNUNG „>“ auf $\mathbb{K}$ gibt, so daß[12]

$$x < x' \qquad \Rightarrow \qquad x + y < x' + y, \quad y \in \mathbb{K}, \tag{2.2.1}$$

und

$$x, y > 0 \qquad \Rightarrow \qquad xy > 0. \tag{2.2.2}$$

Als POSITIVE ELEMENTE[13] von $\mathbb{K}$ bezeichnen wir alle x mit $x > 0$ und schreiben $\mathbb{K}_+ := \{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$.

Als nächstes ein paar einfache Konsequenzen aus dieser Definition.

Proposition 2.2.5. *Für einen angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt:*

1. $x < x' \Leftrightarrow -x > -x'$.

2. *falls $x \neq 0$, so ist entweder $x > 0$ oder $-x > 0$.*

3. $1 > 0$.

---

[12]Auch hier fordert man wieder die VERTRÄGLICHKEIT von Ordnung und Rechenoperationen, also zwischen derOrdnung und der Struktur des Körpers.

[13]Da das Nullelement in jedem Körper eindeutig definiert ist, ist auch Positivität wohldefiniert.

Beweis: Für 1) nehmen wir an, daß $x < x'$ ist, verwenden (2.2.1) mit $y = -x - x'$ und erhalten

$$-x' = x + (-x - x') < x' + (-x - x') = -x$$

wie behauptet. Ist umgekehrt $-x' < -x$, dann wählen wir $y = x + x'$, was ganz analog

$$x = -x' + (x + x') < -x + (x + x') = x'$$

liefert.

Für 2) wählen wir $x \neq 0$. Dann ist nach den Ordnungsaxiomen entweder $x > 0$ oder $x < 0$. Wäre nun $x > 0$ und ebenfalls $-x > 0$, dann hätten wir nach (2.2.1) den Widerspruch $0 = x - x > 0$, also ist $-x < 0$. Ist hingegen $x < 0$, dann ist nach 1) $-x > -0 = 0$.

Um schließlich 3) nachzuweisen, nehmen wir an, daß $1 < 0$, also $-1 > 0$ wäre. Dann gilt, nach 2), aber für beliebiges $x > 0$, daß

$$0 > -x = (-1)x,$$

wäre, was im Widerspruch zu (2.2.2) steht. □

Bemerkung 2.2.6. Bei der Definition des angeordneten Körpers passiert etwas, das sehr typisch in der Mathematik ist: Wenn man zwei Konzepte, in diesem Fall Körper und totale Ordnung, zusammenbringt, dann muss man auch festlegen, wie die Rechenoperationen in der einen Struktur mit der anderen Struktur zusammenspielen, und das ist in unserem Fall die Forderungen (2.2.1) und (2.2.2).

Eine direkte Folgerung aus Proposition 2.2.5, 3) ist, daß angeordnete Körper recht groß sind.

Korollar 2.2.7. *Jeder angeordnete Körper $\mathbb{K}$ enthält $\mathbb{N}$ im Sinne der Einbettung*

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$$

und damit auch $\mathbb{Q}$.

Beweis: Da $1 > 0$ ist auch $n + 1 > n > 0$ und damit ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, wegen der additiven Abgeschlossenheit auch $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$ und wegen der Abgeschlossenheit unter Division auch $\mathbb{Q}$. □

Definition 2.2.8 (Archimedischer Körper)**.** Ein angeordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt ARCHIMEDISCHER KÖRPER, wenn es zu jedem $x, y \in \mathbb{K}$ mit $0 < x < y$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $nx > y$.

Proposition 2.2.9 (Archimedisches Prinzip)**.** *Ist $\mathbb{K}$ ein archimedischer Körper und sind $x, y \in \mathbb{K}_+$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $(n-1)x \leq y < nx$.*

Beweis: Da für $n' > n$

$$n'x = nx + \underbrace{(n'-n)}_{>0}\underbrace{x}_{>0} > nx,$$

ist die Folge der nx MONOTON STEIGEND, da $1 > 0$ ist, wie in Proposition 2.2.5 gezeigt. Nach Definition 2.2.8 gibt es nun (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$ falls $x < y$ ist, ist $x > y$, so tut es sogar $n = 1$. Da es nur endlich viele $\mathbb{N} \ni n' \le n$ gibt, kann auch nur endlich oft $n'x > y$ sein und wir wählen aus diesen endliche vielen Möglichkeiten das kleinste n', für das dann aber $(n'-1)x \le y$ gelten muss, denn sonst gäbe es ja noch ein kleineres n'. □

Proposition 2.2.10. *Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind ein archimedischer Körper.*

Beweis: Die Ordnungsrelation „$p/q < p'/q' \Leftrightarrow pq' < p'q$" haben wir ja schon in Beispiel 2.2.3 kennengelernt. Damit bildet $\mathbb{Q}$ einen geordneten Körper. Für $x = p/q < x' = p'/q'$ wählen wir nun n nur so, daß $npq' = pq + \cdots + pq > p'q$ ist, dann ist auch $nx > x'$. □

In dem Augenblick, wo man einen geordneten Körper hat, verfügt man über eine ganz besondere Funktion.

Definition 2.2.11. Auf einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ definiert man die BETRAGSFUNKTION

$$|x| := \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{K}. \tag{2.2.3}$$

Bemerkung 2.2.12. Die Betragsfunktion ist wohldefiniert, da das neutrale Element der Addition in einem Körper eindeutig bestimmt ist und da nur eine der drei Möglichkeiten $x < 0$, $x > 0$ oder $x = 0$ eintreten kann.

Satz 2.2.13 (DREIECKSUNGLEICHUNG)**.** *Ist $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, so gilt*

$$|x+y| \le |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{K}. \tag{2.2.4}$$

Beweis: Aus (2.2.3) folgt sofort, daß $\pm x \le |x|$ ist. Ist also $x + y \ge 0$, so ist

$$|x+y| = x + y \le |x| + |y|,$$

ist hingegen $x + y < 0$, dann ist

$$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \le |x| + |y|$$

und damit ist (2.2.4) auch schon bewiesen. □

Übung 2.2.1 Beweisen Sie die DREIECKSUNGLEICHUNG NACH UNTEN:

$$|x-y| \ge |x| - |y|, \qquad x, y \in \mathbb{K}. \tag{2.2.5}$$

♢

Definition 2.2.14 (Notation Ordnungen)**.** Von nun an schreiben wir $x < y$ wenn x STRIKT KLEINER ist als y, wenn also insbesondere $x \ne y$ gilt, und $x \le y$ für den Fall, der Gleichheit mit einschließt.

2.3 Abbildungen und Kardinalität

Wir beginnen mit einer „Metadefinition“.

Definition 2.3.1 (Abbildung)**.** Eine ABBILDUNG $f: X \to Y$ zwischen einem DEFINITIONSBEREICH X und einem BILDBEREICH Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

1. Eine Abbildung f heißt INJEKTIV, wenn zu jeder Wahl $x, x' \in X$, $x \neq x'$ auch $f(x) \neq f(x')$ gilt.
2. Eine Abbildung f heißt SURJEKTIV, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, so daß $f(x) = y$ ist.
3. Eine Abbildung f heißt BIJEKTIV, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Schließlich bezeichnen wir das BILD von $X' \subseteq X$ unter f mit

$$f(X') = \{f(x) : x \in X'\}. \qquad (2.3.1)$$

Bemerkung 2.3.2. Ob eine Abbildung injektiv oder surjektiv ist, hängt auch ganz massiv davon ab, zwischen welchen Mengen man sie betrachtet. So ist $f(x) = x^2$

1. $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ injektiv, aber nicht surjektiv,
2. $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ weder injektiv noch surjektiv,
3. $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ bijektiv,
4. $\mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ injektiv, aber nicht surjektiv[14],
5. $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bijektiv[15]

Es ist also eine Frage der Funktion *und* der Mengen.

Lemma 2.3.3. *Ist $f: X \to Y$ eine Bijektion, dann existiert die* UMKEHRABBILDUNG $f^{-1}: Y \to X$ *und ist ebenfalls bijektiv.*

Beweis: Zu jedem $y \in Y$ gibt es wegen der Surjektivität von f *mindestens* ein x mit $f(x) = y$ und wegen der Injektivität von f auch nur *höchstens* ein derartige x. Fazit: Es gibt *genau ein* $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also definieren wir die Umkehrabbildung f^{-1} als $f^{-1}(y) = x$, die per Definitionem[16]

$$f^{-1} \circ f(x) := f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

[14]Wie wir bald herausfinden werden.
[15]Allerdings müssen wir erst noch herausfinden, was dieses „$\mathbb{R}$“ denn nun wirklich ist.
[16]Apropopos „Definitionem“: Die Notation $f \circ g = f(g(\cdot))$ haben wir bei der Gelegenheit auch gleich eingeführt.

erfüllt.

Diese Abbildung ist injektiv, denn gäbe es y, y' mit $f^{-1}(y) = f^{-1}(y') =: x$, dann ist $y = f(x) = y'$, also $y = y'$. Sie ist surjektiv, da es ja zu jedem $x \in X$ den Punkt $y = f(x)$ gibt, so daß $f^{-1}(y) = x$ ist. □

Übung 2.3.1 Zeigen Sie: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X'$ Bijektionen, dann ist $g \circ f : X \to X'$ ebenfalls eine Bijektion und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

♢

Eine wichtige Aufgabe von Bijektionen ist die Definition eines konsisten Begriffs von „gleich groß" bei zwei unendlichen Mengen. Hat man eine ENDLICHE MENGE X vor sich, so kann man deren Elemente zählen und die KARDINALITÄT $\#X$ ist eine wohldefinierte *natürliche* Zahl[17] und zwei Mengen X, Y sind GLEICHGROSS, wenn $\#X = \#Y$ ist. Das heißt aber auch, daß wir eindeutige Paare zwischen X und Y bilden können, beispielsweise „erstes Element, zweites Element, usw." Das motiviert dann die folgende Definition.

Definition 2.3.4 (Gleiche Kardinalität & Abzählbarkeit)**.**

1. Wir sagen zwei Mengen X, Y haben dieselbe KARDINALITÄT bzw. nennen sie GLEICHGROSS, wenn es eine Bijektion f mit $f(X) = f(Y)$ gibt.

2. Eine Menge X heißt ABZÄHLBAR, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ gibt, die man dann auch als ABZÄHLUNG bezeichnet. Manchmal unterscheidet man zwischen abzählbar und ABZÄHLBAR UNENDLICH, letzteres bedeutet die Existenz einer Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und X.

Bei unendlichen Mengen ist die Vorstellung von „gleich" groß nicht immer vollkommen intuitiv.

Beispiel 2.3.5 (Abzählbare Mengen)**.**

1. Jede endliche Menge ist abzählbar.

2. Die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ sind beide abzählbar, also gleichgroß, obwohl $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0 = \{0\}$.

3. Die Mengen $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ und $\mathbb{N}/2 = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\}$ sind beide abzählbar, obwohl die eine halb so viele, die andere doppelt so viele Elemente hat wie $\mathbb{N}$. $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}/2 \setminus \mathbb{N}$ sind ebenfalls abzählbar.

4. $\mathbb{Z}$ als echte Obermenge von $\mathbb{N}$ ist ebenfalls abzählbar.

[17] Es gibt erst einmal keine halben Elemente einer Menge, obwohl auch derartige Konzepte nicht ganz unvorstellbar wären.

5. Schreibt man das in naiven Kardinalzahlen, so hieße das

$$\begin{aligned}\infty+1 &= \infty\\ \infty+\infty &= \infty\\ \infty-\infty &= 1,\infty,-\infty,\end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck natürlich Nonsens ist. Eine Operation wie $\infty-\infty$ ist einfach nicht sinnvoll zu definieren und deshalb auch nicht sinnvoll definiert.

Übung 2.3.2 Geben Sie eine Abzählung für $\mathbb{Z}$ an. $\diamondsuit$

Netter ist da da schon die folgende Beobachtung.

Satz 2.3.6 (Erstes Cantorsches Diagonalverfahren). *Seien X,Y abzählbare Mengen. Dann ist auch $X\times Y$ abzählbar.*

Beweis: Wir müssen eine Surjektion von $\mathbb{N}_0$ und $X\times Y$ konstruieren[18]. Dazu verwenden wir erst einmal Abzählungen $X=\{x(j) : j\in\mathbb{N}_0\}$, $Y=\{y(j) : j\in\mathbb{N}_0\}$, dann ist

$$X\times Y=\left\{\left(x(j),y(k)\right) : j,k\in\mathbb{N}_0\right\}.$$

Die Elemente von $X\times Y$ ordnen wir nach Diagonalen[19]

$$X\times Y\supset D_k:=\{\left(x(j),y(k-j)\right) : j=0,\dots,k\},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

So eine Diagonale hat $k+1$ Elemente, die ersten k Diagonalen haben daher[20] ingesamt

$$1+2+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Elemente. Ordnen wir also die Elemente von $X\times Y$ erst nach Diagonalen und dann innerhalb der Diagonalen, dann ist

$$(X\times Y)\left(\frac{k(k-1)}{2}+j\right):=\left(x(j),y(k-j)\right),\qquad j=0,\dots,k,\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

eine Abzählung. Sie ist eine Bijektion da jedes Paar $\left(x(j),y(k)\right)$ auf genau einer Diagonale liegt und da natürlich auch nur an genau einer Stelle. $\square$

---

[18] Da $\#\mathbb{N}_0=\#\mathbb{N}$ ist, gibt es eine Bijektion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ und eine surjektive Abbildung $g:\mathbb{N}\to X$. Dann ist aber nach Lemma 2.3.3 und Übung 2.3.1 $g\circ f^{-1}:\mathbb{N}_0\to X$ ebenfalls eine Surjektion und genau diese verwenden wir.

[19] Daher auch der Name.

[20] Das ist das Resultat, das dem „jungen Gauß" zugeschrieben wird und dessen Beweis so einfach ist, daß er sogar beinahe von einem Germanisten nachvollzogen werden kann, dessen Fähigkeit ansonsten eher im ebenso korrekten wie ermüdenden Gebrauch der indirekten Rede liegt, [17]. In Wirklichkeit war die Methode mit einem sehr schönen und einfachen geometrischen Beweis bereits bei den Rechenmeistern des 16. Jahrhunderts bekannt, siehe [1].

Satz 2.3.6 lässt sich in unserer naiven und immer noch unrichtigen Schreibweise als $\infty^2 = \infty$ schreiben. Und was für zwei Mengen geht, das geht auch für beliebig viele, also $\infty^k = \infty$.

Übung 2.3.3 Zeigen Sie: Sind $X_1, \dots, X_n$ abzählbar, dann ist auch $X_1 \times \cdots \times X_n$ abzählbar. $\diamondsuit$

Da wir $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ schreiben können, also als Produkt zweier abzählbarer Mengen, liefert uns Satz 2.3.6 auch das folgende Ergebnis.

Korollar 2.3.7. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Übung 2.3.4 Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar. $\diamondsuit$

Schön langsam stellt sich dann schon die Frage, ob es auch mehr als abzählbar gibt. Und auch hier können wir, im Vorgriff auf das nächste Kapitel, ein Beispiel angeben.

Satz 2.3.8. *Die Menge aller Funktionen*[21] $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis: Der Beweis basiert auf dem zweiten Cantorschen Diagonalverfahren und funktioniert per Widerspruch. Nehmen wir an, wir könnten alle binären Folgen abzählen, also als Funktionen $f_j : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ schreiben, so daß es für jedes $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ einen Index j mit $f = f_j$ gibt. Nun konstruieren wir ein neues f als „inverse Diagonale" dieser Folgen:

$$f(k) := 1 - f_k(k), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Da $f(k) \neq f_k(k)$ ist f von allen Folgen f_j verschieden und damit ist $f \notin \{f_j : j \in \mathbb{N}\}$, im Widerspruch zur Annahme, die Menge wäre abzählbar. $\square$

[21] So eine Funktion bezeichnet man auch als BINÄRE FOLGE.

Folgen und Reihen | 3

Heute haben wir die experimentelle und mathematische Naturwissenschaft und laufen nicht mehr Gefahr, der Mystik in die Arme zu fallen. Wir können uns aber neue Hilfsarbeiter für die Erkenntnis heranziehen.

(Kurd Laßwitz, *Aspira. Geschichte einer Wolke*)

In diesem Kapitel brauchen wir eigentlich nur einen angeordneten Körper $\mathbb{K}$, werden die Theorie aber auch gleich nutzen, um die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ „ordentlich“ zu definieren. Dazu brauchen wir aber erst einmal Terminologie und Konzepte der Folgen und Reihen. Von nun an ist also $\mathbb{K}$ immer ein geordneter Körper.

3.1 Folgen und Konvergenz

Definition 3.1.1 (Folge)**.** Eine FOLGE in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $a:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ oder $a:\mathbb{N}_0\to\mathbb{K}$, die normalerweise als $(a_n : n\in\mathbb{N}_{(0)})$ geschrieben wird[1]. Die Menge aller Folgen $\mathbb{N}_{(0)}\to\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\ell(\mathbb{N}_{(0)})$.

Bemerkung 3.1.2. Eine Notation, die man immer wieder findet, ist $Y^X := \{f : X\to Y\}$ für die Abbildungen von X nach Y. Sie begründet sich dadurch, daß man $X^2 = \{(x_1,x_2) : x_j \in X\}$ auch als Abbildungen von $\{1,2\}$ nach X auffassen kann.

Treibt man das weiter, so ist $2^X = \{0,1\}^X = \{Y : Y\subseteq X\}$, wobei man die Elemente $a(x)$ als Indikator dafür auffasst, ob x in der jeweiligen Teilmenge enthalten ist:

$$a(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\in Y.$$

Beispiel 3.1.3. Folgen können direkt definiert sein, beispielsweise

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

oder REKURSIV wir bei den FIBONACCIZAHLEN

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n\ge 2, \qquad a_1 = a_2 = 1.$$

[1] Eigentlich ist „$a(k)$“ fast die bessere Notation und wird in „richtiger“ Mathematik auch gerne verwendet, aber die Indexschreibweise a_k ist einfach etablierter und viel mehr Standard.

Und schon kommen wir zum zentralen Konzept des gesamten Kapitels und generell einem der wichtigsten Konzepte der gesamten Analysis.

Definition 3.1.4 (Konvergenz)**.** Eine Folge a heißt KONVERGENT mit GRENZWERT $a^* \in \mathbb{K}$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{K}_+$, also $\varepsilon > 0$, ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$|a_n - a^*| < \varepsilon, \qquad n \ge n_0. \tag{3.1.1}$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$a^* = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{3.1.2}$$

Eine Folge heißt DIVERGENT, wenn sie nicht konvergent ist.

Bemerkung 3.1.5 (Konvergenz)**.**

1. Zur Konvergenz einer Folge gehört per definitionem die Existenz des Grenzwerts in $\mathbb{K}$. Es wird sich herausstellen, daß das sehr wohl ein Problem sein kann und bei den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auch sein wird.

2. Wann immer ein Ausdruck der Form $\lim = \dots$ auftaucht, bedeutet das, daß dieser Grenzwert existiert, auch wenn es vielleicht nicht immer vorher explizit hingeschrieben wurde. Die einzige Ausnahme sind die eigentlich schlampigen und genaugenommen sogar unzulässinge Ausdrücke $\lim \cdots = \infty$ für eine DIVERGENTE FOLGE. Gebräuchlich ist diese Schreibweise aber trotzdem.

3. Der zentrale Aspekt an (3.1.1) ist, daß ε *klein* wird, bzw. beliebig klein gewählt werden. Das geht, weil in jedem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ die Menge $\{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$ kein kleinstes Element hat, da für jedes $x > 0$ nach Axiom (2.2.2) auch $\frac{1}{2}x > 0$ gilt[2] und dann wegen (2.2.1)

$$x = \frac{1}{2}x + \underbrace{\frac{1}{2}x}_{>0} > \frac{1}{2}x + 0 = \frac{1}{2}x$$

   erfüllt sein muss, zu jedem Element gibt es also ein kleineres, sogar mindestens abzählbar viele kleinere.

Übung 3.1.1 Zeigen Sie: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn

$$\#\{n : |a_n - a^*| \ge \varepsilon\} < \infty, \qquad \varepsilon > 0,$$

erfüllt ist. ◇

Als erstes sollten wir uns davon überzeugen, daß Definition 3.1.4 und insbesondere auch (3.1.2) überhaupt sinnvoll sind.

[2] Übung: Beweisen Sie die Ungleichung $\frac{1}{2} > 0$.

Satz 3.1.6 (Grenzwert)**.** *Der Grenzwert einer Folge ist, wenn er existiert, eindeutig.*

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe a^* und a' gegen die a konvergiert. Dann wählen wir $\varepsilon > 0$, wählen n_0 so, daß $|a_n - a^*| < \varepsilon$ und $|a_n - a'| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$ erfüllt ist und erhalten[3] für jedes $n \ge n_0$

$$|a^* - a'| = |a^* - a_n + a_n - a'| \le |a^* - a_n| + |a' - a_n| < 2\varepsilon.$$

Da das für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt sein muss, kann nur $|a^* - a'| = 0$, also $a^* = a'$ gelten. □

Definition 3.1.7 (Beschränktheit)**.** Eine Folge $a \in \ell(\mathbb{N})$ heißt NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn es ein $K \in \mathbb{K}$ gibt mit $K \le a_n$, $n \in \mathbb{N}$, NACH OBEN BESCHRÄNKT, wenn $a_n \le K$, $n \in \mathbb{N}$, und BESCHRÄNKT, wenn $|a_n| \le K$, $n \in \mathbb{N}$, ist.

Proposition 3.1.8. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, n_0 so, daß $|a_n - a^*| < \varepsilon$, $n \ge n_0$ gilt, und $M := \max\{a_n : n < n_0\}$. Dann ist

$$a_n \le \begin{cases} M, & n < n_0, \\ a^* + \varepsilon, & n \ge n_0, \end{cases} \le M + a^* + \varepsilon =: K.$$

Beschränktheit nach unten zeigt man analog. □

Proposition 3.1.9. *Sind $a, b \in \ell(\mathbb{N})$ konvergente Folgen, so sind auch $a + b = (a_n + b_n : n \in \mathbb{N})$ und $ab = (a_n b_n : n \in \mathbb{N})$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right). \tag{3.1.3}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und n_0 so gewählt, daß $|a_n - a^*| < \varepsilon$ und $|b_n - b^*| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Dann ist für $n \ge n_0$

$$\left|(a_n + b_n) - (a^* + b^*)\right| \le \underbrace{|a_n - a^*|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|b_n - b^*|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon,$$

ersetzen wir also ε durch $\varepsilon/2$, dann haben wir die Konvergenz auch ganz formal gezeigt. Recht analog erhalten wir auch

$$\left|a_n b_n - a^* b^*\right| = \left|(a_n - a^*) b_n + a^* (b_n - b^*)\right| \le \left|(a_n - a^*)\right| b_n + \left|(b_n - b^*)\right| a^*.$$

Da b eine konvergente Folge ist, ist b nach Proposition 3.1.8 beschränkt, sagen wir durch M und damit ist

$$\left|a_n b_n - a^* b^*\right| \le (M + a^*)\varepsilon$$

und damit konvergent. □

[3]Wir lernen hier eine der wichtigsten Beweistechniken der Analysis kennen: Null addieren und die Dreiecksungleichung anwenden.

Bemerkung 3.1.10. Es gibt bei solchen ε–Beweisen zwei Schulen. Die einen passen die Voraussetzungen so an, daß am Ende ein „$< \varepsilon$“ herauskommt, den anderen genügt es, zu zeigen, daß der Ausdruck durch $f(\varepsilon)$ beschränkt ist, wobei f eine Funktion mit $f(0) = 0$ ist. In diesem Skript wird das zweite Konzept verwendet werden, aus meiner Sicht ist es recht kindisch, die Voraussetzungen auf $\varepsilon/27$ oder was auch immer zu trimmen.

Übung 3.1.2 Modifizieren Sie den Beweis von Proposition 3.1.9 so, daß am Ende die Ausdrücke durch ε nach oben beschränkt sind. $\diamondsuit$

Korollar 3.1.11. *Sind a, b konvergente Folgen, dann sind auch $\lambda a = (\lambda a_n : n \in \mathbb{N})$ und $a - b$ konvergent.*

Beweis: Für λa setzen wir $b_n = \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, und verwenden die Produktregel aus Proposition 3.1.9. Der Spezialfall $\lambda = -1$ ergibt dann, daß auch $-b$ konvergent ist und nach der Summenformel schließlich auch $a - b = a + (-b)$. $\square$

Proposition 3.1.12. *Ist a eine konvergente Folge mit $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und $a^* \neq 0$, dann ist $\frac{1}{a}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a^*}$$

Beweis: Wir können[4] annehmen, daß $a^* > 0$ ist, denn sonst können wir a durch $-a$ ersetzen, was ja nach Korollar 3.1.11 nichts an der Konvergenz ändert.

Seien nun $0 < \varepsilon < \frac{a^*}{2}$ und n_0 wie gehabt, dann ist $a_n > a^* - \varepsilon > \frac{a^*}{2}$, $n \geq n_0$, und damit

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a^*} \right| = \frac{|a^* - a|}{|a_n a^*|} < \frac{|a^* - a|}{\frac{a^*}{2} a^*} < \frac{2}{(a^*)^2} \varepsilon,$$

und das ist nichts anderes als die Konvergenz. $\square$

Bemerkung 3.1.13. Die Forderung $a_n \neq 0$ würde, was den Grenzwert angehen, endlich viele Ausnahmen zulassen, es würde also auch reichen, $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ zu fordern. Die Forderung an den Grenzwert ist aber unbedingt nötig, und zwar nicht nur, weil dann das Beweisargument nicht mehr funktionieren würde: $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine konvergente Folge mit $a^* = 0$, aber die Folge $b_n = \frac{1}{a_n} = n$ ist nicht einmal beschränkt, also keinesfalls konvergent.

Definition 3.1.14. Für Folgen $a, b \in \ell(\mathbb{N})$ schreiben wir $a \leq b$ falls $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

[4] Wie gerne gesagt wird: OBdA, das heißt, *ohne Beschränkung der Allgemeinheit*, aber die exzessive Verwendung dieses Kürzels ist auf demselben Niveau wie $\frac{\varepsilon}{27}$.

Bemerkung 3.1.15. Die Ordnung aus Definition 3.1.14 ist lediglich eine PARTIELLE ORDNUNG auf der Menge aller Folgen; das bedeutet, daß für $a \neq b$ nicht unbedingt eine der beiden Optionen $a \leq b$ oder $a \geq b$ gelten muss.

Proposition 3.1.16. *Ist $a \leq b$ und sind a, b konvergent, dann ist auch*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis: Seien ε und n_0 wie gehabt, dann ist

$$b^* - a^* = b^* - b_n + \underbrace{b_n - a_n}_{\geq 0} + a_n - a^* \geq \underbrace{b^* - b_n}_{\geq -\varepsilon} + \underbrace{a_n - a^*}_{\geq -\varepsilon} \geq -2\varepsilon.$$

Da wir ε beliebig klein[5] wählen können, die Grenzewerte a^* und b^* aber von ε unabhängig sind, muss $b^* - a^* \geq 0$ sein, also $b^* \geq a^*$. □

Bemerkung 3.1.17. Das „≤" im Grenzwert ist nicht zu vermeiden, selbst wenn $a < b$ gilt, also $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ein einfaches Beispiel ist $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $b_n = 1 + \frac{1}{n}$, was trotz $a_n < b_n$ die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = \lim_{n\to\infty} b_n$$

liefert.

Eine doppelte Anwendung von Proposition 3.1.16 liefert das folgenden Einschlusskriterium, das in [25] mit einem lustigen Namen bedacht wurde.

Lemma 3.1.18 (Sandwich–Lemma)**.** *Ist $a \leq b \leq a'$, dann ist auch*[6]

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} a'_n.$$

Mit diesem Lemma kann man dann auch mal komplexere Folgen untersuchen.

Beispiel 3.1.19 ([25], S. 39)**.** Die Folge

$$b_n = \frac{n^2 + 3n}{n^3 + 2n^2 + 1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ist eine Nullfolge. Offensichtlich ist $b_n \geq 0$ und außerdem ergibt sich

$$a_n := 0 < b_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} < \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} =: a'_n$$

und Lemma 3.1.18 erledigt den Rest.

[5] Aber immer noch positiv!
[6] Mit Verweis auf Bemerkung 3.1.5!

3.2 Cauchy–Folgen und Vollständigkeit

Schön langsam sind wir so weit, daß wir uns eine Definition der reellen Zahlen geben können, auf denen später unsere Analysis im wesentlichen abspielen wird. Dazu ein wichtiges Konzept für konvergente Folgen.

Definition 3.2.1 (CAUCHY–FOLGE)**.** Eine Folge a heißt CAUCHY–FOLGE, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \qquad m, n \geq n_0. \tag{3.2.1}$$

Eine Cauchy–Folge ist ein Versuch einer Definition einer konvergenten Folge ohne die Existenz des Grenzwerts fordern zu müssen. Anschaulich heißt ja (3.2.1), daß ab einem gewissen Index die Folgenglieder beliebig dicht beisammen liegen. Und tatsächlich ist das auch eine *notwendige* Bedingung für Konvergenz.

Satz 3.2.2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge.*

Beweis: Seien ε und n_0 wie gehabt und $m, n \geq n_0$. Dann ist

$$|a_m - a_n| = |a_m - a^* + a^* - a_n| \leq |a_m - a^*| + |a_n - a^*| \leq 2\varepsilon$$

und damit ist a eine Cauchy–Folge. □

Die Umkehrung von Satz 3.2.2 stellt uns vor ein interessantes Problem. Dazu beschäftigen wir uns erst einmal mit einem Problem, das gar nichts mit konvergenten Folgen zu tun hat, nämlich der Berechnung der QUADRATWURZEL einer rationalen Zahl.

Geometrisch bedeutet $\sqrt{y}$ ja, daß man die Seitenlänge x eines Quadrats mit Flächeninhalt y bestimmt; andererseits kennen wir ein einfaches Objekt mit Flächeninhalt y, nämlich das Rechteck mit den Seitenlängen y und 1. Die Aufgabe ist also die Umwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat und das Problem ist so alt, daß bereits die Babylonier ein Verfahren zu seiner Lösung hatten, siehe [13]. Die Idee ist erstaunlich simpel: Das Rechteck mit Flächeninhalt y hat die Seitenlängen x und y/x. Ist es ein Quadrat, dann ist $x = \sqrt{y}$, ist es kein Quadrat, dann ist eine Seite zu lang und eine Seite zu kurz, die Wahrheit ist also in der Mitte. Damit ist dann aber der Mittelwert

$$x' = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$$

möglicherweise eine bessere Näherung für die Seitenlänge des Quadrats. Und das wiederholt man dann einfach ...

Definition 3.2.3 (Heron–Verfahren)**.** Das HERON–VERFAHREN berechnet ausgehend von $x_0 := y > 0$ die Folge

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.2}$$

Bemerkung 3.2.4. Ist $y \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $x_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.2.5. *Das Heron–Verfahren* (3.2.2) *konvergiert für jeden Startwert* $x_0 \in \mathbb{Q}$ *mit*

$$y < x_0^2 < 2y \tag{3.2.3}$$

gegen $\sqrt{y}$ *in dem Sinne*

$$x_n > 0 \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^2 = y. \tag{3.2.4}$$

Bemerkung 3.2.6.

1. Die Wahl des Startwerts x_0 in (3.2.3) erscheint ein wenig willkürlich und tatsächlich kann man zeigen, daß das Heron–Verfahren *für jeden* Startwert $x_0 \ge \sqrt{y}$ konvergiert. Dann braucht man aber ein bisschen mehr Theorie und Analysis. Wir werden aber im Beweis sehen, wo wir die Annahme brauchen.

2. Daß so ein Startwert existiert, ist einfach zu sehen: Es gibt p,q und r,s, so daß
$$\sqrt{y} < \frac{p}{q} =: z \qquad \text{und} \qquad x := \frac{r}{s} < \sqrt{2y}.$$
Wenn keiner der beiden Brüche schon die Forderung erfüllt, dann ist $\frac{r^2}{s^2} = x^2 < y < 2y < z^2 = \frac{p^2}{q^2}$. Dann wählen wir zwischen $x = \frac{r}{s}$ und $z = \frac{p}{q}$ die rationalen Punkte
$$\mathbb{Q} \ni \frac{j}{n}\frac{r}{s} + \frac{n-j}{n}\frac{p}{q}, \qquad j = 0,\dots,n,$$
die $\frac{1}{n}(\frac{p}{q} - \frac{r}{s})$ voneinander entfernt sind, und wenn man n so groß wird, daß diese Entfernungen $< \sqrt{y}$ sind, dann liegt einer dieser Punkte zwischen $\sqrt{y}$ und $\sqrt{2y}$ und ist der gewünschte Startwert.

Übung 3.2.1 Zeigen Sie: Zu zwei beliebigen Zahlen $0 < \alpha < \beta$ gibt es Zahlen $p,q \in \mathbb{N}$, so daß $\alpha q^2 < p^2 < \beta q^2$. $\diamondsuit$

Beweis von Satz 3.2.5: Wegen

$$\begin{aligned} x_n^2 - y &= \left(\frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right)\right)^2 - y = \frac{1}{4}x_{n-1}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{x_{n-1}\frac{y}{x_{n-1}}}_{=y} + \frac{1}{4}\frac{y^2}{x_{n-1}^2} - y \\ &= \frac{1}{4}x_{n-1}^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\frac{y^2}{x_{n-1}^2} = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}}\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

ist $x_n > \sqrt{y}$ wann immer $x_{n-1} \ne \sqrt{y}$, also per Induktion[7] und unter Verwendung der Tatsache, daß nach (3.2.3) ja $x_0^2 > y$ ist,

$$x_n > \sqrt{y}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.5}$$

[7] Wer genau aufgepasst hat, sieht natürlich, daß das nur funktioniert, wenn $y =: x_0 \ne \sqrt{y}$, also $y \ne 1$ ist. Aber mal ehrlich: Wer braucht ein Heronverfahren um die Quadratwurzel von 1 zu berechnen – dafür gibt es Tabellen und inzwischen sicherlich auch eine App.

Außerdem ist

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{y}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x_{n-1}} - x_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2x_{n-1}}(y - x_{n-1}^2) < 0 \end{aligned}$$

nach (3.2.5), also ist die Folge der x_n strikt monoton fallend und nach unten beschränkt:

$$\sqrt{y} < x_n < x_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.6}$$

Daraus folgt, daß

$$0 < \frac{x_n^2 - y}{y} < \frac{x_0^2 - y}{y} < \frac{2y - y}{y} = 1$$

sein muss. Das nutzen wir, um unsere Abschätzung von oben weiterzurechnen:

$$\begin{aligned} 0 &< x_n^2 - y = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{y}{x_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{4x_{n-1}^2}(x_{n-1}^2 - y)^2 \\ &\le \frac{1}{4y}(x_{n-1}^2 - y)^2 = \frac{x_{n-1}^2 - y}{4y}(x_{n-1}^2 - y) < \frac{1}{4}(x_{n-1}^2 - y) \\ &< \frac{1}{16}(x_{n-2}^2 - y) < \cdots < \frac{1}{4^n}(x_0^2 - y) < \frac{y}{4^n}, \end{aligned}$$

und das liefert sofort (3.2.4). □

Übung 3.2.2 Zeigen Sie: Die Folge x_n, die im Heron–Verfahren (3.2.2) generiert wird, ist eine Cauchy–Folge. ◇

Leider bedeutet aber (3.2.4) eben *nicht*, daß das Heron–Verfahren in *jedem* Körper $\mathbb{K}$ gegen $\sqrt{y}$ konvergiert, denn nach 3.1.4 muss der Grenzwert x^* der Folge zu $\mathbb{K}$ gehören. Und daß das nicht klappt, wussten schon die alten Griechen[8].

Satz 3.2.7 (Euklid)**.** $\sqrt{2} \not\in \mathbb{Q}$.

Beweis: Angenommen, es gäbe $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, mit $x^2 = 2$. Dann können wir unter allen äquivalenten Darstellungen von x diejenige mit dem kleinsten p wählen. Nun liefert die Annahme $x^2 = 2$, daß

$$p^2 = 2q^2 \qquad \Rightarrow \qquad p = 2p', \quad p' \in \mathbb{N},$$

und damit auch

$$2q^2 = (2p')^2 = 4p'^2 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 = 2p'^2 \qquad \Rightarrow \qquad q = 2q'.$$

[8]Und daß es gerade für $\sqrt{2}$ „schiefgeht", war für die sehr geometrisch denkenden Griechen ein doppelter Schock, denn $\sqrt{2}$ ist eine Zahl, die sehr wohl existiert: Es ist die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats, also eine Zahl, die man *geometrisch* aus ganzen Zahlen konstruieren kann.

Das heißt dann aber

$$x = \frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$$

und widerspricht der Minimalität von p. Damit kann es keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben. $\square$

Übung 3.2.3 Wie sieht es mit $\sqrt{5}$ aus? Für welche rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ ist $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$? $\diamondsuit$

Wir haben also ein Problem: Die Folge, die wir im Heron–Verfahren konstruiert haben, würde gerne konvergieren, tut es aber nicht, und zwar nur deswegen, weil mit $\mathbb{Q}$ etwas „faul" ist, nämlich daß der Grenzwert der Folge nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten ist. Das führt zur folgenden Definition.

Definition 3.2.8 (Vollständigkeit)**.** Der Körper $\mathbb{K}$ heißt VOLLSTÄNDIG, wenn jede Cauchy–Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergiert.

Bemerkung 3.2.9 (Vollständigkeit)**.**

1. Vollständigkeit ist im allgemeinen sehr schwer zu überprüfen, denn wie soll man feststellen ob der potentielle Grenzwert einer Folge nun in $\mathbb{K}$ liegt.

2. Eigentlich ist Vollständigkeit keine Frage des Körpers, sondern der METRIK. Eine Metrik[9] $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Abstrahierung des Abstandsbegriffs und durch die Axiome

$$d(x,y) = d(y,x) > 0, \quad x \neq y, \qquad d(x,x) = 0, \quad x \in X,$$

und[10]

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

definiert. Die KANONISCHE METRIK auf $\mathbb{K}$ ist gerade $d(x,y) = |x-y|$. Sobald man eine Metrik hat, kann man die gesamte Maschinerie von Konvergenz und Cauchy–Folgen einführen und verwenden.

3. Eine Menge X mit Metrik d heißt dann METRISCHER RAUM und ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy–Folge konvergiert.

Wenn also $\mathbb{Q}$ unvollständig ist, dann erweitern wir es halt so, daß es passt, also vollständig ist. Dazu bezeichnen wir generell mit $\mathscr{C}(\mathbb{K})$ die Menge aller Cauchy–Folgen mit Werten in $\mathbb{K}$ und führen die Äquivalenzrelation

$$a \equiv a' \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a-a')_n = 0, \qquad a, a' \in \mathscr{C}(\mathbb{K}), \tag{3.2.7}$$

ein. Die Definition (3.2.7) sorgt dafür, daß zwei Cauchy–Folgen auch dann „denselben" Grenzwert haben, wenn sie eigentlich in $\mathbb{K}$ keinen haben. Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, ist ja $0 \in \mathbb{K}$ per Definitionem erfüllt.

[9] Was auch immer die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ genau sind. Aber wir werden es ohnehin gleich erfahren.

[10] Ja, das ist eine Dreiecksungleichung!

Bemerkung 3.2.10. Hinter der Konstruktion in (3.2.7) steckt durchaus einiges, denn wenn die Grenzwerte nicht existieren, dann ist eine Aussage wie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n$$

sinnlos, da in ihr undefinierte Objekte verglichen werden, die Differenzfolge $a - a'$ hingegen ist ein wohldefiniertes Objekt in $\mathscr{C}(\mathbb{K})$ und das Element 0 also potentieller Grenzwert existiert in jedem Körper, sogar wenn er trivial ist.

Beispiel 3.2.11. Die Folgen x_n und $x'_n = \frac{n-1}{n} x_n$ nach (3.2.2) „konvergieren" beide gegen $\sqrt{y}$, was normalerweise eben nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. Die Differenz

$$x_n - x'_n = \frac{1}{n} x_n$$

ist hingegen eine brave Nullfolge.

Bilden wir nun auf $\mathscr{C}(\mathbb{K})$ Äquivalenzklassen bezüglich (3.2.7), also

$$[a] = \left\{ a' \in \mathscr{C}(\mathbb{K}) \,:\, \lim_{n\to\infty} (a_n - a'_n) = 0 \right\}, \tag{3.2.8}$$

dann bilden diese Äquivalenzklassen einen neuen Körper $\mathbb{K}^*$, in dem wir $\mathbb{K}$ als

$$\mathbb{K} \ni x \mapsto [a_x], \qquad (a_x)_n = x, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2.9}$$

wiederfinden können. (3.2.9) nennt man die KANONISCHE EINBETTUNG von $\mathbb{K}$ in seine (metrische) VERVOLLSTÄNDIGUNG $\mathbb{K}^*$.

Definition 3.2.12 (Relle Zahlen)**.** Die Vervollständigung $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ bezeichnet man als REELLE ZAHLEN.

Bemerkung 3.2.13.

1. Die Definition 3.2.12 der reellen Zahlen ist Resultat einer konsequenten Vervollständigung der natürlichen Zahlen[11]: Durch Vervollständigung bezüglich der Subtraktion entstand $\mathbb{Z}$, die Hinzunahme der Division lieferte $\mathbb{Q}$ und die metrische Vervollständigung letztendlich $\mathbb{R}$. Und zweimal haben wir hierbei das etwas abstrakte Konzept der ÄQUIVALENZKLASSE benötigt.

2. In vielen Lehrbüchern, z.B. [10], fordert man einfach Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ über das VOLLSTÄNDIGKEITSAXIOM, aber man kann es eben auch direkt machen.

3. Es gibt keinen „billigen" und gleichzeitig sauberen Zugang zu den reellen Zahlen, das Konzept ist nicht so ganz trivial. Man kann alternativ auch DEDEKINDSCHE SCHNITTE verwenden, siehe [15], aber die sind auch nicht einfacher.

[11]Um L. Kronecker (1823–1891) zu zitieren: *„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."*, siehe [26].

4. Wozu es führen kann, wenn man das „Kontinuum“ anzuwenden versucht ohne verstanden zu haben, was sich wirklich dahinter verbirgt, zeigt das Buch [28], das der Mathematik ideologische Unterdrückung des freien Denkens vorwirft, oder, wie es dort ausgedrückt wird, eine *Ideolügie*. Und das nur deswegen, weil der Autor nie kapiert hat, was reelle Zahlen eigentlich sind.

Die Definition der reellen Zahlen als (metrische) VERVOLLSTÄNDIGUNG von $\mathbb{Q}$ ist nett, aber wir müssen noch zeigen, daß wir so auch das Objekt generieren, mit dem wir arbeiten wollen. Das fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 3.2.14. *$\mathbb{R}$ aus Definition 3.2.12 ist ein vollständiger, angeordneter Körper.*

Wir haben drei Dinge nachzuweisen:

1. Körper,
2. angeordnet,
3. vollständig

und auch wenn alle drei Eigenschaften recht elementar zu erhalten sind, sind sie doch nicht ganz[12] offensichtlich.

Proposition 3.2.15. *$\mathbb{R}$ is ein Körper.*

Beweis: Dies ist am einfachsten. Man überlegt sich, daß zu zwei Cauchyfolgen a, b die Summe $a+b$ und das Produkt ab ebenfalls Cauchyfolgen sind: Es gibt zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante[13] n_0, so daß

$$\max(|a_n - a_m|, |b_n - b_m|) < \varepsilon, \qquad m, n \geq n_0$$

und dann ist auch

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < 2\varepsilon$$

und

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n(b_n - b_m) + (a_n - a_m) b_m| \leq (|a_n| + |b_m|)\,\varepsilon$$

und da Cauchyfolgen beschränkt sind, siehe Übung 3.2.4, sind beide ebenfalls Cauchyfolgen. Genauso können wir den Beweis von Proposition 3.1.12 auf Cauchyfolgen übertragen. Das liefert Rechenregeln für Cauchyfolgen und macht diese zu einem Körper. □

Übung 3.2.4 Zeigen Sie: Jede Cauchyfolge ist beschränkt. (Hinweis: Proposition 3.1.8) ♢

Um eine totale Ordnung und damit eine Betragsfunktion zu erhalten, übertragen wir als nächstes die Ordnung von $\mathbb{Q}$ auf Cauchyfolgen.

[12] Und schon gleich gar nicht in der Analysis I ...
[13] Erst mal gibt es eine Konstante für a und eine für b, davon nehmen wir die größere

Definition 3.2.16. Für Cauchyfolgen $a, b \in \mathscr{C}(\mathbb{K})$ schreiben wir $a > b$, wenn es $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$a_n > b_n + \varepsilon, \qquad n \geq n_0. \tag{3.2.10}$$

Analog ergibt sich die Definition von „<".

Proposition 3.2.17. *$\mathbb{R}$ ist geordnet.*

Beweis: Wir müssen zeigen, daß es sich um eine TOTALE ORDNUNG handelt. Dazu bemerken wir zuerst, daß

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \tag{3.2.11}$$

ja bedeutet, daß $[a] = [b]$ ist und somit die beiden Folgen dieselbe reelle Zahl bezeichnen. Ist (3.2.11) nicht erfüllt, dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine unendliche, monoton steigende Folge n_k von Indizes, so daß entweder

$$a_{n_k} - b_{n_k} > \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.2.12}$$

oder

$$b_{n_k} - a_{n_k} > \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Eine von diesen beiden Teilfolgen muss undendlich viele Elemente enthalten und aus Symmetriegründen reicht es, sich auf den ersten Fall, (3.2.12), zu beschränken. Da a, b Cauchyfolgen sind, gibt es einen Index n_0, so daß

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad m, n \geq n_0.$$

Wählen wir nun auch k so, daß $n_k > n_0$ ist, dann ist für $n > n_0$

$$a_n - b_n = \underbrace{a_n - a_{n_k}}_{>-\varepsilon/3} + \underbrace{a_{n_k} - b_{n_k}}_{>\varepsilon} + \underbrace{b_{n_k} - b_n}_{>-\varepsilon/3} > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} > \frac{\varepsilon}{3}$$

und damit is (3.2.10) mit $\frac{\varepsilon}{3}$ anstelle von ε erfüllt. Die restlichen Ordnungsaxiome folgen direkt aus den Ordnungseigenschaften von $\mathbb{Q}$. $\square$

Und zum Schluss die Beobachtung, daß die Vervollständigung zur Vollständigkeit führt.

Proposition 3.2.18. *$\mathbb{R}$ ist vollständig.*

Beweis: Sei $x = (x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also $x_n = [a^n]$, wobei jedes der[14] $a^n = (a_k^n : k \in \mathbb{N})$ selbst eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist. Das bedeutet, daß es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > 0$ gibt, so daß

$$\varepsilon > |x_m - x_n| = |[a^m] - [a^n]|, \qquad m, n \geq n_0, \tag{3.2.13}$$

[14]Das „^{n}" ist hier kein Exponent sondern ein oberer Index.

die Differenz der beiden Cauchyfolgen ist wieder eine Cauchyfolge, die für $k \to \infty$ durch ε beschränkt ist. Somit gibt es auch ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_k^m - a_k^n| < 2\varepsilon, \qquad m,n \ge n_0,\ k \ge k_0. \tag{3.2.14}$$

Jetzt diskretisieren wir ε und setzen $\varepsilon = 1/2p$, $p \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Indizes n_p, k_p mit $n_p \le n_{p+1}$ und $k_p \le k_{p+1}$ so daß

$$|a_k^m - a_k^n| < \frac{1}{p}, \qquad m,n \ge n_p,\ k \ge k_p, \qquad p \in \mathbb{N}, \tag{3.2.15}$$

und wir definieren $x^* = \left(x_j^* : j \in \mathbb{N}\right)$ durch[15]

$$x_j^* = a_{k_p}^{n_p}, \qquad j = k_p, \dots, k_{p+1} - 1, \qquad p \in \mathbb{N}_0,$$

so daß $x_{k_p}^* = a_{k_p}^{n_p}$. Für $m,n \ge k_p$ ist dann gemäß (3.2.15)

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{p},$$

also ist x^* eine Cauchyfolge und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt mit $p > \varepsilon^{-1}$ und $n \ge n_p$ daß

$$|(x_n)_k - (x^*)_k| = \left| a_k^n - a_k^{n_p} \right| < \frac{1}{p} < \varepsilon, \qquad k \ge k_p,$$

also $|x^* - x_n| < \varepsilon$, $n \ge n_p$, so daß x^* der Grenzwert der Folge x ist. □

Bemerkung 3.2.19. Der Beweis von Proposition 3.2.18 funktioniert ein wenig wie das Cantorsche Diagonalverfahren. Wenn wir die Folgen einfach in einer „Tabelle“ ubereinanderschreiben,

	1	2	3	$\dots$
1	a_1^1	a_2^1	a_3^1	$\dots$
2	a_2^1	a_2^2	a_3^2	$\dots$
3	a_3^1	a_2^3	a_3^3	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

dann sagt uns (3.2.14), daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ Indizes n_ϵ und k_ϵ gibt, so daß sich alle, mit „$\star$“ und „$*$“ gekennzeichneten, Elemente im unteren rechte Block der Tabelle

	1	$\dots$	k_ε	$k_\varepsilon + 1$	$\dots$
1	a_1^1	$\dots$	$a_{k_\varepsilon}^1$	$a_{k_\varepsilon+1}^1$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
n_ε	$a_1^{n_\varepsilon}$	$\dots$	$\star$	$*$	$\dots$
$n_\varepsilon + 1$	$a_1^{n_\varepsilon+1}$	$\dots$	$*$	$*$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

[15] Mit der Konvention $k_0 := 1$.

um höchstens ε im Absolutbetrag unterscheiden. Der Grenzwert x^* besteht dann im aus den mit $\star$ markierten Elementen, die allerdings hinreichend oft wiederholt werden. Und man nimmt nur die diskreten Werte $\frac{1}{p}$ für ε, um etwas abzählbares, also eine Folge zu erhalten.

Von nun an werden wir die reellen Zahlen fleißig verwenden und daher immer, wenn es nicht anders gesagt ist[16] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ setzen.

3.3 Teilfolgen und Häufungspunkte

Es gibt seltsame Folgen wie beispielsweise

$$a_n = (-1)^n, \qquad \text{d.h.,} \qquad a = (-1, 1, -1, 1, \dots),$$

die natürlich nicht konvergieren, aber zumindest aus zwei konvergenten Teilen zusammengesetzt sind.

Definition 3.3.1. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine STRENG MONOTONE ABBILDUNG: $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots$. Die TEILFOLGE a_σ von $a \in \ell(\mathbb{N})$ ist definiert als

$$(a_\sigma)_n = a_{\sigma(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mit $\sigma(n) = 2n$ ist in unserem Beispiel also $a_\sigma = (1, 1, \dots)$ und mit $\sigma(n) = 2n-1$ entsprechend $a_\sigma = (-1, -1, \dots)$, die Folge besteht also aus zwei konvergenten Teilfolgen. Und das ist kein Zufall, wie der folgende klassische Satz zeigt.

Satz 3.3.2 (Bolzano–Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge $a \in \ell(\mathbb{N})$ über $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Die Beschränktheit von a bedeutet, daß es $M > 0$ gibt, so daß $|a_n| \le M$ ist. Wir konstruieren nun eine INTERVALLSCHACHTELUNG, also eine Folge $I_k = [b_k, c_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$, von Intervallen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ mit der Eigenschaft, daß

$$|I_k| := c_k - b_k = 2^{1-k} M, \qquad \text{und} \qquad \#\{n : a_n \in I_k\} = \infty. \tag{3.3.1}$$

Wir beginnen mit $I_0 := [-M, M]$, für das (3.3.1) natürlich erfüllt ist. Nehmen wir nun an, wir hätten ein I_k konstruiert, das (3.3.1) erfüllt, dann wählen wir $x_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k + c_k)$ als Mittelpunkt von I_k. Da

$$I_k = [b_k, x_k] \cup [x_k, c_k]$$

unendlich viele Folgenglieder enthält, liegen in *mindestens* einem der beiden Intervalle $[b_k, x_k]$ oder $[x_k, c_k]$ ebenfalls unendlich viele Folgenglieder; dieses Intervall[17] nennen wir I_{k+1} uns es erfüllt aufgrund der Konstruktion

$$|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k| = 2^{1-(k+1)} M \qquad \text{und} \qquad \#\{n : a_n \in I_{k+1}\} = \infty,$$

[16] Und wir werden es nicht oft anders sagen!

[17] Und wenn wir die Wahl haben sollten, dann einfach eines von den beiden.

also (3.3.1) mit $k+1$ anstelle von k.

Nun brauchen wir nur noch die Funktion

$$\sigma(k) := \min\{n > \sigma(k-1) \,:\, a_n \in I_k\}, \qquad \sigma(0) := 0,$$

einzuführen, dann ist σ monoton steigend und definiert eine Teilfolge a_σ mit $(a_\sigma)_k \in I_k$. Für $n < n'$ ist dann $a_{\sigma(n')} \in I_{n'} \subset I_n$ und damit ist

$$|a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n')}| \le |I_n| = 2^{1-n} M, \qquad n \le n' \in \mathbb{N}.$$

Die Teilfolge a_σ ist also eine Cauchy–Folge und konvergiert weil $\mathbb{R}$ vollständig ist. □

Nachdem wir im Beweis Intervalle verwendet haben, definieren wir noch schnell, was wir eigentlich damit meinen.

Definition 3.3.3 (Intervalle)**.** Ein OFFENES INTERVALL (a,b) in einer angeordneten Menge X ist

$$(a,b) = \{x \in X : a < x < b\},$$

ein ABGESCHLOSSENES INTERVALL die Menge

$$[a,b] := \{x \in X : a \le x \le b\}$$

und als HALBOFFENES INTERVALL bezeichnet man

$$(a,b] := \{x \in X : a < x \le b\} \qquad \text{oder} \qquad [a,b) := \{x \in X : a \le x < b\}.$$

Alternativ könnte man auch $[a,b]$, $]a,b[$ usw. verwenden, aber die angelsächsische Schreibweise mit den runden Klammern ist international gebräuchlicher.

Definition 3.3.4 (Häufungspunkte)**.** Sei $a \in \ell(\mathbb{N})$ eine Folge.

1. Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt HÄUFUNGSPUNKT der Folge a, wenn es eine Teilfolge a_σ gibt mit
$$\lim_{n\to\infty} (a_\sigma)_n = x. \tag{3.3.2}$$
2. Der kleinste Häufungspunkt einer Folge heißt LIMES INFERIOR, der größte LIMES SUPERIOR und wir schreiben
$$x = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{bzw.} \qquad x = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Bemerkung 3.3.5 (Häufungspunkte)**.**

1. Eine Folge kann, wie unser Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt, komplett aus Häufungspunkten bestehen, die Häufungspunkte müssen aber nicht in der Folge auftauchen, wie $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$ zeigt, wo $|a_n| < 1$ gilt, aber
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

2. Eine Folge kann sogar abzählbar viele Häufungspunkte haben,

$$a = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$$

und diese Häufungspunkte können auch wieder Häufungspunkte haben:

$$a = (1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots).$$

Übung 3.3.1 Konstruieren Sie eine Folge in $\mathbb{Q}$, die *alle* rationalen Zahlen als Häufungspunkt hat. ♢

Proposition 3.3.6. *Jede Teilfolge a_σ einer konvergenten Folge ist ebenfalls konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis: Sei a^* der Grenzwert von a, $\varepsilon > 0$ und n_0 so, daß $|a_n - a^*| < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Da σ monoton ist, ist[18] $\sigma(n) \geq n \geq n_0$ und damit ist auch $|a_{\sigma(n)} - a^*| < \varepsilon$, $n \geq n_0$, was genau die Behauptung ist: a_σ konvergiert und hat denselben Grenzwert. □

Proposition 3.3.7. *Jede monoton steigende[19] und beschränkte Folge $a \in \ell(\mathbb{N})$ konvergiert.*

Beweis: Nach Satz 3.3.2 enthält a eine konvergente Teilfolge a_σ, und mit

$$a^* := \lim_{n\to\infty} (a_\sigma)_n$$

gilt $a^* \geq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, da die Folge monoton steigend ist[20]. Sei nun $\varepsilon > 0$ und n_0 so, daß

$$\varepsilon > |a^* - a_{\sigma(n)}| = a^* - a_{\sigma(n)}, \qquad n \geq n_0,$$

dann ist für jedes $n \geq \sigma(n_0)$

$$0 \leq a^* - a_n = \underbrace{a^* - a_{\sigma(n_0)}}_{<\varepsilon} + a_{\sigma(n_0)} - a_n < \varepsilon - (a_n - a_{\sigma(n_0)}),$$

also, da die Folge immer noch monoton steigend ist,

$$0 \leq a_n - a_{\sigma(n_0)} < \varepsilon.$$

Also ist auch a eine Cauchy–Folge und somit konvergent. □

[18] Und wer's nicht glaubt, der soll's beweisen.

[19] Das heißt $a_{n'} \geq a_n$ für $n' > n$.

[20] Wäre nämlich $a^* < a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$ für ein n, dann wäre ja auch $a^* < \lim a_n = a^*$ und das ist ein Widerspruch.

3.4 Reihen

Jetzt betrachten wir Folgen nicht mehr nur „für sich“, sondern summieren die Folgenglieder auf. Um uns nicht weiter mit (Un-) Vollständigkeit herumärgern zu müssen, betrachten wir weiterhin das Ganze nur noch in $\mathbb{R}$.

Definition 3.4.1 (Reihe)**.** Zu einer Folge $a \in \ell(\mathbb{N})$ definiert man die (unendliche) REIHE

$$\Sigma a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Die n–te PARTIALSUMME der Reihe ist

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.1}$$

Die Reihe heißt KONVERGENT, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert und hat den GRENZWERT

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{3.4.2}$$

Beispiel 3.4.2 (Beispiele für Reihen)**.** Klassische Reihen sind:

1. HARMONISCHE REIHE: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
2. GEOMETRISCHE REIHE: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $q > 0$.
3. ALTERNIERENDE REIHE: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Die Partialsummen der alternierenden Reihe sind $s_n = \frac{1}{2}((-1)^n - 1)$, also $-1, 0, -1, 0, \ldots$ und damit ist die Reihe also **nicht** konvergent. Trotzdem gibt es den schönen „Beweis“ von Abel[21], der den Grenzwert a nennt und dann auf

$$a = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = -1 - (-1 + 1 - 1 + \cdots) = -1 - a$$

und damit $a = -\frac{1}{2}$ kommt ...

Als nächstes ein Resultat, bei dem man sich leichter den Beweis als die Formel merken kann.

[21] Ja, von **dem** Nils Hendrik Abel.

Lemma 3.4.3 (Geometrische Summen). *Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \neq x \in \mathbb{R}$ ist*[22]

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{3.4.3}$$

Beweis: Aus der einfachen Rechnung

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k - x\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\ &= 1-x^{n+1},\end{aligned}$$

folgt sofort die Behauptung, wenn man durch $1-x$ dividiert. □

Satz 3.4.4 (Geometrische Reihe). *Für $q<1$ konvergiert die geometrische Reihe mit Grenzwert $(1-q)^{-1}$, für $q \geq 1$ divergiert sie.*

Beweis: Für $q \neq 1$ haben die Partialsummen den Wert

$$s_n = (1-q)^{-1}\left(1-q^{n+1}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

und da $q^n \to 0$ für $q<1$ und $q^n \to \infty$ für $q>1$, wenn $n \to \infty$ wächst, ist das Konvergenz- und Divergenzverhalten für $q \neq 1$ auch schon geklärt. Für $q=1$ ist aber natürlich

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

was ebenfalls gegen ∞ divergiert. □

Satz 3.4.5 (Allgemeines CAUCHY–KRITERIUM für Reihen). *Die Reihe zu einer Folge $a \in \ell(\mathbb{N}_0)$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n_0 \geq 0$ gibt, so daß*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon, \qquad m,n \geq n_0. \tag{3.4.4}$$

Beweis: Da für die Partialsummen

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

gilt, heißt (3.4.4) nichts anderes als daß $s = (s_n : n \in \mathbb{N}_0)$ eine CAUCHY-FOLGE ist und da wir uns nun in dem vollständigen Körper $\mathbb{R}$ bewegen, ist das äquivalent zur Konvergenz von s. □

Satz 3.4.6 (Notwendige Bedingung). *Konvergiert die Reihe Σa zur Folge $a \in \ell(\mathbb{N})$ so ist a eine* NULLFOLGE, *das heißt,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.4.5}$$

[22] Aus ästhetischen Gründen ist es auch bei Reihen manchmal besser, die Summation mit Null beginnen zu lassen. Aber nach wie vor sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ doch im wesentlichen dasselbe.

Beweis: Konvergiert die Reihe, so gibt es nach (3.4.4) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß mit $m = n$ für jedes $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| = |a_n| = |a_n - 0|$$

erfüllt ist, was nichts anderes heißt, als daß a eine Nullfolge ist. □

Proposition 3.4.7. *Sei $0 \leq a \in \ell(\mathbb{N})$, d.h., $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert Σa dann und nur dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist, also $s \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Ist $a \geq 0$, dann gilt für $n \geq m$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \overbrace{a_k}^{\geq 0}}_{\geq 0} \geq s_m,$$

und daher ist s eine monoton steigende Folge. Ist s unbeschränkt, dann konvergiert die Folge nicht, ist s beschränkt, so konvergiert sie nach Proposition 3.3.7. Da Konvergenz der Reihe *per definitionem* nichts anderes ist als Konvergenz der Partialsummen, folgt damit die Behauptung. □

Satz 3.4.8 (Harmonische Reihe)**.** *Die* HARMONISCHE REIHE *divergiert.*

Beweis: Der Beweis ist ein bisschen trickreicher, aber interessant. Wir wählen $1 \neq p \in \mathbb{N}$ und betrachten die Teilfolge

$$s_n' = s_{p^n} = \sum_{k=1}^{p^n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \sum_{k=p+1}^{p^2} \frac{1}{k} + \cdots + \sum_{k=p^{n-1}+1}^{p^n} \frac{1}{k}. \tag{3.4.6}$$

Ein typischer Summand,

$$\sum_{k=p^{j-1}+1}^{p^j} \frac{1}{k}, \tag{3.4.7}$$

enthält $p^j - p^{j-1} = p^{j-1}(p-1)$ Summanden, die alle größer oder gleich dem letzten Term, $1/p^j$, sind. Somit ist

$$\sum_{k=p^{j-1}+1}^{p^j} \frac{1}{k} > \sum_{k=p^{j-1}+1}^{p^j} p^{-j} = p^{j-1}(p-1)p^{-j} = \frac{p-1}{p}$$

und daher

$$s_n' > n\,\frac{p-1}{p}.$$

Damit ist die[23] Folge der Partialsummen unbeschränkt und nach Proposition 3.4.7 kann die Reihe damit nicht konvergieren. □

[23]Im übrigen auch noch monoton steigende.

Die harmonische Reihe ist, obwohl sie divergent ist, dennoch von großer Wichtigkeit und taucht in vielen Teilgebieten der Mathematik auf, denn sie ist eine Reihe, die „gerade so“ divergiert.

Satz 3.4.9. *Für jedes $\alpha > 1$ konvergiert die unendliche Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Beweis: Der Beweis verwendet wieder die Zerlegung (3.4.6) der besonderen Partialsummen s'_n und schätzt wieder den typischen Summanden (3.4.7) ab, diesmal aber nach oben. Dazu verwenden wir den größten Summanden in (3.4.7), also $(p^{j-1}+1)^{-\alpha} \le (p^{j-1})^{-\alpha}$ und erhalten

$$\sum_{k=p^{j-1}+1}^{p^j} \frac{1}{k^\alpha} < p^{j-1}(p-1)\, p^{-\alpha(j-1)} = (p-1)(p^{1-\alpha})^{j-1}. \tag{3.4.8}$$

Da $\alpha > 1$ und $p \ge 2$ eine natürliche Zahl ist, ist $q := p^{1-\alpha} < 1$. Setzen wir nun (3.4.8) in (3.4.6) ein, dann ist

$$s'_n < \sum_{j=1}^{n} (p-1)(p^{1-\alpha})^{j-1} = (p-1) \sum_{j=0}^{n-1} q^j = (p-1)\frac{1-q^n}{1-q} \le \frac{p-1}{1-q} =: K,$$

also $s' \le K$. Da es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p^k \ge n$ gibt, ist damit auch

$$s_n \le s'_k \le K, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und die Folge der Partialsummen ist beschränkt. Nach Proposition 3.4.7 konvergiert damit die Reihe. □

3.5 Geometrische Reihen und Zahlen

Die geometrische Reihe hat den unmittelbaren Nutzen, uns eine weitere Definition des verwendeten Zahlensystems der reellen Zahlen zu geben. Dazu betrachten wir zuerst das STELLENWERTSYSTEM[24], das eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezüglich einer BASIS $2 \le B \in \mathbb{N}$ als

$$n = \sum_{j=0}^{k} z_j B^j, \qquad z_j \in \mathbb{Z}_B := \{0, \dots, B-1\}, \tag{3.5.1}$$

schreibt.

Übung 3.5.1 Zeigen Sie, daß die Darstellung aus (3.5.1) eindeutig ist. ◊

[24] Eine der ganz großen Errungenschaften der Menschheit, die es ermöglicht, mit Zahlen zu *rechnen* und die nach dem Fehltritt mit den römischen Zahlen erst mit Leonardo da Pisa alias *Fibonacci* nach Europa kam, siehe [24].

Wir interessieren uns hier jetzt aber für die NACHKOMMSTELLEN und betrachten daher Zahlen der Form

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} z_j B^{-j}, \qquad z_j \in \mathbb{Z}_B. \tag{3.5.2}$$

Lemma 3.5.1. *Die Reihe in* (3.5.2) *konvergiert für jede Wahl von* $z_j \in \mathbb{Z}_B$ *und ist* ≤ 1.

Beweis: Da alle Summanden positiv sind, reicht es nach Proposition 3.4.7 wieder, die Beschränktheit zu beweisen. Das ist aber einfach:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^{n} z_j B^{-j} \leq \sum_{j=1}^{n} (B-1)\, B^{-j} = B^{-1}(B-1) \sum_{j=0}^{n-1} B^{-j} = B^{-1}(B-1)\frac{1-B^{-n}}{1-B^{-1}} \\ &= 1 - B^{-n} \leq 1. \end{aligned}$$

Sind alle $z_j = B-1$, dann gilt in der ersten Abschätzung Gleichheit und der Grenzwert der Folge ist 1. Das ist nichts anderes als das gute alte $0.\overline{9} = 1$. □

Definition 3.5.2. Die durch die ZIFFERNFOLGE z dargestellte Zahl x ist definiert als der GRENZWERT der Reihe

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} z_j B^{-j}. \tag{3.5.3}$$

Die Ziffernfolge bezeichnet man als B–ADISCHE DARSTELLUNG von x.

Nach Definition liefert jede solche Reihe eine reelle Zahl, aber ist die Abbildung $\mathbb{Z}_B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mit $z \mapsto \sum z_j B^{-j}$ auch surjektiv, also lässt sich auch wirklich *jede* reelle Zahl so beschreiben. Die Antwort und ein bisschen mehr Information fassen wir im nächsten Satz zusammen.

Satz 3.5.3 (Unendliche B–adische Brüche)**.**

1. *Zu jeder reellen Zahl* x *mit* $0 \leq x \leq 1$ *gibt es Ziffern* $z_j \in \mathbb{Z}_B$, $j \in \mathbb{N}$, *so daß* (3.5.3) *erfüllt ist.*

2. *Eine Zahl* x *ist genau dann rational, wenn die Darstellung ab einem gewissen Index* PERIODISCH *ist, das heißt, wenn es* $n, k \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $z_{m+k} = z_m$, $m \geq n$ *gilt*[25].

3. $\mathbb{R}$ *ist* ÜBERABZÄHLBAR.

[25] Das sind die Zahlen von der Form $.12\overline{345}$, die man aus der Schule kennt. Hier ist übrigens $n = k = 3$.

Beweis: Indem wir zuerst den ganzzahligen Anteil abziehen, können wir uns für den Beweis auf den Fall beschränken, daß $0 \le x \le 1$ ist[26].

Für 1) konstruieren wir nun eine Ziffernfolge, die x beschreibt. Dazu erinnern wir uns, daß eine reelle Zahl durch eine CAUCHYFOLGE a von rationalen Zahlen dargestellt ist. Zur Konstruktion setzen wir $a^0 := a$ und unterteilen das Intervall $[0,1]$ in

$$[0,1] := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_B} \left[\frac{j}{B}, \frac{j+1}{B} \right] = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_B} I_j$$

Das sind endlich viele Intervalle, in *mindestens* einem von diesen Intervallen, sagen wir I_k, $k \in \mathbb{Z}_B$, müssen also unendlich viele Folgenglieder von a^0 liegen, die eine Teilfolge a^1 von rationalen Zahlen bilden, die nach Proposition 3.3.6 ebenfalls gegen x konvergiert. Nun setzen wir noch $z_1 := k$ und haben damit folgendes erreicht:

$$\left| \sum_{j=1}^{1} z_j B^{-j} - a_k^1 \right| \le B^{-1}, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} a_k^1 = x. \tag{3.5.4}$$

Das ist der Fall $n = 1$ der Aussage

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j B^{-j} - a_k^n \right| \le B^{-n}, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad \text{und} \qquad \lim_{k \to \infty} a_k^n = x, \tag{3.5.5}$$

die wir nun per Induktion beweisen wollen. Angenommen, (3.5.5) gilt für ein $n \ge 1$, dann setzen wir

$$x_n := \sum_{j=1}^{n} z_j B^{-j}$$

und zerlegen das Intervall $[x_n, x_n + B^{-n}]$ wieder in

$$\left[x_n, x_n + B^{-n} \right] = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_B} \left[x_n + \frac{j}{B^{n+1}}, x_n + \frac{j+1}{B^{n+1}} \right] =: \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_B} I_j,$$

und wieder enthält eines der Intervalle, sagen wir I_k, unendlich viele Folgenglieder von a^n. Wir setzen $z_{n+1} := k$, nennen diese Teilfolge a^{n+1} und schon haben wir den Induktionsschritt für (3.5.5) durchgeführt. Sei nun wieder $\varepsilon > 0$, und n_0 so, daß $|a_k - x| < \varepsilon$ für $k \ge n_0$, dann ist auch[27] $|a_k^n - x| < \varepsilon$ für jedes n und $k \ge n_0$. Damit ist

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j B^{-j} - x \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} z_j B^{-j} - a_k^n + a_k^n - x \right| \le B^{-n} + \varepsilon$$

[26] Für ursprünglich ganzzahliges x haben wir also nun zwei Möglichkeiten, aber lieber zwei als keine.

[27] Es sind ja *Teilfolgen*, siehe den Beweis von Proposition 3.3.6.

und wenn wir n_1 so groß wählen, daß $B^{-n} < \varepsilon$ für alle $n \ge n_1$ erfüllt ist, dann ist $|s_n - x| < 2\varepsilon$, die Reihe konvergiert also gegen x.

Um 2) zu beweisen, beginnen wir mit „⇒“ und nehmen an, daß $x = p/q$ eine rationale Zahl mit $p \le q$ ist. Die Bestimmung der B–adischen Entwicklung lernt man schon in der Schule: Man setzt $r_0 = p$ und bestimmt dann die Ziffern durch DIVISION MIT REST via

$$B\, r_{j-1} = z_j\, q + r_j, \qquad r_j \in \mathbb{Z}_q, \quad z_j \in \mathbb{Z}_B, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{3.5.6}$$

Nun gibt es aber nur endlich viele mögliche Divisionsrest r_j, so daß es irgendwann zu ersten Mal zu einer Wiederholung kommen muss: $r_{n+k} = r_n$, wobei wir n und k so wählen können, daß $n+k$ *minimal* ist[28]. Dann ist aber in (3.5.6) auch $r_{n+k+1} = r_{n+1}$ und so weiter, die Entwicklung ist also periodisch. Für die Umkehrung „⇐“ betrachten wir eine periodische Reihe

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} z_j B^{-j} &= \sum_{j=1}^{n-1} z_j B^{-j} + \sum_{j=n}^{n+k-1} z_j B^{-j} + \sum_{j=n+k}^{n+2k-1} z_j B^{-j} + \cdots \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} z_j B^{-j} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=n+\ell k}^{n+(\ell+1)k-1} z_j B^{-j} = \sum_{j=1}^{n-1} z_j B^{-j} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{z_{n+\ell k+j}}_{=z_{n+j}} B^{-(n+\ell k+j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} z_j B^{-j} + \sum_{j=0}^{k-1} z_{n+j} B^{-(n+j)} \sum_{\ell=0}^{\infty} B^{-\ell k} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_j}{B^j} + \frac{B^k}{B^k - 1} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{z_j}{B^j},
\end{aligned}$$

und da das eine endliche Summe von Brüchen ist, ist das Ergebnis ebenfalls ein Bruch, also rational.

3) ist nochmals das zweite Cantorsche Diagonalverfahren: Gäbe es eine Abzählung x_k, $k \in \mathbb{N}$, der reellen Zahlen, dann stellt man jede dieser Zahlen als binäre Folgen dar und geht vor wie in Satz 2.3.8, um eine neue reelle Zahl zu erhalten, die nicht in der alten Aufzählung liegt. □

Beispiel 3.5.4 (Zenos Paradoxon)**.** Achilles, der schnellste Mensch seiner Zeit[29] wird von einer Schildkröte zum Wettlauf über 100m herausgefordert. Achill erreicht 10m/s[30], die Schildkröte 1m/s. Sie erhält einen Vorsprung von 10m. Zeno[31] behauptet nun, daß Achille die Schildkröte nie einholt, und zwar mit folgendem Argument: Zu dem Zeitpunkt (z.B. 1s nach dem Start), zu dem Achilles den Punkt erreicht, an dem sich die Schildkröte befindet, ist diese schon ein Stück weitergekrochen, Achilles muss also noch ein Stück weiter, um sie einzuholen, aber da ist die

[28] Wir interessieren uns also dafür, wann sich so ein Rest *zum ersten Mal* wiederholt.

[29] Siehe [16] oder auch, da leichter zu lesen, [23, 23. Gesang, Vers 555].

[30] Er läuft also die 100m, ohne Spikes, Steroide und Nandrolon in beachtlichen 10 Sekunden. Für's Doping waren seinerzeit die Götter zuständig, siehe [23, G. 23, V. 768–776].

[31] Zeno von Elea, 5. Jhdt. vor Christus, Verfasser von Paradoxien, die nachzuweisen suchten, daß es Bewegung eigentlich nicht gibt.

Schildkröte auch schon wieder weg (nämlich 0.1m) und so weiter. Mit anderen Worten: Zeno stellt fest, daß Achilles zu den Zeitpunkten

$$t_n = \sum_{j=0}^{n-1} 10^{-j}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

die Schildkröte fast, aber nicht ganz, eingeholt hat, was den endlichen B–adischen Entwicklungen $1.1\dots1$ entspricht. Aber wann holt Achilles denn nun die Schildkröte ein? Nach t Sekunden hat Achilles ja $10t$ Meter zurückgelegt, die Schildkröte hingegen $10+t$, der unerreichbare Zeitpunkt errechnet sich also also als

$$10t = 10+t \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{10}{9} = 1.\overline{1} = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Mit anderen Worten: Das Zenosche Paradoxon ist nichts anderes als die Diskrepanz zwischen Partialsummen und Grenzwert und die dargstellte Zahl ist eben *nicht* irgendeine Partialsumme, sondern der Grenzwert der Reihe.

Beispiel 3.5.5 (Zahlen am Computer)**.** Ein interessantes Phänomen bei der Computerbenutzung ist die Tatsache, daß man bei der Eingabe der Zahl `0.1` bereits einen Fehler macht. Computer stellen Zahlen BINÄR, also zur Basis 2, dar und bezüglich dieser Basis hat $1/10$ eine echt *unendlich periodische* Darstellung[32]. Der Computer hat aber nur endlich viele Ziffern, muss also abschneiden oder runden und je nachdem, wie das passiert, kann die Operation `10 * 0.1` den Wert `1` liefern oder nicht.

3.6 Konvergenzkriterien für Reihen

Aus den Rechenregeln für Folgen folgt mittels der Betrachtung der Partialsummenfolgen sofort auch die Analogie für Reihen.

Korollar 3.6.1 (Rechenregeln für Reihen)**.** *Sind Σa und Σb konvergente Reihen, dann konvergieren auch $\Sigma(a \pm b)$ und $\Sigma\lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Grenzwerte verhalten sich entsprechend.*

Als nächstes betreiben wir noch ein wenig Konvergenztheorie für Reihen, bei denen, wie uns ja bereits das Abelsche Beispiel zeigt, nicht alles so ganz einfach ist, wie es auf den ersten Blick scheint.

Satz 3.6.2 (Leibniz–Kriterium)**.** *Ist $a \ge 0$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die* ALTERNIERENDE REIHE

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

[32] So wie $1/9 = .\overline{1}$ im gebräuchlichen DEZIMALSYSTEM.

Beweis: Wir betrachten die Partialsummen s_{2n}, $n \in \mathbb{N}$, und stellen fest, daß

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = \underbrace{a_{2n+2}}_{\le a_{2n+1}} - a_{2n+1} \le 0$$

und analog

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k = \underbrace{-a_{2n+1}}_{\ge -a_{2n}} + a_{2n} \ge 0,$$

sowie

$$s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad s_{2n+1} \le s_{2n}.$$

Damit ist s_{2n} eine monton fallende Teilfolge, die nach unten durch s_1 beschränkt ist und s_{2n+1} eine monoton steigende Teilfolge, die nach oben durch s_2 beschränkt ist. Damit konvergieren beide Teilfolgen nach Proposition 3.3.7 und die Grenzwerte müssen dieselben sein, da

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = -\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$

und a eine Nullfolge ist. □

Korollar 3.6.3. *Die* ALTERNIERENDE HARMONISCHE REIHE

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

konvergiert.

Satz 3.6.4 (Cauchyscher Verdichtungssatz)**.** *Ist $a \ge 0$ und monoton fallend, dann konvergiert Σa genau dann, wenn die* VERDICHTETE REIHE

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

konvergiert.

Übung 3.6.1 Beweisen Sie den Cauchyschen Verdichtungssatz. **Hinweis:** Sehen Sie sich die Beweise aus Satz 3.4.8 und 3.4.9 noch einmal genau an. Kann man den Verdichtungssatz verallgemeinern? ◊

Richtig „brave" Reihen konvergieren aber nicht nur, sondern haben noch mehr zu bieten.

Definition 3.6.5 (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe Σa heißt ABSOLUT KONVERGENT, wenn die Reihe

$$\Sigma|a| := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Proposition 3.6.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert, die Umkehrung gilt nicht.*

Beweis: Ist Σa absolut konvergent, dann sagt das Cauchy–Kriterium aus Satz 3.4.5, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n_0 \le m \le n$

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k|$$

ist und dank der Dreiecksungleichung ist dann auch für dieselben ε, n_0 und m, n

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \le \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

und nach Satz 3.4.5 konvergiert damit auch Σa. Daß die Umkehrung nicht gilt, zeigt die harmonische Reihe. □

Satz 3.6.7 (Quotientenkriterium)**.** *Ist $a \in \ell(\mathbb{N})$ eine Folge für die es $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\theta < 1$ gibt, so daß*[33]

$$a_n \ne 0, \qquad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \le \theta, \qquad n \ge n_0, \tag{3.6.1}$$

erfüllt ist, dann konvergiert die Reihe Σa absolut.

Beweis: Für $n \ge n_0$ folgt aus (3.6.1), daß

$$|a_n| \le \theta |a_{n-1}| \le \theta^2 |a_{n-2}| \le \cdots \le \theta^{n-n_0} |a_{n_0}|$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n_0-1} |a_k| + \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| &=: s'_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} \theta^{k-n_0} |a_{n_0}| \\ = \quad s'_{n_0-1} + |a_{n_0}| \sum_{k=0}^{n-n_0} \theta^k &\le s'_{n_0-1} + |a_{n_0}| \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k = s'_{n_0-1} + \frac{|a_{n_0}|}{1-\theta}, \end{aligned}$$

so daß die Folge der Partialsummen beschränkt ist und damit $\Sigma |a|$ konvergiert. □

Beispiel 3.6.8.

1. Die Reihe $\sum 2^{-n} n^2$ konvergiert, denn es ist

$$\frac{2^{-n-1}(n+1)^2}{2^{-n} n^2} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{n^2} < \frac{8}{9}$$

   falls $n \ge 3$.

[33] Man beachte, daß die erste Bedingung in (3.6.1) keine wirkliche Einschränkung ist, denn Folgenglieder mit $a_n = 0$ tragen nichts zur Reihe bei und sind deswegen für Konvergenz uninteressant, so daß man immer eine Teilfolge a_σ wählen könnte, für die $a_{\sigma(n)} \ne 0$, $n \in \mathbb{N}$, ist und für die $\Sigma a = \Sigma a_\sigma$ gilt.

2. Die harmonische Reihe erfüllt zwar
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, ist aber nicht konvergent, denn es gibt kein $\theta < 1$, für das der Quotient *unabhängig von n* durch θ beschränkt ist.

3. Die konvergente Reihe $\sum 1/k^2$ erfüllt ebenfalls nicht das Quotientkriterium, da
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$
ebenfalls beliebig nahe an 1 herankommt. Das Quotientenkriterium ist also lediglich eine HINREICHENDE BEDINGUNG, wenn es nicht erfüllt ist, so sagt das erst einmal nichts.

Definition 3.6.9 (Umordnung)**.** Eine UMORDNUNG ist eine bijektive[34] Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Die Folge a_τ ist dann definiert durch
$$(a_\tau)_n := a_{\tau(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Übung 3.6.2 Zeigen Sie: Ist a eine konvergente Folge, dann ist auch jede Umordnung a_τ konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{\tau(n)}.$$
$\diamondsuit$

Definition 3.6.10. Eine Reihe Σa heißt UNBEDINGT KONVERGENT[35], wenn jede Umordnung Σa_τ ebenfalls konvergent ist.

Proposition 3.6.11. *Jede absolut konvergente Reihe ist unbedingt konvergent.*

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon, \qquad n \ge n_0.$$
Sein nun n_1 so groß, daß
$$\{1,\dots,n_0\} \subseteq \{\tau(1),\dots,\tau(n_1)\}$$
dann ist, für $n \ge n_1$
$$\sum_{k=1}^{n} |a_{\tau(k)}| \ge \sum_{k=1}^{n_0} |a_k|$$

[34] Und daher normalerweise nicht monoton steigende!
[35] Auf Englisch „UNCONDITIONALLY CONVERGENT“.

und daher,

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_{\tau(k)}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

was nichts anderes ist als die absolute Konvergenz der Reihe gegen denselben Grenzwert wie der von $\Sigma|a|$. □

Bisher war alles ziemlich so wie erwartet, jetzt aber gönnen wir uns einmal ein etwas kontraintuitives Resultat: Wenn eine Reihe nicht absolut konvergent ist, dann können Umordnungen nicht nur einiges sondern eigentlich beliebig viel anrichten.

Satz 3.6.12 (Riemannscher Umordnungssatz)**.** *Ist Σa eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe, dann gibt es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung τ, so daß*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = s$$

ist.

Beispiel 3.6.13. Das Beispiel für eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe ist die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$.

Beweis: Wir nehmen wieder an, daß $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, erfüllt ist, und definieren, für $x \in \mathbb{R}$

$$x^+ := \frac{x+|x|}{2} = \max\{x,0\} \qquad \text{und} \qquad x^- := \frac{x-|x|}{2} = \min\{x,0\}.$$

Da a keine Nullen als Folgenglieder hat, sind a^+ und a^-, die komponentenweise so gebildet werden, zwei Teilfolgen von a, die zusammen gerade a ergeben.

Dann ist

$$\Sigma a = \Sigma a^+ + \Sigma a^- \qquad \text{und} \qquad \Sigma|a| = \Sigma a^+ - \Sigma a^-$$

und wäre Σa^+ konvergent, dann wäre nach Annahme und Korollar 3.6.1 auch $\Sigma a^- = \Sigma(a - a^+)$ konvergent und damit ebenfalls $\Sigma|a| = \Sigma(a^+ - a^-)$, und das wäre ein Widerspruch. Dasselbe Argument gilt auch für Σa^- und da Σa^+ eine Reihe ist, die nur aus nichtnegativen Zahlen besteht, bzw. Σa^+ eine Reihe, die nur aus negativen Elementen besteht, ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = -\infty. \tag{3.6.2}$$

Nun sei n_1 der kleinste Index, so daß

$$s_1^+ := \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ > s$$

gilt. So einen Index muss es nach (3.6.2) geben. Als nächstes wählen wir m_1 als kleinsten Index, für

$$s_1^- := \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- < s$$

erfüllt ist. Die beiden „Restreihen“

$$\sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k^+ \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m_1+1}^{\infty} a_k^-$$

divergieren immer noch wie in (3.6.2) und daher gibt es auch wieder ein kleinstes n_2 mit

$$s_2^+ := \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ > s,$$

ein kleinstes m_2 mit

$$s_2^- := \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k^- < s,$$

und so weiter. Das liefert eine Umordnung a_τ von a in

$$(a^+)_1, \dots, (a^+)_{n_1}, (a^-)_1, \dots, (a^-)_{m_1}, (a^+)_{n_1+1}, \dots, (a^+)_{n_2}, (a^-)_{m_1+1}, \dots$$

bei denen zumindest einige Partialsummen um s herum kreisen. Wegen der Minimalität der Indizes ist

$$s_1^+ - a_{n_1}^+ \le s \qquad \Rightarrow \qquad s < s_1^+ \le s + a_{n_1}^+,$$

beziehungsweise

$$s_1^- - a_{m_1}^- \ge s \qquad \Rightarrow \qquad s > s_1^- \ge s + a_{m_1}^-,$$

und so weiter, was uns

$$|s_j^\pm - s| \le |a_{n_j}^\pm|, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{3.6.3}$$

liefert, also

$$\lim_{j \to \infty} s_j^\pm = s. \tag{3.6.4}$$

Die Reihe Σa konvergiert und erfüllt daher das Cauchy–Kriterium aus Satz 3.4.5, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_0, so daß

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon, \qquad m, n \ge n_0.$$

Wählen wir nun j so, daß $n_j \ge n_0$ und $m_j \ge n_0$ ist, dann sind alle Indizes die in

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_{\tau(k)} \right|, \qquad m, n \ge n_j + m_j$$

auftauchen, gröser als n_0 und daher muss die Summe im Betrag $< \varepsilon$ sein. Mit anderen Worten: Σa_τ ist konvergent und dann muss s nach Proposition 3.3.6 der Grenzwert sein. □

Korollar 3.6.14. *Eine konvergente Reihe ist genau dann unbedingt konvergent wenn sie absolut konvergent ist. Die unendliche Summation ist also im allgemeine* nicht *kommutativ*[36].

3.7 Produkte von Reihen und die eulersche Zahl

Nun fehlt uns nur noch das Produkt von zwei Reihen $\Sigma a \cdot \Sigma b$. Nach Satz 3.6.12 ist es sicherlich sinnvoll, sich von Ordnung und Reihenfolge freizumachen, also „nur“ absolut konvergente Reihen zu verwenden. Wegen

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k =: \sum_{k=1}^{\infty} p_k$$

wobei die PRODUKTREIHE Σp aus eine ABZÄHLUNG der Produkte $a_j b_k$ besteht, also $p_n = a_{j(n)} b_{k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.7.1. *Sind Σa und Σb absolut konvergente Reihen, dann konvergiert* jede *Produktreihe Σp absolut und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ setzen wir $m = \max\{j(n) : 1 \le n \le N\}$ und $m' = \max\{k(n) : 1 \le n \le N\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |p_n| &= \sum_{n=1}^{N} |a_{j(n)}||b_{k(n)}| \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m'} |a_j||b_k| = \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j|\right)\left(\sum_{k=1}^{m'} |b_k|\right) \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right),
\end{aligned}$$

die Partialsummen von $\Sigma|p|$ bilden also eine monoton steigende und beschränkte Folge, die nach Proposition 3.3.7 konvergieren muss. □

Die Produktreihe ist ja eine Abzählung der einzelnen Produkte und die natürliche Vorgehensweise dafür ist so wie im ersten Cantorschen Diagonalverfahren, bei der die Produktreihe als CAUCHYPRODUKT[37]

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{3.7.1}$$

geschrieben werden.

[36] Was uns zeigt, daß wir uns vor der naiven Annahme hüten sollten, daß eine Eigenschaft endlicher Operationen so einfach „per Grenzwert“ auch dann gültig bleibt, wenn sie unendlich oft durchgeführt wird.

[37] Hier ist es geschickter, die Reihen ausgehend von 0 zu numerieren. Apropos: „nummerieren“ kommt eher von „dumm“ als vom lateinischen Wort „numerus“.

Zum Abschluss noch ein bisschen was zur magischen Zahl e, die auch EULERSCHE ZAHL genannt wird. Dazu brauchen wir die FAKULTÄT $n!$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$, die als

$$n! = n\,(n-1)! = n(n-1)\cdots 1, \qquad 0! = 1,$$

definiert ist.

Proposition 3.7.2 (Eulersche Zahl). *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert*[38] *die Reihe*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.7.2}$$

absolut.

Beweis: Wir verwenden das Quotientenkriterium aus Satz 3.6.7 und die Tatsache, daß

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$$

für $n \ge |x|$ durch $\theta = |x|/(1+|x|) < 1$ unabhängig von n beschränkt werden kann. □

Definition 3.7.3. Die EULERSCHE ZAHL e ist definiert als

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{3.7.3}$$

Proposition 3.7.4. *Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

1. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
2. $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.
3. $\exp(n) = e^n$.

Lemma 3.7.5. *Für den* BINOMIALKOEFFIZIENT

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \le k \le n,$$

gilt die allgemeine BINOMISCHE FORMEL

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{3.7.4}$$

Beweis: Man beweist (3.7.4) per Induktion:

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y,$$

[38] Unter Verwendung der Konvention $0^0 = 1$.

und erhält unter Verwendung der Konvention $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\,(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k},
\end{aligned}$$

woraus man mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}\underbrace{\left(\frac{k}{n+1}+\frac{n+1-k}{n+1}\right)}_{=1} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

des Binomialkoeffizienten den Induktionsschritt erhält. □

Beweis von Propsition 3.7.4: Für 1) verwenden wir (3.7.4), erhalten

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\,\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}}_{=:c_n}
\end{aligned}$$

und bemerken, daß c_n ein CAUCHYPRODUKT der beiden absolut konvergenten Exponentialreihen ist. Nach Satz 3.7.1 konvergiert damit die Reihe von $\exp(x+y)$ gegen das Produkt der Reihen von $\exp(x)$ und $\exp(y)$.

2) und 3) sind direkte Konsequenzen von 1), denn es gilt ja

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right|_{x=0} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\bigg|_{x=0}}_{=0} = 1$$

und

$$e^1 = e, \qquad e^{n+1} = e\cdot e^n = \exp(1)\exp(n) = \exp(n+1).$$

□

Übung 3.7.1 Zeigen Sie, daß $\exp(1/n) = e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$ und daß somit $e^x = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt. ♢

Funktionen 4

Alles andere als ein Sieg ist ja erst einmal eine Niederlage.

(Boris Becker, Januar 2014)

Jetzt beschäftigen wir uns endlich mit Funktionen, genauer mit ihren reellwertigen Vertretern.

Definition 4.0.1 (FUNKTION). Eine REELLWERTIGE FUNKTION f ist eine Abbildung von einem DEFINITIONSBEREICH $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Beispiel 4.0.2. Als typisches Beispiel für eine ELEMENTARE FUNKTION f kann man ein POLYNOM

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \qquad x \in \mathbb{R},$$

eine TRIGONOMETRISCHE FUNKTION $f(x) = \sin(x)$ bzw. $f(x) = \cos(x)$, oder die EXPONENTIALFUNKTION $f(x) = \exp(x)$ angeben. Das mit dem Definitionsbereich D wird z.B. für $f(x) = 1/x$ interessant, wo man tunlichst $0 \in D$ vermeinden sollte.

4.1 Funktionen + Grenzwerte = Stetigkeit

Der grundlegende Funktionstyp in der Analysis sind diejenigen Funktionen, die man „in einem Strich" zeichnen kann.

Definition 4.1.1. Eine Funktion f heißt STETIG an der Stelle $x \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$x' \in D, \quad |x' - x| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x') - f(x)| < \varepsilon \tag{4.1.1}$$

gilt. Die Funktion heißt stetig auf D, wenn sie stetig an jeder Stelle $x \in D$ ist. Die stetigen Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C(D)$.

Es gibt einige Arten, Stetigkeit anschaulich zu beschreiben. Eine ist, daß kleine Änderungen im Argument auch nur zu kleinen Änderungen des Funktionswertes führen können[1], eine andere ist, daß stetige Funktionen LOKAL KONSTANT sind: Zoomt man nahe genug an die Stelle x heran, so ändert sich die Funktion dort nicht.

Oder man macht es gleich mathematisch präzise und sagt, daß Funktionsauswertung und Grenzwertbildung vertauscht werden können.

[1]Was man als eine Art „Stabilität" der Funktion interpretieren könnte

Satz 4.1.2 (Stetigkeit). *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig an der Stelle x^*, wenn für jede Folge x_n in D mit Grenzwert $x^* \in D$*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*). \tag{4.1.2}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 4.1.3. Man kann Stetigkeit auch kurz und knapp als

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) \tag{4.1.3}$$

schreiben, wenn man Voraussetzungen wir die Existenz des Limes in D mal dezent beiseite lässt.

Beweis von Satz 4.1.2: Für „$\Rightarrow$" sei f stetig an x^* und x eine Folge, die gegen x^* konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x^*) - f(x')| < \varepsilon$, $|x^* - x'| < \delta$ und außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|x_n - x^*| < \delta$ für $n \ge n_0$. Das heißt:

$$|f(x_n) - f(x^*)| < \varepsilon, \qquad n \ge n_0, \qquad \text{also} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*).$$

Die Richtung „$\Leftarrow$" zeigen wir durch Beweis der Negation, also daß für jede nicht stetige Funktion auch die Grenzwerteigenschaft (4.1.2) nicht erfüllt ist. Ist also f *nicht* stetig, also UNSTETIG an x^*, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß es zu jedem $\delta > 0$ ein $x' \in D$ mit $|x' - x^*| < \delta$ aber $|f(x') - f(x^*)| \ge \varepsilon$ gibt. Setzen wir nun $\delta = \frac{1}{n}$, so liefert das Punkte $x_n \in D$ mit $|x_n - x^*| < \frac{1}{n}$, also

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

aber gleichzeitig $|f(x_n) - f(x^*)| \ge \varepsilon$, so daß die Folge $f(x_n)$ sicherlich nicht gegen $f(x^*)$ konvergiert. $\square$

Da $x_n \to x^*$ genau dann wenn $x_n - x^*$ eine Nullfolge ist, können wir Satz 4.1.2 noch ein wenig umschreiben.

Korollar 4.1.4 (Stetigkeit revisited). *Eine Funktion f ist genau dann stetig an x^*, wenn für jede* NULLFOLGE *h mit $x^* + h = \{x^* + h_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D$*

$$\lim_{n\to\infty} f(x^* + h_n) = f(x^*)$$

erfüllt ist.

Das Konzept „Konvergenz aller Folgen" führt dann auch zu einem verallgemeinerten Grenzwertbegriff in Funktionen.

Definition 4.1.5. Für $x \in D$ und $c \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lim_{y\to x} f(y) = c, \tag{4.1.4}$$

wenn *für jede* Folge $a \in D$ mit $\lim a_n = x$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$$

erfüllt ist. Gilt das nur für alle $a_n \geq x$, so liegt ein EINSEITIGER GRENZWERT vor, und wird als

$$\lim_{y \searrow x} f(y) \qquad \text{oder} \qquad \lim_{y\to x^+} f(y)$$

geschrieben. Analog schreiben wir für Restriktion $a_n \leq x$

$$\lim_{y \nearrow x} f(y) \qquad \text{oder} \qquad \lim_{y\to x^-} .f(y)$$

Als nächstes ein Begriff, der zuerst einmal mit der Stetigkeit nichts zu tun zu haben scheint, den wir aber noch sehr gut brauchen können.

Definition 4.1.6 (Supremum und Infimum)**.** Das SUPREMUM $y = \sup D$ einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ ist die KLEINSTE OBERE SCHRANKE von D, also diejenige Zahl, die

1. $D \leq y$, d.h. $x \leq y$, $x \in D$, (obere Schranke)
2. es gibt kein $y' < y$ mit $D \leq y'$ (kleinste obere Schranke)

erfüllt. Existiert kein solches y, so schreiben wir $\sup D = \infty$. Analog ist das INFIMUM $\inf D$ die GRÖSSTE UNTERE SCHRANKE von D.

Übung 4.1.1 Zeigen Sie: Für jede Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist $\inf D \leq \sup D$. ♢

Bemerkung 4.1.7. Supremum und Infimum können, müssen aber nicht zur Menge D gehören. Das einfachste Beispiel sind $[-1,1]$ vs. $(-1,1)$. In beiden Fällen ist $\inf D = -1$, $\sup D = 1$, aber im ersten Fall gehören die beiden zu D (und damit existieren auch $\min D$ und $\max D$), während im zweiten Fall weder Infimum noch Supremum zu D gehören und daher auch $\min D$ und $\max D$ nicht existieren.

Proposition 4.1.8 (Existenz von sup und inf)**.** *Ist D nach oben beschränkt, dann existiert $\sup D$, ist D nach unten beschränkt, so existiert $\inf D$.*

Beweis: Wir beweisen nur den Fall des Supremums, das Infimum funktioniert identisch. Um Trivialitäten auszuschließen, sei außerdem $D \neq \emptyset$. Nach Voraussetzung gibt es daher $K \in \mathbb{R}$ mit $D \leq K$ und mindestens $x \in D$ und es ist $x \leq K$. Wir setzen $a_0 = x$, $b_0 = K$ und konstruieren eine Folge von Intervallen I_n, $n \geq 0$, folgendermaßen: Wir bilden $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und setzen[2]

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n), & c_n \geq D, \\ (c_n, b_n), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.1.5}$$

[2] Das sind jetzt keine offenen Intervalle, sondern Paare.

Dann ist immer $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$, sowie $|I_n| = 2^{-n}(K-x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ und es gilt immer $b_n \ge D$. Die Folge b ist monoton fallend, nach unten beschränkt und konvergiert daher gegen eine obere Schranke y von D. Wäre $y' < y$ ebenfalls eine obere Schranke von D, dann ist jedes $x \in [y', y]$ ebenfalls eine obere Schranke, denn $D \le y' \le x$ impliziert ja $D \le x$. Wählen wir jedoch n so groß, daß $2^{-n} < y - y'$ ist, dann ist $y' < a_n$, was einen Widerspruch darstellt, da a_n per Konstruktion gerade *keine* obere Schranke von D ist. □

Bemerkung 4.1.9. So ganz einfach ist das mit Suprema und Infima nicht wirklich, denn die Mengen können auch sehr löchrig sein, wie beispiel die CANTOR–MENGE

$$D = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n} \right] \right),$$

bei der aus jedem der Intervalle $[0, 3^{-n}]$ jeweils die Mitte herausgeschnitten wird. Es ist immer noch $\inf D = \min D = 0$, aber um die Null herum wird es „dünn“.

Mit Hilfe des Supremums kann man den Stetigkeitsbegriff auch quantifizieren.

Definition 4.1.10 (Stetigkeitsmodul)**.** Der STETIGKEITSMODUL $\omega(f, \delta)$ ist definiert als

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x') - f(x)| \, : \, x, x' \in D, |x - x'| \le \delta\}. \tag{4.1.6}$$

Der Stetigkeitsmodul betrachtet nun die Stetigkeit allerdings in globaler Form, wir brauchen also eine globale Variante.

Definition 4.1.11 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Die Funktion f heißt GLEICHMÄSSIG STETIG auf $D \subset \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|x' - x| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Bemerkung 4.1.12. Der Unterschied zwischen der Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit ist also, daß im ersten Fall $\delta = \delta(x)$ vom Punkt $x \in D$ abhängen darf, wohingegen es im zweiten Fall ein *globales* δ *für alle* $x \in D$ geben muss.

Übung 4.1.2 Zeigen Sie: f ist genau dann gleichmäßig stetig auf D, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \omega(f, \delta_n) = 0$$

für jede Nullfolge δ gilt. ♢

Das folgenden Resultat ist eine direkte Folgerung aus den Definitionen, aber man sollte es zumindest einmal gesagt haben.

Satz 4.1.13. *Jede auf D gleichmäßig stetige Funktion ist stetig an jedem $x \in D$. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht*[3]

Beispiel 4.1.14. Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Wir betrachten

$$\exp(x+h) - \exp(x) = \exp(x)\exp(h) - \exp(x) = \exp(x)\left(\exp(h) - 1\right)$$

sowie

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \qquad \Rightarrow \qquad \exp(y) > 1, \quad y > 0,$$

und wegen $\exp(y)\exp(-y) = 1$ folgt insgesamt

$$0 < \exp(y) \qquad \text{und} \qquad \exp(y) \begin{cases} > 1, & y > 0, \\ = 1, & y = 0, \\ < 1, & y < 0 \end{cases} \tag{4.1.7}$$

Ausserdem ist

$$\begin{aligned} |\exp(y) - 1| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right| \le |y| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y|^{n-1}}{n!} = |y| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{(n+1)!} \le |y| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{n!} \\ &= |y| \exp(|y|), \end{aligned}$$

so daß für jede Nullfolge h mit[4] $h \le K$ die Grenzwertaussage[5]

$$\lim_{n\to\infty} \left|\exp(h_n) - 1\right| \le \lim_{n\to\infty} |h_n| \exp(|h_n|) \le \lim_{n\to\infty} |h_n| \exp(|K|) = 0,$$

derentwegen

$$\lim_{n\to\infty} |\exp(x+h_n) - \exp(x)| = \exp(x) \lim_{n\to\infty} \left|\exp(h_n) - 1\right|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gilt, das nötige δ für die Beschränkung von h hängt aber wegen des Faktors $\exp(x)$ von der Stelle x ab, weswegen die Stetigkeit nicht gleichmäßig ist. □

Übung 4.1.3 Zeigen Sie: Jede Nullfolge ist beschränkt. ◊

Definition 4.1.15 (Operationen auf Funktionen)**.** Für Funktionen f, g sind die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und f/g definiert durch

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x)g(x), \qquad (f/g)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[3] Korrekter wäre: Nicht immer. Aber dazu später mehr.
[4] Siehe Übung 4.1.3.
[5] Genau genommen verwenden wir hier die Monotonie von $\exp(x)$: Für $y > 0$ ist

$$\exp(x+y) = \exp(x) \underbrace{\exp(y)}_{>1} > \exp(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Aus den Rechenregeln für Folgen und deren Grenzwert folgt dann unmittelbar die folgende Beziehung für stetige Funktionen.

Satz 4.1.16 (Stetige Funktionen). *Sind $f,g \in C(D)$, so sind auch $f \pm g \in C(D)$ und $f \cdot g \in C(D)$. Die stetigen Funktionen bilden also insbesondere einen* VEKTORRAUM[6]. *Ist $g(x) \neq 0$, so ist f/g stetig an der Stelle x.*

Satz 4.1.17. *Sind $f,g \in C(D)$ mit $g(D) \subseteq D$, so ist auch $f \circ g = f(g(\cdot)) \in C(D)$.*

Beweis: Sei $a \subset D$ eine konvergente Folge mit $\lim a_n = x$, dann ist auch $b = \left(g(a_n) : n \in \mathbb{N}\right) \subset D$ eine konvergente Folge mit

$$b^* := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x)$$

und damit dann auch

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(b^*) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

wie behauptet. □

4.2 Bisektion und der Zwischenwertsatz

Die „intuitive“ Definition stetiger Funktion ist ja immer noch, daß man die Funktion „in einem Strich“ zeichnen kann. Die formale Version dieser Intuition ist der ZWISCHENWERTSATZ, den wir in diesem Kapitel beweisen werden und zwar als Konsequenz eines einfachen Verfahrens zum Auffinden einer NULLSTELLE einer Funktion, also einer Stelle $x \in D$, für die $f(x) = 0$ ist.

Von nun an verwenden wir der Einfachheit nur noch Intervalle als Definitionsbereich und schreiben dann $C[a,b]$ bzw. $C(a,b)$ für die stetigen Funktionen auf abgeschlossenen[7] und offenen[8] Intervallen, die Notation für Mischformen, also halboffene[9] Intervalle, ergibt sich dann von selbst. Schreiben wir $C(I)$, dann ist I ein Intervall, bei dem es egal ist, ob es offen, halboffen oder abgeschlossen ist.

Satz 4.2.1 (Nullstellensatz). *Ist $f \in C(I)$ und gibt es Punkte x_+ und x_- mit $f(x_+) \geq 0$ und $f(x_-) \leq 0$, dann gibt es ein $x \in I$, so daß*

$$x \in [\min\{x_-, x_+\}, \max\{x_-, x_+\}] \qquad \textit{und} \qquad f(x) = 0. \tag{4.2.1}$$

[6]Genau genommen bilden sie sogar eine ALGEBRA, das ist eine Menge, in der man addieren und multiplizieren kann.

[7]Das Intervall $I = [a,b]$ bezeichnet man als ABGESCHLOSSEN, weil mit jeder Cauchyfolge $x \subset [a,b]$, d.h. $a \leq x_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, auch deren Grenzwert in I liegt.

[8]Das Intervall $I = (a,b)$ nennt man OFFEN, weil es zu jedem $x \in I$ auch ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $\{x' \in I : |x - x'| < \varepsilon\} \subset I$ erfüllt ist. Richtig lernt man die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ dann in Analysis 2 kenne, wenn man sich ein wenig mehr mit Topologie beschäftigt.

[9]Die sind dann erstaunlicherweise weder offen noch abgeschlossen.

Beweis: Wir konstruieren wieder einmal eine Intervallschachtelung. Dazu setzen wir $a_0 = x_-$, $b_0 = x_+$ und nehmen an, daß $a_0 < b_0$ ist. Denn wäre $a_0 = b_0$, dann tut es $x = a_0 = b_0$, da dann $0 \le f(x) \le 0$ sofort $f(x) = 0$ liefert. Ist hingegen $a_0 > b_0$, dann ersetzen wir f durch $-f$, was für die Frage nach Nullstellen keine Rolle spielt, da $f(x) = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $(-f)(x) = 0$ ist.

Es gilt also $f(a_0) \le 0 \le f(b_0)$ und wir bilden nun durch BISEKTION Folgen a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$f(a_n) \le 0 \le f(b_n) \qquad \text{und} \qquad |b_n - a_n| \le 2^{-n}|b_0 - a_0|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.2.2}$$

was für $n = 0$ per Annahme trivialerweise erfüllt ist. Nehmen wir an, es gelte für irgendein n, dann setzen wir[10] $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n, & f(c_n) \ge 0, \\ c_n, & f(c_n) \le 0, \end{cases} \qquad b_{n+1} := \begin{cases} c_n, & f(c_n) \ge 0, \\ b_n, & f(c_n) \le 0, \end{cases}$$

so daß (4.2.2) auch für $n+1$ erfüllt ist. Da a eine monoton steigenden Folge in I ist, existiert ein Grenzwert $a^* := \lim a_n$ und wegen $f(a_n) \le 0$ ist auch $\lim f(a_n) \le 0$. Analog gibt es ein $b^* = \lim b_n$ mit $\lim f(b_n) \ge 0$. Da außerdem

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

folgt $a^* = b^* =: x$ und die Stetigkeit von f liefert

$$0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 0,$$

wie behauptet. □

Die hier vorgestellte Methode, die auf der Basis der beiden Stellen x_+, x_- mit $f(x_+)f(x_-) \le 0$ die Nullstelle annähert, nennt man BISEKTIONSVERFAHREN. Dieses ist die einfachste Methode, eine Nullstelle einer Funktion zu bestimmen – es gibt zwar schnellere wie das NEWTON–VERFAHREN[11], aber die haben andere Probleme. Mehr zu derartigen Verfahren lernt man in Vorlesungen zur Numerischen Mathematik, siehe z.B. [22].

Korollar 4.2.2 (Zwischenwertsatz)**.** *Sie $f \in C(I)$ und $x, x' \in I$. Dann gibt es zu jedem c zwischen $f(x)$ und $f(x')$ ein y zwischen x und x', so daß $f(y) = c$ ist.*

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $x \le x'$ und $f(x) \le f(x')$, alle anderen Fälle[12] funktionieren analog. Mit $g := f - c$ ist dann

$$g(x) = f(x) - c \le 0 \le f(x') - c = g(x')$$

und nach Satz 4.2.1 gibt es ein $y \in [x, x']$ mit $g(y) = 0$, also $f(y) = c$. □

[10] Und das sollte jetzt eigentlich niemanden mehr überraschen.

[11] Wir kennen bereits eine Ausprägung des Newton–Verfahrens, nämlich das HERON–VERFAHREN.

[12] Es sind maximal drei!

4.3 Abgeschlossene Intervalle

Wie Folgen können natürlich auch Funktionen beschränkt sein.

Definition 4.3.1 (Beschränktheit)**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt NACH OBEN BESCHRÄNKT, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x) \le K$, $x \in D$, ist, NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn $f(x) \ge K$, $x \in D$, gilt und BESCHRÄNKT, wenn $|f(x)| \le K$.

Satz 4.3.2. *Ist $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f \in C(I)$, dann ist f beschränkt und es gibt eine* MAXIMALSTELLE x_+ *und eine* MINIMALSTELLE x_- *mit*

$$f(x_-) \le f(x) \le f(x_+), \qquad x \in I.$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für Beschränktheit nach oben und das Maximum, Beschränktheit nach unten und Minimum laufen wieder analog. Sei $y = \sup\{f(x) : x \in I\}$. Dann gibt es eine Folge $a \subset I$ mit

$$y = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Ist nämlich $y = \infty$, dann muss es a_n geben mit $f(a_n) \ge n$, ist y endlich und $f(a_n) < y$, dann muss es, da das SUPREMUM die *kleinste* obere Schranke ist, auch ein $a_{n+1} \le y$ geben[13] mit

$$|y - f(a_{n+1})| \le \frac{1}{2}|y - f(a_n)|.$$

Die Folge der a_n ist beschränkt, $a \le a_n \le b$ und enthält damit eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge a_σ. Da $a \le a_{\sigma(n)} \le b$ ist auch[14]

$$a \le x := \lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} \le b \qquad \Rightarrow \qquad x \in I,$$

und damit ist wegen der Stetigkeit von f

$$y = \lim_{n\to\infty} f(a_{\sigma(n)}) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)}\right) = f(x).$$

Im Falle „$y = \infty$“ wäre das ein Widerspruch, denn ∞ ist kein Wert in $\mathbb{R}$, im anderen Fall ist

$$f(x) = \max\{f(x') : x' \in I\}$$

und x die gesuchte Maximalstelle. □

[13] Achtung: Auch wenn es wie eine Konstruktion aussieht, ist dieses „Verfahren“ nicht wirklich konstruktiv, wie man so ein a_{n+1} nämlich wirklich bestimmen soll, ist alles andere als klar.

[14] Hier benutzt man, daß I ABGESCHLOSSEN ist, denn sonst läge der Grenzwert möglicherweise nicht in I.

Beispiel 4.3.3. Auf offenen Intervallen gilt Satz 4.3.2 im allgemeinen nicht[15]. Auf $(0,1)$ ist die Funktion $f(x) = 1/x$ unbeschränkt, sie wird für $x \to 0$ beliebig groß und die ganz brave Funktion $f(x) = x$ nimmt auf $(0,1)$ weder ihr Infimum, 0, noch ihr Supremum, 1, an.

Abgeschlossene Intervalle haben noch eine weitere schöne Eigenschaft: Auf ihnen sind Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit dasselbe. Die Eigenschaft, die wirklich dahintersteckt, nennt sich KOMPAKTHEIT und wird uns ebenfalls in Analysis 2 begegnen, wo wir lernen werden, daß im Endlichdimensionalen, insbesondere in der eindimensionalen Welt von $\mathbb{R}$, eine Menge genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, also genau das, was ein Intervall $[a,b]$ tut und genau das, was wir im Beweis von Satz 4.3.2 wirklich verwendet haben.

Satz 4.3.4 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Ist $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall, dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann auf I stetig, wenn f auf I gleichmäßig stetig ist.*

Beweis: Da gleichmäßige Stetigkeit auf I stärker ist[16] als Stetigkeit an jeder Stelle von I, brauchen wir nur die Richtung „$\Rightarrow$" zu zeigen. Nehmen wir dazu an, es gäbe ein stetiges $f \in C(I)$, das *nicht* gleichmäßig stetig wäre. Das heißt, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ und Folgen $a, b \subset I$ mit $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon$. Nach dem Satz 3.3.2 von Bolzano–Weierstrass gibt es eine konvergene Teilfolge a_σ von a, mit

$$|a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)}| < \frac{1}{\sigma(n)} \le \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} =: x$$

Damit konvergiert aber auch b_σ gegen x und damit ist wegen der Stetigkeit von f

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(b_{\sigma(n)}),$$

was zu dem Widerspruch

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon \le \lim_{n\to\infty} |f(a_{\sigma(n)}) - f(b_{\sigma(n)})| = \left| \lim_{n\to\infty} f(a_{\sigma(n)}) - \lim_{n\to\infty} f(b_{\sigma(n)}) \right| \\ &= |f(x) - f(x)| = 0 \end{aligned}$$

führt. □

Übung 4.3.1 Zeigen Sie: Die Funktion $f : x \mapsto |x|$ ist stetig. Was hat das mit dem Beweis von Satz 4.3.4 zu tun? ♢

[15]Zur Erinnerung: Wenn ein Mathematiker sagt „*... im allgemeinen ist xyz nicht richtig*", so bedeutet das, daß es mindestens ein Beispiel gibt, so daß xyz nicht gilt.
[16]Da man dann ein δ hat, das *nicht* von x abhängt.

Mehr zur Exponentialfunktion | 5

Für mich hat so eine Rechnung etwas Schwindliges; als ob es ein Stück des Weges weiß Gott wohin ginge. Das eigentlich Unheimliche ist mir aber die Kraft, die in solch einer Rechnung steckt und einen so festhält, daß man doch wieder richtig landet.

(Robert Musil, *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*)

In diesem Kapitel befassen wir uns ein wenig intensiver mit der EXPONENTIALFUNKTION exp und den dadurch definierten elementaren Funktionen. Aber wir werden natürlich deutlich mehr dabei lernen.

5.1 Monotonie und Umkehrfunktionen

Aus Beispiel 4.1.14 wissen wir, daß $\exp(y) > 1$ für $y > 0$ und daher ist für $x > x'$

$$\exp(x) = \exp(x' + x - x') = \underbrace{\exp(x')}_{>0} \overbrace{\exp(\underbrace{x - x'}_{>0})}^{>1} > \exp(x'), \tag{5.1.1}$$

weswegen die Funktion exp zu einer besonderen Klasse von Funktionen gehört.

Definition 5.1.1 (Monotone Funktionen)**.** Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt MONOTON STEIGEND, wenn $f(x) \geq f(x')$, $x > x'$, und STRENG MONOTON STEIGEND, wenn $f(x) > f(x')$, $x > x'$. Die Begriffe MONOTON FALLEND und STRENG MONOTON FALLEND definieren sich analog.

Satz 5.1.2 (Umkehrfunktion)**.** *Ist $f \in C(I)$, $I = [a, b]$, eine stetige und* STRENG MONOTON STEIGENDE FUNKTION, *dann existiert eine stetige und monoton steigende* UMKEHRFUNKTION[1] *$f^{-1} : f(I) \to I$ mit der Eigenschaft*

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad x \in I.$$

Beweis: Da für $x \neq x'$ entweder $x > x'$ und damit $f(x) > f(x')$ oder $x < x'$ und damit $f(x) < f(x')$ gilt, ist $f(x) \neq f(x')$, $x \neq x'$, also ist f INJEKTIV. Nach

[1] Man sollte die Umkehrfunktion nicht mit dem REZIPROKWERT $1/f$ von f verwechseln, der ebenfalls gerne als f^{-1} geschrieben wird.

dem Zwischenwertsatz, Satz 4.2.2, ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und zwar

$$f(I) = [f(a), f(b)], \qquad I = [a,b],$$

und dasselbe entsprechend für (halb)offene Intervalle. Ausserdem sagt der Zwischenwertsatz, daß f surjektiv auf $f(I)$ ist. Damit ist f bijektiv und nach Lemma 2.3.3 existiert die Umkehrabbildung f^{-1}. Sei nun $y \subset f(I)$ eine konvergente Folge im Intervall $f(I)$ mit $y_n = f(x_n)$, $x_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim y_n =: y$. Wäre f^{-1} unstetig an y, dann gäbe es eine solche Folge $y_n \to y$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\varepsilon \le |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)|$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so daß es eine Teilfolge y_σ mit $y_\sigma \to y$, aber

$$|f^{-1}(y_{\sigma(n)}) - f^{-1}(y)| \ge \varepsilon, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.1.2}$$

gibt. Die Folge $z = \left(f^{-1}(y_{\sigma(n)}) : n \in \mathbb{N}\right)$ ist beschränkt und besitzt nach Satz 3.3.2 eine konvergente TEILFOLGE $z_{\sigma'} = f^{-1}(y_{\sigma' \circ \sigma}) \to z^*$ mit

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_{\sigma'}) = \lim_{n\to\infty} (f \circ f^{-1})(y_{\sigma' \circ \sigma(n)}) = \lim_{n\to\infty} y_{\sigma' \circ \sigma(n)} = y,$$

also $f^{-1}(y) = z$, im Widerspruch zu (5.1.2). □

Übung 5.1.1 Zeigen Sie: $(f^{-1})^{-1} = f$. ♢

Übung 5.1.2 Gilt Satz 5.1.2 auch, wenn man „nur" Monotonie, aber nicht notwendigerweise strikte Monotonie fordert? ♢

Korollar 5.1.3. *Satz 5.1.2 gilt auch, wenn man „steigend" durch „fallend" ersetzt.*

Korollar 5.1.4. *Auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ besitzt die* EXPONENTIALFUNKTION $f : x \to \exp(x)$, *eine Umkehrfunktion f^{-1}, die als* NATÜRLICHER LOGARITHMUS $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *bezeichnet wird. Es gilt die Funktionalgleichung*

$$\log(xy) = \log x + \log y, \qquad x, y \in \mathbb{R}_+. \tag{5.1.3}$$

Beweis: Nach (5.1.2) ist die Exponentialfunktion immer streng monoton steigend und Existenz und Stetigkeit des Logarithmus folgen aus Satz 5.1.2. Für einen Beweis von (5.1.3) setzen wir $x = \exp(\xi)$ und $y = \exp(\eta)$, so daß

$$xy = \exp(\xi)\exp(\eta) = \exp(\xi + \eta) \quad \Rightarrow \quad \log(xy) = \log\exp(\xi+\eta) = \xi + \eta$$

sowie

$$\log x = \log\exp\xi = \xi \qquad \text{und} \qquad \log y = \log\exp\eta = \eta,$$

was ganz genau (5.1.3) ergibt. □

Bemerkung 5.1.5. Oftmals wird in der Literatur auch ln für den natürlichen Logarithmus verwendet, die Terminologie ist nicht eindeutig. Wir kommen noch dazu.

Übung 5.1.3 Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to 0} \log x = -\infty. \tag{5.1.4}$$

Was ist die formal ganz korrekte Formulierung von (5.1.4)? ♢

Korollar 5.1.6. *Für $n \in \mathbb{N}$ besitzt die* POTENZFUNKTION[2] $x \mapsto x^n$ *mit* $I \subseteq \mathbb{R}_+$ *eine Umkehrfunktion, die n–te* WURZEL *die als* $f^{-1}(x) = x^{1/n}$ *oder* $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ *geschrieben wird.*

Beweis: Da für $x \geq 0$ und $y > 0$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x^n + \underbrace{y^n}_{>0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{x^k y^{n-k}}_{\geq 0} \geq x^n$$

ist, ist $f(x) = x^n$ streng monoton steigend, nach Übung 5.1.4 stetig, und besitzt damit nach Satz 5.1.2 eine stetige Umkehrfunktion. □

Übung 5.1.4 Folgern Sie aus der Identität

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

daß die Funktion $x \mapsto x^n$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. ♢

5.2 Exponentialfunktionen

Nun beschäftigen wir uns noch ein wenig intensiver mit der Exponentialfunktion und ihren lieben Verwandten.

Definition 5.2.1 (Allgemeine Exponentialfunktion)**.** Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist die ALLGEMEINE EXPONENTIALFUNKTION $\exp_a$ definiert als

$$\exp_a(x) := \exp(x \log a), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.2.1}$$

Proposition 5.2.2 (Allgemeine Exponentialfunktion)**.** *Für $a > 0$ ist $\exp_a$ stetig und es gilt*

1. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.
2. $\exp_a(n) = a^n$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\exp_a(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$.

[2] Der englische Name „POWER FUNCTION“ klingt sportlicher und weniger protzig.

4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis: Da $\exp_a = f \circ g$ mit $g(x) = x \log a$ und $f(x) = \exp(x)$, ist $\exp_a$ nach Satz 4.1.17 ebenfalls stetig. Der Rest ist schnell nachgerechnet: 1) folgt aus

$$\begin{aligned} \exp_a(x+y) &= \exp\big(\log a(x+y)\big) = \exp(x\log a)\exp(y\log a) \\ &= \exp_a(x)\exp_a(y), \end{aligned}$$

2) folgt per Induktion aus

$$\exp_a(1) = \exp(\log a) = a$$

und 1), und daraus ergibt sich schließlich, daß

$$a^p = \exp_a(p) = \exp_a\left(q\frac{p}{q}\right) = \exp_a(\underbrace{p/q + \cdots + p/q}_{q}) = \big(\exp_a(p/q)\big)^q,$$

woraus wir nur noch auf beiden Seiten die q–te Wurzel ziehen müssen, um 3) zu erhalten. Für 4) nutzen wir 3) in Form von

$$a^{1/n} = \exp_a\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

und die Stetigkeit der Funktion $\exp_a$. □

Die Funktion $\exp_a$ ist stetig und inzwischen auf ganz $\mathbb{Q}$ definiert. Damit können wir sie auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen und erhalten damit eine Definition für a^x, $a \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Die Rechenregeln für a^x ergeben sich dann wie folgt.

Proposition 5.2.3. *Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
2. $(a \cdot b)^x = a^x b^x$.
3. $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

Beweis: 1) kennen wir schon aus Proposition 5.2.2 und braucht nur den Grenzübergang

$$a^x = \lim_{n\to\infty} \exp_a\left(\frac{p_n}{q_n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = x,$$

2) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (ab)^x &= \exp_{ab}(x) = \exp(x\log(ab)) = \exp\big(x(\log a + \log b)\big) \\ &= \exp(x\log a)\cdot\exp(x\log b) = \exp_a(x)\cdot\exp_b(x) = a^x \cdot b^x, \end{aligned}$$

und 3) folgt aus

$$1 = 1^x = (1/a \cdot a)^x = (1/a)^x \cdot a^x.$$

□

Proposition 5.2.4 (Umkehrfunktion reloaded). *Die Umkehrfunktion zu a^x ist der* LOGARITHMUS ZUR BASIS a,

$$\log_a(x) := \frac{\log x}{\log a}. \tag{5.2.2}$$

Beweis: Wir schreiben $a = \exp(\log a) = e^{\log a}$ und damit

$$y := a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{x \log a},$$

weswegen

$$x \log a = \log y \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\log y}{\log a}$$

sein muss. □

Bemerkung 5.2.5. Alle Logarithmen sind bis auf einen multiplikativen Faktor identisch, die Basis des Logarithmus, normalerweise 2, e oder 10 ist also nicht wirklich relevant.

Exponentialfunktionen sind auch die einzigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Satz 5.2.6. *Ist eine Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ Lösung der* FUNKTIONALGLEICHUNG

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.2.3}$$

dann ist entweder[3] $f \equiv 0$ *oder es gibt $a \in \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$.*
Umgekehrt sind die Funktionen $f = 0$ und $f(x) = a^x$ Lösungen von (5.2.3).

Beweis: Daß $x \mapsto a^x$ die Gleichung (5.2.3) erfüllt, haben wir schon bewiesen, es geht also nur um die Umkehrung, daß (5.2.3) auch $f(x) = a^x$ impliziert. Ist $f \neq 0$ eine Lösung von (5.2.3), dann gibt es ein x mit $f(x) \neq 0$ und damit ist

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = 1$$

sowie

$$a := f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \geq 0.$$

Wäre $a = 0$, dann ist auch

$$f(n) = 0^n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und damit[4], für $p, q \in \mathbb{N}$,

$$0 = f(p) = f\left(q\,\frac{p}{q}\right) = \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q \qquad \Rightarrow \qquad f\left(\frac{p}{q}\right) = 0,$$

was aus Stetigkeitsgründen für jede Folge p_n, q_n mit $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = 0$ den Widerspruch

$$1 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = 0$$

liefert. Also ist $a > 0$ und die Funktionalgleichung (5.2.3) liefert[5], daß

[3] Die Notation $f \equiv c$ steht für $f(x) = c$, $x \in D$.
[4] Ein argumentatorisches dejá vu ...
[5] Nun schon zum dritten Mal.

dann $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p}$ sein muß. Der Rest ist Stetigkeit[6].

Die zweite Aussage rechnet man leicht und unmittelbar nach. □

Als nächstes halten wir fest, daß die Exponential sehr schnell wächst, der Logarithmus hingegen sehr langsam.

Lemma 5.2.7 (Grenzwerte)**.** *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty, \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to\infty} x^{-k} \log x = 0. \tag{5.2.4}$$

Beweis: Für $x > 0$ ist

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!},$$

was für $x \to \infty$ beliebig groß wird. Für die zweite Aussage sei $\mathbb{R}_+ \ni x_n \to \infty$ eine divergente Folge von positiven Zahlen. Dann[7] ist auch die Folge $y_n := k \log x_n$ divergent gegen ∞ und wenn wir x_n als $e^{y_n/k}$, d.h., $x_n^{-k} = e^{-k y_n / k} = e^{-y_n}$ schreiben, dann ist

$$x_n^{-k} \log x_n = e^{-y_n} k y_n = k \left(\frac{e^{y_n}}{y_n}, \right)^{-1},$$

und das konvergiert gemäß der ersten Abschätzung gegen Null. □

Bemerkung 5.2.8 (Doppelte Grenzwerte)**.** Zum Abschluss stellen wir uns nochmals die Frage, welchen Wert eigentlich 0^0 so hat. Wegen der beiden Grenzwerte

$$\lim_{a\to 0^+} a^x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} a^x = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

kommen wir zu dem unbefriedigenden Ergebnis

$$\lim_{x\to 0} \lim_{a\to 0^+} a^x = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{a\to 0^+} 1 = \lim_{a\to 0^+} \lim_{x\to 0} a^x,$$

daß sowohl 1 also auch 0 „sinnvolle“ Werte für 0^0 wären. Was wir wirklich lernen ist aber:

1. 0^0 lässt man besser undefiniert.

2. Die Vertauschung von Grenzwertbildung in Funktionen mehrerer Variablen wie hier $(a, x) \mapsto a^x$ muß man sich genauer ansehen[8], naives Vertauschen ist jedenfalls *verboten*.

---

[6]Nicht Schweigen!

[7]Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion einer monoton steigenden Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_+$.

[8]Was auch noch passieren wird.

5.3 Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

Ein kleiner Schönheitsfehler der reellen Zahlen besteht darin, daß man Wurzeln oder generell Exponentiation der Form a^x nur für positive Werte a bilden kann. Das ist geometrisch nachvollziehbar, denn negative Flächen kann man sich nur schwer vorstellen, siehe [18], aber mathematisch unbefriedigend.

Deswegen führt man die IMAGINÄRE EINHEIT $i := \sqrt{-1}$ ein, die also die Eigenschaft

$$i^2 = -1 \tag{5.3.1}$$

hat. Diese Zahl gehört offensichtlich nicht zu $\mathbb{R}$, also kann man sie als LINEAR UNABHÄNGIG zu $\mathbb{R}$, insbesondere zur Vektorraumbasis[9] $\{1\}$. Betrachten wir nun den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{C}$, der von $\{1, i\}$ erzeugt wird, dann kann man $z \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$z = 1 \cdot x + i \cdot y = x + i y, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

und es ist

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').$$

Man kann zwei Zahlen aber auch multiplizieren:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + \underbrace{i^2}_{=-1} yy' \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y). \end{aligned}$$

Und siehe da: es funktioniert!

Satz 5.3.1 (Komplexe Zahlen)**.** *Die Menge* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ *bildet mit den Rechenoperationen*

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \tag{5.3.2}$$

$$(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y) \tag{5.3.3}$$

einen KÖRPER $\mathbb{C}$ *mit den neutralen Elementen* $0 = (0, 0)$ *und* $1 = (1, 0)$. $\mathbb{R}$ *ist in* $\mathbb{C}$ *als* $(\mathbb{R}, 0) \subset \mathbb{C}$ KANONISCH EINGEBETTET.

Definition 5.3.2 (Komplexe Zahlen)**.** Der Körper $\mathbb{C}$ heißt KÖRPER DER KOMPLEXEN ZAHLEN. Eine KOMPLEXE ZAHL $z \in \mathbb{C}$ schreibt man als

$$z = (x, y) = x + iy, \qquad i = (0, 1),$$

und bezeichnet $x = \Re z$ als REALTEIL von z, $y = \Im z$ als IMAGINÄRTEIL von z.

[9] Ein kurzer Querverweis in die lineare Algebra: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis $\{1\}$.

Beweis von Satz 5.3.1: Man überprüft die Körperaxiome nach Definition 2.1.1, was alles ziemlich Standard ist. Der einzig interessante Teil ist, daß

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right), \qquad (x,y) \neq 0,$$

das MULTIPLIKATIVE INVERSE von x, y ist. Das kann man einfach nachrechnen, aber man kann auch systematisch darauf kommen: Sucht man x', y' mit $(x,y) \cdot (x',y') = (1,0)$, so führt das zu den Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} xx' - yy' & = & 1 \\ yx' + xy' & = & 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

wie behauptet. □

Übung 5.3.1 Zeigen Sie[10]

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

◇

Bemerkung 5.3.3.

1. In der Algebra sind die komplexen Zahlen sehr wichtig, da sie, im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ ein ALGEBRAISCH ABGESCHLOSSENER KÖRPER sind, in dem auch alle Wurzeln aller Körperelemente enthalten sind, was dazu führt, daß POLYNOMIALE GLEICHUNGSSYSTEME immer lösbar sind.

2. Den Prozess, Wurzeln hinzuzunehmen, indem man Pärchen $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ bildet, als $x + \sqrt{a}\, y$ interpretiert und die zusätzliche Rechenregel $(\sqrt{a})^2 = a$ verwendet, bezeichnet man als ADJUNGIEREN dieser Wurzeln. Den resultierenden Körper schreibt man dann als $\mathbb{K}[\sqrt{a}]$ und er hat die Multiplikationsregel

$$(x,y) \cdot (x',y') = (xx' + ayy', x'y + xy').$$

Das ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Computeralgebra, siehe [11, 20], und weniger abgefahren als man denken mag: Man braucht solche Konzepte, um große ganze Zahlen schnell auf dem Computer multiplizieren zu können.

Übung 5.3.2 Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist. ◇

[10] Sofern Sie schon Lineare Algebra hatten.

Definition 5.3.4. Zu $\mathbb{C} \ni z = x + iy$ ist die KOMPLEX KONJUGIERTE ZAHL als $\overline{z} := x - iy$ und der ABSOLUTBETRAG als

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5.3.4}$$

definiert.

Mit Hilfe der komplexen Konjugation und gegebenenfalls (5.3.3) sieht man sofort, daß $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$ und vor allem

$$\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}). \tag{5.3.5}$$

Wichtiger ist aber die Tatsache, daß der komplexe Absolutbetrag ein „richtiger" Absolutbetrag ist.

Lemma 5.3.5. *Es gilt* $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *und*

1. $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann wenn* $z = 0$,
2. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, $z, z' \in \mathbb{C}$,

Beweis: 1) folgt sofort aus (5.3.4), 2) aus

$$|zz'|^2 = (zz')\overline{(zz')} = zz'\overline{z}\overline{z'} = |z|^2|z'|^2,$$

und für 3) bemerken wir zuerst, daß

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \geq \sqrt{(\Re z)^2} = |\Re z| \geq \Re z \tag{5.3.6}$$

und deswegen, mit (5.3.5),

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + \underbrace{z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}}}_{=2\Re(z\overline{z'})} + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2 \underbrace{|z\overline{z'}|}_{=|z||\overline{z'}|=|z||z'|} + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt durch Wurzelziehen. □

Hat man einmal einen vernünftigen Absolutbetrag[11], dann kann man über Folgen, Reihen und deren Konvergenz reden, und zwar jetzt auch über Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$.

Definition 5.3.6 (Komplexe Folgen & Reihen)**.** Eine KOMPLEXWERTIGE FOLGE $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt

1. KONVERGENT, wenn es ein $a^* \in \mathbb{C}$ und zu jedem $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n - a^*| < \varepsilon$, $n \geq n_0$,

[11] Genauer: Eine Metrik, aber mehr dazu erst in Analysis 2.

2. CAUCHY–FOLGE, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $m, n \geq n_0$.

Eine KOMPLEXWERTIGE REIHE Σa heißt KONVERGENT, wenn die (komplexwertige) Folge ihrer Partialsummen konvergiert und ABSOLUT KONVERGENT, wenn $\Sigma |a|$ konvergiert.

Übung 5.3.3 Zeigen Sie: $\mathbb{C}$ ist vollständig. ◊

Lemma 5.3.7 (Konvergenz im Komplexen). *Eine komplexwertige Folge a konvergiert genau dann, wenn die reellwertigen Folgen $\Re a$ und $\Im a$ konvergieren.*

Beweis: Aus (5.3.6) sehen wir, daß $|\Re z| \leq |z|$ und $|\Im z| \leq |z|$, so daß bei konvergentem a für $n \geq n_0$ auch

$$\varepsilon > |a_n - a^*| \geq |\Re a_n - \Re a^*| \qquad \text{und} \qquad \varepsilon > |a_n - a^*| \geq |\Im a_n - \Im a^*|$$

erfüllt ist und somit $\Re a_n \to \Re a^*$ und $\Im a_n \to \Im a^*$, was auch schon „$\Rightarrow$“ beweist. Für „$\Leftarrow$“ wählen wir zu $\varepsilon > 0$ den Index n_0, so daß $|\Re a_n - \Re a^*| < \varepsilon$ und $|\Im a_n - \Im a^*| < \varepsilon$, woraus

$$|a_n - a^*| = \sqrt{|\Re a_n - \Re a^*|^2 + |\Im a_n - \Im a^*|^2} < \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon$$

folgt, die komplexe Reihe konvergiert also ebenfalls. □

Da wir alle unsere Konvergenzkriterien für Folgen und Reihen im Komplexen einfach wortwörtlich kopieren können, lässt sich auch die Exponentialfunktion ohne Probleme erweitern.

Korollar 5.3.8 (Komplexe Exponentialfunktion). *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe*

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{5.3.7}$$

absolut, die Grenzfunktion $\exp(z)$ ist überall stetig und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z'). \tag{5.3.8}$$

Außerdem ist $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ und $\exp(z) = e^z$ und es gilt

$$\left|e^{ix}\right| = 1, \qquad \overline{e^{ix}} = e^{-ix}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.3.9}$$

Beweis: Konvergenz und Fuktionalgleichung funktionieren exakt wie im reellen Fall in Proposition 3.7.2 und Proposition 3.7.4, die Rechenregeln für die Konjugation liefern

$$\exp(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)},$$

weswegen

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(\overline{ix}) = \exp(-ix)$$

und damit

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(0) = 1$$

sein muss. □

Definition 5.3.9 (Trigonometrische Funktionen)**.** Die Funktionen COSINUS und SINUS, definiert als

$$\cos(x) := \Re e^{ix} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) := \Im e^{ix} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{5.3.10}$$

nennt man TRIGONOMETRISCHE FUNKTION. Sie erfüllen per Definitionem die EULERSCHE GLEICHUNG

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{5.3.11}$$

Satz 5.3.10 (Trigonometrische Funktionen)**.** *Die Funktionen* $x \mapsto \sin x$ *und* $x \mapsto \cos x$ *sind stetig und erfüllen*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{5.3.12}$$

und die ADDITIONSTHEOREME

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{5.3.13}$$

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y. \tag{5.3.14}$$

Außerdem ist $\cos$ *eine* GERADE FUNKTION, *d.h.* $\cos(-x) = \cos(x)$ *und* $\sin$ *eine* UNGERADE FUNKTION, *d.h.* $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Beweis: So schwer ist das alles gar nicht. Die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit von $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, (5.3.12) aus (5.3.9),

$$1 = |e^{ix}|^2 = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

die Additionstheoreme aus $e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix}e^{iy}$ und damit

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= (\cos x + i\sin x)\left(\cos y + i\sin y\right) \\ &= \left(\cos x\cos y - \sin x \sin y\right) + i\left(\cos x \sin y + \sin x \cos y\right). \end{aligned}$$

Der Realteil dieser Identität ist dann (5.3.13), der Imaginärteil (5.3.14). Nach (5.3.10) ist außerdem

$$\cos(-x) = \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} = \frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2} = \cos(x)$$

und

$$\sin(-x) = \frac{e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}}{2i} = \frac{e^{-ix}-e^{ix}}{2i} = -\sin(x).$$

□

Bemerkung 5.3.11 (Additionstheoreme & Musik)**.** Verwendet man (5.3.13) mit $\pm y$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y)+\cos(x-y) \\
&\quad = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = 2\cos x cos y,
\end{aligned}$$

und wenn man nun noch $x = \frac{\omega+\omega'}{2}$ und $y = \frac{\omega-\omega'}{2}$ setzt, dann erhält man die Formel

$$\cos(\omega)+\cos(\omega') = 2\cos\frac{\omega+\omega'}{2}\cos\frac{\omega-\omega'}{2}, \tag{5.3.15}$$

die für unser Musikverständnis eine wesentliche Rolle spielt. In der einfachsten Form modelliert man nämlich einen TON als eine Cosinusschwingung mit FREQUENZ ω und (5.3.15) sagt uns dann, was passiert, wenn zwei Töne gleichzeitig erklingen. Auf der rechten Seite sieht man nämlich einen Ton der mittleren Frequenz[12], auf den eine APLITUDENMODULATION angewendet wird, deren Frequenz der halben Differenz der beiden Frequenzen entspricht. Das sind sogenannte SCHWEBUNGEN, die man als ein „Wahwahwah“ wahrnehmen[13] kann und die die wesentliche Grundlage der physiologischen Harmonietheorie darstellen, siehe [14]. In der Praxis hat man Schwebungen auch benutzt, um Instrumente nach Gehör zu stimmen, denn alle praktischen Stimmsysteme verwenden Töne, die nicht exakt konsonant sind, sondern um ein definiertes Etwas davon abweichen.

Jetzt zurück von der Musik zur Mathematik und zur Reihenentwicklung von Sinus und Cosinus.

Proposition 5.3.12 (Sinus & Cosinus)**.** *Für $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{5.3.16}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{5.3.17}$$

und beide Reihen konvergieren absolut.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$i^k = \begin{cases} 1, & k \in 4\mathbb{N}_0 \\ i, & k \in 4\mathbb{N}_0 + 1 \\ -1, & k \in 4\mathbb{N}_0 + 2 \\ -i, & k \in 4\mathbb{N}_0 + 3 \end{cases}$$

und daher ist

$$\begin{aligned}
\cos + i \sin x &= e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!},
\end{aligned}$$

[12] Die „TONHÖHE“ liegt also zwischen ω und ω'.

[13] Nicht „wahnemen“!

was wir nur noch in Real- und Imaginärteil aufspalten und geeignet zusammenfassen müssen, um (5.3.16) und (5.3.17) zu bekommen. Die absolute Konvergenz ist klar, da es sich in beiden Fällen um Teilreihen der absolut konvergenten Exponentialreihe handelt. □

Die Reihen (5.3.16) sind eine Möglichkeit, Cosinus und Sinus auch praktisch zu berechnen, allerdings muss man dann natürlich nach endlich vielen Schritten abbrechen und sich überlegen, welchen Fehler man dabei macht. Solche Abschätzungen sind nicht weiter schwierig.

Lemma 5.3.13 (Fehlerabschätzung der Reihenentwicklungen). *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \qquad |x| \le 2n+3, \tag{5.3.18}$$

und

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \qquad |x| \le 2n+4. \tag{5.3.19}$$

Beweis: Wir beweisen nur die erste Abschätzung, die zweite funktioniert analog. Nach (5.3.16) ist

$$\begin{aligned} \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-n-1} \frac{x^{2(k-n-1)}}{2k(2k-1)\cdots(2n+3)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2n+2k+2)\cdots(2n+3)} \right) \end{aligned}$$

und daher

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \underbrace{\left| 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2n+2k+2)\cdots(2n+3)} \right|}_{=:\Sigma a}.$$

Die Reihe Σa mit

$$a_k = a_k(x) = (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2n+2k+2)\cdots(2n+3)}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

summiert wegen $|a_k| \le |a_1|^k$ eine monoton fallende alternierende Nullfolge wenn

$$1 = a_0 > |a_1| = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)},$$

also sicherlich wenn $x \le 2n+3$ ist. Dann ist

$$0 \le \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\ge 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\ge 0} + \cdots = \Sigma a = a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\ge 0} - \cdots \le a_0 = 1,$$

woraus (5.3.18) unmittelbar folgt. □

Jetzt begeben wir uns auf die Suche nach einer „magischen Zahl“.

Lemma 5.3.14 (Nullstelle des Cosinus). *Im Intervall* $[0,2]$ *hat die Funktion* $x \mapsto \cos(x)$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis: Daß $\cos(0) = 1$ ist, kann man aus (5.3.16) ablesen, an $x = 2$ verwenden wir die Abschätzung mit $n = 1$ und erhalten, daß

$$\cos 2 \le (1 - \frac{2^2}{2!}) + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0,$$

so daß nach dem Nullstellensatz 4.2.1 $\cos x$ *mindestens* eine Nullstelle in $[0,2]$ haben muss. Über die Restgliedabschätzung (5.3.19) zeigt man außerdem, daß $\sin x > 0$, $x \in (0,2]$: Für $n = 0$ ergibt sich[14] aus (5.3.19)

$$|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{3!} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{|x|^3}{6} \le \sin x - x \le \frac{|x|^3}{6}$$

und die linke der beiden Ungleichungen lässt sich für $x \ge 0$ in

$$\sin x \ge x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$$

umformen, was für $0 < x \le 2$ positiv ist. Aus der Identität

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$$

erhält man als Analogon zu (5.3.15), daß für $x, x' \in [0,2]$, $x \ge x'$

$$\cos x - \cos x' = -2 \underbrace{\sin \overbrace{\frac{x+x'}{2}}^{\in[0,2]}}_{\ge 0} \underbrace{\sin \overbrace{\frac{x-x'}{2}}^{\in[0,2]}}_{\ge 0} < 0,$$

weswegen der Cosinus strikt monoton fallend ist und daher höchstens eine Nullstelle haben kann. □

Definition 5.3.15 (π). Als KREISZAHL[15] π bezeichnen wir die eindeutige Zahl $\pi \in [0,4]$ mit der Eigenschaft $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Satz 5.3.16. $e^{i\pi} = -1$.

Beweis: Da $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ist $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$, also $\sin \frac{\pi}{2} \in \{\pm 1\}$ und da $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Damit ist

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = i,$$

also

$$e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1, \qquad e^{i\frac{3}{2}\pi} = i^3 = -i, \qquad e^{2i\pi} = i^4 = 1, \tag{5.3.20}$$

was sogar noch deutlich mehr ist. □

[14] Der Trick, eine Ungleichung $|x| \le y$ in $-y \le x \le y$ aufzuspalten, ist oft hilfreich und daher durchaus (be)merkenswert.

[15] In Kreuzworträtseln auch gerne als LUDOLF'SCHE ZAHL bezeichnet, nach Ludolf/Ludolph van Ceulen, 1540–1610, Fechtmeister (bei dem Namen) und Mathematiker, der π auf 35 Dezimalstellen berechnete, siehe [5].

Korollar 5.3.17 (PERIODIZITÄT). *Die Funktionen* $x \mapsto e^{ix}$ *und damit auch* $x \mapsto \cos x$ *und* $x \mapsto \sin x$ *sind* 2π*–*PERIODISCH*, d.h.*

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}, \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

Beweis: Folgt wegen (5.3.20) alles aus $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}\, e^{2\pi i} = e^{ix}$. □

Aufgrund der Periodizität sind Sinus und Cosinus zwar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber kennt man sie auf $[0,2\pi]$, dannt kennt man sie überall, da sich jedes $x \in \mathbb{R}$ als $x = 2k\pi + x'$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [0,2\pi)$ schreiben lässt. Das kann man auch formalisieren.

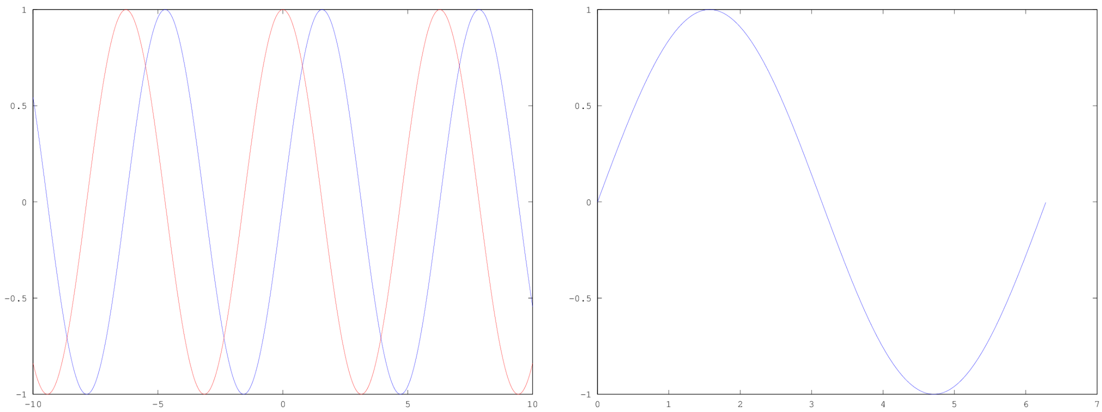

Abbildung 5.3.1: *Links:* Cosinus *(rot)* und Sinus *(blau)* auf dem Intervall $[-10,10]$, so daß man ein paar Schwingungen und die PERIODIZITÄT sieht. *Rechts:* Der Sinus auf dem Intervall $[0,2\pi]$.

Definition 5.3.18 (Torus). Der TORUS $\mathbb{T}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \equiv x' \qquad \Leftrightarrow \qquad x - x' \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Als REPRÄSENTANTENMENGE für $\mathbb{T}$ kann jedes Intervall der Länge 2π gewählt werden, beispielsweise $[-\pi,\pi]$ oder $[0,2\pi]$.

Bemerkung 5.3.19. Ein wichtiger Unterschied zwischen $\mathbb{T}$ und $[0,2\pi]$ ist, daß auf dem Torus Addition und Subtraktion immer wohldefiniert sind: Ist $x - x' < 0$ oder $x + x' > 2\pi$, dann addiert oder subtrahiert man solange 2π, bis man wieder im Intervall gelandet ist. Da das alles in derselben Äquivalenzklasse liegt, handelt es sich immer noch um dasselbe Element von $\mathbb{T}$.

Jetzt aber noch ein paar Eigenschaften von Cosinus und Sinus.

Proposition 5.3.20. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

1. $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *und* $\sin(x+\pi) = -\sin x$,
2. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ *und* $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.
3. *Die* NULLSTELLENMENGE *des Cosinus ist*

$$\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}, \tag{5.3.21}$$

die des Sinus

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5.3.22}$$

Beweis: Da

$$e^{i(x+\pi)} = e^{i\pi}\, e^{ix} = (-1)(\cos x + i \sin x) = -\cos x - i \sin x$$

ist, folgt 1) und wegen

$$e^{i(\frac{\pi}{2}-x)} = e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{-ix} = i(\cos x - i \sin x) = \sin x + i \cos x$$

ist 2) auch nicht wirklich schwerer. Für 3), genauer, für (5.3.21), erinnern wir uns daran, daß $\frac{\pi}{2}$ die einzige Nullstelle des Cosinus im Intervall $[0,2]$ ist und da $\cos -x = \cos x$, sind $\pm\frac{\pi}{2}$ auch die einzigen Nullstellen des Cosinus im Intervall $[-2,2] \supset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, da[16] $\pi < 4$. Wegen 1) gibt es damit auch keine Nullstelle im Intervall $\pi + (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ und $\frac{3}{2}\pi$ ist dann die nächste Nullstelle. Mit diesem Argument und 1) folgt dann (5.3.21), was dann zusammen mit 2) auch sofort (5.3.22) liefert. □

Jetzt haben wir unser Sammelsurium von von trigonometrischen Funktionen auch fast beisammen.

Definition 5.3.21. Die Funktionen TANGENS und COTANGENS sind definiert als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \qquad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}. \tag{5.3.23}$$

Tangens und Cotangens sind stetige Funktionen, aber sie haben Ausnahmepunkte, sogenannte POLE, an denen durch Null dividiert wird, so daß die Funktion dort den Wert $\pm\infty$ annimmt. Da die Nennerfunktion einen Vorzeichenwechsel hat, die Zählerfunktion aber von Null verschieden ist, springen die Funktionen sogar von $\pm\infty$ nach $\mp\infty$.

Sinus, Cosinus und Tangens haben auf den richtigen Intervallen auch Umkehrfunktionen. Dazu muss man sich natürlich überlegen, auf welchen Intervallen die trigonometrischen Funktionen positiv oder negativ bzw. monoton steigend oder monoton fallend sind.

[16] Es sollte sich herumgesprochen haben, daß $\pi = 3.1414592\ldots$ bzw. $\pi \approx \frac{22}{7}$, was die alten Ägypter verwendet haben. Man kann π beispielsweise aus der Reihenentwicklug des Cosinus und der Nullstellenforderung durch Intervallschachtelung ermitteln, siehe [10].

Definition 5.3.22 (Umkehrfunktionen)**.** Die Umkehrfunktion des Sinus ist der ARCUSSINUS

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

die des Cosinus der ARCUSCOSINUS

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

und die des Tangens der ARCUSTANGENS

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Die hier angegebenen Abbildungsbereiche nennt man HAUPTZWEIGE der Funktionen[17]

Zum Abschluss noch zwei Bemerkungen zu den komplexen Zahlen, die geometrisch wie praktisch von großer Bedeutung sind.

Proposition 5.3.23 (Polardarstellung komplexer Zahlen)**.** *Jede Zahl* $0 \neq z \in \mathbb{C}$ *kann* eindeutig[18] *als*

$$z = |z|\, e^{i\theta}, \qquad \theta \in [0,2\pi), \tag{5.3.24}$$

geschrieben werden.

Beweis: Wir setzen $z' = \frac{z}{|z|}$, so daß

$$1 = |z'|^2 = (\Re z')^2 + (\Im z')^2$$

gilt. Da $(\Re z')^2 \in [0,1]$ ist $\Re z' \in [-1,1]$ und $\alpha := \arccos \Re z' \in [0,\pi]$ ist wohldefiniert. Dann ist nach (5.3.12)

$$\Im z' = \pm\sqrt{1-(\Re z)^2} = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm \sin\alpha =: \sin\beta.$$

Nun setzen wir nur noch

$$\theta = \begin{cases} \alpha, & \alpha = \beta, \\ 2\pi - \alpha, & \alpha = -\beta, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \in [0,2\pi),$$

dann ist

$$z' = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}, \qquad \theta \in [0,2\pi),$$

wie behauptet. □

Definition 5.3.24 (Phase)**.** Die Zahl θ in (5.3.24) nennt man auch PHASE[19] oder ARGUMENT der komplexen Zahl z.

[17] Und wegen der Periodizität gibt es immer noch weitere Zweige.

[18] Und für $z = 0$ ist die Darstellung (5.3.24) sogar für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ erfüllt, wir brauchen die Unterscheidung also wirklich nur für die EINDEUTIGKEIT.

[19] Das kommt von der Interpretation als Wechselstrom oder als akustisches Signal.

Bemerkung 5.3.25 (Multiplikation)**.** Durch Proposition 5.3.23 haben wir eine geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen:

$$z\,z' = |z|\,e^{i\theta}\,|z'|\,e^{i\theta'} = |z||z'|\,e^{i(\theta+\theta')},$$

man multipliziert also die Beträge und addiert die Phasenwinkel. Insbesondere kann die Multiplikation mit einer komplexen Zahl auch als Rotation des anderen Faktors in der ZAHLENEBENE aufgefasst werden.

Proposition 5.3.26 (Einheitswurzeln)**.** *Für $n \ge 2$ hat die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau die n Lösungen*

$$\zeta_k := e^{2\pi i k/n}, \qquad k \in \{0,\dots,n-1\}, \tag{5.3.25}$$

*die man n–*TE EINHEITSWURZELN *nennt.*

Beweis: Da

$$\zeta_k^n = \left(e^{2\pi i k/n}\right)^n = e^{2\pi i k} = 1, \qquad k = 0,\dots,n-1,$$

ist jedes ζ_k eine Lösung von $z^n = 1$. Sei nun z eine beliebige Lösung, dann ist unter Verwendung von (5.3.24)

$$1 = |z^n| = |z|^n \qquad \Rightarrow \qquad |z| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z = e^{i\theta},$$

und damit

$$1 = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

so daß $n\theta$ eine Nullstelle des Sinus sein muss, was zu

$$n\theta \in \pi\mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z} \cap [0,2\pi) = \left\{\frac{k\pi}{n} \,:\, k = 0,\dots,2n-1\right\}$$

führt. Da

$$\cos 2k\pi = 1 \quad \text{und} \quad \cos(2k+1)\pi = -1, \qquad k = 0,\dots,n-1,$$

bleiben für $z^n = 1$ nur die geradzahligen Vielfachen von π übrig, was genau die Einheitswurzeln ζ_k liefert. □

Mit Hilfe der Sinusfunktion kann man auch eine „etwas andere“ Form der Unstetigkeit produzieren. Bisher war unser Bild von Unstetigkeiten auf abgeschlossenen Intervallen[20] immer das einer Sprungfunktion, aber es gibt auch andere Funktionen wie

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad x \in [-1,1],$$

wobei man $f(0) \in \mathbb{R}$ beliebig vorschreiben kann. Diese Funktion ist *nicht* stetig an $x = 0$, da sie in jeder Umgebung von 0 *jeden* Wert aus $[-1,1]$ beliebig oft annimmt. Die Funktion

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}, \qquad f(0) := 0,$$

hingegen ist sogar stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

[20] Dann ist da ja auch noch $x \mapsto 1/x$ auf $(0,1)$ ...

Differentiation | 6

[...] if you don't understand the math you can't write the code.

(Neal Stephenson, *Cryptonomicon*)

Jetzt ist es mehr als an der Zeit, endlich auch den Begriff der Ableitung einzuführen. Die Differentialrechnung wurde um 1700 höchstwahrscheinlich unabhängig voneinander[1] von Newton und Leibniz entdeckt bzw. erfunden, was zu einem Prioritätenstreit führte, der für eine Vielzahl von Anekdoten sorgte und immer noch sorgt.

6.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 6.1.1 (Differenzierbarkeit)**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt DIFFERENZIERBAR an $x \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}, \qquad x' \neq x, \tag{6.1.1}$$

existiert. Der Wert $f'(x)$ heißt DIFFERENTIALQUOTIENT oder ABLEITUNG von f an der Stelle x. Ist f an allen $x \in D$ differenzierbar, so nennt man f' die ABLEITUNGSFUNKTION von f und schreibt auch $\frac{df}{dx}$ dafür.

Bemerkung 6.1.2.

1. Zur Erinnerung: Der Grenzwert in (6.1.1) ist so zu verstehen, daß für jede Folge $x_n \subset D \setminus \{x\}$ mit $x_n \to x$ der Grenzwert

   $$c := \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

   existiert[2] und von der gewählten Folge *unabhängig* ist.

2. Alternativ kann man den Differentialquotienten[3] auch als

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad h \neq 0, \tag{6.1.2}$$

[1] Auch wenn das immer wieder Anlass für historischen Disput ist, siehe [6].

[2] Also insbesondere auch nicht „$= \infty$“ ist!

[3] Im Rahmen der Falsographiereform schreibt man neuerdings auch „DIFFERENZIALQUOTIENT“, aber das kommt dann auch von Leuten, denen solch debile Sprachverwirrungen wie „nummerieren“ eingefallen sind und die wahrscheinlich bald ein großes Austauschprogramm für die Verkehrsschilder fordern, auf denen seit vielen Jahren fälschlicherweise „Stop“ steht.

schreiben, was auch fast gebräuchlicher als (6.1.1) ist.

3. Die geometrische Interpretation von (6.1.1) ist, den Ausdruck auf der rechten Seite als Steigung der SEKANTE durch die beiden Punkte $f(x)$ und $f(x')$ zu interpretieren und im Grenzwert diese beiden Punkte so zusammenrücken zu lassen, daß sich am Ende die TANGENTE an die Kurve ergibt.

Beispiel 6.1.3 (Einfache Ableitungen)**.**

1. Für $f \equiv c \in \mathbb{R}$ ist für alle $x, x' \in D$ auch $f(x') - f(x) = c - c = 0$ und damit

$$\lim_{x' \to x,\ x' \neq x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{x' \to x,\ x' \neq x} \frac{0}{\underbrace{x' - x}_{=0}} = 0,$$

für $f(x) = x$ ergibt sich ganz analog

$$\lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{x' \to x} \frac{x' - x}{x' - x} = 1.$$

2. Für $f(x) = |x|$ und die Folge $x_n = \frac{1}{n} \to 0 =: x$ erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1,$$

mit $x_n = -\frac{1}{n}$ hingegen,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1.$$

Hier existiert zwar in beiden Fällen ein Grenzwert, aber der ist nicht von der Folge unabhängig. Allerdings gäbe es dann auch eine „wirklich böse“ Folge, siehe Übung 6.1.1.

Übung 6.1.1 Zeigen Sie: Gibt es Folgen x_n, x_n' mit

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_n' = x,$$

aber

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \neq \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x},$$

dann gibt es auch eine Folge y_n mit $y_n \to x$, für die die Folge

$$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x}$$

divergiert. ◇

Interessant ist die nächste Aussage, die Differenzierbarkeit als *gute* Approximierbarkeit von f durch lineare Funktionen beschreibt.

Satz 6.1.4. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle x differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß*

$$f(x') = \underbrace{f(x) + c(x'-x)}_{=:\ell(x')} + \varphi(x') \qquad \text{und} \qquad \lim_{x' \to x} \frac{\varphi(x')}{x'-x} = 0. \tag{6.1.3}$$

Beweis: Für „⇒" nehmen wir an, daß f an x differenzierbar ist und setzen einfach einmal $c := f'(x)$. Dann ist

$$\varphi(x') = f(x') - f(x) - f'(x)(x'-x)$$

und damit

$$\lim_{x' \to x} \frac{\varphi(x')}{x'-x} = \lim_{x' \to x} \left(\frac{f(x') - f(x)}{x'-x} - f'(x) \frac{x'-x}{x'-x} \right) = \underbrace{\lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x'-x}}_{=f'(x)} - f'(x) = 0.$$

Für die Umkehrung „⇐" betrachten wir

$$\lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x'-x} = \lim_{x' \to x} \left(\frac{c(x'-x)}{x'-x} + \frac{\varphi(x')}{x'-x} \right) = c + \underbrace{\lim_{x' \to x} \frac{\varphi(x')}{x'-x}}_{=0} = c,$$

also ist auch $f'(x) = c$. □

Die Aussage von Satz 6.1.4 ist also, daß es die magische AFFINE FUNKTION[4] $\ell : f(x) + f'(x)(\cdot - x)$ gibt, die f so gut annähert, daß der Fehler $\varphi(x')$ schneller als $x - x'$ gegen Null geht.

Korollar 6.1.5 (Stetigkeit)**.** *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$* DIFFERENZIERBAR*, so ist f in x auch* STETIG*.*

Beweis: Wegen (6.1.3) ist

$$\begin{aligned} \lim_{x' \to x} f(x') &= \lim_{x' \to x} \left(f(x) + f'(x)(x'-x) + \varphi(x') \right) \\ &= f(x) + f'(x) \underbrace{\lim_{x' \to x} (x'-x)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x' \to x} (x'-x) \frac{\varphi(x')}{x'-x}}_{=0} = f(x). \end{aligned}$$

und der Rest ist Satz 4.1.2. □

Jede differenzierbare Funktion ist stetig und die Umkehrung gilt, wie $f(x) = |x|$ zeigt, natürlich nicht. Allerdings ist diese Funktion ja nur an einer Stelle nicht differenzierbar, nämlich am „Knick". Natürlich kann man Funktionen bauen, die beliebig viele Knicke haben und selbst auf

[4] Die Namen „affine Funktion" und „LINEARE FUNKTION" werden oftmals synonym verwendet, aber genau genommen ist eine lineare Funktion von der Form $f : x \mapsto ax$, und damit $f(x+y) = x + y$ und eine affine Funktion von der Form $f : x \mapsto ax + b$, was nur noch $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha x + (1-\alpha)y$ ergibt.

einem endlichen Intervall unendlich viele Knicke provozieren. Aber gibt es auch Funktionen, die stetig und *nirgends* differenzierbar sind? Das war lange Zeit eine offene Frage und wurde erst 1909 von Faber in [9] positiv beantwortet. Die Konstruktion ist erfreulich elementar, aber trotzdem trickreich und liefert beliebig „zackige" Funktionen.

Beispiel 6.1.6 (Ableitung der Exponentialfunktion)**.** Um die Ableitung von $f(x) = \exp(x)$ zu berechnen, erinnern wir uns, daß

$$\begin{aligned} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} \\ &= \exp(x) \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \exp(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = \exp(x) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} \right) \\ &= \exp(x) + \exp(x) \underbrace{h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+2)!}}_{\to 0} \to \exp(x), \end{aligned}$$

wann immer $h \to 0$. Also ist $\exp' = \exp$.

6.2 Rechenregeln

Als nächstes die allseits bekannten Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.

Satz 6.2.1 (Grundrechenarten)**.** *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ an $x \in D$ differenzierbar*[5]*, dann gilt:*

1. *λf und $f \pm g$ sind differenzierbar an x und es gilt*

$$(\lambda f)'(x) = \lambda\, f'(x), \qquad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x). \tag{6.2.1}$$

2. *$f \cdot g$ ist differenzierbar an x mit*

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) g'(x) + f'(x) g(x). \tag{6.2.2}$$

3. *Ist zusätzlich $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g an x differenzierbar und es gilt*[6]

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{6.2.3}$$

Beweis: Punkt 1 und (6.2.1) folgen sofort aus den Rechenregeln für Folgen und deren Grenzwerte. Für die PRODUKTREGEL (6.2.2) betrachten

[5] Mit der Konsequenz, daß es Folgen $x_n \neq x$ mit $x_n \to x$ gibt.
[6] Wir verwenden hier übungshalber einmal die andere Notation.

wir

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \frac{1}{h}\big((f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))\big)\\
&= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)}\underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)}+\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}f(x) \to f'(x)g(x)+f(x)g'(x),
\end{aligned}$$

was man auch als formalen Grenzübergang schreiben kann und was 2) beweist[7]. Für 3) bemerken wir zuerst, daß $g(x) \neq 0$ wegen der Stetigkeit auch $g(x+h) \neq 0$ für alle hinreichend kleinen $|h|$ bedingt[8], und für alle solchen h gilt dann

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{g(x)-g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}\\
&= -\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to \frac{-g'(x)}{g^2(x)},
\end{aligned}$$

und unter Verwendung von (6.2.2)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},
\end{aligned}$$

was genau die QUOTIENTENREGEL[9] (6.2.3) liefert. □

Beispiel 6.2.2 (Ableitung der Polynome)**.** Verifizieren wir doch einmal unsere schönen neuen Regeln an den Funktionen der Form $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ein derartige Funktion nennt man POLYNOM, oder, um genau zu sein MONOM, schließlich handelt es sich ja nur um einen einzigen Term. In der Tat gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{6.2.4}$$

was man durch Induktion über n auch leicht nachweist: Für $n = 0$ ist[10] $f(x) = 1$ und daher[11] $f'(x) = 0 = 0 \cdot x^{-1}$, für[12] $n = 1$ ist $f(x) = x$ und

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1 = 1 \cdot x^0,$$

[7] Wenn der Differentialquotient existiert, und den haben wir ja gerade ausgerechnet, dann ist die Funktion differenzierbar.

[8] In dem „ε–δ“ Kontext der Stetigkeit brauchen wir nur $0 < \varepsilon < |g(x)|$“ zu wählen und dann $|h| < \delta$. Wer's jetzt noch nicht kapiert hat, sollte den Beweis dringend als Übung ausformulieren!

[9] Bekannt als „NAZ-ZAN durch N Quadrat“.

[10] Wer genau aufpasst findet hier eine $0^0 = 1$–Konvention, was aber einfach nur eine stetige Fortsetzung der Funktion ist, und wer will sich schon durch eine Unstetigkeit an 0 das Leben schwer machen?

[11] Schon wieder eine stetige Fortsetzung!

[12] Das ist der Induktionsanfang für Feiglinge, denn wie wir in den Fußnoten gesehen haben, enthält der Fall $n = 0$ ein paar implizite Annahmen der stetigen Fortsetzung.

und der Induktionsschritt ergibt sich mit (6.2.2) aus

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = x^n + xnx^{n-1} = (1+n)x^n.$$

Die Formel (6.2.4) gilt aber sogar für $n \in \mathbb{Z}$, denn ist ist $n := -m < 0$, so ist, natürlich für $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Der nächste Satz sagt anschaulich, daß beim Vertauschen von x und $y = f(x)$ die Steigung durch ihren Reziprokwert zu ersetzen ist.

Satz 6.2.3 (Inverse Funktion). *Sie $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion*[13]*, die an $x \in D$ differenzierbar ist und für die $f'(x) \neq 0$ gilt. Dann ist f^{-1} an $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \tag{6.2.5}$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß f^{-1} für $y \in D' = f(D)$ existiert und stetig ist. Sei $y_n \subset D'$ eine Folge mit $y_n \to y$, wobei $y_n = f(x_n)$ mit $x_n \to x$, dann ist

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{f^{-1}\left(f(x_n)\right) - f^{-1}\left(f(x)\right)}{f(x_n) - f(x)} = \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)}$$

was für $n \to \infty$ gegen $1/f'(x)$ konvergiert. □

Beispiel 6.2.4 (Ableitung des Logarithmus). Das klassische Beispiel für eine Umkehrfunktion ist $f(x) = \log(x) = \exp^{-1}(x)$. Aus (6.2.5) folgt dann

$$f'(x) = \log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Satz 6.2.5 (Kettenregel). *Sind $g : D \to \mathbb{R}$ und $f : g(D) \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $x \in D$ und $g(x) \in g(D)$, dann ist $f \circ g$ an x differenzierbar und es gilt die* KETTENREGEL

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x). \tag{6.2.6}$$

Beweis: Für $y \in D' = g(D)$ setzen wir

$$f^*(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x))}{y - g(x)}, & y \neq g(x), \\ f'(g(x)), & y = g(x), \end{cases} \tag{6.2.7}$$

und da f differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{y \to g(x)} f^*(y) = f'(g(x)).$$

[13] Wir brauchen das, damit die Umkehrfunktion existiert.

Außerdem erhalten wir aus (6.2.7) und der Stetigkeit von f, daß

$$f(y) - f(g(x)) = f^*(y)(y - g(x)), \qquad y \in D'.$$

Damit ist für jede Folge $x_n \subset D \setminus \{x\}$ mit $x_n \to x$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(g(x_n)) - f(g(x))}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(g(x))}{x_n - x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f^*(y_n)\big(y_n - g(x)\big)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} f^*(y_n) \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} \\
&= \underbrace{\lim_{n\to\infty} f^*(y_n)}_{=f'(g(x))} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x}}_{=g'(x)} = f'(g(x))\, g'(x).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 6.2.6 (Trigonometrische Funktionen)**.** Mit den Rechenregeln aus Satz 6.2.1 können wir Beispiel 6.1.6 auch auf die trigonometrischen Funktionen erweitern:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} \cos x + i \frac{d}{dx} \sin x = (\cos x + i \sin x)' \\
&= \big(\exp(ix)\big)' = i \exp(ix) = i(\cos x + i \sin x) = i \cos x - \sin x,
\end{aligned}$$

und so erhalten wir die bekannten Regeln

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\sin x)' = \cos x. \tag{6.2.8}$$

6.3 Höhere Ableitungen

Was man einmal machen kann, kann man natürlich wiederholen und so Funktionen auch mehrfach ableiten. Dazu aber erst einmal eine Definition.

Definition 6.3.1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt DIFFERENZIERBAR in D, wenn f an jeder Stelle $x \in D$ differenzierbar ist, also f' als Funktion von D nach $\mathbb{R}$ existiert. Die Funktion f heißt STETIG DIFFERENZIERBAR auf D, wenn die Funktion f' außerdem auf D stetig ist.

Es ist gar nicht so einfach, Funktionen zu finden, die differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar sind, denn Sprungstellen, die typischen Unstetigkeiten helfen nicht.

Beispiel 6.3.2. Die Funktion $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ mit $f(0) = 0$, siehe Übung 6.3.1, hat nach (6.2.8) die Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

die an $x = 0$ nicht stetig ist, sondern in jeder Umgebung von $x = 0$ jeden Wert zwischen -1 und 1 annimmt. Dennoch existiert

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Übung 6.3.1 Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f(x) = x^k \sin \frac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R}$, wenn man $f(0) = 0$ setzt. ♢

Ist nun $f' : D \to \mathbb{R}$ als Funktion definiert[14] und ist $x \in D$ ein Punkt, zu dem es Folgen $x_n \in D \setminus \{x\}$ gibt, so daß $\lim x_n = x$, dann können wir auch für f' einen Differentialquotienten bilden und erhalten

$$f''(x) := (f')'(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f'(x') - f'(x)}{x' - x}, \tag{6.3.1}$$

sofern der Limes rechts existiert. Existiert f'', dann ist natürlich nach Corollar 6.1.5 auch f' an dieser Stelle stetig. Diese Idee kann man in einer rekursiven Definition formalisieren.

Definition 6.3.3 (Höhere Differenzierbarkeit)**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt k MAL DIFFERENZIERBAR auf D, $k \in \mathbb{N}$, falls f $k-1$ mal differenzierbar ist und die Funktion $f^{(k-1)} := \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f$ auf D differenzierbar ist. Hierbei ist Differenzierbarkeit als 1–malige Differenzierbarkeit zu verstehen. Die entsprechende kTE ABLEITUNG bezeichnen wir mit $f^{(k)}$.

Ist f eine k mal differenzierbare Funktion und ist $f^{(k)}$ stetig auf D, so nennen wir dies k MAL STETIG DIFFERENZIERBAR. Die Menge aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D bezeichnen wir mit $C^k(D)$, wobei $C^0(D) = C(D)$.

Bemerkung 6.3.4. Höhere Differenzierbarkeit an einer Stelle ist ein wenig unhandlich, denn um $f^{(k)}(x)$ zu bestimmen brauchen wir ja Differentialquotienten von $f^{(k-1)}$ um x herum, so daß zumindest diese Funktion zumindest auf einem Teil von D in der Nähe von x existieren muss. Dann können wir alles auch gleich auf ganz D machen und schlimmstenfalls lieber D verkleinern.

Übung 6.3.2 Zeigen Sie: $C^k(D)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und geben Sie die (überraschende) Rechenregel für $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^k(D)$ an. ♢

Übung 6.3.3 Beweisen Sie die LEIBNIZ–REGEL

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.3.2}$$

Hinweis: Induktion könnte funktionieren. ♢

Übung 6.3.4 Berechnen Sie $(f \circ g)''$ und $(f \circ g)'''$. ♢

[14] Erst einmal ganz egal, ob stetig oder nicht.

6.4 Extrema, Zwischenwerte und schöne Dinge

Wir beginnen mit ein wenig Extremismus.

Definition 6.4.1 (Extrema)**.** Ein Punkt $x \in D$ heißt LOKALES MINIMUM bzw. LOKALES MAXIMUM einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß

$$f(x) \le f(x') \quad \text{bzw.} \quad f(x) \ge f(x'), \qquad x' \in D, |x' - x| < \varepsilon. \tag{6.4.1}$$

Ein LOKALES EXTREMUM ist ein lokales Minum oder ein lokales Maximum[15]. Man bezeichnet ein lokales Extremum als STRIKTES LOKALES EXTREMUM, wenn in (6.4.1) die strikte Ungleichung für $x' \ne x$ gilt.

Extrema kann man über die Ableitung beschreiben. Allerdings muss man mit dem Definitionsbereich ein weig aufpassen.

Satz 6.4.2 (Extrema & Ableitungen)**.** *Sei $f \in C^1[a,b]$ und $x \in (a,b)$ ein lokales Extremum von f. Dann ist $f'(x) = 0$.*

Beweis: Wir nehmen an, f hätte an x ein Maximum, für Minima funktioniert der Beweis analog.

Da $x \in (a,b)$ gibt es zu dem magischen $\varepsilon > 0$ aus Definition 6.4.1 Folgen $x_n^+ > x > x_n^-$, mit

$$|x_n^\pm - x| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = x.$$

Da $f(x) \ge f(x_n^\pm)$ ist, gilt auch

$$\frac{\overbrace{f(x_n^+) - f(x)}^{\le 0}}{\underbrace{x_n^+ - x}_{\ge 0}} \le 0 \le \frac{\overbrace{f(x_n^-) - f(x)}^{\le 0}}{\underbrace{x_n^- - x}_{\le 0}}$$

und somit

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n^-) - f(x)}{x_n^- - x} = f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n^+) - f(x)}{x_n^+ - x} \le 0,$$

wovon sich $f'(x) = 0$ ablesen lässt. □

Bemerkung 6.4.3 (Ableitung $= 0$)**.**

1. Die Bedingung $f'(x) = 0$ ist nur eine NOTWENDIGE BEDINGUNG für die Existenz eines lokalen Extremums, die außerdem nicht zwischen Minima und Maxima unterscheiden kann.

[15]Verständnisfrage: Ist auch beides gleichzeitig möglich?

2. Damit der Beweis funktioniert, brauchen wir zwei Folgen, die sich von rechts und von links an x annähern, der Punkt x darf also kein RANDPUNKT des Intervalls sein.

3. Für Randpunkte ist die Aussage von Satz 6.4.2 sogar falsch. Das einfache Beispiel ist die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0,1]$: Der Randpunkt $x = 1$ ist ein lokales Maximum der Funktion, aber $f'(1) = 1 \neq 0$.

Als nächstes gibt es Varianten des Zwischenwertsatzes für Ableitungen. Da wir auch für den Zwischenwertsatz Funktionen auf einem INTERVALL I betrachtet haben, für die zu je zwei Punkten $x, x' \in I$ auch alle Zwischenpunkte zu I gehört haben[16], werden wir das auch hier benötigen. Außerdem spielen, wie wir gerade gesehen haben, bei Ableitungen die Randpunkte eine gewisse Rolle, so daß wir jetzt ein bisschen sorgfältiger zwischen offenen und abgeschlossenen Intervallen unterscheiden müssen.

Satz 6.4.4 (Satz von Rolle)**.** *Sei $a < b$ und*[17] $f \in C[a,b] \cap C^1(a,b)$ *und* $f(a) = f(b)$*. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.*

Normalerweise formuliert man den Satz von Rolle in einer minimal schwächeren Form als Aussage über Nullstellen.

Korollar 6.4.5 (Rolle klassisch)**.** *Sei $f \in C^1(I)$ und $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Dann gibt es ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x) = 0$.*

Beweis von Satz 6.4.4: Ist f konstant, dann ist $f' \equiv 0$ und der Satz ist trivialerweise richtig. Wenn nicht, dann ist entweder $\min_{x \in [a,b]} f(x) < f(a)$ oder $\min_{x \in [a,b]} f(x) > f(a)$ und da f eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ist, wird das Extremum an einer Stelle $x \in (a,b)$ angenommen[18], die dann auch ein lokales Extremum ist und daher $f'(x) = 0$ erfüllt. □

Proposition 6.4.6 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)**.** *Ist $a < b$ und $f \in C[a,b] \cap C^1(a,b)$, dann gibt es $x \in (a,b)$, so daß*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x). \tag{6.4.2}$$

Beweis: Voraussetzungen und Positionierung dieses Resultats legen nahe, daß hier der Satz von Rolle hilfreich sein könnte. Dazu betrachtet man $g \in C[a,b]$, definiert durch

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

[16] Allgemein bezeichnet man so etwas als eine KONVEXE MENGE.
[17] Nette Übung: Geben Sie eine Funktion $f \in C^1(a,b)$ mit $f \notin C[a,b]$ an.
[18] Die Randpunkte können es ja nicht sein, da wir „<“ bzw. „>“ abgenommen haben.

mit $g(a) = f(a) = g(b)$. Nach Satz 6.4.4 gibt es ein x mit

$$0 = g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

was genau (6.4.2) ist. □

Aus (6.4.2) folgt direkt die nächste Aussage.

Korollar 6.4.7. *Ist $a < b$ und $f \in C[a,b] \cap C^1(a,b)$ mit $m \le f'(x) \le M$, $x \in (a,b)$, dann ist*

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a).$$

Ist insbesondere $m = M = 0$, also $f' \equiv 0$, so ist f konstant.

Mit Korollar 6.4.7 können wir unsere erste DIFFERENTIALGLEICHUNG lösen.

Proposition 6.4.8. *Für $c \in \mathbb{R}$ ist jede Lösung der Differentialgleichung*

$$f'(x) = c\,f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.4.3}$$

von der Form $f(x) = \lambda e^{cx}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: Mit $g(x) := e^{-cx} f(x)$ ergeben die PRODUKTREGEL aus Satz 6.2.1 und (6.4.3), daß

$$g'(x) \quad = \quad (-c)e^{-cx} f(x) + e^{-cx} \underbrace{f'(x)}_{=cf(x)} = e^{-cx}\big(-cf(x) + cf(x)\big) = 0,$$

also ist nach Korollar 6.4.7 $g(x) = \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und damit $f(x) = \lambda e^{cx}$. □

Proposition 6.4.9. *Ist $a < b$ und $f \in C[a,b] \cap C^1(a,b)$, dann ist f genau dann* MONOTON STEIGEND, *wenn $f'(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$, und monoton fallend falls $f'(x) \le 0$. Gelten die strikten Ungleichungen, so ist auch die Monotonie strikt.*

Beweis: Wir beweisen es für monoton steigende Funktionen, für fallende Funktionen geht es genauso. Für „⇒“ betrachten wir eine Folge $x_n > x$ und erhalten sofort, daß

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}}_{\ge 0} \ge 0.$$

Für „⇐“ nehmen wir an, daß $f'(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$ und wählen $a \le x < x' \le b$. Dann gibt es nach Proposition 6.4.6 ein $\xi \in (x, x')$ mit

$$f(x') - f(x) = \underbrace{(x' - x)}_{>0} \underbrace{f'(\xi)}_{\ge 0} \ge 0,$$

und gilt $f'(\xi) > 0$, so haben wir sogar strikte Ungleichung. □

Proposition 6.4.10 (Hinreichende Bedingung für Extrema). *Sei $f \in C^1(a,b)$ zweimal differenzierbar in $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$. Dann besitzt f an der Stelle x ein* STRIKTES LOKALES MINIMUM *bzw. Maximum, d.h., es gibt $\varepsilon > 0$, so daß $f(x) < f(x')$ bzw. $f(x) > f(x')$ für alle $x' \neq x$ mit $|x - x'| < \varepsilon$.*

Beweis: Da

$$0 < f''(x) = \lim_{x' \to x} \frac{f'(x') - f'(x)}{x' - x},$$

gibt es $\varepsilon > 0$, so daß für alle $x' \neq x$ mit $|x' - x| < \varepsilon$ auch $\frac{f'(x')}{x'-x} > 0$ gilt, da ja $f'(x) = 0$ ist. Damit ist $f'(x') < 0$ für alle $x' < x$ und $f'(x') > 0$ für alle $x' > x$, $|x' - x| < \varepsilon$. Nach Proposition 6.4.9 ist damit f links von x erst einmal *streng* monoton fallend und rechts von x *streng* monoton steigend, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 6.4.11. Diesmal haben wir eine HINREICHENDE BEDINGUNG für ein Extremum, die aber leider nicht notwendig ist, denn im Falle $f''(x) = 0$ kann alles passieren, wie die Beispiele

$$f(x) = \pm x^4 \qquad \text{und} \qquad f(x) = x^3$$

zeigen.

Die $n$te Ableitung $f^{(n)}$ ergibt sich ja als ein Grenzwert von Sekanten an die $(n-1)$te Ableitung, die ihrerseits wieder ein Grenzwert von Sekanten ist, und so weiter. In Definition 6.3.3 haben wir es so gemacht, daß wir die Grenzwerte sozusagen „der Reihe“ nach abgearbeitet haben, indem zuerst an jedem Punkt die erste Ableitung, dann daraus die zweite Ableitung, etc. Man kann das aber auch direkt machen und landet dann bei einem Konzept, das auf Newton zurückgeht, und der selbst[19] darüber sagte: „*Est enim fere ex pulcherrimis quae solvere desiderem*[20]“: Für $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_j \in \mathbb{R}$ ist die DIVIDIERTE DIFFERENZ $[x_1, \dots, x_n]f$, $n \in \mathbb{N}$, rekursiv als

$$[x_1]f \;:=\; f(x_1), \tag{6.4.4}$$

$$[x_1, \dots, x_{n+1}]f \;:=\; \frac{[x_2, \dots, x_{n+1}] - [x_1, \dots, x_n]f}{x_{n+1} - x_1}. \tag{6.4.5}$$

definiert. Der Spezialfall $n = 2$ der dividierten Differenz ist gerade der DIFFERENTIALQUOTIENT

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

dividierte Differenzen höherer Ordnung sind dann eben Differentialquotienten von Differentialquotienten. Und tatsächlich sind dividierte Differenzen auch beinahe Ableitungen, es gilt nämlich in Verallgemeinerung

[19] In einem Brief an Leibniz via Oldenburg 1676, siehe [4].

[20] *„Es gehört nämlich zu den schönsten Dingen, die zu lösen ich mir wünschen könnte.“* Oder so ähnlich.

von Proposition 6.4.6 für $f \in C^{n-1}(a,b)$ und $x_1,\dots,x_n \in (a,b)$ der Zwischenwertsatz

$$[x_1,\dots,x_n]f = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}, \qquad \xi \in \left(\min_{j=1,\dots,n} x_j, \max_{j=1,\dots,n} x_j \right). \tag{6.4.6}$$

Das ist gar nicht so schwer zu beweisen und taucht normalerweise im Kontext der POLYNOMINTERPOLATION in der numerischen Mathematik auf, siehe z.B. [7, 22].

6.5 Konvexität

Als nächstes eine ganz wichtige Klasse von Funktionen.

Definition 6.5.1 (Konvexität)**.** Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt KONVEX, wenn für alle $x, x' \in I$ die Ungleichung[21]

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)x'\right) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x'), \qquad \lambda \in (0,1) \tag{6.5.1}$$

erfüllt. f heißt KONKAV, wenn $-f$ konvex ist. Funktionen heißen STRIKT KONVEX bzw. STRIKT KONKAV, wenn die Ungleichung in (6.5.1) strikt ist.

Bemerkung 6.5.2 (Eigenschaften der Konvexität)**.**

1. Die Bedingung (6.5.1) lässt sich auch geometrische interpretieren, nämlich daß für alle x, x' die Funktion f komplett unterhalb der Verbindungslinie bzw. SEKANTE durch x und x' verläuft.

2. Konvexe Funktionen bilden keinen VEKTORRAUM mehr. Ist f kovex, dann ist $-f$ konkav, was normalerweise nicht dasselbe ist, siehe Übung 6.5.1. Allerdings ist die Menge der konvexen Funktionen ein POSITIVER KEGEL:

$$f, g \text{ konvex} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha f + \beta g \text{ konvex}, \quad \alpha, \beta \ge 0. \tag{6.5.2}$$

3. Insbesondere folgt aus (6.5.2) auch, daß für zwei konvexe Funktionen f, g auch deren KONVEXKOMBINATION $\alpha f + (1-\alpha) g$, $\alpha \in (0,1)$ konvex ist: Die Menge der konvexen Funktionen ist eine KONVEXE MENGE[22].

4. Konvexe Funktionen und konvexe Mengen spielen eine nicht zu unterschätzende Rolle in der Mathematik, insbesondere in der OPTIMIERUNG[23], so daß es nicht verwundert, daß KONVEXE ANALYSIS als eigenständiges mathematisches Teilgebiet etabliert ist.

---

[21] Die für $\lambda = 0, 1$ trivialerweise erfüllt ist, so daß das offene Intervall keine signifikante Einschränkung darstellt.

[22] Genau wie Intervalle, die ebenfalls die Eigenschaft haben, daß mit $x, x' \in I$ auch die Konvexkombination $\alpha x + (1-\alpha)x'$ zu I gehört.

[23] Wo es einen ganz gewaltigen Unterschied macht, ob man konvexe oder nichtkonvexe Situationen betrachtet.

5. Da wir für $f: D \to \mathbb{R}$ für alle Punkte $x, x' \in D$ die Kombination $\lambda x + (1-\lambda)x'$ bilden und f an dieser Stelle auswerten können müssen, enthält D mit[24] $x < x'$ auch $\{y : x \le y \le x\}$ und muss damit ein Intervall sein. Genauer: Konvexe Funktionen sind nur auf konvexen Mengen sinnvoll definiert und die einzigen konvexen Mengen, die wir momentan kennen, sind Intervalle.

Übung 6.5.1 Zeigen Sie: Eine Funktion f ist genau dann konvex *und* konkav, wenn f von der Form $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, ist. ♢

Satz 6.5.3 (Konvexität und zweite Ableitung)**.** *Eine Funktion $f \in C^2(a,b)$ ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$, erfüllt ist.*

Beweis: „⇒“: Ist f konvex und gibt es ein x^* mit $f''(x^*) < 0$, dann ist

$$g(x) := f(x) - f'(x^*)(x - x^*)$$

ebenfalls in $C^2(a,b)$ und erfüllt

$$g'(x) = f'(x) - f'(x^*) \qquad \Rightarrow \qquad g'(x^*) = 0$$

sowie

$$g''(x) = f''(x) \qquad \Rightarrow \qquad g''(x^*) = f''(x^*) < 0,$$

so daß g an der Stelle x^* ein lokales Maximum hat. Wählen wir nun zwei naheliegende und hinreichend nahe liegende Stellen $x_1 < x^* < x_2$ mit $f(x_j) < f(x^*)$, dann ist[25]

$$x^* = \frac{x_2 - x^*}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x^* - x_1}{x_2 - x_1} x_2 =: \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2,$$

aber

$$\lambda \underbrace{f(x_1)}_{<f(x^*)} + (1-\lambda) \underbrace{f(x_2)}_{<f(x^*)} < f(x^*)(\lambda + 1 - \lambda) = f(x^*) = f\left(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right),$$

im Widerspruch zur Konvexität von f.

Für „⇐“ nehmen wir an, daß $f''(x) \ge 0$ ist, was sofort nach Proposition 6.4.6 für $x < x'$ die Abschätzung

$$f'(x') - f'(x) = \underbrace{(x' - x)}_{>0} \underbrace{f''(\xi)}_{\ge 0} \ge 0, \qquad \xi \in (x, x')$$

ergibt, so daß f' MONOTON STEIGEND ist. Sei nun $x_1 < x_2$ und $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in (x_1, x_2)$, $\lambda \in (0,1)$. Dann verwenden wir Proposition 6.4.6 noch zweimal und erhalten

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \qquad \text{und} \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

[24] Ohne Einschränkung ...

[25] Einfach ausrechnen, wenn es jemand nicht glauben sollte.

wobei

$$(x_1, x) \ni \xi_1 < \xi_2 \in (x, x_2).$$

Da f' monoton steigend ist, ist $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$ und damit[26]

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \Leftrightarrow \quad (x_2 - x_1) f(x) \le f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1),$$

also

$$f(x) \quad = \quad \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f(x) \le \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}}_{=\lambda} f(x_1) + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{=1-\lambda} f(x_2)$$

und damit ist f konvex. □

Bemerkung 6.5.4 (Konvexität & Extrema)**.** Durch Satz 6.5.3 sollte nun auch klar sein, *warum* Konvexität so viel mit Optimierung, also der Kunst, Extrama zu bestimmen, zu tun hat: Nach Proposition 6.4.10 liegt immer dann ein Minimum vor, wenn $f'(x) = 0$ ist und wenn zusätzlich $f''(x) > 0$ gilt, wenn die Funktion also lokal STRIKT KONVEX ist. Umgekehrt erhalten wir ein Maximum, wenn die Funktion lokal konkav ist, natürlich immer zusammen mit $f'(x) = 0$. Konvexität und Konkavität beschreiben das lokale Krümmungsverhalten und helfen daher bei der Klassifizierung eines Extremums.

Satz 6.5.5 (Konvexität & Stetigkeit)**.** *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex, dann ist $f \in C(a, b)$.*

Beweis: Wir fixieren $x \in (a, b)$ und wählen $\delta \in \mathbb{R}$ so, daß $x \pm \delta \in (a, b)$, was nur eine Einschänkung an $|\delta|$ ist. Dann definieren wir die Funktion

$$\varphi(h) := \frac{f(x + h\delta) - f(x)}{h}, \qquad h \in [0, 1]$$

und betrachten $\lim_{h \to 0} \varphi(h)$. Da

$$x = \frac{1}{h+1}(x + h\delta) + \frac{h}{h+1}(x - \delta),$$

ist wegen der Konvexität von f

$$f(x) \le \frac{1}{h+1} f(x + h\delta) + \frac{h}{h+1} f(x - \delta)$$

und damit

$$\frac{h}{h+1} f(x) = f(x) - \frac{1}{h+1} f(x) \le \underbrace{\frac{1}{h+1}\big(f(x + h\delta) - f(x)\big)}_{=\frac{h}{h+1}\varphi(h)} + \frac{h}{h+1} f(x - \delta),$$

[26]Mit $(x_2 - x)(x - x_1)$ durchmultiplizieren und umformen

also
$$\varphi(h) \geq f(x) - f(x-\delta), \tag{6.5.3}$$
für jede Folge $h_n > 0$ mit $h_n \to 0$ ist also $\varphi(h_n)$ und damit auch der Grenzwert nach unten beschränkt. Andererseits gilt aber für $0 < h' < h$, daß

$$\begin{aligned}
h'\varphi(h') &= f(x+h'\delta) - f(x) = f\left(\frac{h-h'}{h}x + \frac{h'}{h}(x+h\delta)\right) - f(x) \\
&\leq \frac{h-h'}{h}f(x) + \frac{h'}{h}f(x+h\delta) - f(x) = \frac{h'}{h}\big(f(x) - f(x+h\delta)\big) \\
&= h'\varphi(h),
\end{aligned}$$

die Funktion φ ist also MONOTON STEIGEND. Damit ist für jede monotone Nullfolge $h_n > 0$ die Folge $\varphi(h_n)$ monoton fallend und nach unten beschränkt und konvergiert daher gegen einen Grenzwert, der aufgrund der Monotonie auch unabhängig von der gewählten Folge sein muss[27]. Also existiert
$$\lim_{h\to 0^+} \varphi(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h\delta)-f(x)}{h} = |\delta| \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h\delta)-f(x)}{h|\delta|}. \tag{6.5.4}$$
Insbesondere gilt
$$0 = \lim_{n\to\infty} h_n|\varphi(h_n)| = \lim_{n\to\infty} |f(x+h_n\delta) - f(x)|$$
und damit ist f stetig. □

Bemerkung 6.5.6 (Konvexität & Glattheit)**.** Der Beweis von Satz 6.5.5 ist eigentlich etwas „überdimensioniert“, denn er zeigt nicht nur, daß jede konvexe Funktion stetig ist, sondern man sieht aus (6.5.4) sogar, daß f an jeder Stelle EINSEITIG DIFFERENZIERBAR[28] ist: Solange man entweder rechts oder links von x bleibt, existiert der Differentialquotient.

Es gibt ein einfaches und klassisches Beispiel für eine einseitig differenzierbare Funktion, nämlich $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$. Und welch ein Zufall: Diese Funktion ist auch konvex und zeigt damit auch gleich, daß wir von konvexen Funktionen auch nicht mehr Differenzierbarkeit erwarten dürfen.

Es gibt ein paar nette Anwendungen der Konvexität, die man sich ansehen sollte. Das erste ist eine einfache Induktion, mit deren Hilfe man Konvexität ein wenig „allgemeiner“ beschreiben kann.

---

[27] Gäbe es nämlich zwei Grenzwerte $a^* < b^*$ mit zugehörigen Nullfolgen $a_n > 0$ und $b_n > 0$, dann gibt es ein Folgenglied a_n mit $\varphi(a_n) < b^*$, aber auch ein $b_{n'}$ mit $b_{n'} < a_n$ und die Monotonie von φ liefert, daß
$$b^* \leq \varphi(b_{n'}) \leq \varphi(a_n) < b^*$$
sein müsste und das ist ein Widerspruch.

[28] Im mehreren Variablen spricht man dann auch von RICHTUNGSDIFFERENZIERBAR, aber in einer Variablen gibt es nur zwei Richtungen: vor und zurück.

Proposition 6.5.7. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $n \geq 2$ und alle Zahlen $0 \leq \lambda_j$, $j = 1, \dots, n$, mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ die Ungleichung*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j), \qquad x_1, \dots, x_n \in I, \tag{6.5.5}$$

erfüllt ist.

Beweis: Die Definition der Konvexität ist der Fall $n = 2$ (und damit automatisch $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$) in (6.5.5), was auch schon „$\Leftarrow$" erledigt und gleichzeitig den Induktionsanfang für die Richtung „$\Rightarrow$" bildet. Seien nun Zahlen[29] $0 < \lambda_j < 1$, $j = 1, \dots, n+1$, und $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ gegeben, dann schreiben wir

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overbrace{\frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{n+1}}}^{\lambda_j'} x_j}_{=:x'} + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

und da $\lambda_1' + \cdots + \lambda_n' = 1$, ergeben die Definition der Konvexität und die Induktionsannahme, daß

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right) &= f\big((1 - \lambda_{n+1}) x' + \lambda_{n+1} x_{n+1}\big) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f(x') + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j' x_j\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j' f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j' x_j\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(x_j), \end{aligned}$$

was den Schritt $n \to n+1$ komplettiert. □

Lemma 6.5.8 (Logarithmus). *Die Funktion $x \mapsto \log x$ ist* KONKAV.

Beweis: Die Beispiele 6.2.4 und 6.2.2 liefern, daß $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ für $x \in \mathbb{R}_+$. □

Lemma 6.5.8 lässt sich sehr gut verwenden, um Vergleiche zwischen Mittelwerten herzustellen.

Definition 6.5.9 (Artithmetisches und geometrisches Mittel). Zu Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ nennt man

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{6.5.6}$$

[29]Ohne diese Einschränkung wären es nicht wirklich $n+1$ Zahlen, da dann $\lambda_j = 0$ für einige j gelten und die Induktion direkt greifen würde.

ARITHMETISCHES MITTEL[30] und

$$\gamma(x_1,\dots,x_n) := \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{1/n} \tag{6.5.7}$$

GEOMETRISCHES MITTEL der Zahlen.

Korollar 6.5.10 (Vergleich der Mittel)**.** *Für* $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+$ *ist*

$$\left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j. \tag{6.5.8}$$

Beweis: Wegen der Konkavität des Logarithmus ist

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right) \ge \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log x_j$$

und die Monotonie der Exponentialfunktion liefert

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j = \exp\left(\log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)\right) \ge \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \log x_j\right) = \left(\prod_{j=1}^n \exp(\log(x_j))\right)^{1/n},$$

und damit unmittelbar (6.5.8). □

Lemma 6.5.11. *Seien* $1 < p,q < \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *und* $x,y \in \mathbb{R}_+$. *Dann ist*

$$\sqrt[p]{x}\,\sqrt[q]{y} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q}. \tag{6.5.9}$$

Beweis: Derselbe Trick[31] wie in Korollar 6.5.10: $\log\big(x/p + y/q\big) \ge (\log x)/p + (\log y)/q$ und daher

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = \exp\log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \ge \exp\left(\frac{\log x}{p} + \frac{\log y}{q}\right) = x^{1/p}\; y^{1/q}.$$

□

Mit Hilfe dieses einfachen Lemmas, das übrigens insbesondere dann richtig ist, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist, können wir eine der wichtigsten Ungleichungen der Analysis beweisen.

Satz 6.5.12 (Höldersche Ungleichung)**.** *Für* $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ *und* $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$ *und alle* $1 < p,q < \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *gilt die* HÖLDER–UNGLEICHUNG

$$\sum_{j=1}^n |x_j\, y_j| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}. \tag{6.5.10}$$

[30] Das ist natürlich für *beliebige* $x_j \in \mathbb{R}$ definiert.
[31] „*Repetitio est ...*" wie der Lateiner sagt

Beweis: Die Behauptung wird trivial, wenn

$$X := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} = 0 \qquad \text{oder} \qquad Y := \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q} = 0,$$

denn das ist genau dann der Fall wenn $x_j = 0$ oder $y_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, und dann verschwinden beide Seiten von (6.5.10). Für $X \neq 0$ und $Y \neq 0$ setzen wir

$$x'_j := \frac{|x_j|^p}{X^p}, \quad y'_j := \frac{|y_j|^q}{Y^q} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} x'_j = \sum_{j=1}^{n} y'_j = 1.$$

Nach Lemma (6.5.9) ist

$$\frac{x'_j}{p} + \frac{y'_j}{q} \geq (x'_j)^{1/p} (y'_j)^{1/q} = \frac{|x_j y_j|}{X Y}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

und daher

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq X Y \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x'_j}{p} + \frac{y'_j}{q} \right) = X Y \left(\frac{1}{p} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x'_j}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y'_j}_{=1} \right) = X Y \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)}_{=1} = X Y,$$

wie in (6.5.10) behauptet. □

Bemerkung 6.5.13. Den Spezialfall $p = q = 2$ von (6.5.10) nennt man CAUCHY–SCHWARZ–UNGLEICHUNG. Beide Ungleichungen gelten auch für *komplexe* x_j, y_j, der Beweis überträgt sich direkt.

Integration | 7

Das Doktorwerden ist eine Konfirmation des Geistes.

(Lichtenberg)

In diesem Kapitel lernen wir die „Umkehroperation“ zur Differentiation, nämlich die Integration kennen. Dazu müssen wir das Integral einer Funktion definieren, was im zwei Schritten passieren wird:

1. Wir definieren das Integral für besondere und besonders einfache Funktionen.

2. Wir übertragen die Definition durch einen Grenübergang auf eine größere Klasse von Funktionen.

7.1 Definition des Riemann–Integrals

Wir betrachten hier erst einmal nur Integration auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall $I = [a,b]$, $a < b$.

Definition 7.1.1 (Unterteilungen & Treppenfunktionen)**.**

1. Eine endliche Menge $X = \{x_0,\dots,x_n\} \subset [a,b]$ heißt UNTERTEILUNG des Intervalls I, wenn
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \qquad (7.1.1)$$
gilt. Mit $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1,\dots,n$, bezeichnen wir das $j$te Teilintervall der Zerlegung $I = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ von I.

2. Eine Unterteilung $X' = \{x_j : j = 0,\dots,n'\} \subset I$ heißt VERFEINERUNG von X, wenn $X \subseteq X'$ ist. Wir schreiben Verfeinerungen dann auch einfach als $X \subseteq X'$.

3. Die CHARAKTERISTISCHE FUNKTION χ_Ω von $\Omega \subset I$ ist definiert als
$$\chi_\Omega(x) := \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases} \qquad x \in I. \qquad (7.1.2)$$

4. Eine TREPPENFUNKTION zur Zerlegung X ist eine Funktion der Form[1]

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x), \qquad x \in I \setminus X. \tag{7.1.3}$$

   Anders gesagt: Eine Funktion ϕ ist genau dann eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung X gibt, so daß (7.1.3) gilt.

5. Mit $T[a,b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

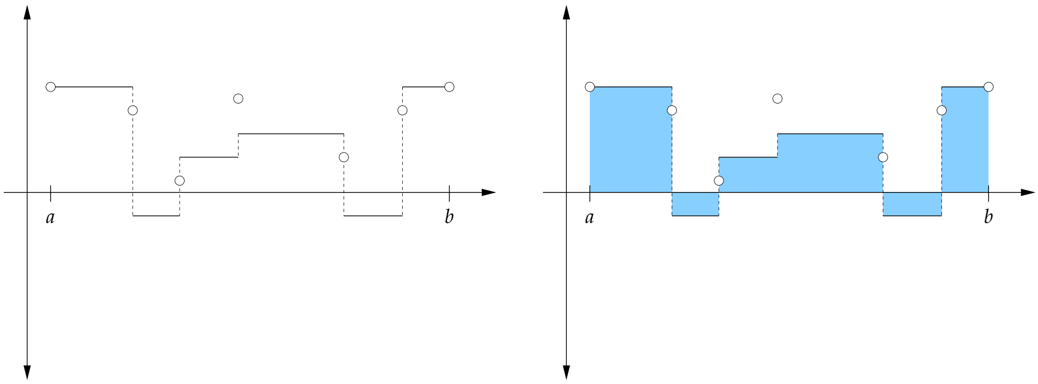

Abbildung 7.1.1: Eine Treppenfunktion *(links)* mit den Funktionswerten an den Unterteilungsstellen und deren Integral in geometrischer Interpretation *(rechts)*: Man nimmt einfach die *vorzeichenbehafteten* Flächen der von der Funktion und der x–Achse gebildeteten Rechtecke und summiert diese auf. Dabei spielen die „Kringel“ keine Rolle mehr.

Bemerkung 7.1.2. Da eine Treppenfunktion an den Zerlegungsstellen X nicht definiert ist, gibt es sogar zu jeder Zerlegung *unendlich* viele Treppenfunktionen, die sich nur an X unterscheiden und damit eigentlich äquivalent sind.

Das Integral einer Treppenfunktion ist, wie man in Abb. 7.1.1 sieht, nun sehr einfach zu bestimmen, nämlich als *vorzeichenbehfaftete* Fläche, der Rechtecke, die von der „Treppe“ und der x–Achse gebildet werden.

Definition 7.1.3. Für eine Treppenfunktion ϕ und eine zugehörige Zerlegung X ist das INTEGRAL definiert als

$$\int_I \phi(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} c_j\,(x_j - x_{j-1}). \tag{7.1.4}$$

[1]So wie wir hier die Treppenfuktion definieren, ist sie praktisch immer UNSTETIG, da $\phi(x_j) = c_j + c_{j+1}$, $j = 1,\dots,n-1$, gilt. Man könnte nun natürlich auch mit halboffenen Intervallen arbeiten, also mit $\chi_{[x_{j-1},x_j)}$ oder $\chi_{(x_{j-1},x_j]}$, aber dann ist die Entscheidung, ob man den linken oder rechten Rand in einem Intervall dazunimmt, absolut willkürlich und im Endeffekt gewinnt man auch nichts. Durch die Einschräkung in (7.1.3) spielen diese Punkte auch keine Rolle und wir könnten die abgeschlossenen Intervalle auch problemlos durch offene ersetzen.

Lemma 7.1.4. *Das Integral* (7.1.4) *einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung X.*

Beweis: Seien X, X' zwei Zerlegungen für ϕ und nehmen wir zuerst einmal an, daß $X' \supseteq X$ eine Verfeinerung von X ist. Das heißt, es gibt eine surjektive Abbildung $\sigma : \{0, \dots, n'\} \to \{0, \dots, n\}$ mit $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(n') = n$ und $c'_{\sigma(j-1)+1} = \cdots = c'_{\sigma(j)} = c_j$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\Sigma_{X'}\phi &:= \sum_{j=1}^{n'} c'_j \, (x'_j - x'_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=\sigma(j-1)+1}^{\sigma(j)} \underbrace{c'_k}_{=c'_{\sigma(j)}=c_j} \, (x'_k - x'_{k-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\sum_{k=\sigma(j-1)+1}^{\sigma(j)} (x'_k - x'_{k-1})}_{=x'_{\sigma(j)}-x'_{\sigma(j-1)}=x_j-x_{j-1}} = \sum_{j=1}^{n} c_j \, (x_j - x_{j-1}) = \Sigma_X \phi.
\end{aligned}$$

Ist X' keine Verfeinerung von X, dann bilden wir zuerst $X^* = X \cup X'$, also $X \subset X^*$ und $X' \subset X^*$ und erhalten mit zweimaliger Anwenung der obigen Beobachtung, daß

$$\Sigma_X \phi = \Sigma_{X^*} \phi = \Sigma_{X'} \phi,$$

also ebenfalls $\Sigma_X \phi = \Sigma_{X'} \phi$. □

Definition 7.1.5. Für $f, g : I \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \le g$ falls $f(x) \le g(x)$, $x \in I$. Ist eine der beiden Funktionen eine Treppenfunktion mit Zerlegung X, so muß die Ungleichung nur auf $I \setminus X$ gelten.

Treppenfunktionen kann man addieren und mit Konstanten multiplizieren[2] und das überträgt sich auch auf das Integral.

Proposition 7.1.6. *Sind $\phi, \psi : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\alpha\phi + \beta\psi$ eine Treppenfunktion und das Integral ist linear,*

$$\int_I \big(\alpha\phi(x) + \beta\psi(x)\big) \, dx = \alpha \int_I \phi(x) \, dx + \beta \int_I \psi(x) \, dx, \qquad (7.1.5)$$

und monoton,

$$\phi \le \psi \qquad \Rightarrow \qquad \int_I \phi(x) \, dx \le \int_I \psi(x) \, dx. \qquad (7.1.6)$$

Beweis: Sind X und Y die Zerlegungen zu ϕ bzw. ψ, dann ist $Z := X \cup Y$ eine gemeinsame Verfeinerunung und ϕ, ψ sind auch Treppenfunktionen bezüglich $Z = \{z_0, \dots, z_m\}$ mit[3]

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \, \chi_{[z_j, z_{j-1}]} \qquad \text{und} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{m} d_j \, \chi_{[z_j, z_{j-1}]} \qquad (7.1.7)$$

[2] Sie bilden also einen VEKTORRAUM, und zwar einen unendlichdimensionalen.
[3] Nun sind alle Punkte aus Z aus der Betrachtug ausgeschlossen.

und damit ist auch

$$\alpha\phi + \beta\psi = \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha\, c_j + \beta d_j\right) \chi_{[z_j, z_{j-1}]}$$

eine Treppenfunktion. Nach Lemma 7.1.4 ist außerdem

$$\begin{aligned}
\int_I \left(\alpha\phi(x) + \beta\psi(x)\right) dx &= \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha\, c_j + \beta d_j\right) (z_j - z_{j-1}) \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{m} c_j\, (z_j - z_{j-1}) + \beta \sum_{j=1}^{m} d_j\, (z_j - z_{j-1}) = \alpha\Sigma_Z\phi + \beta\Sigma_Z\psi \\
&= \alpha\Sigma_X\phi + \beta\Sigma_Y\psi = \alpha \int_I \phi(x)\, dx + \beta \int_I \psi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

und das ist (7.1.5). Mit der Darstellung (7.1.7) ist $\phi \le \psi$ genau dann wenn $c_j \le d_j$ und dann ist

$$\int_I \phi(x)\, dx = \Sigma_Z\phi = \sum_{j=1}^{m} c_j\, (z_j - z_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{m} d_j\, (z_j - z_{j-1}) = \Sigma_Z\psi = \int_I \psi(x)\, dx.$$

□

Definition 7.1.7 (Oberintegral & Unterintegral)**.** Zu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert man das OBERINTEGRAL als

$$\int_I^{\downarrow} f(x)\, dx := \inf\left\{ \int_I \phi(x)\, dx \;:\; \phi \ge f \right\} \tag{7.1.8}$$

und das UNTERINTEGRAL

$$\int_I^{\uparrow} f(x)\, dx := \sup\left\{ \int_I \phi(x)\, dx \;:\; \phi \le f \right\}. \tag{7.1.9}$$

Insbesondere ist immer $\int_I^{\uparrow} f(x)\, dx \le \int_I^{\downarrow} f(x)\, dx$.

Definition 7.1.8. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt INTEGRIERBAR, genauer RIEMANN–INTEGRIERBAR, wenn sie beschränkt ist und wenn

$$\int_I^{\downarrow} f(x)\, dx = \int_I^{\uparrow} f(x)\, dx =: \int_I f(x)\, dx \tag{7.1.10}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 7.1.9. Beschränktheit der Funktion ist momentan eine Forderung für die Integrierbarkeit, da dann die Existenz von Ober- und Unterintegral automatisch folgen. Ist f beispielsweise nicht nach oben beschränkt, dann gibt es zu keinem X eine Treppenfunktion ψ mit $f \le \psi$, da jede Treppenfunktion *automatisch* beschränkt ist, schließlich betrachten wir ja nur *endliche* Zerlegungen.

Die folgende Aussage ist also trivial[4] aber dennoch wichtig.

Satz 7.1.10. *Jede integrierbare Funktion ist beschränkt.*

Beispiel 7.1.11.

1. Für jede Treppenfunktion gilt $\int_I^\uparrow \phi(x)\,dx = \int_I \phi(x)\,dx = \int_I^\downarrow f(x)\,dx$ und damit sind alle Treppenfunktionen integrierbar. Das ist nicht verwunderlich, da das gesamte Konzept ja darin besteht, die Integrierbarkeit auf das intuitive Integral für Treppenfunktionen zurückzuführen.

2. Integrierbare Funktionen müssen also *nicht* stetig sein.

3. Die Funktion

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin [a,b] \cap \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad x \in [a,b]$$

ist **nicht** integrierbar, denn es gilt immer

$$\int_I^\downarrow \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = b-a, \qquad \int_I^\uparrow \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0.$$

4. Das Oberintegral ist erst einmal nur für nach oben beschränkte Funktionen definiert, sonst hat es den Wert $+\infty$, das Unterintegral entsprechend für nach unten beschränkte Funktionen.

Satz 7.1.12 (Subadditivität)**.** *Seien $f,g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

$$\int_I^\downarrow \big(f(x)+g(x)\big)\,dx \le \int_I^\downarrow f(x)\,dx + \int_I^\downarrow g(x)\,dx, \tag{7.1.11}$$

d.h., das Oberintegral ist SUBADDITIV, *sowie*

$$\int_I^\downarrow \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda \int_I^\downarrow f(x)\,dx. \tag{7.1.12}$$

Beweis: Nach der Definition des Infimums[5] gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi \ge f$ und $\psi \ge g$ mit gemeinsamer[6] Zerlegung X, so daß

$$\int_I^\downarrow f(x)\,dx \ge \int_I \phi(x)\,dx - \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \int_I^\downarrow g(x)\,dx \ge \int_I \psi(x)\,dx - \varepsilon,$$

[4] Da in einer Definition festgelegt.

[5] Das ist jetzt ein guter Zeitpunkt, diese zu wiederholen. Besser jetzt als in der Klausur.

[6] Wenn nicht, dann nimmt man eine Verfeinerung, also genau so, wie wir es jetzt schon die ganze Zeit gemacht haben.

und da $f+g \le \phi + \psi$ ist

$$\begin{aligned}\int_I^{\downarrow} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx &\le \int_I \big(\phi(x)+\psi(x)\big)\,dx = \int_I \phi(x)\,dx + \int_I \psi(x)\,dx \\ &\le \int_I^{\downarrow} f(x)\,dx + \int_I^{\downarrow} g(x)\,dx + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

und da ε beliebig war, folgt (7.1.11).

Für (7.1.12) geben wir uns ebenfalls $\varepsilon > 0$ vor und wählen ein $\phi \ge f$ mit[7] $\int \phi \le \int^{\downarrow} f + \varepsilon$, und da $\lambda > 0$ ist, ist auch $\lambda f \le \lambda\phi$ und somit

$$\begin{aligned}\int_I^{\downarrow} \lambda f(x)\,dx &\le \int_I \lambda\phi(x)\,dx = \lambda \int_I \phi(x)\,dx \le \lambda\left(\int_I^{\downarrow} \lambda f(x)\,dx + \varepsilon\right) \\ &= \lambda \int_I^{\downarrow} f(x)\,dx + \lambda\varepsilon,\end{aligned}$$

was uns zumindest schon einmal $\int^{\downarrow} \lambda f \le \lambda \int^{\downarrow} f$ liefert. Umgekehrt gibt es zu $g = \lambda f$ ein $\psi \ge g$ mit $\int \psi \le \int^{\downarrow} g + \varepsilon$ und da $\psi \ge g = \lambda f$ ist $\psi/\lambda \ge f$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda \int_I^{\downarrow} f(x)\,dx &\le \lambda \int_I \lambda^{-1}\psi(x)\,dx = \int_I \psi(x)\,dx \le \int_I^{\downarrow} g(x)\,dx + \varepsilon \\ &= \int_I^{\downarrow} \lambda f(x)\,dx + \varepsilon\end{aligned}$$

und somit ebenfalls $\int^{\downarrow} \lambda f \ge \lambda \int^{\downarrow} f$, womit auch (7.1.12) bewiesen ist. □

Beispiel 7.1.13. Für das Oberintegral kann in (7.1.11) im allgemeinen keine Gleichheit gelten. Das einfachste Beispiel ist $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $g = 1 - \chi_{\mathbb{Q}}$, dann ist

$$b - a = \int_I^{\downarrow} f(x)\,dx = \int_I^{\downarrow} g(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad 0 = \int_I^{\uparrow} f(x)\,dx = \int_I^{\uparrow} g(x)\,dx,$$

aber

$$\int_I^{\downarrow} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_I^{\downarrow} 1\,dx = b - a < 2(b-a) = \int_I^{\downarrow} f(x)\,dx + \int_I^{\downarrow} g(x)\,dx.$$

Aus

$$\int_I^{\downarrow} (-f)(x)\,dx = -\int_I^{\uparrow} f(x)\,dx \tag{7.1.13}$$

folgt sofort die folgende Version von Satz 7.1.12 für Unterintegrale.

Korollar 7.1.14. *Für beschränkte $f, g : I \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist*

$$\int_I^{\uparrow} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx \ge \int_I^{\uparrow} f(x)\,dx + \int_I^{\uparrow} g(x)\,dx, \qquad \int_I^{\uparrow} \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda \int_I^{\uparrow} f(x)\,dx. \tag{7.1.14}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}_-$ ergibt sich außerdem

$$\int_I^{\uparrow} \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda \int_I^{\downarrow} f(x)\,dx, \qquad \int_I^{\downarrow} \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda \int_I^{\uparrow} f(x)\,dx \tag{7.1.15}$$

[7] Die folgenden Kurzschreibweise werden wir gerne einmal wählen, wenn sich der INTEGRATIONSBEREICH I und die INTEGRATIONSVARIABLE x aus dem Kontext ergeben.

7.2 Klassen und Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Wir beginnen mit einer weiteren Beschreibung der Integrierbarkeit, die direkt aus der Definition von Supremum und Infimum und Definition 7.1.8 folgt.

Korollar 7.2.1. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi \le f \le \psi$ gibt, so daß*

$$\int_I \psi(x)\,dx - \int_I \phi(x)\,dx < \varepsilon \tag{7.2.1}$$

ist.

Die erste Beobachtung ist, daß stetige Funktionen „brav" und daher integrierbar sind.

Satz 7.2.2. *Jede stetige Funktion $f \in C[a,b]$ ist integrierbar.*

Beweis: Da f auf dem *abgeschlossenen* Intervall $I = [a,b]$ stetig ist, ist f nach Satz 4.3.4 auch GLEICHMÄSSIG STETIG. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ wann immer $|x - x'| < \delta$. Wählen wir nun die Zerlegung X so, daß $x_{j+1} - x_j < \delta$, $j = 0, \dots, n$, dann ist

$$f(x_j) - \varepsilon < f(x) < f(x_j) + \varepsilon, \qquad x \in [x_{j-1}, x_j],$$

und daher[8]

$$\begin{aligned} \phi(x) := \sum_{j=1}^n \left(f(x_{j-1}) - \varepsilon\right) \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x) &\le \underbrace{\sum_{j=1}^n f(x) \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x)}_{=f(x)} \\ &\le \sum_{j=1}^n \left(f(x_{j-1}) + \varepsilon\right) \chi_{[x_{j-1},x_j]}(x) =: \psi(x). \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} &\int_I \psi(x)\,dx - \int_I \phi(x)\,dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left(f(x_{j-1}) + \varepsilon\right)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \left(f(x_{j-1}) - \varepsilon\right)(x_j - x_{j-1}) \\ &= 2\varepsilon \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = 2\varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

und da ε beliebig war, können wir Korollar 7.2.1 anwenden und f ist integrierbar. □

[8] Hier gehen wir auf Nummer sicher und verwenden die halboffenen Intervalle, um die Punkte von X nicht gesondert behandeln zu müssen.

Satz 7.2.3 (Monotonie & Integrierbarkeit)**.** *Jede monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis: Wir nehmen an, daß f MONOTON STEIGEND ist, für monoton fallende Funktionen funktioniert der Beweis analog[9]. Da I abgeschlossen ist existiert $f(b)$, ist also insbesondere[10] $< \infty$ und wegen $f(a) \le f(x) \le f(b)$, $x \in I$, ist f auch beschränkt.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir uns die Punkte $X = \{x_j := a + \frac{j}{n}(b-a) : j = 0, \dots, n\}$, die eine gleichmäßige Zerlegung von I bilden. Außerdem setzen wir

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\,\chi_{[x_{j-1},x_j]}(x) \qquad \text{und} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\chi_{[x_{j-1},x_j]}(x).$$

Aufgrund der Monotonie von f ist $\phi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, $x \in I \setminus X$ und außerdem, da $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned}
\int_I \psi(x)\,dx - \int_I \phi(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \\
&= f(x_n)\underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{=\frac{1}{n}} - f(x_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{=\frac{1}{n}} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\underbrace{\big((x_j - x_{j-1}) - (x_{j+1} - x_j)\big)}_{=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=0} \\
&= \frac{1}{n}\big(f(b) - f(a)\big),
\end{aligned}$$

was für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert und es uns erlaubt, Korollar 7.2.1 anzuwenden. □

Aus den Rechenregeln für Ober- und Unterintegrale und Treppenfunktionen können wir auch Rechenregeln für integrierbare Funktionen ableiten.

Korollar 7.2.4. *Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch $f + g$ und λf integrierbar und das Integral ist* LINEAR*:*

$$\int_f (f(x) + g(x))\,dx = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx, \qquad \int_I (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx. \tag{7.2.2}$$

Außerdem gilt

$$f \le g \qquad \Rightarrow \qquad \int_I f(x)\,dx \le \int_I g(x)\,dx. \tag{7.2.3}$$

Definition 7.2.5. Zu $f : I \to \mathbb{R}$ definiert man

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & f(x) \le 0, \\ 0, & f(x) > 0. \end{cases} \tag{7.2.4}$$

[9]Was immer eine gute Übung darstellt ...
[10]Das ist das Wesen einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$

Insbesondere ist also $f_\pm \geq 0$. Mit Hilfe dieser Operationen kann man aus einer integrierbaren Funktion weitere integrierbare Funktionen ableiten.

Satz 7.2.6. *Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch*

1. f_+, f_-,
2. $|f|^p$, $p \geq 1$,
3. fg

integrierbar.

Beweis: Da f integrierbar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi \leq f \leq \psi$ mit $\int \psi - \int \phi < \varepsilon$. Dann sind auch ϕ_+ und ψ_+ Treppenfunktionen mit $0 \leq \phi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und da $\psi_+(x) = 0$ auch $\phi_+(x) = 0$ impliziert, gilt

$$\int_I \psi_+(x)\,dx - \int_I \phi_+(x)\,dx \leq \int_I \psi(x)\,dx - \int_I \phi(x)\,dx < \varepsilon,$$

und somit ist f_+ integrierbar; für f_- erhält man den Beweis ganz analog, was 1) beweist. Da $|f| = f_+ + f_-$ ist auch $|f|$ integrierbar[11].

Für 2) nehmen wir zuerst einmal an, daß $0 \leq f \leq 1$, ansonsten ersetzen wir f durch

$$\frac{f - \sup_I f}{\sup_I f - \inf_I f},$$

was existiert, da f beschränkt ist. Da f integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen mit gemeinsamer[12] Unterteilung X, so daß $0 \leq \phi \leq f \leq \psi \leq 1$ und $\int \psi - \int \phi < \varepsilon$ ist. Für $p \geq 1$ sind dann auch ϕ^p und ψ^p Treppenfunktionen mit $0 \leq \phi^p \leq f^p \leq \psi^p \leq 1$. Für $g(x) = x^p$ und damit $g'(x) = p x^{p-1}$ liefert der Mittelwertsatz für $x_1 \leq x_2$

$$x_2^p - x_1^p = g(x_2) - g(x_1) = g'(\xi)(x_2 - x_1) = p\xi^{p-1}(x_2 - x_1), \qquad \xi \in (x_1, x_2),$$

und mit $x_1 = \phi(x)$ und $x_2 = \psi(x)$ erhalten wir somit

$$\psi^p(x) - \phi^p(x) = p \underbrace{\xi^{p-1}}_{\leq \psi^{p-1}(x) \leq 1} \big(\psi(x) - \phi(x)\big) \leq p\big(\psi(x) - \phi(x)\big),$$

woraus sofort

$$\int_I \psi^p(x)\,dx - \int_I \phi^p(x)\,dx \leq p\left(\int_I \psi(x)\,dx - \int_I \phi(x)\,dx\right) \leq p\varepsilon$$

[11] Diese Eigenschaft gilt nur für das Riemann–Integral auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Auf ganz $\mathbb{R}$ mit dem etwas komplizierteren LEBESGUE–INTEGRAL funktioniert das nicht mehr!

[12] Wenn nicht, dann nimmt man wie gehabt die Vereinigung der Unterteilungen, also deren gemeinsame Verfeinerung.

und damit die Integrierbarkeit von f^p folgt, solange f nichtnegativ ist. Ersetzen wir f durch $|f|$, dann folgt 2).

3) folgt sofort aus 2) und der netten Identität

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left((f(x)+g(x))^2 - (f(x)-g(x))^2\right).$$

□

Korollar 7.2.7 (Dreiecksungleichung). *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \le \int_I |f(x)|\,dx. \tag{7.2.5}$$

Beweis: Nach Satz 7.2.6 ist $|f|$ integrierbar, die rechte Seite von (7.2.5) ist also wohldefiniert. Schreiben wir $f = f_+ - f_-$, dann ist nach der „normalen" Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\left|\int_I f(x)\,dx\right| &= \left|\int_I f_+(x)\,dx - \int_I f_-(x)\,dx\right| \le \left|\int_I f_+(x)\,dx\right| + \left|\int_I f_-(x)\,dx\right| \\ &= \int_I f_+(x)\,dx + \int_I f_-(x)\,dx = \int_I f_+(x)\,dx + f_-(x)\,dx = \int_I |f(x)|\,dx,\end{aligned}$$

da $f_\pm \ge 0$ und damit auch $\int f_\pm \ge$ ist. □

Satz 7.2.8 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f,\varphi \in C(I)$ und außerdem $\varphi \ge 0$. Dann existiert ein $\xi \in I$, so daß*

$$\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_I \varphi(x)\,dx. \tag{7.2.6}$$

Für $\varphi \equiv 1$ gilt der Spezialfall

$$\int_I f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a). \tag{7.2.7}$$

Beweis: Wir setzen

$$m := \min_{x\in I} f(x), \qquad M = \max_{x\in I} f(x),$$

wobei die Extrema nach Satz 4.3.2 existieren. Damit ist $m \le f(x) \le M$, $x \in I$, und damit wegen der Nichtnegativität von φ auch $m\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x)$, $x \in I$, also

$$m\int_I \varphi(x)\,dx \le \int_I f(x)\varphi(x)\,dx \le M\int_I \varphi(x)\,dx$$

und damit gibt es ein $y \in [m,M]$, so daß

$$\int_I f(x)\varphi(x)\,dx = y\int_I \varphi(x)\,dx.$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, Satz 4.2.2, gibt es dann aber auch ein ξ, so daß $f(\xi) = y$ ist, was den Beweis komplettiert.
□

Das letzte Resultat ist ein konstruktiver Ansatz zur Integration über die näherungsweise Berechnung des Integrals.

Definition 7.2.9 (Riemannsumme)**.** Zu einer Unterteilung $X = \{x_0,\dots,x_n\}$ von I und STÜTZSTELLEN $\Xi := \{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ mit $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ definiert man die RIEMANNSUMME

$$R_{X,\Xi} f := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,. \tag{7.2.8}$$

Als FEINHEIT der Zerlegung X bezeichnet man die Größe

$$h(X) = \max_{k=1,\dots,n} (x_k - x_{k-1}).$$

Die Riemannsumme ist das Integral eine Treppenfunktion, deren „Stufenhöhe" durch Auswertung von f an einer Stelle im jeweiligen Intervall der Zerlegung gebildet wird. Man kann (7.2.8) aber auch als einen Ausdruck ansehen, der ausgehend von der Kenntnis von f an den Stellen ξ_k den Wert des Integrals annähert. Derartige Ausdrücke bezeichnet man als QUADRATURFORMEL, sie spielen in der numerischen Mathematik eine zentrale Rolle.

Satz 7.2.10. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Unterteilung X mit Feinheit $h(x) < \delta$ und jede Wahl von zugehörigen Stützstellen Ξ die Abschätzung*

$$\left| \int_I f(x)\,dx - R_{X,\Xi} f \right| < \varepsilon \tag{7.2.9}$$

erfüllt ist.

Beweis: Da f integrierbar ist, gibt es zu dem vorgegebenen ε Treppenfunktionen $\phi \le f \le \psi$ mit $\int \psi - \int \phi < \varepsilon$; sei $Y = \{y_0,\dots,y_m\}$ die zugehörige gemeinsame Zerlegung. Außerdem ist f beschränkt und damit die Größe

$$M = \sup_{x\in I} |f(x)| < \infty$$

wohldefiniert. Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{4mM}$ seien $X = \{x_0,\dots,x_n\}$ eine Zerlegung mit $h(X) < \delta$ und Ξ zugehörige Stützstellen. Damit definieren wir die Funktion

$$\omega(x) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\chi_{[x_{j-1},x_j]}, \qquad x \in I \setminus X,$$

Diese Funktion erfüllt

$$\phi(x) - 2M \le \omega(x) \le \psi(x) + 2M, \qquad x \in I \setminus (X \cup Y) \tag{7.2.10}$$

und außerdem

$$[x_j, x_{j+1}] \subset (y_k, y_{k+1}) \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x) \le \omega(x) \le \psi(x), \quad x \in (x_j, x_{j+1}). \tag{7.2.11}$$

Sei nun $J \subset I$ die Vereinigung aller offenen Intervalle (x_j, x_{j+1}), zu denen es ein k gibt, so daß die Voraussetzung von (7.2.11) erfüllt ist, also

$[x_j, x_{j+1}] \subset (y_k, y_{k+1})$ gilt. Nun definieren wir eine weitere Treppenfunktion σ zur Zerlegung X, die wir auf zu J gehörigen Intervallen auf 0 setzen und sonst auf $2M$. Dann ist wegen (7.2.10) und (7.2.11)

$$\phi(x) - \sigma(x) \le \omega(x) \le \psi(x) + \sigma(x), \qquad x \in I \setminus (X \cup Y). \tag{7.2.12}$$

Ein Intervall $[x_{j-1}, x_j]$, auf dem $\sigma \neq 0$ ist, muss einen der Zerlegungspunkte $y_0, \dots, y_m$ enthalten, im „schlimmsten" Fall als Randpunkt. Dann taucht jeder der inneren Zerlegungspunkte $y_1, \dots, y_{m-1}$ bei zwei solchen Intervallen auf, die beiden Randpunkte nur einmal. Insgesamt kann es also höchstens $2(m-1)+2 = 2m$ derartige Intervalle geben, die alle höchstens Länge $h(X) < \delta$ haben. Damit ist

$$\int_I \sigma(x)\,dx \le (2m)(2M)h(X) < 4mM\delta = \varepsilon$$

und damit

$$\int_I \phi(x)\,dx - \varepsilon \le \underbrace{\int_I \omega(x)\,dx}_{=R_{X,\Xi}f} \le \int_I \psi(x)\,dx + \varepsilon.$$

Da außerdem $\int f \le \int \phi + \varepsilon$, ergibt sich

$$\int_I f(x)\,dx \le \int_I \phi(x)\,dx + \varepsilon \le R_{X,\Xi}f + 2\varepsilon$$

und analog mit $\int f \ge \int \psi - \varepsilon$ auch $\int f \ge R_{X,\Xi}f - 2\varepsilon$, was schließlich die gewünschte Abschätzung

$$\left| \int_I f(x)\,dx - R_{X,\Xi}f \right| < 2\varepsilon$$

ergibt. □

Zum Abschluss noch die Additivität des Integrals unter GEBIETSZERLEGUNG.

Lemma 7.2.11. *Für $c \in (a,b)$ und integrierbares f ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7.2.13}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $\phi \le f \le \psi$ wie immer Treppenfuktionen mit $\int \psi - \int \phi < \varepsilon$ und gemeinsamer Zerlegung X. Mit $X_c := X \cup \{c\}$ sind nun $\phi_1 := \phi\,\chi_{[a,c]}$ und $\phi_2 := \phi\,\chi_{[c,b]}$ sowie $\psi_1 := \psi\,\chi_{[a,c]}$ und $\psi_2 := \psi\,\chi_{[c,b]}$ ebenfalls Treppenfunktionen mit

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), \qquad \psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \qquad x \in I \setminus X_c$$

und $\phi_1 \le f \le \psi_1$ auf $[a,c] \setminus X_c$ sowie $\phi_2 \le f \le \psi_2$ auf $[c,b] \setminus X_c$. Damit ist f auf $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\ge \int_a^b \phi(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c \phi_1(x)\,dx}_{\ge \int_a^c f - \varepsilon} + \underbrace{\int_c^b \phi_1(x)\,dx}_{\ge \int_c^b f - \varepsilon} \\ &\ge \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - 2\varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\le \int_a^b \psi(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c \psi_1(x)\,dx}_{\le \int_a^c f + \varepsilon} + \underbrace{\int_c^b \psi_1(x)\,dx}_{\le \int_c^b f - \varepsilon} \\ &\le \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \right) \right| \le 2\varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt. □

7.3 Integration und Differentiation

Jetzt befassen wir uns mit der Interakttion von Integration und Differentiation und werden feststellen, daß die beiden „im wesentlichen“ Umkehrungen voneinander sind.

Übung 7.3.1 Zeigen Sie: Jede Treppenfunktion und jede monotone Funktion haben eine Stammfunktion. ♢

Trotz seines sehr einfachen Beweises trägt der nachfolgende Satz einen großen Namen und ist in verschiedensten Formen kommuniziert worden, siehe [27].

Satz 7.3.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Version 1)**.** *Für $f \in C(I)$ ist die Funktion*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b], \tag{7.3.1}$$

differenzierbar mit $F' = f$.

Da $f \in C(I)$ stetig ist, ist auch $f \in C[a,x]$ für alle $x \in [a,b]$ und damit ist das Integral in (7.3.1) nach Satz 7.2.2 auch wohldefiniert.

Beweis: Für $x \in (a,b)$ und $h > 0$ erhalten wir mit Hilfe von Lemma 7.2.11 und (7.2.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx \\ &= f(\xi)\underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} 1\,dx}_{=h} = f(\xi) \end{aligned}$$

mit $\xi = \xi_h \in [x, x+h]$. Dann braucht man nur noch die Stetigkeit, um einzusehen, daß

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f\left(\lim_{h\to 0}\xi_h\right) = f(x)$$

sein muss. □

Definition 7.3.2 (Stammfunktion)**.** Eine STAMMFUNKTION F oder PRIMITIVE FUNKTION oder ANTIABLEITUNG[13]zu einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion F mit $F' = f$. Die Funktion F aus (7.3.1) bezeichnen wir als KANONISCHE STAMMFUNKTION.

Proposition 7.3.3 (Stetigkeit der Stammfunktion)**.** *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist die kanonische Stammfunktion F stetig.*

Beweis: Da f integrierbar ist, ist f beschränkt, sagen wir $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$ und nach Korollar 7.2.7 ergibt sich

$$|F(x) - F(x')| = \left|\int_x^{x'} f(t)\,dt\right| \le \int_x^{x'} \underbrace{|f(t)|}_{\le M}\,dt \le |x - x'|\,M, \tag{7.3.2}$$

woraus die Stetigkeit unmittelbar folgt[14]. □

Proposition 7.3.4. *Zwei differenzierbare Funktionen $F, G : I \to \mathbb{R}$ sind genau dann Stammfunktionen zu $f \in C(I)$, wenn $F - G$ eine Konstante ist.*

Beweis: Da $g' \equiv 0$ für $g \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, folgt die Richtung „$\Leftarrow$" unmittelbar. Sind umgekehrt F, G Stammfunktionen, dann ist $(F-G)' = F' - G' = f - f \equiv 0$ und nach Korollar 6.4.7 ist $F - G \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. □

Und jetzt noch einmal ein weiterer Satz, der ebenfalls gerne als HAUPTSATZ oder FUNDAMENTALSATZ der Differential- und Integralrechnung bezeichnet wird.

---

[13]Auf Englisch ANTIDERIVATIVE.

[14]Genau genommen ist F sogar mehr als stetig, nämlich LIPSCHITZ–STETIG, eine Eigenschaft, die durch (7.3.2) definiert wird und die eine kontrolliertere Form der Stetigkeit darstellt. Insbesondere kann man in diesem Fall in der ε–δ–Formulierung dann immer $\delta = \varepsilon / M$ wählen.

Satz 7.3.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Version 2)**.** *Ist F eine Stammfunktion zu $f \in C[a,b]$, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_{x=a}^{b}. \tag{7.3.3}$$

Beweis: Die KANONISCHE STAMMFUNKTION

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad F_0(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

aus (7.3.1) erfüllt (7.3.3) und jede andere Stammfunktion F ist nach Proposition 7.3.4 von der Form $F(x) = F_0(x) + c$ und damit ist

$$F(b) - F(a) = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c) = F_0(b) - \underbrace{F_0(a)}_{=0} = \int_a^b f(x)\,dx$$

wie behauptet. □

Beispiel 7.3.6. Satz 7.3.5 erlaubt es, Integrale zu Funktionen, die wir differenzieren können, recht einfach und unspektakulär zu berechnen:

1. $\int e^x\,dx = e^b - e^a$,
2. $\int \cos x\,dx = \sin x\Big|_{x=a}^{b}$,
3. $\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}\Big|_{x=a}^{b}$, $k \ge 0$,
4. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big|_{x=a}^{b}$, allerdings nur dann, wenn $a > 0$ ist.

7.4 Rechenregeln für Integrale

Auch für Integrale gibt es Rechenregeln, die im Wesentlichen Konsequenzen aus Rechenregeln für Ableitung und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind.

Satz 7.4.1 (SUBSITITUTIONSREGEL)**.** *Seien $I = [a,b]$, $J = [c,d]$ Intervalle, $f \in C(J)$ und $\varphi \in C^1(I)$ mit $\varphi(I) \subseteq J$. Dann ist*

$$\int_I f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \tag{7.4.1}$$

Beweis: Für jede Stammfunktion F von f gilt nach der Kettenregel

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t), \qquad t \in I,$$

und damit nach zweimaliger Anwendung von Satz 7.3.5

$$\int_I f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt = \int_I (F\circ\varphi)'(t)\,dt = F\circ\varphi(t)\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

□

Unter Verwendung der *symbolischen* Schreibweise $d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$ kann man (7.4.1) etwas illustrativer und vielleicht leichter merkbar als

$$\int_I f\left(\varphi(t)\right) d\varphi(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \tag{7.4.2}$$

schreiben. Tatsächlich steckt hinter (7.4.2) deutlich mehr Methode, aber das wäre an dieser Stelle ein wenig zu viel.

Beispiel 7.4.2 (Substitutionsregel)**.** Zur Illustration der Substitutionsregel und um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie man damit rechnen kann, sehen wir uns ein paar Beispiele an.

1. Mit der Substitutionsfunktion $\varphi(t) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$, erhalten wir

   $$\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_a^b f(\underbrace{t+c}_{=\varphi(t)})\underbrace{1}_{\varphi'(t)}\,dt = \int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx,$$

   was niemanden zu sehr überraschen sollte.

2. Machen wir es ein klein wenig komplizierter und verwenden für $c \neq 0$ die Funktion $\varphi(t) = ct$, um

   $$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(\varphi(t))\underbrace{c}_{=\varphi'(t)}\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$$

   zu erhalten.

3. Jetzt wird es ein bisschen spannender, wir berechnen einmal die Fläche des Halbkreises mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 als[15]

   $$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

   Mit der Substitution $x = \varphi(t) = \sin t$ erhält man also[16]

   $$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\varphi^2(t)}\,d\varphi(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t} \cos t\,dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt,\end{aligned}$$

[15]Die KREISLINIE besteht ja aus den Punkten (x,y) mit $x^2+y^2=1$ und die obere Hälfte ergibt sich damit als $y = y(x) = +\sqrt{1-x^2}$.

[16]Wir lesen nun (7.4.2) von rechts nach links und erinnern uns daran, daß $\sin \pm\frac{\pi}{2} = \pm 1$ ist.

wobei wir benutzt haben, daß der Cosinus auf $[-\pi/2,\pi/2]$ nichtnegativ ist. Da

$$\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2it}+2+e^{-2it}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos 2t),$$

können wir unter Verwendung von 2) folgendermaßen weiterrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dt}_{=\pi} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t\,dt}_{=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{\sin x\Big|_{x=-\pi}^{\pi}}_{\sin\pi-\sin-\pi=0-0=0} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Die Fläche des Einheitskreises ist damit exakt π. Damit haben wir endlich auch die $r^2\pi$–Formel für die Kreisfläche bewiesen, denn, zur Erinnerung, bisher kannten wir ja π nur als Nullstelle einer Funktion, die sich aus der komplexen Exponentialfunktion ergeben hat.

Die zweite wichtige Rechenregel betrifft das Produkt von Funktionen.

Satz 7.4.3 (PARTIELLE INTEGRATION)**.** *Für $f,g \in C^1(I)$, $I=[a,b]$, gilt*

$$\int_I f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_I f'(x)g(x)\,dx. \tag{7.4.3}$$

Beweis: Mit der PRODUKTREGEL (6.2.2) der Differentiation erhalten wir

$$f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\,dx,$$

was sich direkt in (7.4.3) umformen lässt. □

Partielle Integration ist immer dann das Mittel der Wahl, wenn man es mit Funktionen zu tun hat, die sich durch Ableiten „loswerden“ lassen oder nach Ableitung reproduzieren. Sehen wir uns zwei einfache Beispiele an.

Beispiel 7.4.4 (Partielle Integration)**.**

1. Mit Hilfe einer Stammfunktion F zu f, also $f=F'$ ist

$$\int_a^b x f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b xF'(x)\,dx = xF(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b F(x)\,dx.$$

Definiert man die k–TE STAMMFUNKTION F_k als

$$F_0(x) := f(x), \qquad F_k(x) = \int_a^x F_{k-1}(t)\,dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7.4.4}$$

mit $F_k' = F_{k-1}$ und $F_k^{(k)} = f$, dann ist[17]

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^n f(x)\,dx &= x^n F_1(x)\Big|_{x=a}^b - \int_a^b n x^{n-1} F_1(x)\,dx \\
&= x^n F_1(x)\Big|_{x=a}^b - n x^{n-1} F_2(x)\Big|_{x=a}^b + \int_a^b n(n-1) x^{n-1} F_2(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} F_{j+1}(x)\Big|_{x=a}^b + (-1)^k \int_a^b \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} F_{k+1}(x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} F_{j+1}(x)\Big|_{x=a}^b,
\end{aligned}$$

da die $(n+1)$–te Ableitung vom x^n ja bekanntlich 0 ist. Kennt man also die Stammfunktionen von f, so kann man auf diese Art alle MOMENTE

$$\mu_n(f) := \int_a^b x^n f(x)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{7.4.5}$$

berechnen. Ist $f \geq 0$, so lässt sich f übrigens auch wieder aus diesen Momenten rekonstruieren, aber das ist eine andere Geschichte[18].

2. Hübsch ist auch für $0 < a < b$

$$\int_a^b \log x\,dx = x \log x\Big|_{x=a}^b - \int_a^b x \frac{1}{x}\,dx = x\left(\log x - 1\right)\Big|_{x=a}^b.$$

Für eine etwas substantiellere Aussage integrieren wir einmal an den trigonometrischen Funktionen herum und interessieren uns für die Folge

$$a_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

[17] Wer will, kann das Ganze gerne formal mit Induktion beweisen – schaden kann es nicht!

[18] Wenn auch eine sehr interessante.

mit $a_0 = \frac{\pi}{2}$ und[19] $a_1 = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$. Nun schreiben wir

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,(\cos x)'\,dx \\
&= -\sin^n x\cos x\Big|_{x=0}^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,\underbrace{(\cos x)}_{=(\sin x)'}(\cos x)\,dx \\
&= -\sin^n\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\sin^n 0}_{=0}\cos 0 + n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}\,dx \\
&= n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\left(1-\sin^2 x\right)\,dx = n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,dx - n\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx \\
&= na_{n-1} - na_{n+1},
\end{aligned}$$

also

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_{n-1}, \qquad a_0 = \frac{\pi}{2},\ a_1 = 1. \tag{7.4.6}$$

Damit ist für $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{2j} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \tag{7.4.7}$$

$$a_{2n+1} = \prod_{j=1}^{n}\frac{2j}{2j+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3} \tag{7.4.8}$$

und insbesondere $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$. Da für $x \in [0,\pi/2]$ ja $0 \le \sin x \le 1$ gilt, ist

$$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \qquad \Rightarrow \qquad a_{2n+2} \le a_{2n+1} \le a_{2n}.$$

Damit ist

$$1 \ge \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \ge \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1,$$

also

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^{-1}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1},
\end{aligned}$$

was zum WALLIS–PRODUKT

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1} \tag{7.4.9}$$

führt, mit dessen Hilfe sich π explizit berechnen lässt. Allerdings konvergiert das Produkt nicht sonderlich schnell, für $n = 500$ erhält man gerade mal 3.1400, so daß die Formel eher von theoretischem Wert ist; dafür nähern sich die Werte aber von unten an, man erhält also immer genauere untere Abschätzungen von π.

[19] Das ist ausnahmsweise kein Schreibfehler, denn die Stammfunktion zu $\sin x$ ist $\cos x$.

7.5 Uneigentliche Integrale und Anwendungen

Bei der Definition des Riemann–Integrals hatten wir zwei wesentliche Einschränkungen:

1. Der Integrationsbereich musste ein abgeschlossenes, *endliches* Intervall sein.

2. Die zu integrierende Funktion, der INTEGRAND[20], musste beschränkt sein.

Um diese beiden Einschränkungen zumindest teilweise loszuwerden nutzen wir wieder einen Grenzprozess und erhalten so eine Erweiterung des Integral- und Integrierbarkeitsbegriff. Die dadurch definierten Integrale bezeichnet man als UNEIGENTLICHES INTEGRAL. Zuerst lassen wir eine Integrationsgrenze „gegen Unendlich gehen“.

Definition 7.5.1. Ist $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem Intervall $[a,b]$, $b > a$, dann heißt das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.5.1}$$

KONVERGENT falls der Grenzwert in (7.5.1) existiert[21]. Analog definiert man das Integral $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Beispiel 7.5.2. Für $s > 1$ und $a > 0$ ist das Integral

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

konvergent. In der Tat gilt

$$\int_a^b x^{-s}\,dx = \frac{1}{1-s} x^{1-s}\Big|_{x=a}^b = -\underbrace{\frac{1}{(s-1)}}_{<0}\Big(\underbrace{\frac{1}{b^{s-1}}}_{\to 0} - \frac{1}{a^{s-1}}\Big) \to \frac{1}{s-1}\frac{1}{a^{s-1}}$$

für $b \to \infty$.

Der nächste Fall ist die Situation, daß die Funktion f am Rand des Integrationsbereichs nicht definiert ist[22], also eine SINGULARITÄT am Rand hat. Wir legen diese Singularität auf den linken Rand, eine Singularität am rechten Rand und eine beiderseitige Singularität behandelt man analog.

[20]So, jetzt ist dieses Wort auch einmal aufgetaucht. Und eine Integrandin gibt es nicht, auch nicht im Zeitalter der gendergerechten (was für ein grausiges Wort, auch ohne das zugehörige Konzept) Sprachregelungen.

[21]Und zwar wieder für *jede* Folge $b_n \to \infty$ und unabhängig von der gewählten Folge.

[22]Nach dem „Zerlegungssatz“, Lemma 7.2.11 können wir das Intervall an jeden Punkt *im* Integrationsbereich, an dem f nicht definierte ist, in zwei Teilintervalle aufspalten, die den „bösen“ Punkt dann als Randpunkt haben.

Definition 7.5.3. Ist $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar auf jedem Intervall[23] $[a+\varepsilon,b]$ so heißt das Integral KONVERGENT, wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \tag{7.5.2}$$

existiert.

Beispiel 7.5.4. Das Standardbeispiel ist

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \qquad \alpha<1,$$

für das wir

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{x=\varepsilon}^b = \frac{b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

erhalten. Für $\alpha=1$ hingegen ist

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big|_{x=\varepsilon}^b = \log b - \underbrace{\log\varepsilon}_{\to-\infty},$$

was leider nicht konvergiert.

Mit Hilfe uneigentlicher Integrale können wir Integration nutzen, um sehr elegant die Kovergenz gewisser Reihen beurteilen zu können.

Satz 7.5.5 (Integralvergleichskriterium)**.** *Für eine nichtnegative monoton fallende Funktion $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}_+$ konvergiert das Integral*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

genau dann, wenn Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty f(n)$$

konvergiert.

Beweis: Da f monoton fallend ist, ist

$$f(n+1) \le \underbrace{\int_n^{n+1} f(x)}_{=f(\xi),\,x\in[n,n+1]}\,dx \le f(n), \qquad n\in\mathbb{N},$$

und damit

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \le \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^n f(k), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Damit ist aber die Summe genau dann beschränkt und damit konvergent, wenn das Integral beschränkt und damit konvergent ist. □

[23]Nicht vergessen: Integrierbarkeit ist auf *abgeschlossenen* Intervallen definiert!

Beispiel 7.5.6. Die Reihe $\sum n^{-\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \le 1$, wie uns jetzt ganz einfach das Integral

$$\int_1^n x^{-\alpha}\, dx = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

sofort zeigt. Damit kann man die Grenzwerte dieser Reihe als Funktion von s betrachten:

$$\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad x > 1, \tag{7.5.3}$$

die erst richtig interessant wird, wenn man $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\Re\alpha > 1$ wählt. Das ist dann die berühmte RIEMANNSCHE ZETAFUNKTION, siehe [8], deren Nullstellenverhalten immer noch ungeklärt ist[24].

Und wenn wir schon bei den berühmten Funktionen sind, dann definieren gleich noch eine ganz spezielle SPEZIELLE FUNKTION.

Definition 7.5.7 (Gammafunktion)**.** Die GAMMAFUNKTION ist definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \qquad x > 0, \tag{7.5.4}$$

Die obige Definition ist an beiden Grenzen ein uneigentlichens Integral. Am linken Rand stellen wir fest, daß der Integrand $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ aus (7.5.4) $f(t) \le t^{x-1}$ erfüllt und daher nach Beispiel 7.5.4 das Integral konvergiert. Andererseits[25] ist, wenn wir t so groß wählen, daß $e^t > t^{1-x}$ ist, auch $t^{x-1}e^{-t} < t^{-2}$ und das Integral konvergiert nach Beispiel 7.5.2.

Das Schöne an der Gammafunktion ist die Tatsache, daß sie eine kontinuierliche Erweiterung der Fakultät ist.

Proposition 7.5.8 (Gammafunktion und Fakultät)**.** *Die Gammafunktion erfüllt*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \qquad \textit{und} \qquad \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.5.5}$$

Beweis: Beginnen wir mit der Rekursionsformel links in (7.5.5), die wir durch die partielle Integration[26]

$$\Gamma(x+1) \quad = \quad \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = -t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{t^x}{e^t}}_{=0} + x\Gamma(x)$$

beweisen und für die rechte Formel brauchen wir nur noch, daß

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} = -\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-t}}_{=0} + 1 = 1$$

[24] Das ist die RIEMANNSCHE VERMUTUNG, die (Stand Juni 2015) eine der letzten überlebenden „großen“ Vermutungen der Mathematik ist.

[25] Und das durchaus in einem doppelten Sinne.

[26] Die Integration der „selbstreproduzierenden“ Exponentialfunktion gegen eine „reduzierende“ Potenzfunktion schreit förmlich danach

ist, denn dann ist

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots\Gamma(1) = n!,$$

wie behauptet. □

Definition 7.5.9 (Logarithmische Konvexität)**.** Eine Funktion[27] $f : I \to \mathbb{R}_+$ heißt LOGARITHMISCH KONVEX, wenn die Funktion $\log f : I \to \mathbb{R}$ konvex ist, d.h., wenn für $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') = e^{\log f(\lambda x+(1-\lambda)x')} \le e^{\lambda \log f(x)+(1-\lambda)\log f(x')} = f(x)^\lambda \cdot f(x')^{1-\lambda} \quad (7.5.6)$$

gilt.

Logarithmische Konvexität ist eine zentrale und beinahe charakterisierende Eigenschaft der Gammafunktion.

Satz 7.5.10 (Gammafunktion)**.**

1. *Die Gammafunktion ist* LOGARITHMISCH KONVEX.
2. *Ist* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *eine logarithmisch konvexe Funktion mit* $f(x+1) = xf(x)$ *und* $f(x) = 1$, *so ist* $f = \Gamma$.

Beweis: Aus der HÖLDER–UNGLEICHUNG

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1, \qquad (7.5.7)$$

siehe Übung 7.5.1, folgt mit $p := \lambda^{-1}$, $q := (1-\lambda)^{-1}$, daß

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\lambda x + (1-\lambda)x'\right) &\leftarrow \int_\varepsilon^b t^{\lambda x+(1-\lambda)x'-1} e^{-t}\,dt \\
&= \int_\varepsilon^b t^{\lambda x+(1-\lambda)x'-1} e^{-t}\,dt = \int_\varepsilon^b t^{x/p+x'/q-(1/p+1/q)} e^{-t}\,dt \\
&= \int_\varepsilon^b \left(t^{x-1}\right)^{1/p} \left(t^{x'-1}\right)^{1/q} e^{-t(1/p+1/q)}\,dt = \int_\varepsilon^b \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{1/p} \left(t^{x'-1}e^{-t}\right)^{1/q}\,dt \\
&\le \left(\int_\varepsilon^b t^{x-1}e^{-t}\,dt\right)^{1/p} \left(\int_\varepsilon^b t^{x'-1}e^{-t}\,dt\right)^{1/p} \to \Gamma(x)^\lambda + \Gamma(x')^{1-\lambda},
\end{aligned}$$

wobei wir formal erst die Ungleichung für die endlichen Integrale bestimmen und dann jeweils die Grenzübergänge $\varepsilon \to 0$ und $b \to \infty$ durchführen müssten. Auf jeden Fall beweist das 1).

Sei umgekehrt f eine Funktion, die die Bedingungen von 2) erfüllt, dann folgt aus der Funktionalgleichung $f(x+1) = xf(x)$, daß

$$f(x+n) = (x+n-1)f(x+n-1) = \cdots = f(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x+k), \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad (7.5.8)$$

[27] Das Intervall I hier kann offen, abgeschlossen und uneigentlich sein, insbesondere ist $I = \mathbb{R}_+$ erlaubt.

gelten muss und die Normalisierung $f(1)=1$ ergibt auch schon $f(n+1)=n!$, auf $\mathbb{N}$ stimmen f und Γ also schon einmal überein. Für den Rest verwenden wir zu $x \in (0,1)$ die logarithmische Konvexität und die einfach zu verifizierende Beobachtung $x+n=(1-x)n+x(n+1)$:

$$\begin{aligned} f(x+n) &= f((1-x)n+x(n+1)) \le f(n)^{1-x} f(n+1)^x \\ &= \underbrace{f(n)}_{=(n-1)!} \underbrace{\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right)^x}_{=(n!/(n-1)!)^x=n^x} = (n-1)!n^x. \end{aligned}$$

Weil es so schön funktioniert hat, dasselbe Spiel mit $n+1=x(n+x)+(1-x)(n+x+1)$:

$$\begin{aligned} n! &= f(n+1) = f(x(n+x)+(1-x)(n+x+1)) \le f(n+x)^x f(n+x+1)^{1-x} \\ &= f(n+x)^x \big((n+x)f(n+x)\big)^{1-x} = f(n+x)(n+x)^{1-x}, \end{aligned}$$

was insgesamt die Ungleichungen

$$n!(n+x)^{x-1} \le f(x+n) \le \underbrace{(n-1)!n^x}_{=n!n^{x-1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{7.5.9}$$

ergibt. Setzen wir nun (7.5.8) in (7.5.9) ein und dividideeren durch das positive Produkt, dann erhalten wir die Ungleichung

$$\underbrace{\frac{n!}{(x+n-1)\cdots x}(n+x)^{x-1}}_{=:a_n(x)} \le f(x) \le \underbrace{\frac{n!}{(x+n-1)\cdots x}n^{x-1}}_{=:b_n(x)}, \tag{7.5.10}$$

wobei[28]

$$\frac{a_n(x)}{b_n(x)} = \left(\frac{n+x}{n}\right)^{x-1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{x-1} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(x)}{b_n(x)} = 1.$$

Existiert also einer der beiden Grenzwerte $a^* = \lim a_n$ oder $b^* = \lim b_n$ für $n \to \infty$, dann existiert auch der andere die beiden Grenzwerte und definiert den Funktionswert $f(x)$ *eindeutig*. Würde eine der beiden Folgen divergieren, so täte dies auch die andere und die Funktion wäre an der Stelle x nicht definiert[29]. Nun kennen wir aber eine Lösung, der Funktionalgleichung, nämlich Γ, weswegen also für jedes $x \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x) = \Gamma(x) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \Gamma(x)$$

gelten muss. □

Übung 7.5.1 Beweisen Sie (7.5.7). Hinweis: Wenden sie die Höldersche Ungleichung (6.5.10) auf die Riemannsumme an und verwenden Sie Satz 7.2.10. ◊

Als Anwendungen erhalten wir Formeln für die Gammafunktion und um π in ihr zu finden.

[28]Zur Beachung: Da $x<1$ ist dieser Quotient auch wirklich <1, was konsistent mit $a_n < b_n$ ist.

[29]Sie hätte „Funktionswert ∞".

Korollar 7.5.11. *Für* $x \in \mathbb{R}_+$ *ist*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{7.5.11}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{7.5.12}$$

Beweis: Der Ausdruck auf der rechten Seite von (7.5.11) ist $b_n \frac{n}{x+n}$, was für jedes x denselben Grenzwert $n \to \infty$ wie b_n hat, nämlich $\Gamma(x)$. Damit ist aber insbesondere

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\cdots(n-1+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})},
\end{aligned}$$

also, indem wir im Nenner den $(k+1)$ten Term des ersten Produkts mit dem $k$ten Term des zweiten Produkts zusammenfassen,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\frac{1}{2}} \frac{(n!)^2}{(1-\frac{1}{4})(4-\frac{1}{4})\cdots(n^2-\frac{1}{4})} \\
&= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\frac{1}{2}}}_{=2} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}} = 2 \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi,
\end{aligned}$$

wobei wir nochmals das WALLIS–PRODUKT (7.4.9) verwendet haben. □

Die Formel (7.5.11) kann man schließlich auch nutzen, um eine Aussage über das Verhalten der Funktion $n \mapsto n!$ zu erhalten. Dazu nennt man zwei Folgen[30] a, b ASYMPTOTISCH ÄQUIVALENT, in Zeichen $a \sim b$ oder $a_n \sim b_n$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

ist. Mit dieser Terminologie kann man die STERLING–FORMEL als

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{7.5.13}$$

schreiben, Beweis siehe [10, 15]. Und so seltsam sie auch aussieht, sie kann tatsächlich von Nutzen sein ...

[30]Die *nicht* konvergent sein müssen!

Folgen und Reihen von Funktionen

8

Die sichere Überzeugung, daß man könnte, wenn man wollte, ist Ursache an manches guten Kopfes Untätigkeit, und das nicht ohne Grund.

(G. Chr. Lichtenberg)

In diesem letzten Kapitel betrachten wir nun nicht nur einzelne Funktionen, sondern Folgen $f_n : D \to \mathbb{R}$ von Funktionen, und interessieren uns für deren Gemeinsamkeiten. Dabei kann D wieder eine ziemliche beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein, wenn wir mit Eigenschaften wie Stetigkeit, Integrierbarkeit oder Differenzierbarkeit operieren wollen, dann sollte natürlich auch D passend sein.

8.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 8.1.1 (Konvergenz)**.** Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich D.

1. Die Folge f_n heißt PUNKTWEISE KONVERGENT mit Grenzfunktion $f : D \to I$, wenn es zu jedem $x \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß
$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon, \qquad n \ge n_0. \tag{8.1.1}$$
2. Die Folge f_n heißt GLEICHMÄSSIG KONVERGENT mit Grenzfunktion $f : D \to I$, wenn es zu edem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß
$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon, \qquad n \ge n_0, \quad x \in D. \tag{8.1.2}$$

Der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz besteht also darin, daß in letzterem Fall der Index n_0 von der Stelle $x \in D$ *unabhängig* ist.

Jede gleichmäßig konvergente Folge ist auch punktweise konvergent, die Umkehrung gilt allerdings nicht, selbst wenn die Funktionen stetig sind. Das „klassische“ Gegenbeispiel auf dem Intervall $[0,1]$ ist die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2 - nx, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1], \end{cases} \tag{8.1.3}$$

siehe Abb. 8.1.1. Für jedes $x > 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n > \frac{1}{x}$ und $f_n(0) = 0$ gilt sogar für alle n. Daher konvergiert die Funktion punktweise gegen Null und müsste, wenn sie gleichmäßig konvergieren würde, ebenfalls Grenzfunktion Null haben[1]. Nun gibt es aber zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x, nämlich $x = \frac{1}{n}$, an dem $f(x) = 1$ ist. Wem das nicht reicht, der kann $g_n(x) = n f_n(x)$ betrachten, da *divergieren* die Werte an $x = \frac{1}{n}$ sogar.

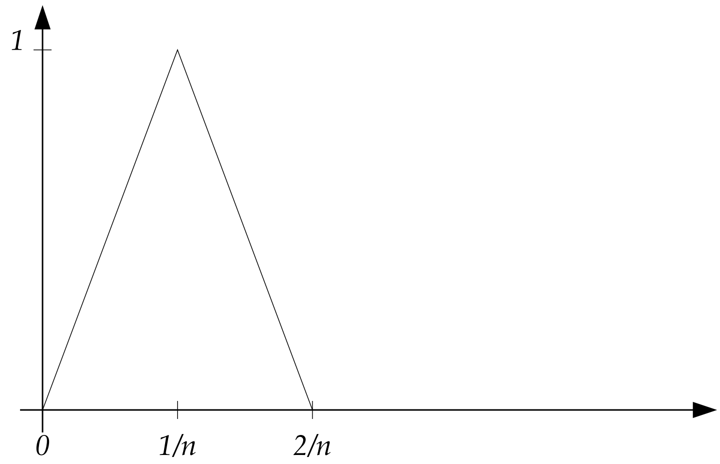

Abbildung 8.1.1: Einfachstes Beispiel einer punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge. Das „Dach" rückt für $n \to \infty$ immer weiter nach links.

Proposition 8.1.2. *Ist $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen, dann ist auch der Grenzwert f stetig.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in D$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge f_n gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß[2]

$$|f_k(y) - f(y)| < \varepsilon, \qquad y \in D,$$

und da f_k stetig ist, gibt es auch ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_k(x) - f_k(x')| < \varepsilon.$$

Damit ist für $|x - x'| < \delta$

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(x')\right| &= \left|f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(x') + f_k(x') - f(x')\right| \\ &\le \underbrace{\left|f(x) - f_k(x)\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|f_k(x) - f_k(x')\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|f_k(x') - f(x')\right|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

und damit ist f stetig. □

[1] Der gleichmäßige Grenzwert muss nach (8.1.1) und (8.1.2) an jeder Stelle mit dem punktweisen übereinstimmen.

[2] Wegen des Betrags ist $|f_k - f| = |f - f_k|$, man kann die Reihenfolge also nach Lust und Laune vertauschen.

Gleichmäßige Konvergenz ist notwendig, damit Proposition 8.1.2 funktioniert, ansonsten ist sie im allgemeinen falsch[3]. Ein einfaches Gegenbeispiel ist auf $I = [-1,1]$ die Folge

$$f_n(x) = \begin{cases} \max(-1, nx), & x < 0 \\ 0, & x = 0, \\ \min(1, nx), & x > 0, \end{cases} \tag{8.1.4}$$

von stetigen Funktionen, die *punktweise* gegen die SIGNUMFUNKTION

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \tag{8.1.5}$$

konvergiert. Ein bisschen mehr Spaß macht allerdings das folgende Beispiel aus [12].

Beispiel 8.1.3 (Coole Funktion)**.** Wir konstruieren ein Beispiel, wo die Grenzfunktion an allen rationalen Zahlen unstetig ist.

1. Die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{8.1.6}$$

   wobei die Darstellung p/q einer rationalen Zahl so gewählt sein soll, daß $q \in \mathbb{N}$ *minimal* ist, ist UNSTETIG[4] auf $\mathbb{Q}$ und STETIG[5] auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und stellt daher eine gewisse Herausforderung an die Intuition dar.

2. Um auf $[0,1]$ eine Folge f_n zu konstruieren, die punktweise gegen f aus (8.1.6) konvergiert[6], betrachten wir alle $x = \frac{p}{q} \in [0,1]$ mit $q < n$ und setzen an diesen Stellen $f_n(x) = \frac{1}{q}$ sowie

   $$f_n(x) := n^2 \begin{cases} \frac{1}{q}(x - \frac{p}{q} + \frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n}(\frac{p}{q} - x), & x \in \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{n^2}, \frac{p}{q}\right], \\ \frac{1}{n}(x - \frac{p}{q}) + \frac{1}{q}(x - \frac{p}{q} - \frac{1}{n^2}) & x \in \left[\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{n^2}\right], \end{cases}$$

   was nichts anderes ist als eine stückweise lineare Funktion, die an den Stellen $\frac{p}{q} \pm \frac{1}{n^2}$ wieder bei $\frac{1}{n}$ landet. An allen anderen Stellen setzen wir $f_n = \frac{1}{n}$.

[3] Das heißt, es gibt mindestens ein Gegenbeispiel.

[4] In jeder beliebigen Nähe zu einem rationalen Punkt gibt es andere rationale Punkte mit beliebig großem Nenner, an denen f beliebig nahe an Null kommt

[5] Um an eine irrationale Funktion nahe genug heranzukommen, muss der Nenner immer größer werden.

[6] Wer eine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ bevorzugt, setzt dieses f einfach 1–PERIODISCH fort, also $f_n(k+x) = f_n(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$. Das ist stetig da $f_n(0) = f_n(1) = 1$.

3. Diese Folge f_n erfüllt sogar $f_n \geq f_{n+1}$, fällt monoton und konvergiert punktweise gegen f: Für jede rationale Stelle $x = \frac{p}{q}$ ist irgendwann $n \geq q$ und für irrationale $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergiert $f_n(x)$ gegen Null.

4. Leider ist f aber eben unstetig an $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

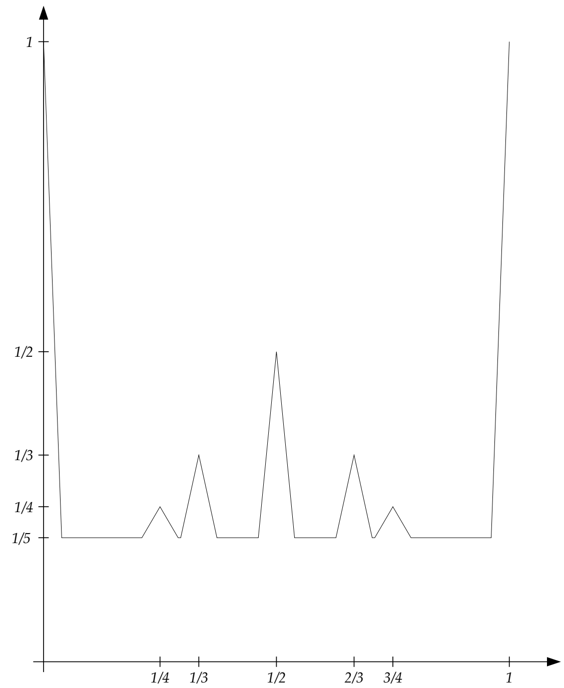

Abbildung 8.1.2: Die Funktion f_5 aus Beispiel 8.1.3. Man sieht die „hohen Gipfel“ der Funktion f, allerdings mit der Breite n^{-2}, die im Laufe des Prozesses immer mehr abnehmen wird. Alle anderen Gipfel sind durch den Minimalwert $\frac{1}{5}$ "überflutet“, tauchen aber für hinreichend großes n irgendwann auf.

Die Funktion aus Beispiel 8.1.3 hat aber noch eine schöne Eigenschaft: Sie ist Riemann–integrierbar auf $[0,1]$ und ihr Integral ist 0. Um das zu zeigen, brauchen wir eine Ober- und eine Untersumme, also Treppenfunktionen $\phi \leq f \leq \psi$ mit $0 = \int \phi = \int \psi$. Die Wahl $\phi = 0$ ist einfach, für ψ verwenden wir eine Folge von Treppenfunktion, die sich analog zu Abb 8.1.2 ergibt, nämlich

$$\psi_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{n^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{n^3}\right], \\ \frac{1}{n}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gibt in $[0,1]$ maximal n^2 Brüche[7] mit Nenner $< n$ und jeder dieser Brüche fügt eine Treppe mit Fläche $2/n^3$ hinzu, also insgesamt höchstens

[7] Genauer: 2 mit Nenner 1, einen mit Nenner 2, 2 mit Nenner 3, 3 mit Nenner 4, und das bereits mit Doppelnennungen, also insgesamt $2 + \frac{n(n-1)}{2}$, was mit n^2 hinreichend großzügig abgeschätzt ist.

eine Fläche von $2/n$. Den Rest überschätzt man mit $\int_0^1 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ und erhält insgesamt, daß

$$0 \le \int_0^1 \psi_n(x)\,dx \le \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n},$$

was für $n \to \infty$ tatsächlich gegen 0 konvergiert.

Bei der Konvergenz von Folgen haben wir den Abstandsbegriff verwendet, der durch die Betragsfunktion, die auf jedem geordneten Körper existiert. Das wollen wir im Vorgriff auf Analysis 2 ein wenig abstrahieren, wobei wir auch gleich komplexwertige Funktionen betrachten können, durch den Betrag in (8.1.7) passiert ja nichts wesentliches.

Definition 8.1.4 (Supremumsnorm)**.** Die SUPREMUMSNORM zu einer stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\|f\|_{D,\infty} := \|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|. \tag{8.1.7}$$

Ist $D = [a,b]$, dann kann man „sup" auch durch „max" ersetzen.

Übung 8.1.1 Zeigen Sie: $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt die NORMAXIOME

1. $\|f\|_\infty \ge 0$ und $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $\|cf\|_\infty = |c|\,\|f\|_\infty$, $c \in \mathbb{R}$.
3. $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

$\diamondsuit$

Die Normaxiome aus Übung 8.1.1 sind genau die Eigenschaften des Betrags, die wir bei der Konvergenzanalyse von Folgen ständig verwendet haben. Damit geben Sie uns auch einen Konvergenzbegriff von Funktionenfolgen. Und der lässt sich leicht identifizieren.

Proposition 8.1.5. *Eine Folge f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $\|f_n - f\|_\infty$ eine Nullfolge ist.*

Beweis: „$\Rightarrow$": Konvergiert f_n gleichmässig gegen f, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ erfüllt ist. Nach der Definition des Supremums gibt es aber auch ein $x^* \in D$ mit

$$|f_n(x^*) - f(x^*)| > \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| - \varepsilon$$

und damit ist

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < |f_n(x^*) - f(x^*)| + \varepsilon < 2\varepsilon, \qquad n \ge n_0,$$

und $\|f_n - f\|_\infty$ ist eine Nullfolge. Für „$\Leftarrow$" wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, $n \ge n_0$, und erhalten, daß dann auch für alle $x \in D$

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x'\in D} |f_n(x') - f(x')| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \qquad n \ge n_0,$$

erfüllt sein muss. □

Mit anderen Worten: Die SUPREMUMSNORM beschreibt gleichmäßige Konvergenz. In diesem Kontext kann man nun wieder ein Cauchy–Kriterium aufstellen und in fast perfekter Analogie all das machen, was wir vorher mit Folgen und Reihen von Zahlen gemacht haben.

8.2 Konvergenzsätze

Als erstes sehen wir uns Reihen von Funktionen und deren absolute Konvergenz an.

Satz 8.2.1 (Absolute Konvergenz). *Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, für die die Reihe Σf_n ABSOLUT KONVERGENT ist, d.h.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty. \tag{8.2.1}$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

absolut und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f.

Beweis: Für jedes $x \in D$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty,$$

die Reihe $\Sigma f_n(x)$ konvergiert also absolut und die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist wohldefiniert. Außerdem ist für $x \in D$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty,$$

wobei der letzte Ausdruck eine von x unabhängige Nullfolge in n ist. Das bedeutet aber gerade, daß die Reihe GLEICHMÄSSIG KONVERGENT ist. □

Unter gewissen Voraussetzungen konvergieren auch Integrale.

Satz 8.2.2 (Integrale). *Konvergiert die Folge $f_n \in C[a,b]$ von stetigen Funktionen gleichmäßig gegen $f \in C[a,b]$, dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{8.2.2}$$

Beweis: Nach Proposition 8.1.2 ist f stetig und damit integrierbar, dank Satz 7.2.7 und Satz 7.2.8 ist

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| &\le \int_a^b \left| f(x) - f_n(x) \right| dx = \left| f(\xi) - f_n(\xi) \right| (b-a) \\ &\le \|f - f_n\|(b-a), \end{aligned}$$

und da $\|f - f_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, konvergieren auch die Integrale. □

Bemerkung 8.2.3. *Punktweise* Konvergenz reicht für die Integrale *nicht* aus! Das einfachste Beispiel ist die Funktionenfolge $g_n := n\ f_n$ mit den Funktionen f_n aus (8.1.3) bzw. Abb 8.1.1. Der punktweise Grenzwert ist $g = 0$, aber es gilt

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Und auch für die Ableitung gibt es einen Satz.

Satz 8.2.4. *Ist $f_n \in C^1[a,b]$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, die* punktweise *gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert und deren Ableitungen f_n'* gleichmäßig *konvergieren, dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{8.2.3}$$

Beweis: Da die Funktionen f_n' *gleichmäßig* konvergieren, ist die Grenzfunktion g stetig und integrierbar und nach Satz 8.2.2 ist für jedes $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(a) + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt, \end{aligned}$$

und damit ist nach Satz 7.3.1 f differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$, $x \in D$. □

8.3 Der Satz von Arzela–Ascoli

Die Aussagen des letzten Abschnitts waren allesamt durchaus unspektakulär[8] und die Gegenbeispiele waren fast interessanter als die Resultate selbst. In diesem Abschnitt werden wir uns einen klassischen Satz ansehen, der ein Analogon des Satzes von Bolzano–Weierstrass, Satz 3.3.2, darstellt. Dazu erst einmal eine kleine Vorbemerkung.

Ist $f_n \in C[a,b]$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen auf einem *kompakten* (abgeschlossenen und beschränkten) Intervall, dann bildet diese Folge eine CAUCHY–FOLGE bezüglich der Norm, d.h., für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß für $m, n \geq n_0$

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| \qquad \Rightarrow \qquad \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in [a,b] \tag{8.3.1}$$

gilt. Die Funktion f_m ist nach Satz 4.3.4 GLEICHMÄSSIG STETIG, es gibt also ein $\delta = \delta_m > 0$, so daß

$$|x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_m(x) - f_m(x')| < \varepsilon. \tag{8.3.2}$$

[8]Muss ja auch nicht immer so sein.

Jetzt betrachten wir so ein Paar x, x' mit[9] $|x - x'| < \delta$ und erhalten, daß

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x')| &= \left| f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x') + f_m(x') - f_n(x') \right| \\ &\le \underbrace{\left| f_n(x) - f_m(x) \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| f_m(x) - f_m(x') \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| f_m(x') - f_n(x') \right|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

und damit haben wir ein δ, nämlich δ_m gefunden, so daß *für alle* $n \ge n_0$, unabhängig von n die Aussage

$$|x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f_n(x) - f_n(x')| < 3\varepsilon \tag{8.3.3}$$

erfüllt ist. Diese Eigenschaft formalisieren wir.

Definition 8.3.1 (Gleichgradige Stetigkeit)**.** Eine Menge oder FAMILIE[10] $\mathscr{F} \subseteq C(D)$ von stetigen Funktionen heißt GLEICHGRADIG STETIG, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad f \in \mathscr{F}. \tag{8.3.4}$$

Bemerkung 8.3.2. Definition 8.3.1 ist ein bisschen redundant, denn jedes Folgenglied f_n einer Folge von gleichgradig stetigen Funktionen ist ja automatisch GLEICHMÄSSIG STETIG und somit auch stetig.

Die Überlegungen, die zu (8.3.4) geführt haben, lassen sich dann folgendermaßen zusammenfassen.

Proposition 8.3.3 (Gleichgradige Stetigkeit)**.** *Jede gleichmäßig konvergente Folge $\mathscr{F} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ von stetigen Funktionen ist gleichgradig stetig.*

Satz 8.3.4 (ARZELA–ASCOLI)**.** *Für eine Familie $\mathscr{F} \subseteq C[a,b]$ von stetigen Funktionen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Jede Folge $f_n \in \mathscr{F}$ enthält eine gleichmäßig konvergente* TEILFOLGE*.*
2. *$\mathscr{F}$ ist gleichgradig stetig und punktweise beschränkt.*

Für den Beweis brauchen wir eine kleine Hilfssaussage.

Lemma 8.3.5. *Ist 1) in Satz 8.3.4 erfüllt, so ist $\mathscr{F}$ gleichmäßig beschränkt, d.h.,*

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \|f\|_\infty < \infty.$$

[9] Nochmals als Hinweis: Dieses δ hängt von dem wie auch immer festgelegten Wert m ab.

[10] Eine Familie von Funktionen kann ansonsten völlig unstrukturiert sein. Soll also keiner sagen, mathematische Definitionen oder Nomenklatur hätte keinen Realitätsbezug.

Beweis: Wäre $\mathscr{F}$ unbeschränkt, dann gibt es eine Folge $f_n \in \mathscr{F}$ mit $\|f_n\|_\infty \ge n$ und damit mit Punkten x_n, so daß $|f_n(x_n)| \ge n$. Würde diese Folge gegen f konvergieren, dann gilt für jedes ε und n hinreichend groß, daß

$$|f(x_n)| \ge |f_n(x_n)| - \varepsilon \ge n - \varepsilon$$

und f wäre unbeschränkt im Widerspruch zur Stetigkeit von f. □

Jetzt aber an die Arbeit, wir kommen zu einem der längsten Beweise dieser Vorlesung[11].

Beweis von Satz 8.3.4: Wir beginnen mit „2) ⇒ 1)“ und nehmen an, daß die Folge f_n eine Folge in der gleichgradig stetigen und punktweise beschränkten Familie $\mathscr{F}$ ist. Ausserdem sei x_k, $k \in \mathbb{N}$, eine ABZÄHLUNG von $X := [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Diese Punkte liegen DICHT in $[a,b]$, d.h. für jedes $x \in [a,b]$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index k, so daß $|x - x_k| < \varepsilon$ ist. Da die Folge $f_n(x_1)$, $n \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge von Zahlen ist, enthält sie nach Satz 3.3.2 eine konvergente Teilfolge $f_{\sigma_1(n)}$ und wir definieren

$$f(x_1) := \lim_{n\to\infty} f_{\sigma_1(n)}(x_1). \tag{8.3.5}$$

Dasselbe Argument mit $f_{\sigma_1(n)}(x_2)$ liefert eine Teilfolge $f_{\sigma_2(n)}$ von $f_{\sigma_1(n)}$ mit

$$f(x_2) := \lim_{n\to\infty} f_{\sigma_2(n)}(x_2).$$

Da σ_2 eine Teilfolge von σ_1 war, gilt (8.3.5) auch mit σ_2 anstelle von σ_1. Auf diese Weise konstruieren wir Teilfolgen σ_k und Funktionswerte mit

$$f(x_j) = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma_k(n)}(x_j), \qquad j = 1,\dots,k. \tag{8.3.6}$$

und mit $\sigma : k \mapsto \sigma_k(k)$ erhalten wir eine Folge, für die

$$f(x_j) = \lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(x_j), \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{8.3.7}$$

erfüllt ist[12] und damit ist die Grenzfunktion f zur Teilfolge σ schon einmal auf X definiert. Die Folge konvergiert, ist damit eine Cauchyfolge, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so daß

$$\left| f_{\sigma(m)}(x_j) - f_{\sigma(n)}(x_j) \right| < \varepsilon, \qquad j \in \mathbb{N},\ m,n \ge n_0. \tag{8.3.8}$$

Wegen der Gleichstetigkeit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left| f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x') \right| < \varepsilon, \qquad x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}. \tag{8.3.9}$$

Außerdem können wir $[a,b]$ aber bereits mit *endlich vielen Intervallen* der Form $[x_j - \delta, x_j + \delta]$ überdecken[13], sagen wir mit den Intervallen $I_1,\dots,I_N$

[11] Fast schon ein „richtiger“ Beweis.

[12] (8.3.7) gilt *für jedes* j, aber nicht unbedingt *gleichmäßig in* j, was wir aber auch nicht brauchen werden, da wir gleich feststellen werden, daß nur endlich viele j benötigt werden und damit wird die Sache deutlich entspannter.

[13] Das ist eine ganz wesentliche Konsequenz der Gleichstetigkeit und damit eine Eigenschaft der Folge f_n, die uns dieses δ liefert.

und wir ordnen unsere Punkte in X so um, daß $I_j = [x_j - \delta, x_j + \delta]$, $j = 1, \dots, N$, ist. Damit zeigen wir nun die Konvergenz auf X: Zu $x \in [a,b]$ und $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß (8.3.9) erfüllt ist. Dazu gibt es die δ–Intervalle $I_1, \dots, I_N$, die $[a,b]$ überdecken und damit einen Index $j \in \{1, \dots, N\}$ mit $x \in I_j$. Außerdem gibt es das n_0 aus (8.3.8), und wir wählen $m, n \ge n_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \left| f_{\sigma(m)}(x) - f_{\sigma(n)}(x) \right| \\ \le & \underbrace{\left| f_{\sigma(m)}(x) - f_{\sigma(m)}(x_j) \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| f_{\sigma(m)}(x_j) - f_{\sigma(n)}(x_j) \right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left| f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x_j) \right|}_{<\varepsilon} \\ < & \; 3\varepsilon, \end{aligned}$$

und diese Abschätzung gilt GLEICHMÄSSIG in x, d.h.

$$\| f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(n)} \|_\infty < 3\varepsilon, \qquad m, n \ge n_0,$$

die Teilfolge konvergiert daher gleichmäßig und hat eine stetige Grenzfunktion.

Für die Umkehrung „1) ⇒ 2)“ nutzen wir zuerst einmal Lemma 8.3.5, um zu erkennen, daß $\mathscr{F}$ gleichmäßig und damit natürlich insbesondere punktweise beschränkt ist. Nehmen wir also an, $\mathscr{F}$ wäre nicht gleichgradig stetig, d.h., es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ eine Funktion $f = f_\delta$ und Punkte $x = x_\delta$, $x' = x'_\delta$ mit der Eigenschaft

$$|x - x'| < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x) - f(x')| > \varepsilon \tag{8.3.10}$$

existieren. Nehmen wir wieder speziell $\delta = \frac{1}{n}$, so bekommen wir Folgen $f_n \in \mathscr{F}$ und $x_n, x'_n \in [a,b]$ mit

$$|x_n - x'_n| < \delta \qquad \text{und} \qquad |f_n(x_n) - f_n(x'_n)| > \varepsilon. \tag{8.3.11}$$

Die Folge der x_n ist beschränkt und enthält daher nach dem Satz von BOLZANO–WEIERSTRASS[14], Satz 3.3.2, eine konvergente Teilfolge $x_{\sigma(n)} \to x$. Wegen $|x_{\sigma(n)} - x'_{\sigma(n)}| < \frac{1}{\sigma(n)} < \frac{1}{n}$ konvergieren auch die $x'_{\sigma(n)}$ gegen x. Nach Voraussetzung enthält nun $f_{\sigma(n)}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $f_{\sigma'(n)} \to f$, für die dann

$$\begin{aligned} \varepsilon < & \left| f_{\sigma'(n)}(x_{\sigma'(n)}) - f_{\sigma'(n)}(x'_{\sigma'(n)}) \right| \\ \le & \left| f(x_{\sigma'(n)}) - f(x'_{\sigma'(n)}) \right| + \underbrace{\left| f(x_{\sigma'(n)}) - f_{\sigma'(n)}(x_{\sigma'(n)}) \right|}_{\le \|f - f_{\sigma'(n)}\|_\infty} + \underbrace{\left| f(x'_{\sigma'(n)}) - f_{\sigma'(n)}(x'_{\sigma'(n)}) \right|}_{\le \|f - f_{\sigma'(n)}\|_\infty} \\ \le & \underbrace{\left| f(x_{\sigma'(n)}) - f(x'_{\sigma'(n)}) \right|}_{\to 0} + 2 \underbrace{\|f - f_{\sigma'(n)}\|_\infty}_{\to 0} \to 0 \end{aligned}$$

gelten muss, was einen Widerspruch liefert, da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. □

[14] Wie schon gesagt: Diese beiden Resultate sind miteinander verwandt!

8.4 Potenzreihen und die Taylor–Formel

Ein POLYNOM, also eine Funktion der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{k} a_k z^k,$$

wobei z gerne auch komplex sein darf, ist natürlich eine besonders einfache Funktion und kann auch als Summe der Monome $a_n z^n$ angesehen werden. Etwas allemeiner könnten wir die Funktion dann auch als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

schreiben und uns fragen, was passiert, wenn der GRAD n des Polynoms gegen unendlich geht.

Definition 8.4.1 (Potenzreihe)**.** Eine POTENZREIHE ist eine komplexwertige Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z_0 \in \mathbb{C}. \tag{8.4.1}$$

Natürlich kann man Potenzreihen auch nür über $\mathbb{R}$ definieren und untersuchen, „schöner“ und natürlicher werden die Konzepte aber tatsächlich im Komplexen. Wir beginnen mit einer zentralen Konvergenzaussage.

Satz 8.4.2. *Konvergiert die Potenzreihe* (8.4.1) *für ein* $z^* \in \mathbb{C}$*, so konvergiert sie für jedes* $0 < \rho < |z^* - z_0|$ *absolut und gleichmäßig auf der abgeschlossenen* KREISSCHEIBE

$$K(z_0, \rho) := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \rho \right\} \tag{8.4.2}$$

Beweis: Wir setzen[15] $f_n := a_n(\cdot - z_0)^n$, dann sagt die Annahme, daß die Reihe $\sum f_n(z^*)$ konvergiert[16] und daß deswegen $f_n(z^*)$ eine Nullfolge und damit beschränkt ein muss: $|f_n(z^*)| \le M$ für ein passendes $M \in \mathbb{R}$. Für alle $z \in K(z_0, \rho)$ ist dann

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= |a_n(z - z_0)^n| = \left| a_n (z^* - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z^* - z_0)^n} \right| \\ &= \underbrace{\left| a_n (z^* - z_0)^n \right|}_{\le M} \underbrace{\left| \frac{z - z_0}{z^* - z_0} \right|^n}_{\le \rho^n / |z^* - z_0|^n} \le M \underbrace{\left(\frac{\rho}{|z^* - z_0|} \right)^n}_{=:\theta^n} \end{aligned}$$

[15]In dieser sehr gebräuchlichen Notation steht das unscheinbare Pünktchen „·“ für das Argument der Funktion, was einfach kürzer ist, als $f(z) = \dots$ oder $f : z \mapsto \dots$ schreiben zu müssen.

[16]Vorsicht: Wir haben *keine* absolute Konvergenz angenommen, den Absolutbetrag darf man also nicht in die Summe ziehen.

und da $\rho < |z^* - z_0|$ ist, ist $\theta < 1$ und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \le M \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{M}{1-\theta}.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut und mit einer Schranke, die von z unabhänig ist, also auch gleichmäßig. □

Bemerkung 8.4.3. So einfach der Beweis ist, so bemerkenswert ist das Ergebnis: Konvergenz, noch nicht einmal ABSOLUTE KONVERGENZ der Potenzreihe an einer Stelle z^* sorgt dafür, daß die Potenzreihe auf jedem Kreis um z_0, der z^* *nicht* enthält, *absolut* und *gleichmäßig* konvergiert. Es gilt also ein „ganz oder gar nicht“–Prinzip.

Das folgende Resultat ist zwar eine einfache Erweiterung von Satz 8.4.2, wird aber weitreichende Konsequenzen haben.

Korollar 8.4.4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 8.4.2 konvergiert auch die Potenzreihe*

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z-z_0)^{n-1} \tag{8.4.3}$$

absolut und gleichmäßig auf $K(z_0,\rho)$ *für alle* $\rho < |z^* - z_0|$.

Beweis: Genau wie im Beweis von Satz 8.4.2 zeigt man, daß mit $g_n = n\, a_n\, (\cdot - z_0)^{n-1}$ auch die Abschätzung

$$|g_n(z)| \le M n \theta^{n-1}$$

gilt und da

$$\frac{|g_{n+1}(z)|}{|g_n(z)|} = \frac{(n+1)\theta^{n+1}}{n\theta^n} = \frac{n+1}{n}\theta$$

für hinreichend großes n unter 1 fällt, folgt die Konvergenz aus dem QUOTIENTENKRITERIUM, Satz 3.6.7. □

Ein Blick auf (8.4.3) zeigt natürlich, was man dabei im Sinn hatte.

Korollar 8.4.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 8.4.2 ist die Funktion f auf $K(z_0,\rho) \cap \mathbb{R}$ differenzierbar*[17] *und die Ableitung ergibt sich durch* GLIEDWEISE DIFFERENTIATION.

Beweis: Unter Verwendung der Notationen von Satz 8.4.2 und Korollar 8.4.4 ist $g_n = f_n'$ und da die Reihe der g_n konvergiert und die f_n ebenfalls gleichmäßig und damit punktweise konvergieren, ist $f' = g$ nach Satz 8.2.4. □

Das führt uns zu einem zentralen Resultat in der Theorie der Potenzreihen.

[17] Kleine Warnung: Für Funktionen mit komplexem Argument haben wir keine Ableitung definiert, das ist der FUNKTIONENTHEORIE vorbehalten.

Definition 8.4.6. Der KONVERGENZRADIUS einer Potenzreihe $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ ist definiert als

$$\rho(f) := \sup\left\{|z-z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergiert}\right\}. \tag{8.4.4}$$

Korollar 8.4.7. *Die Potenzreihe $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|z-z_0| < \rho(f)$ und divergiert für $|z-z_0| > \rho(f)$.*

Beweis: Ist $|z-z_0| < \rho(f)$, dann gibt es ein z^* mit $|z-z_0| < |z^*-z_0| < \rho(f)$, an dem die Potenzreihe konvergiert und Satz 8.4.2 garantiert dann auch die absolute und gleichmäßige Konvergenz an z. Gäbe es umgekehrt ein z mit $|z-z_0| > \rho(f)$, dann widerspräche das der Definition in (8.4.4), denn der Konvergenzradius ist ja das SUPREMUM. □

Korollar 8.4.8. *Die Potenzreihe $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ ist im Intervall*

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-z_0| < \rho(f)\right\}$$

unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{8.4.5}$$

Beweis: Jede absolut und gleichmäßig konvergente Potenzreihe ist differenzierbar und ihre Ableitung wieder eine Potenzreihe, die wieder absolut und gleichmäßig konvergiert und eine Ableitung hat und so weiter. Damit ist die Potenzreihe unendlich oft differenzierbar und da sich die Ableitungen durch gliedweise Differentiation ergeben, gilt[18]

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_n (x-z_0)^n, \tag{8.4.6}$$

was man wieder auf ganz $\mathbb{C}$ erweitern kann. Einsetzen von z_0 in (8.4.6) liefert dann (8.4.5). □

Natürlich spricht absolut nichts dagegen, den ENTWICKLUNGSPUNKT z_0 der Reihe reell zu wählen, und dann haben wir einen „natürlichen“ Bezug zwischen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion und einer Potenzreihe. Das genau ist der Inhalt des Satzes von Taylor bzw. der TAYLORFORMEL.

Satz 8.4.9 (Satz von Taylor)**.** *Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $x_0, x \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{8.4.7}$$

[18] Das ist jetzt also eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und solche Funktionen kann man einfach differenzieren, indem man Real- und Imaginärteil separat differenziert.

Beweis: Induktion über n. Für $n=0$ hat (8.4.7) die Form

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\,dt,$$

was der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 7.3.1, ist.

Für den Induktionsschritt wenden wir PARTIELLE INTEGRATION auf das RESTGLIED $\int \ldots$ in (8.4.7) an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
= \; & -\frac{1}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
= \; & \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Das in (8.4.7) eingesetzt liefert

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \\
&\qquad + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,dt,
\end{aligned}$$

also genau die „$(n+1)$–Variante“ von (8.4.7). □

Bemerkung 8.4.10. In (8.4.7) können auch Integrale der Form $\int_a^b g(x)\,dx$ mit $a > b$ auftreten, für die Integration bisher nicht definiert ist. Mit der Funktion $\varphi := a+b-\cdot$, die die Rolle von a und b vertauscht, ist

$$-\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f(\underbrace{\varphi^{-1}}_{=\varphi}(x))\,dx = \int_b^a f(a+b-x)\,dx,$$

was dann auch wieder wohldefiniert ist. Anschaulich integriert man die Funktion „in die andere Richtung“.

Korollar 8.4.11. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein* POLYNOM *vom Grad $\le n$, wenn $f^{(n+1)} \equiv 0$ ist.*

Beweis: Ist f ein Polynom vom Grad $\le n$, so folgt die Behauptung direkt aus der Ableitungsformel (6.2.4). Umgekehrt verschwindet für $f^{(n+1)} \equiv 0$ das Restglied in (8.4.7) und was bleibt ist ein Polynom. □

Satz 8.4.12 (Taylor mit Lagrange–Restglied). *Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $x_0, x \in I$. Dann gibt es ein[19] $\xi \in (x_0, x)$, so daß*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (8.4.8)$$

[19]Hier ist entweder das Intervall (x_0, x) gemeint, wenn $x_0 < x$ ist oder das Intervall (x, x_0), wenn $x_0 > x$ ist.

Beweis: Wir nehmen an, daß $x_0 < x$ ist, dann ist $(x-x_0)^n > 0$ und wir können den Zwischenwertsatz der Integration, Satz 7.2.8 auf das Restglied aus (8.4.7) anwenden, was zu

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\, \left.\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right|_{t=x_0}^{x} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

führt. □

Für unsere Restglieder haben wir immer eine $(n+1)$te Ableitung der Funktion f und deren Stetigkeit gebraucht. Es geht aber auch mit ein bisschen weniger.

Korollar 8.4.13. *Ist $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$, dann gilt für $x \in I$*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \eta(x)\,(x-x_0)^n, \qquad \lim_{x\to x_0} \eta(x) = 0. \tag{8.4.9}$$

Beweis: Mit Taylor der Ordnung $n-1$ ist

$$\begin{aligned}
f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-x_0)^n \\
&= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n
\end{aligned}$$

und da[20] $\eta(x) := \frac{1}{n}!\big(f(\xi) - f(x_0)\big)$ stetig ist und ξ zwischen x_0 und x eingequetscht ist, folgt $\eta(x) = 0$ für $x \to x_0$. □

Eine nette kleine Anwendung der Taylor–Formel erlaubt es uns, Funktionsgrenzwerte zu betrachten, die von der Form $\frac{0}{0}$ sind.

Korollar 8.4.14 (L'Hospital)**.** *Sind $f, g \in C^{n+1}(I)$ und gibt es ein $x^* \in I$ mit*

$$f^{(k)}(x^*) = g^{(k)}(x^*) = 0, \qquad k = 0, \dots, n, \tag{8.4.10}$$

und $g^{(n+1)}(x^*) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ stetig an x^* und es gilt die L'Hospital–Regel

$$\lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{g^{(n+1)}(x^*)}. \tag{8.4.11}$$

Beweis: Wir verwenden die Taylor–Formel mit Lagrange–Restglied (8.4.8) für f und g und erhalten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{f^{(k)}(x^*)}_{=0}(x-x^*)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x^*)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x^*)^{n+1}$$

[20] Ja, das ist eine Funktion von x, denn die Zwischenstelle ξ hängt von x ab, und zwar stetig.

bzw.

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi')}{(n+1)!}(x-x^*)^{n+1},$$

so daß

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi')}, \qquad \xi, \xi' \in (x, x^*),$$

wobei ξ, ξ' natürlich wieder von x abhängen. Da $g^{(n+1)}(x^*) \neq 0$ ist die Funktion stetig in einer Umgebung von x^*, man kann den Limes in (8.4.11) bilden und er ergibt sich als Quotient der Limites, die wegen der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ und $g^{(n+1)}$ existieren und die Form wie auf der rechten Seite von (8.4.11) haben. □

Beispiel 8.4.15. Wir betrachten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Das wäre $\frac{0}{0}$, aber die Ableitungen von Zähler und Nenner haben die Form $\cos x$ und 1, also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Definition 8.4.16 (Taylor–Reihe)**.** Zu einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ heißt die POTENZREIHE

$$Tf(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n \tag{8.4.12}$$

TAYLOR–REIHE zu f mit ENTWICKLUNGSPUNKT x_0.

Mit Taylorreihen kann so ziemlich alles schiefgehen, was schiefgehen kann, sie können

1. keinen positiven Konvergenzradius haben[21]

2. konvergieren, aber nicht gegen f.

Für den zweiten Fall kann man ein Beispiel angeben.

Beispiel 8.4.17. Die Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x > 0$, ergänzt durch $f(0) = 0$, hat für $x_0 = 0$ Taylorreihe $Tf \equiv 0$ ohne selbst die Nullfunktion zu sein. Dies zeigt man in zwei Schritten:

[21] Also nirgends konvergieren ausser an der *trivialen* Konvergenstelle x_0, wo sie den Wert $f(x_0)$ hat.

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom p_n, so daß

$$f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1})\, e^{-1/x^2}, \qquad x > 0. \tag{8.4.13}$$

Das geht per Induktion über n, wobei der Fall $n = 0$ trivial ist. Ansonsten ist

$$f^{(n+1)}(x) \;=\; \frac{d}{dx} p_n(x^{-1})\, e^{-1/x^2} = -p_n'(x^{-1}) x^{-2}\, e^{-1/x^2} + p_n(x^{-1})\, e^{-1/x^2}\, \frac{2}{x^3},$$

also $p_{n+1}(x) = -x^2\, p_n'(x) + 2x^3\, p_n(x)$.

2. Es ist

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.4.14}$$

Dazu betrachtet man lediglich

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} p_n(x^{-1})\, e^{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_n(x)}{e^{x^2}} = 0.$$

Also ist die Taylorreihe eine Summe von Nullen, was trivialerweise sogar Konvergenzradius ∞ hat und somit konvergiert, nur eben leider nicht gegen f.

Taylorreihen kann man verwenden, um Funktionen in Reihen entwickeln und so vielleicht auf wirklich oder sogar effizient berechnen zu können. Bevor wir uns ein Beispiel ansehen, zuerst noch ein wichtiges Resultat in diesem Zusammenhang.

Satz 8.4.18 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** *Sei c eine Folge reeller Zahlen, für die die Reihe Σc konvergiert. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in [0,1]$ und f ist stetig auf $[0,1]$.

Beweis: Da die Reihe konvergiert ist die Folge der c_n beschränkt[22], die Reihe konvergiert absolut für alle $x < 1$ und der Konvergenzradius $\rho(f)$ ist damit ≥ 1. Interessant wird die Sache also nur für $x = 1$, deswegen auch der Name GRENZWERTSATZ. Da

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

konvergiert die auch für $x = 1$, was übrig bleibt, ist

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{8.4.15}$$

[22]Siehe Beweis von Satz 8.4.2.

Definieren wir

$$s_n := \sum_{k=n}^{\infty} c_k,$$

so folgt

$$s_0 = f(1), \qquad s_n - s_{n+1} = c_n, \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = 0. \tag{8.4.16}$$

Insbesondere ist $|s_n|$ beschränkt, sagen wir $|s_n| \le M$, und die Reihe $\sum s_n x^n$ konvergiert nach dem inzwischen wohlvertrauten Argument für $|x| < 1$. Damit ist

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} x^n \\
&= s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = f(1) + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(s_{n+1} - s_n)}_{=-c_n} x^{n+1} \\
&= f(1) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = f(1) - x f(x).
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $|s_n| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Dann setzen wir $\delta := \frac{\varepsilon}{M n_0}$ und erhalten für jedes $x \in (1-\delta, 1)$, daß

$$\begin{aligned}
&\left| f(1) - x f(x) \right| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right| \le (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| x^n \\
&= \underbrace{(1-x)}_{\le \delta} \sum_{n=0}^{n_0-1} \underbrace{|s_n|}_{\le M} \underbrace{x^n}_{\le 1} + (1-x) \sum_{n=n_0}^{\infty} \underbrace{|s_n|}_{\le \varepsilon} x^n \le \underbrace{\delta M n_0}_{<\varepsilon} + \varepsilon (1-x) \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n}_{x^{n_0}/(1-x)} \\
&< \varepsilon + \varepsilon \underbrace{x^{n_0}}_{<1} < 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

was nichts anderes bedeutet als

$$f(1) = \lim_{x\to 1} x f(x) = \lim_{x \to 1} f(x),$$

und genau das war ja zu zeigen. □

Als Anwendung dieses Satzes jetzt die Reihenentwicklung einer wichtigen Funktion.

Korollar 8.4.19 (LOGARITHMUSREIHE)**.** *Für* $x \in (-1, 1]$ *gilt*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{8.4.17}$$

und damit auch

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{a^n n}, \qquad 0 < x < 2a,\ a > 0. \tag{8.4.18}$$

Beweis: Da

$$\log(1+x) = \log(1+x) - \underbrace{\log(1+0)}_{=0} = \log(1+t)\Big|_{t=0}^{x} = \int_0^x \frac{1}{(1+t)}\,dt$$

und da die Taylorreihe von $f = (1+\cdot)^{-1}$ die Form[23]

$$Tf(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

hat, ist

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}, \end{aligned}$$

was (8.4.17) beweist, woraus (8.4.18) durch

$$\log x = \log(a+x-a) = \log a\left(1+\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \log\left(1+\frac{x-a}{a}\right)$$

folgt. Bleibt nur noch das Verhalten bzw. die Stetigkeit am Rande und dafür benötigen wir Satz 8.4.18. Am linken Rand, $x=-1$, haben es wir mit der divergenten harmonischen Reihe zu tun[24], am rechten Rand hingegen mit der *alternierenden* harmonischen Reihe und die konvergiert bekanntlich nach dem LEIBNIZ–KRITERIUM aus Satz 3.6.2. □

Eine Potenzreihenentwicklung haben wir noch, und zwar für eine durchaus nicht unwichtige Funktion.

Satz 8.4.20. *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x|<1$ konvergiert die* BINOMISCHE REIHE

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k}. \tag{8.4.19}$$

Bemerkung 8.4.21. Für $n := \alpha \in \mathbb{N}$ ist $\binom{\alpha}{k}$ gerade der normale Binomialkoeffizient:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k},$$

und für $n > \alpha$ enthält das Produkt den Wert 0, so daß aus der Reihe die wohlbekannte endliche Summe wird. Interessant wird Satz 8.4.20 natürlich für $\alpha \notin \mathbb{N}$.

[23] Die Ableitungen von f sind $f^{(n)} = (-1)^n n!(1+t)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, wie man sich per Induktion (Übung!) leicht klarmacht.

[24] Kein Wunder, da ja $\log x \to -\infty$ für $x \to 0$.

Beweis von Satz 8.4.20: Der Beweis gliedert sich in drei Schritte. Zuerst berechnen wir die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 zu $f(x) = (1+x)^\alpha$ als

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\prod_{k=1}^n (\alpha - k + 1) \right) \frac{(1+0)^{\alpha-n}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Danach zeigen wir mit dem QUOTIENTENKRITERIUM aus Satz 3.6.7, daß die Reihe für $|x| < 1$ konvergiert:

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = |x| \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha - k + 1}{k} \right) \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\alpha - k + 1} \right) \right| = |x| \left| \frac{\alpha - n + 1}{n+1} \right|$$

und da $\frac{n-\alpha-1}{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$ und $x < 1$, wird dieser Ausdruck für hinreichend großes n irgendwann kleiner als 1, weswegen die Reihe konvergiert.

Im dritten und letzten Schritt zeigen wir schließlich, daß die Taylorreihe auch wirklich gegen $(1+x)^\alpha$ konvergiert, wofür wir uns das RESTGLIED aus (8.4.7) vornehmen. Dieses hat die Form

$$\begin{aligned} R_{n+1} f(x) &:= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1}\, dt. \end{aligned} \tag{8.4.20}$$

Für $0 \le t \le x < 1$ ist[25]

$$\underbrace{(1+t)}_{\ge 1}{}^{\alpha-n-1} \le (1+t)^\alpha \le \max\{1, 2^\alpha\} =: C,$$

also

$$\begin{aligned} |R_{n+1} f(x)| &\le (n+1) \binom{\alpha}{n+1} C \int_0^x (x-t)^n\, dt = (n+1) \binom{\alpha}{n+1} C \left. \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \right|_{t=0}^{x} \\ &= C \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

und da dieser Ausdruck ein Glied der konvergenten Taylorreihe ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n+1} f(x)| = 0, \qquad 0 < x < 1. \tag{8.4.21}$$

Ein bisschen aufwendiger wird es für $-1 < x < 0$, wo wir wie in Bemer-

[25] Je nachdem, ob α positiv oder negativ ist.

kung 8.4.10 die Integration „umdrehen“ müssen[26], was zu

$$\begin{aligned}
R_{n+1}f(x) &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_0^x (\underbrace{x-t}_{\to x-(x+0-t)=t})^n (\underbrace{1-t}_{\to 1-(x+0-t)=t+1-x})^{\alpha-n-1}\,dt \\
&= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_x^0 t^n(t+1-x)^{\alpha-n-1}\,dt \\
&= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}\int_x^0 \left(\frac{t}{1+t-x}\right)^n (1+t-x)^{\alpha-1}\,dt
\end{aligned}$$

führt. Da $1 \le 1+t-x < 1$ ist, können wir den zweiten Term im Integral wieder durch $C' := \max\{1, 2^{\alpha-1}\}$ abschätzen und erhalten

$$|R_{n+1}f(x)| \le (n+1)\binom{\alpha}{n+1}C'\int_x^0 \underbrace{\left|\frac{t}{1+t-x}\right|^n}_{\le |t|^n} dt \le (n+1)\binom{\alpha}{n+1}C'\int_0^{|x|} t^n\,dt,$$

von wo aus wir wie oben weiterrechnen können, um auch auf

$$\lim_{n\to\infty} |R_{n+1}f(x)| = 0, \qquad -1 < x < 0. \tag{8.4.22}$$

zu kommen. Und der Fall $x = 0$ ist zu schwer, um im Rahmen einer Grundlagenvorlesung für Analysis behandelt zu werden[27]. □

8.5 Fourierreihen

Neben den Taylorreihen, die in Sachen Konvergenz oftmals recht zickig und nicht ganz einfach sind[28], gibt es noch einen zweiten wichtigen Typ von Reihenentwicklung, der zu einer besonderen Klasse von Funktionen gehört.

Definition 8.5.1 (Periodizität)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt PERIODISCH mit PERIODE T oder kurz T–PERIODISCH, wenn

$$f(x+T) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{8.5.1}$$

Kennt man eine periodische Funktion auf einem Intervall $[\xi, \xi+T]$ der LÄNGE T, so kennt man sie überall.

[26] Und es kann ja nicht schaden, das auch einmal in einem konkreten Fall durchzuführen.

[27] Für alle, die diesen Satz glauben, gilt: *Gehe zurück zu Kapitel 1, gehe nicht in die Klausur, ziehe nicht 9 ECTS-Punkte ein.*

[28] Funktionen, deren Taylorreihe überall konvergiert, also Kovergenzradius ∞ hat, sind ganz besondere Funktionen, denen man in der FUNKTIONENTHEORIE auch eine Menge Aufmerksamkeit widmet.

Da man aus einer T–periodischen Funktion f ganz einfach eine T'–periodische Funktion g gewinnen kann, indem man $g = f(\frac{T}{T'}\cdot)$ setzt[29], reicht es, sich alles für eine Periodenlänge anzusehen, so daß wir uns beispielsweise für $T = 2\pi$ entscheiden können und werden.

Definition 8.5.2. Der TORUS $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$ modulo 2π, d.h. $[x] = [y]$ genau dann, wenn $x - y = 2k\pi$ für ein passendes $k \in \mathbb{Z}$. Der Torus ist ISOMORPH zu allen Intervallen der Länge 2π, beispielsweise $[-\pi, \pi]$, wobei die Punkte $-\pi$ und π miteinander identifiziert werden.

Bemerkung 8.5.3. Jede 2π–PERIODISCHE FUNKTION f kann also als $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ angesehen werden. Beispiele für Funktionen in $C(\mathbb{T})$ sind die KOMPLEXE EXPONENTIALFUNKTION $x \mapsto e^{ix}$ sowie SINUS und COSINUS.

Definition 8.5.4 (Trigonometrische Polynome)**.** Ein TRIGONOMETRISCHES POLYNOM vom GRAD n ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{8.5.2}$$

bzw.

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}. \tag{8.5.3}$$

Schreiben wir (8.5.3) als

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k(\cos kx + i \sin kx) + c_{-k}(\cos kx - i \sin kx) \\ &= c_0 + (c_k + c_{-k}) \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx, \end{aligned}$$

dann folgt[30]

$$\begin{array}{rcl} a_k &=& c_k + c_{-k}, \\ b_k &=& i(c_k - c_k), \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} c_k &=& \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \\ c_{-k} &=& \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \end{array} \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{8.5.4}$$

und damit sind (8.5.2) und (8.5.3) wirklich äquivalent.

Die nächste Aussage sieht zuerst einmal ganz unschuldig aus, hat aber, wie wir gleich sehen werden, weitreichende und sehr systematische Folgen.

Satz 8.5.5 (Orthogonalität)**.**

[29]Denn dann ist $g(\cdot + T') = f(\frac{T}{T'} \cdot + T') = f(\frac{T}{T'}\cdot) = g$.

[30]Und dies schliesst $a_0 = 2c_0$ ein

1. Für $j,k \in \mathbb{Z}$ gilt[31]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx}\,e^{-ikx}\,dx = \delta_{jk} := \begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{8.5.5}$$

2. Für $j,k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx\,dx = \delta_{jk} \tag{8.5.6}$$

sowie

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \cos kx\,dx = 0. \tag{8.5.7}$$

Beweis: Für $j=k$ ist (8.5.5) nichts anderes als $\frac{1}{2\pi}\int 1 = 1$, für $j \neq k$ hingegen erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx}\,e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}\,dx = \left.\frac{1}{i(j-k)}e^{i(j-k)x}\right|_{x=\pi}^{\pi} = 0,$$

wobei wir die konkreten Werte noch nicht einmal auszurechnen brauchen, sondern uns nur auf die 2π–Periodizität beschränken können, siehe auch Übung 8.5.1. Damit ist 1) bewiesen und wir können es skrupellos für 2) ausnutzen. Beispielsweise ist[32]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ijx}+e^{-ijx}}{2}\,\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+k)x}\,dx}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}\,dx}_{=2\delta_{jk}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x}\,dx}_{=2\delta_{jk}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j+k)x}\,dx}_{=0}\Big) \\
&= \delta_{jk},
\end{aligned}$$

was für den Sinus ganz entsprechend funktioniert:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin jx \sin kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ijx}-e^{-ijx}}{2i}\,\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+k)x}\,dx}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}\,dx}_{=2\delta_{jk}} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x}\,dx}_{=2\delta_{jk}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j+k)x}\,dx}_{=0}\Big) \\
&= \delta_{jk}.
\end{aligned}$$

[31] Die „Funktion" δ hier bezeichnet man als KRONECKER–δ.

[32] Bitte berücksichtigen: j und k sind jetzt nur noch in $\mathbb{N}_0$, also beide nichtnegativ, so daß immer $\delta_{j,-k} = 0$ ist.

Das ist dann auch schon (8.5.6) und für (8.5.7) gehen wir ganz genauso vor:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \sin kx \, dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ijx}+e^{-ijx}}{2}\,\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\,dx \\
&= \frac{1}{4i}\Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+k))x}\,dx}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x}\,dx}_{=2\delta_{jk}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x}\,dx}_{=2\delta_{jk}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j+k)x}\,dx}_{=0}\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Übung 8.5.1 Zeigen Sie: Ist f eine differenzierbare, 2π–periodische Funktion, dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0.$$

◊

Damit besteht zwischen den trigonometrischen Funktionen und dem Integral eine besonders enge Beziehung.

Definition 8.5.6 (Skalarprodukte & Orthogonalität)**.**

1. Eine Abbildung[33] $\langle\cdot,\cdot\rangle : C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ heißt SKALARPRODUKT, wenn sie eine SYMMETRISCHE BILINEARFORM ist, d.h., wenn

   a) $\langle f_1+f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ und $\langle f, g_1+g_2\rangle = \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle$,

   b) $\langle \lambda f, g\rangle = \langle f, g\rangle$ und $\langle f, \lambda g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$,

   c) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,

   erfüllt ist. 1a) und 1b) definieren eine Multilinearform, 1c) ist für das „SYMMETRISCH" verantwortlich.

2. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : (\mathbb{T} \to \mathbb{C}) \times (\mathbb{T} \to \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ heißt SKALARPRODUKT, wenn sie eine SESQUILINEARFORM[34] ist, d.h., wenn 1a) gilt und 1b) durch

   $$\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle, \qquad \langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{8.5.8}$$

   sowie 1c) durch

   $$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle} \tag{8.5.9}$$

   ersetzt wird. Dieser Fall umfasst die reelle Situation.

[33] Stetigkeit ist hier eine sehr willkürliche Voraussetzung, die man nicht wirklich braucht, die uns aber das Leben deutlich leichter macht, zumal wir kein LEBESGUE–INTEGRAL zur Verfügung haben.

[34] „*Sesqui*" ist Latein und steht für „Eineinhalb".

3. Ein Skalarprodukt heißt ENTARTET, wenn es ein $f \neq 0$ gibt, so daß $\langle f, f \rangle \leq 0$ ist. Normalerweise fordert man[35], daß ein Skalarprodukt DEFINIT ist, d.h., daß

$$f \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle f, f \rangle > 0 \tag{8.5.10}$$

ist.

Proposition 8.5.7 (Skalarprodukte auf $C(\mathbb{T})$)**.** *Die Abbildungen*

$$\langle f, g \rangle_1 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx \qquad \textit{und} \qquad \langle f, g \rangle_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

sind Skalarprodukte für integrierbare Funktionen auf $\mathbb{T}$ *und definit, wenn* f, g *stetig sind.*

Beweis: Die Eigenschaften 1a) und 1b) sind aufgrund der Linearität des Integrals in beiden Fällen leicht nachgewiesen. Sind f, g reellwertig, dann ist

$$\langle f, g \rangle_1 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx = \langle g, f \rangle_1,$$

für komplexwertige Funktionen ergibt sich

$$\langle f, g \rangle_1 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{\pi} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x)\, dx} = \langle g, f \rangle_1.$$

Für die Definitheit bemerken wir zuerst einmal, daß

$$\langle f, f \rangle_1 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$

und zwar ganz egal, ob f reell- oder komplexwertig ist. Ist nun $f \neq 0$, dann gibt es $\varepsilon > 0$, und $x \in (-\pi, \pi)$, so daß $|(x)|^2 > \varepsilon$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es dann auch $\delta > 0$ mit $|f(x')|^2 > \frac{\varepsilon}{2}$ für $|x' - x| \leq \delta$ und da $|f| \geq 0$ ist damit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \geq \int_{x'-\delta}^{x'+\delta} \underbrace{|f(x)|^2}_{>\varepsilon/2}\, dx > 2\delta \frac{\varepsilon}{2} = \delta\varepsilon > 0.$$

Daß für $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ alles ganz analog geht, muss hoffentlich nicht mehr besonders explizit gesagt werden. □

Damit können wir Satz 8.5.5 in Skalarprodukt–Terminologie umschreiben.

Korollar 8.5.8. *Es gilt*

$$\langle \cos j\cdot, \cos k\cdot \rangle_1 = \langle \sin j\cdot, \sin k\cdot \rangle_1 = \delta_{jk}, \qquad \langle \cos j\cdot, \sin k\cdot \rangle_1 = 0, \qquad j, k \in \mathbb{N}_0, \tag{8.5.11}$$

und

$$\langle \exp(ij\cdot), \exp(ik\cdot) \rangle_2 = \delta_{jk}, \qquad j, k \in \mathbb{Z}. \tag{8.5.12}$$

[35] Oftmals auch stillschweigend.

Definition 8.5.9 (Othonormalsystem)**.** Eine ABZÄHLBARE FAMILIE oder FOLGE f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, von Funktionen heißt ORTHONORMALSYTEM für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, wenn

$$\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{jk}, \qquad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{8.5.13}$$

Das Orthonormalsystem heißt VOLLSTÄNDIG in einem Vektorraum[36] X von Funktionen, wenn es zu jedem $f \in X$ Koeffizienten $a_k(f)$, $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\, f_k \right\|_2 = 0 \tag{8.5.14}$$

gilt.

Kaum hat man neue Terminologie, schon kann man Korollar 8.5.8 nochmals umformulieren.

Korollar 8.5.10. *Die Familien $f_n = e^{in\cdot}$, $n \in \mathbb{Z}$, und $f_{2n} = \cos n\cdot$, $f_{2n+1} = \sin n\cdot$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind Orthonormalsysteme.*

Wir werden jetzt noch zeigen, daß die beiden Orthonormalsysteme[37] tatsächlich vollständig in $C(\mathbb{T})$ sind und dazu ein klein wenig nette Theorie entwickeln. Dazu schreiben wir jetzt kurz $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für eines der beiden Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ oder $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

Lemma 8.5.11 (Norm)**.** *Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert eine* NORM

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \qquad f \in C(\mathbb{T}), \tag{8.5.15}$$

auf $C(\mathbb{T})$, d.h., es gelten die NORMAXIOME

1. $\|f\|_2 \ge 0$ *und* $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.
2. $\|\lambda f\|_2 = |\lambda|\, \|\lambda f\|_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$.

Beweis: 1) folgt aus der in Proposition 8.5.7 festgestellten Definitheit des Skalarprodukts, 2) aus

$$\|\lambda f\|_2^2 = \langle \lambda f, \lambda f \rangle = \underbrace{\lambda \overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2} \langle f, f \rangle = |\lambda|^2\, \|f\|_2^2,$$

und 3) aus

$$\begin{aligned} \|f+g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g \rangle = \langle f,f \rangle + \langle f,g \rangle + \langle g,f \rangle + \langle g,g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 + \underbrace{\langle f,g \rangle + \overline{\langle f,g \rangle}}_{=2\Re\langle f,g \rangle} + \|g\|_2^2 \end{aligned} \tag{8.5.16}$$

[36] Man kann also Funktionen addieren und mit Zahlen multiplizieren und bleibt in seinem Raum.

[37] Na gut, genau genommen ist es ja eigentlich nur eines, einmal reell, einmal komplex geschrieben.

sowie der CAUCHY–SCHWARZ–UNGLEICHUNG:

$$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2\,\|g\|_2, \tag{8.5.17}$$

die für $f=0$ oder $g=0$ trivialerweise erfüllt ist[38]. Mit[39] $\mu := \langle f,g\rangle / \langle g,g\rangle$ erhalten wir aus der Definitheit des inneren Produkts[40]

$$\begin{aligned}
0 &\le \|f-\mu g\|_2^2 = \langle f-\mu g, f-\mu g\rangle = \langle f,f\rangle - \overline{\mu}\langle f,g\rangle - \mu\underbrace{\langle g,f\rangle}_{=\overline{\langle f,g\rangle}} + |\mu|^2\langle g,g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - 2\Re\left(\overline{\mu}\langle f,g\rangle\right) + |\mu|^2\langle g,g\rangle = \|f\|_2^2 - 2\Re\underbrace{\frac{\overline{\langle f,g\rangle}\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle}}_{=|\langle f,g\rangle|^2/\langle g,g\rangle} + \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\langle g,g\rangle^2}\langle g,g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - 2\frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\langle g,g\rangle} + \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\langle g,g\rangle} = \|f\|_2^2 - \frac{|\langle f,g\rangle|^2}{\|g\|_2^2},
\end{aligned}$$

was sich direkt in (8.5.17) umformen lässt. Da $\Re\langle f,g\rangle \le |\langle f,g\rangle|$ ist, erhalten wir durch Einsetzen von (8.5.17) in (8.5.16) dann die finale Abschätzung

$$\|f+g\|_2^2 \le \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = \left(\|f\|_2 + \|g\|_2\right)^2$$

und somit 3). □

Definition 8.5.12 (Fourierkoeffizienten)**.** Als RELLE FOURIERKOEFFIZIENTEN einer Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ bezeichnet man die Zahlen

$$\begin{aligned}
a_k(f) &= \langle f, \cos k\cdot\rangle_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \\
b_k(f) &= \langle f, \sin k\cdot\rangle_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,
\end{aligned} \qquad k\in\mathbb{N}_0, \tag{8.5.18}$$

als KOMPLEXE FOURIERKOEFFIZIENTEN hingegen

$$c_k(f) = \langle f, \exp(ik\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{8.5.19}$$

Übung 8.5.2 Zeigen Sie: Ist f reellwertig, dann gilt für die c_k aus (8.5.19) $c_k(f) = \overline{c_{-k}(f)}$. ◊

Die Fourierkoeffizienten ermöglichen es uns, eine Funktion mit Hilfe der trigonometrischen Polynome *bestmöglich* darzustellen. Und auch das gilt wieder in einem wesentlich allgemeineren Kontext.

[38] Dann steht da $0 \le 0$, was man mit ein wenig gutem Willen durchaus glauben kann.

[39] Man beachte: Der Nenner dieses Ausdrucks, $\langle g,g\rangle$ ist *immer* reell.

[40] Man könnte das Ganze auch über die Cauchy–Schwarz–Ungleichung des Integrals zeigen, aber dieser Beweis ist cooler und zeigt, daß das mit der Norm für *jedes* Skalarprodukt funktioniert.

Satz 8.5.13 (Bestapproximation). *Sei f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ein* ORTHONORMALSYSTEM *zum Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und seien $c_k(f) := \langle f, f_k\rangle$ die Fourierkoeffizienten von f. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2 \le \left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k \right\|_2, \qquad a_0,\dots,a_n \in \mathbb{C}. \tag{8.5.20}$$

Beweis: Für beliebige $a_0,\dots,a_n$ ist

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k f_k \right\|_2^2 &= \left\langle f - \sum_{k=0}^{n} a_k f_k, f - \sum_{k=0}^{n} a_k f_k \right\rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \underbrace{\langle f, f_k\rangle}_{=c_k(f)} - \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\langle f_k, f\rangle}_{=\overline{c_k(f)}} + \sum_{j,k=0}^{n} a_j \overline{a}_k \underbrace{\langle f_j, f_k\rangle}_{=\delta_{jk}} \\
&= \|f\|_2^2 - 2\Re \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} c_k(f) + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 + \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 - 2\Re \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} c_k(f) + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|c_k(f) - a_k|^2}_{\ge 0} \\
&\ge \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2^2,
\end{aligned}$$

was auch schon (8.5.20) ist. □

Übung 8.5.3 Zeigen Sie, daß für jedes Orthogonalsystem und jedes f

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 \tag{8.5.21}$$

gilt und beweisen Sie den SATZ VON PYTHAGORAS:

$$\langle f, g\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \tag{8.5.22}$$

◊

Aus dem Beweis von Satz 8.5.13 können wir eine weitere Schlussfolgerung ziehen.

Korollar 8.5.14 (Eindeutige Bestapproximation).

1. *In* (8.5.20) *gilt genau dann Gleichheit, wenn $a_k = c_k(f)$, $k = 0,\dots,n$, ist.*
2. *Die* APPROXIMATIONSGÜTE

$$E_n(f) := \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{8.5.23}$$

ist eine monoton fallende Folge in n.

Korollar 8.5.15 (Besselsche Ungleichung)**.** *Ist f_n, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Orthonormalsystem, so gilt für die Fourierkoeffizienten $c_n(f)$ die* BESSELSCHE UNGLEICHUNG

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|^2 \le \|f\|_2^2 \tag{8.5.24}$$

und die Fourierreihe $\sum c_n(f) f_n$ konvergiert in der Norm $\|\cdot\|_2$.

Beweis: Nach (8.5.21) ist

$$0 \le \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2,$$

woraus (8.5.24) sofort folgt. Für die Konvergenz betrachten wir[41]

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) f_k \right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) f_k, \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) f_k \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=n}^{\infty} c_j(f) \overline{c_k(f)} \underbrace{\langle f_j, f_k \rangle}_{=\delta_{jk}} = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$, da die Reihe $\sum |c_k(f)|^2$ konvergiert[42]. □

Bemerkung 8.5.16 (Konvergenz)**.**

1. Die Konvergenz der Fourierreihe zu f bedeutet aber noch lange nicht, daß der Grenzwert auch wirklich f ist. Das einfachste Beispiel ist das Orthonormalsystem $f_n = \cos n\cdot$ und die Funktion $f = \sin$, für die $c_n(f) = 0$ für alle n ist, und somit konvergiert die Fourierreihe gegen die Nullfunktion, nicht gegen den Sinus.

2. Ausserdem konvergiert die Reihe nur im quadratischen Mittel und selbst wenn jedes Glied f_n einer Folge von Funktionen Eigenschaften wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit besitzt, so muss sich das im Gegensatz zur gleichmäßigen Konvergenz *nicht* auf die Grenzfunktion übertragen. Ein Beispiel ist die Folg $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \le -\frac{1}{n} \\ nx, & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le x, \end{cases} \qquad x \in [-1,1],\ n \in \mathbb{N},$$

   die gegen die unstetige SIGNUMSFUNKTION $f(x) = \frac{x}{|x|}$ mit $f(0) = 0$ konvergiert.

Jetzt zurück zur Vollständigkeit aus Definition 8.5.9.

[41] Wer's ganz genau will, nimmt erst eine endliche Summe bis N und lässt dann $N \to \infty$ gehen.

[42] Schliesslich hat sie nichtnegative Summenglieder und ist beschränkt.

Satz 8.5.17 (Vollständigkeit)**.** *Für ein Orthonormalsystem $\mathscr{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ in einem* FUNKTIONENRAUM X *sind äquivalent:*

1. *$\mathscr{F}$ ist vollständig.*
2. *Die Fourierreihe konvergiert gegen f:*
$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2 = 0, \qquad f \in X. \tag{8.5.25}$$
3. *Es gilt die* PARSEVAL–IDENTITÄT*, die manchmal auch als* VOLLSTÄNDIGKEITSRELATION *bezeichnet wird:*
$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|^2, \qquad f \in X. \tag{8.5.26}$$

Beweis: Wir beginnen mit „1) ⇒ 2)“: Vollständigkeit heißt, daß es eine Folge $a_k(f)$ gibt, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\, f_k \right\|_2 \ge \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_2$$

nach Satz 8.5.13. Also konvergiert die Fourierreihe erst recht.

Für „2) ⇒ 3)“ und „3) ⇒ 1)“ nutzen wir (8.5.21) in der Form

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2 = E_n(f)$$

und da 2) gerade sagt, daß $E_n(f) \to 0$ geht, folgt auch die Identität (8.5.26). Und ist (8.5.26) erfüllt, dann geht $E_n(f) \to 0$ für $n \to \infty$, also konvergiert die Fourierreihe. □

Korollar 8.5.18 (Orthogonalität)**.** *Ist $\mathscr{F}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in X, so gilt*[43]

$$\langle f, f_n \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f \equiv 0. \tag{8.5.27}$$

Damit sind die Fourierkoeffizienten injektiv.

Beweis: Die Richtung „⇐“ ist offensichtlich und „⇒“ folgt aus der Vollständigkeit und $c_n(f) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wären schließlich f, g Funktionen mit $c_n(f) = c_n(g)$, dann ist

$$c_n(f-g) = \langle f - g, f_n \rangle = \langle f, f_n \rangle - \langle g, f_n \rangle = c_n(f) - c_n(g) = 0$$

und damit $f - g \equiv 0$, also $f = g$, weswegen die Abbildung $f \mapsto \left(c_n(f) : n \in \mathbb{N}_0\right)$ INJEKTIV ist. □

Nachdem wir jetzt hoffentlich ein wenig verstehen, was vollständige Orthonormalsysteme sind und können, wird es Zeit, uns klarzumachen, daß wir bereits welche kennen.

[43] Mit dieser Eigenschaft kann man Vollständigkeit sogar *charakterisieren*, braucht dazu aber ein etwas besseres Integral und einen dazu passenden Funktionenraum.

Satz 8.5.19 (Vollständige Orthonormalsysteme). *Die Familien*

1. $\mathscr{F}_1 := \{1, \cos, \sin, \cos 2\cdot, \sin 2\cdot, \dots\} = \{\cos n\cdot, \sin n\cdot : n \in \mathbb{N}_0\}$,
2. $\mathscr{F}_2 := \{\exp(in\cdot) : n \in \mathbb{N}_0\}$,

sind vollständige Orthonormalsysteme für $C(\mathbb{T})$.

Für den Beweis, den wir nur für die Exponentialfunktion führen werden[44] nehmen wir uns erst einmal besonders einfache Treppenfunktionen vor und definieren die SPRUNGFUNKTIONEN

$$s_a(x) := \begin{cases} 0, & -\pi \le x < a, \\ 1, & a \le x < \pi \end{cases} \qquad x \in \mathbb{T}, \qquad a \in (-\pi, \pi).$$

Für diese können wir die Vollständigkeit mit ein bisschen Arbeit[45] nachrechnen.

Lemma 8.5.20 (Sprungfunktionen & Vollständigkeit). *Für jedes* $a \in (-\pi, \pi)$ *gilt*

$$\|s_a\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(s_a)|^2. \tag{8.5.28}$$

Beweis: Zuerst rechnet man ganz einfach

$$\|s_a\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_a(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^{\pi} 1 \, dt = \frac{\pi - a}{2\pi} \tag{8.5.29}$$

aus, um dann auch $c_0 = \frac{\pi - a}{2\pi}$ und, für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} c_n(s_a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_a(t) \, e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^{\pi} e^{-int} \, dt = \frac{-1}{2\pi i n} e^{-int} \Big|_{t=a}^{\pi} \\ &= \frac{e^{-ina} - e^{-in\pi}}{2\pi i n}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} |c_n(s_a)|^2 &= \frac{1}{4n^2\pi^2} \left(e^{-ina} - e^{-in\pi} \right) \left(e^{ina} - e^{in\pi} \right) = \frac{1}{4n^2\pi^2} \left(2 - e^{in(\pi - a)} - e^{in(a - \pi)} \right) \\ &= \frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{1}{2n^2\pi^2} \underbrace{\frac{e^{in(\pi - a)} + e^{in(a - \pi)}}{2}}_{= \cos n(\pi - a)} = \frac{1 - \cos n(\pi - a)}{2n^2\pi^2} \\ &=: \frac{1 - \cos nb}{2n^2\pi^2}, \end{aligned}$$

[44] Dinge sind einfacher hinzuschreiben und für Sinus und Cosinus folgen die Resultate mit den inzwischen wohlbekannten Methoden.

[45] Manchmal kommt man auch in der Mathematik um das Rechnen nicht herum, aber wenn dann das rauskommt, was man wollte und wenn man dabei ein bisschen denken musste, dann kann es fast Spass machen.

mit $b := \pi - a$ zu erhalten. Da $|c_n(s_a)|^2 = |c_{-n}(s_a)|^2$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(s_a)|^2 &= |c_0(s_a)|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(s_a)|^2 \\ &= \frac{b^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos nb}{n^2} = \frac{b^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nb}{n^2}.\end{aligned}$$

Daß die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{T},$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, folgt aus der Tatsache, daß $|\cos\cdot| \le 1$ ist, und es gilt

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}\begin{cases} x+\pi, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-\pi, & 0 < x \le \pi, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{T}. \tag{8.5.30}$$

Schreibt man g für die Funktion auf der rechten Seite von (8.5.30), dann ist nämlich

$$\begin{aligned} c_n(g) &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} g(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{x+\pi}{2}\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x-\pi}{2}\sin nx\,dx \\ &= -\frac{x+\pi}{2\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=-\pi}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx - \frac{x-\pi}{2\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \\ &= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} = -\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

und da die Reihe in (8.5.30) konvergiert[46] ist

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} f'(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{T}, \tag{8.5.31}$$

und daher, für $x \le 0$,

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x}\frac{t+\pi}{2}\,dt = f(-\pi) + \frac{(t+\pi)^2}{4}\Big|_{x=-\pi}^{x} = f(-\pi) + \frac{(x+\pi)^2}{4},$$

sowie für $x \ge 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x \frac{t-\pi}{2}\,dt = f(0) + \frac{(t-\pi)^2}{4}\Big|_{t=0}^{x} = \underbrace{f(0)}_{=f(-\pi)+\pi^2/4} + \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} \\ &= f(-\pi) + \frac{(x-\pi)^2}{4}. \end{aligned}$$

[46] Details beispielsweise in [10].

Bleibt noch die Bestimmung der Integrationskonstante $f(-\pi)$. Dazu werfen wir einen Blick auf

$$\begin{aligned} f(-\frac{\pi}{2}) &= f(\pi/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2}}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\frac{\pi}{2}}{(2n)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2} = \frac{1}{4} f(\pi) = \frac{1}{4} f(-\pi), \end{aligned}$$

woraus wir mit

$$\frac{1}{4} f(-\pi) = f(-\frac{\pi}{2}) = f(-\pi) + \frac{(-\pi/2+\pi)^2}{4} = f(-\pi) + \frac{\pi^2}{16}$$

endlich die Konstanten[47]

$$f(-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{8.5.32}$$

identifiziert haben. Der Rest ist Einsetzen[48]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(s_a)|^2 &= \frac{b^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nb}{n^2}}_{=\frac{(b-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}} \\ &= \frac{(\pi-a)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2 - 2a\pi + a^2 - a^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi} \\ &= \frac{\pi-a}{2\pi}, \end{aligned}$$

und das ist endlich (8.5.29). □

Die Funktionen s_a sind Prototypen für Treppenfunktionen und so lässt sich das Ganze sehr einfach erweitern.

Korollar 8.5.21 (Treppenfunktionen & Vollständigkeit)**.** *Für jede* TREPPENFUNKTION $\phi \in T[-\pi,\pi]$ *ist*

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\phi)|^2. \tag{8.5.33}$$

Beweis: Für $-\pi < a \le b < \pi$ gilt

$$\chi := \chi_{[a,b]} = s_a - s_b$$

[47]Wieder taucht π aus heiterem Himmel auf, diesmal mit der netten Formel

$$\pi = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}}.$$

Sozusagen der „SECHSAPPEAL“ von π.

[48]Und die Erinnerung daran, daß $b = \pi - a \ge 0$ ist solange $a \in [-\pi,\pi]$ erfüllt ist.

und damit

$$c_k(\chi) = c_k(s_a) - c_k(s_b),$$

also

$$\begin{aligned}\left\| \chi - \sum_{k=0}^{n} c_k(\chi) e^{ik\cdot} \right\|_2 &= \left\| s_a - s_b - \sum_{k=0}^{n} (c_k(s_a) - c_k(s_b))\, e^{ik\cdot} \right\|_2 \\ &\le \underbrace{\left\| s_a - \sum_{k=0}^{n} c_k(s_a) e^{ik\cdot} \right\|_2}_{\to 0} + \underbrace{\left\| s_b - \sum_{k=0}^{n} c_k(s_b) e^{ik\cdot} \right\|_2}_{\to 0},\end{aligned}$$

was nach Lemma 8.5.20 gegen 0 konvergiert und nach Satz 8.5.17 damit äquivalent zur behaupteten Vollständigkeit ist. □

Der Rest geht dann wieder recht kanonisch.

Beweis von Satz 8.5.19: Jedes $f \in C(\mathbb{T})$ ist stetig und damit INTEGRIERBAR. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T(\mathbb{T})$ mit

$$-\|f\|_\infty \le \psi \le f \le \phi \le \|f\|_\infty \qquad \text{und} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (\psi(x) - \phi(x))\, dx < \varepsilon^2.$$

Für $g := f - \phi$ gilt dann

$$|g|^2 \le |\psi - \phi|^2 = \underbrace{|\psi - \phi|}_{\le 2\|f\|_\infty} |\psi - \phi| \le 2\|f\|_\infty |\psi - \phi|,$$

und damit ist

$$\|g\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2\, dt \le 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t) - \phi(t)|\, dt < 2\|f\|_\infty \varepsilon^2.$$

Seien nun

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, e^{ik\cdot},$$

die PARTIALSUMME der Fourierreihe und entsprechend $S_n g$ und $S_n \phi$, dann ist

$$S_n f = S_n g + S_n \phi.$$

Nach Korollar 8.5.21 gibt es ein n_0, so daß

$$\|\phi - S_n \phi\|_2 < \varepsilon, \qquad n \ge n_0,$$

nach (8.5.21) is

$$\|g - S_n\|_2^2 = \|g\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(g)|^2 \le \|g\|_2^2 < 2\|f\|_\infty \varepsilon^2$$

und damit ist für $n \ge n_0$

$$\begin{aligned}\|f - S_n f\|_2 &= \|g + \phi - S_n(g + \phi)\|_2 \le \underbrace{\|g - S_n g\|_2}_{< \sqrt{2\|f\|_\infty}\varepsilon} + \underbrace{\|\phi - S_n \phi\|_2}_{< \varepsilon} \\ &< \left(\sqrt{2\|f\|_\infty} + 1\right) \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_2 = 0$$

und damit ist die Vollständigkeit endlich bewiesen. □

Nachdem wir im Beweis letztlich nur Integrierbarkeit als Konsequenz der Stetigkeit verwendet haben, gilt das Resultat auch in einem etwas allgemeineren Kontext.

Korollar 8.5.22 (Vollständigkeit). *Die Orthonormalsysteme aus Satz 8.5.19 sind vollständig für Riemann–integrierbare Funktionen auf $\mathbb{T}$.*

Es kann nicht schaden, die Ergebnisse des Kapitels nochmal zusammenfassen:

1. Jede Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ definiert Fourierkoeffizienten.

2. Aus diesen Fourierkoeffizienten kann man eine FOURIERREIHE bilden, die in der Norm $\|\cdot\|_2$ konvergiert und zwar gegen f. Genau das ist die Bedeutung der Vollständigkeit. Allerdings bedeutet das *nicht*, daß die Fourierreihen auch GLEICHMÄSSIG KONVERGENT wären. Dies wurde zwar relativ lange angenommen, aber 1873 gab Du Bois–Reyomond[49] ein Beispiel einer Funktion aus $C(\mathbb{T})$ an, für das

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, f_k \right\|_\infty = \infty$$

gilt. Um das zu beweisen, muss man ein bisschen (Fuktional-)Analysis betreiben, siehe [21, Satz 1.5]; auf alle Fälle kann man aber dieses Beispiel und die daraus resultierenden neuen Fragestellungen als „Geburtsstunde" der APPROXIMATIONSTHEORIE sehen.

3. Die Partialsummen der Fourierreihen sind die beste Näherung, wieder in der Norm $\|\cdot\|_2$, die man mit den beteiligten trigonometrischen Polynomen überhaupt erhalten kann.

Das hat auch eine musikalische Interpretation. Ein TON im musikalischen Kontext ist nämlich ein periodisches Ereignis mit Periode $1/\omega$, wobei man ω als FREQUENZ bezeichnet und normalerweise in HERTZ angegeben: Hz = s^{-1}. Dann können wir den Ton f als

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(f) \cos(2k\pi\omega\cdot) + b_k(f) \sin(2k\pi\omega\cdot) \tag{8.5.34}$$

schreiben, also als Überlagerung von GRUNDTON und den als OBERTÖNE bezeichneten Schwingungen, deren Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der des Grundtons ist. Wir nehmen außerdem der Einfachheit

[49] Das ist nur eine Person, genauer Paul David Gustav Du Bois–Reyomond, der übrigens Mathematik und Medizin studiert hatte.

halber an, daß f nur aus Cosinusanteilen besteht, also $b_k(f) = 0,\ k \in \mathbb{N}$, was man dadurch erreicht, daß man sich f als GERADE FUNKTION, also $f(-t) = f(t)$ vorstellt, und daß es keinen TINNITUS gibt, daß also auch $a_0(f) = 0$ ist.

Übung 8.5.4 Zeigen Sie: Ist $f \in C(\mathbb{T})$ gerade, so ist $b_k(f) = 0,\ k \in \mathbb{N}_0$. $\diamondsuit$

Die Fourierkoeffizienten bezeichnet man als SPEKTRUM dieses Tons und

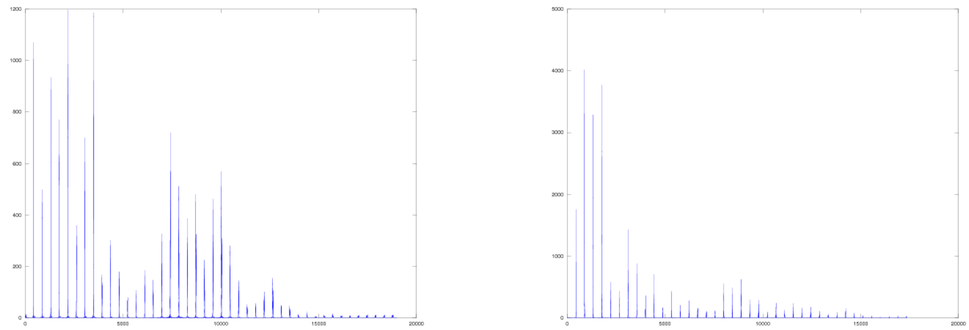

Abbildung 8.5.1: Spektrum zweier Dudelsackspielpfeifen mit unterschiedlicher Klangcharakteristik. Der Unterschied ist im Spektrum definitiv sichtbar.

ihre Aplituden beschreiben die Klangcharakteristik des Instruments, siehe Abb 8.5.1. Gute Literatur hierzu sind [2, 3] und natürlich der Klassiker [14]. Allerdings ist reale Musik nur selten periodisch, denn

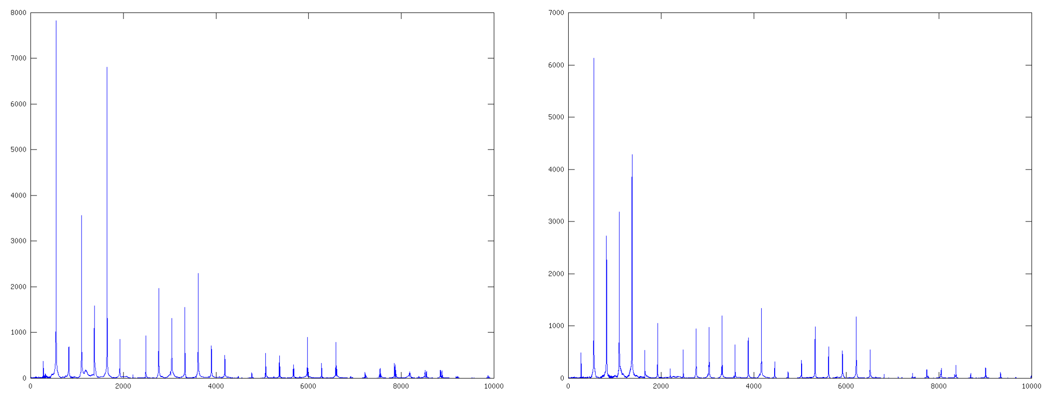

Abbildung 8.5.2: Klangfarben zweier verschiedener Pianos. Diese Werte sind aber mit Vorsicht zu sehen, denn der Ton eines Pianos ist eben nicht periodisch sondern klingt exponentiell ab.

ein konstanter Ton gilt da als eher nicht so spannend. Und selbst viele

Instrumente, beispielsweise Saiteninstrumente, sind nicht periodisch, sondern eher von der Form

$$f(t) = e^{-ct} g(t), \qquad g(t + 1/\omega) = g(t).$$

Das führt dann zu Spektren wie in Abb. 8.5.2, obwohl ein Pianoton eigentlich nur 3–4 wirklich signifikante Partialtöne hat, alle „höherfrequenten" Anteile sind eher der Abklingrate geschuldet.

Auf der Basis der Fourierreihen kann man nun die Phänomene der KONSONANZ und DISSONANZ von Tönen erklären. Seien f, g Töne[50] mit Fourierreihen[51]

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \cos(2\pi\omega kx), \qquad g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g) \cos(2\pi\omega kx), \tag{8.5.35}$$

also mit SPEKTRUM $c_k(f)$ bzw. $c_k(g)$. Erklingen zwei Töne gleicher Frequen gleichzeitig, dann überlagern sich die Fourierreihen und man hört

$$(f+g)(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k(f) + a_k(g)\right) \cos(2\pi\omega kx),$$

die Spektren addieren sich und die KLANGFARBE des Tones verändert sich dadurch. Hat nun g die doppelte Frequenz wie f, dann ist

$$g(x) \quad \sim \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g) \cos(2\pi(2\omega)kx) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g) \cos(2\pi\omega 2kx),$$

also

$$(f+g)(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{cc} a_k(f) + a_{k/2}(g), & k \in 2\mathbb{N} \\ a_k(f), & k \in 2\mathbb{N} - 1 \end{array} \right\} \cos(2\pi\omega kx)$$

und wir erhalten wieder denselben Ton wie f, aber mit anderer Klangfarbe. Die OKTAVE hat also perfekte KONSONANZ. Ist g eine REINE QUINTE zu f, also ein Ton mit Frequenz $\frac{3}{2}\omega$, dann ist

$$\begin{aligned} g(x) \quad &\sim \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g) \cos\left(2\pi \frac{3}{2} \omega kx\right) \\ &= \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}(g) \cos(2\pi\omega 3kx) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}(g) \cos\left(2\pi\omega \left(3k + \frac{3}{2}\right) x\right), \end{aligned}$$

die Hälfte der Partialtöne geht also in f auf, die andere Hälfte sitzt genau in der Mitte zwischen diesen Partialtönen. Das ist immer noch sehr konsonant und das konsonanteste nichttriviale Intervall. Für Frequenz $\frac{p}{q}\omega$ mit gekürztem $\frac{p}{q}$ ist entsprechend

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{qk}(g) \cos(2\pi\omega\, pkx) + \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{qk+r}(g) \cos\left(2\pi\omega \left(pk + \frac{pr}{q}\right) x\right).$$

[50] Der Einfachheit 2π–periodisch.

[51] „Richtige" Gleichheit besteht ja nicht unbedingt, aber nach Korollar 8.5.18 besteht zumindest eine $1-1$–Beziehung zwischen Funktion und Reihe.

Da p und q als TEILERFREMD vorausgesetzt sind, gibt es $r \in \{1, \ldots, q-1\}$ und $s \in \mathbb{N}$, so daß[52] $pr - sq = 1$ ist und für dieses spezielle r, s erhalten wir einen Partialton

$$a_{qk+r}(g) \cos\left(2\pi\omega\left((p+s)k + \frac{1}{q}\right)x\right),$$

von g der nach Bemerkung 5.3.11 mit dem Partialton

$$a_{(p+s)k}(f) \cos\left(2\pi\omega\left((p+s)k\right)x\right)$$

den Zusammenklang

$$2a_{qk+r}(g)\, a_{(p+s)k}(f) \cos\left(2\pi\omega\left((p+s)k + \frac{1}{q}\right)x\right) \cos\left(2\pi\frac{\omega}{q}\right)$$

generiert. Ist nun q in einem gewissen Rahmen groß, so ist dies eine hochfrequente Schwebung, die man auch als REIBUNG der Partialtöne bezeichnet und die als DISSONANZ wahrgenommen wird, ist q zu großs, dann nimmt man diese Schwebung einfach nicht mehr wahr. Wir fassen zusammen.

Satz 8.5.23 (Pythagoräisches Credo)**.** HARMONIE *ist ein Frequenzverhältnis, das einem Bruch mit möglichst kleinem Nenner entspricht.*

[52] Das ist die BÉZOUT–INDETITÄT, die man in der (Computer-)Algebra kennenlernt und die recht leicht zu beweisen ist, indem man sich den euklidischen Algorithmus genauer ansieht.

8 Literaturverzeichnis

[1] J. Albrecht, *Rechenbüchlein auff der linien, dem einfeltigen gemeinen odder leien und jungen angehenden liebhabern der Arithmetice zu gut durch Johann Albrecht, Rechenmeister zu Wittemberg auffs fleissigst zusamen getragen*, Georg Rhaw, Wittenberg, 1533.

[2] A. H. Benade, *Horns, strings, and harmony*, Anchor Books, 1960, Dover reprint 1992.

[3] D. J. Benson, *Music. A mathematical offering*, Cambridge University Press, 2007.

[4] C. de Boor, *Divided differences*, Surveys in Approximation Theory **1** (2005), 46–69, [Online article at] http://www.math.technion.ac.il/sat.

[5] L. van Ceulen, *Van Den Circkel*, Jan Andrieß, Boeckvercooper, Delft, 1596.

[6] J. M. Child (ed.), *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, Open Court Publishing Company, Chicago, 1920, Dover reprint 2005.

[7] P. J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications, 1975.

[8] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974, Dover reprint 2001.

[9] G. Faber, *Über stetige Funktionen*, Math. Ann. **66** (1909), 81–94.

[10] O. Forster, *Analysis I*, Vieweg, 1976.

[11] J. von zur Gathen and J. Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, 1999.

[12] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmstedt, *Counterexamples in analysis*, Holden–Day, 1964, Dover reprint 2003.

[13] H. Gericke, *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*, Springer, 1984, Sonderausgabe Matrix Verlag, 2005.

[14] H. Helmholtz, *On the sensations of tone*, Longmans & Co, 1885, Translated by A. J. Ellis, Dover reprint 1954.

[15] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil I*, 3. ed., B. G. Teubner, 1984.

[16] Homer, *Ilias*, Orale Überlieferung, 700 v. Chr.

[17] D. Kehlmann, *Die Vermessung der welt*, Rohwolt, 2005.

[18] R. Musil, *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*, Wiener Verlag, Wien und Leipzig, 1906.

[19] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, 1976.

[20] T. Sauer, *Computeralgebra*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, Universität Passau, 2001.

[21] ______, *Approximationstheorie*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, 2002, Online verfügbar, Lehrstuhlseite.

[22] ______, *Einführung in die Numerische Mathematik*, Vorlesungsskript, Universität Passau, 2013.

[23] E. Schwartz (ed.), *Homer, Ilias*, Weltbild Verlag, 1994, Zweisprachige Ausgabe, Altgriechisch–Deutsch.

[24] L.E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. Leoanardo Pisano's book of calculation*, Springer, 2002.

[25] Ch. Tretter, *Analysis I*, Mathematik kompakt, Birkhäuser, 2013.

[26] H. Weber, *Leopold Kronecker*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung (1892), 5–31.

[27] F. Wille, *Humor in der Mathematik*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1984.

[28] M. Woitschach, *Gödel, götzen und computer. eine kritik der unreinen vernunft*, Horst Poller Verlag, Stuttgart, 1986.

[29] K. Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer–Verlag, 1965.

Index | 8