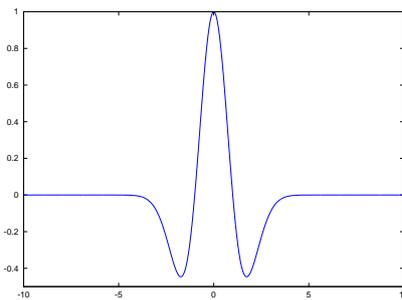
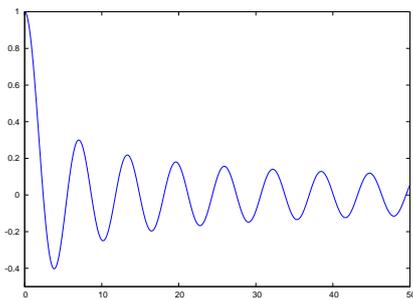


Integraltransformationen

Vorlesung, zuerst gehalten im Wintersemester 2008/09

Tomas Sauer

Version 1.1
Letzte Änderung: 14.4.2011



Statt einer Leerseite . . .

0

Welcher aber . . . durch die Geometria sein Ding beweist und die gründliche Wahrheit anzeigt, dem soll alle Welt glauben. Denn da ist man gefangen.

Albrecht Dürer

A peculiarity of the higher arithmetic is the great difficulty which has often been experienced in proving simple general theorems which had been suggested quite naturally by numerical evidence.

H. Davenport, *The Higher Arithmetic*, 1952

I always found it shameful that mere technologists should have arrogated to themselves the right to be called that, scientists, men of knowledge.

S. Rushdie, *Grimus*

You may call it ‘nonsense’ if you like, [. . .] but I’ve heard nonsense, compared with which that would be as sensible as a dictionary.

L. Carroll, *Through the looking glass*

Tomas Sauer
Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Justus-Liebig-Universität Gießen
Heinrich-Buff-Ring 44
D-35392 Gießen

Inhaltsverzeichnis

0

1 Transformationen und Beispiele	2
1.1 Fourier: reihenweise Transformationen	3
1.2 Die Radontransformation	4
2 Die kontinuierliche Fouriertransformation	7
2.1 Definition und elementare Eigenschaften	7
2.2 Reihen, Periodisierung, Poisson	16
2.3 Mittelwerte, Lebesgue, Laplace	18
2.4 Distributionen und eine seltsame Ableitung	21
3 Radontransformation und Signalverarbeitung	27
3.1 Die Radontransformation – Definition und Invertierbarkeit	27
3.2 Gefiltert? Signale und Filter	31
3.3 Bandbeschränkte Funktionen und Shannon	34
3.4 Die gefilterte Rückprojektion	41
3.5 Besselfunktionen	47
3.6 Die Numerik: Gefilterte Rückprojektion für diskrete Daten	54
4 Die Laplace–Transformation	57
4.1 Definition, -sbereich und elementare Eigenschaften	57
4.2 Lineare Systeme und Differentialgleichungen	63
4.3 Vollständig monotone Funktionen	69
5 Zeit, Frequenz und Wavelets	76
5.1 Die gefensterterte Fouriertransformation	76
5.2 Zeit, Frequenz, Heisenberg	77
5.3 Die Gabor–Transformation	81
5.4 Wavelets – Definition und fundamentale Eigenschaften	86
5.5 Verschwindende Momente	92
5.6 Lipschitz meets Fourier	94
5.7 Wavelets und lokale Glattheit	96

*Geschichte muß doch wohl allein auf
Treu und Glauben angenommen
werden? Nicht?*

Lessing, Nathan der Weise III,7

Transformationen und Beispiele

1

Mathematisch gesehen ist eine Transformation erst einmal nichts anderes als ein *Operator*, der eine Funktion f aus einem Funktionenraum \mathcal{F} auf eine Funktion aus einem gegebenenfalls anderen Funktionenraum \mathcal{G} abbildet, also

$$T : \begin{cases} \mathcal{F} & \rightarrow \mathcal{G}, \\ f & \mapsto Tf. \end{cases}$$

In Anwendungen tauchen Transformationen normalerweise in einer der folgenden beiden Formen auf:

- durch Berechnung einer Transformation erhält man Informationen über die Funktion f , die aus der Funktion selbst nicht so ohne weiteres ersichtlich sind.
- man kann eine Funktion f nicht direkt “messen”, sondern lediglich indirekt über eine Transformation Tf , und um wieder zu f zu kommen, benötigt man also die Umkehrung T^{-1} der Transformation. Derartige *inverse Probleme* werden oftmals dadurch verkompliziert, daß T gar nicht invertierbar ist und man entweder unter einer Vielzahl von möglichen Lösungen zu wählen hat¹, oder aber es gar keine exakte Lösung gibt, so daß man im besten Fall den Fehler $\|Tf - g\|$ minimieren kann², wobei g für die “Messung” steht.

Eine *Integraltransformation* ist nun ganz einfach eine Transformation, in die Integrale verwickelt sind, also eine Transformation der Form

$$Tf(\xi) = \int K(\xi, x) f(x) dx, \quad (1.1)$$

mit einem *Kern* K , wobei die neue Variable ξ durchaus eine andere Struktur haben darf als das x , von dem wir ausgegangen sind. Nun ist das bisher aber alles so abstrakt und allgemein, daß wir uns besser erst einmal ein paar Beispiele ansehen, um einen Idee und Vorstellung zu bekommen, womit wir da eigentlich so herumhantieren.

¹Und zwar dann, wenn T zwar surjektiv, nicht aber injektiv ist.

²Das passiert wenn T nicht surjektiv ist.

1.1 Fourier: reihenweise Transformationen

Fangen wir einfach an, nämlich mit einem Klassiker der Integraltransformationen, den *Fourierreihen*. Reihen deswegen, weil sie einerseits einen sehr schönen Bezug zur Akustik haben und weil sie andererseits auch sehr schön zeigen, daß x und ξ in (1.1) durchaus unterschiedlich sein können.

Fourierreihen verwenden *periodische Funktionen*, also Funktionen, die sich nach einer gewissen Periode P wiederholen: $f(\cdot + P) = f$, weswegen es genügt, diese Funktion auf einem Intervall der Länge P , typischerweise $[0, P]$ oder $[-P/2, P/2]$, zu kennen, von wo aus man sie periodisch fortsetzen kann. Um schön mit den trigonometrischen Funktionen arbeiten zu können, bietet sich $P = 2\pi$ an. Die komplexe Fouriertransformation zu einer 2π -periodischen Funktion f ist dann

$$Tf(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

und die Reihe

$$F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

bezeichnet man als die *Fourierreihe* zu f , wobei wir im Moment die Konvergenzfrage³ außer acht lassen wollen⁴. Dennoch ist es durchaus legitim, auch (1.3) als eine Integraltransformation aufzufassen, denn die Summe ist nichts anderes als eine Integration mit einem diskreten Maß; oder aber man stellt sich gleich auf den Standpunkt, daß das Integral auf der diskreten Menge \mathbb{Z} ja gar nichts anderes als die Summe ist.

Was man aber in (1.2) schon sehr schön sieht ist, daß die Transformationen Funktionen, die auf \mathbb{R} bzw. $[-\pi, \pi]$, oder, um genau zu sein, auf⁵ $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ definiert sind, in Funktionen transformiert werden, die \mathbb{Z} nach \mathbb{C} abbilden.

Die Fourierreihe hat nun eine sehr schöne Interpretation als Darstellung der *Obertöne* bzw. *Partialtöne* eines Tons im musikalischen Sinne. Ein Ton der Frequenz ω hat eine Amplitude⁶, die sich in der Sekunde ω mal wiederholt, ist also periodisch mit der Periode ω^{-1} . Was genau sich da in jeder Sekunde wiederholt, das nehmen wir als *Klangfarbe* des Tons wahr. Unser Ton $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ω^{-1} -periodisch, also ist $g = f\left(\frac{1}{2\pi\omega}\cdot\right)$ eine 2π -

³Und die ist im Übrigen alles andere als trivial, siehe z.B. [36].

⁴Das ist ganz im Sinne der "Alten" wie Fourier und Gauß, erst später stellte sich heraus, daß man hier ganz gewaltig aufpassen muss.

⁵Um eine schnelle Definition vorzuschicken: $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, also " \mathbb{R} modulo $2\pi\mathbb{Z}$ " bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen in \mathbb{R} unter der Äquivalenzrelation $x \equiv x'$ falls $x - x' \in 2\pi\mathbb{Z}$. Und diese Menge ist schon wieder äquivalent zu $[0, 2\pi]$ bzw. $[-\pi, \pi]$. Ein Unterschied zwischen den Intervallen und der Äquivalenzklasse besteht darin, daß in der Äquivalenzklasse die Addition **immer** wohldefiniert ist, in der Menge eher nicht. Und natürlich ist der Äquivalenzklasse das Intervall, das sie lediglich *repräsentiert*, ziemlich egal.

⁶Der Schalldruck.

periodische Funktion,

$$g(\cdot + 2\pi) = f\left(\frac{\cdot + 2\pi}{2\pi\omega}\right) = f\left(\frac{\cdot}{2\pi\omega} + \omega^{-1}\right) = f\left(\frac{\cdot}{2\pi\omega}\right) = g,$$

und kann damit in Fourierkoeffizienten zerlegt werden. Die Fourierreihe

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) \cos(kx) + i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) \sin(kx)$$

ist dann eine Zerlegung der periodischen Funktion in rein *harmonische Schwingungen*, deren Frequenzen allesamt ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung⁷ sind, die man als *Partialtöne* des Tons f bezeichnet.

1.2 Die Radontransformation

Ein ganz anderer Typ Integraltransformation ist dank ihrer Bedeutung in der medizinischen Bildverarbeitung der eigentliche Anlass für die Entstehung dieser Vorlesung, nämlich die *Radontransformation*, die im Zusammenhang mit der *Computertomographie* eine große Bedeutung erlangt hat. Wird ein (Röntgen)–Strahl durch ein inhomom-

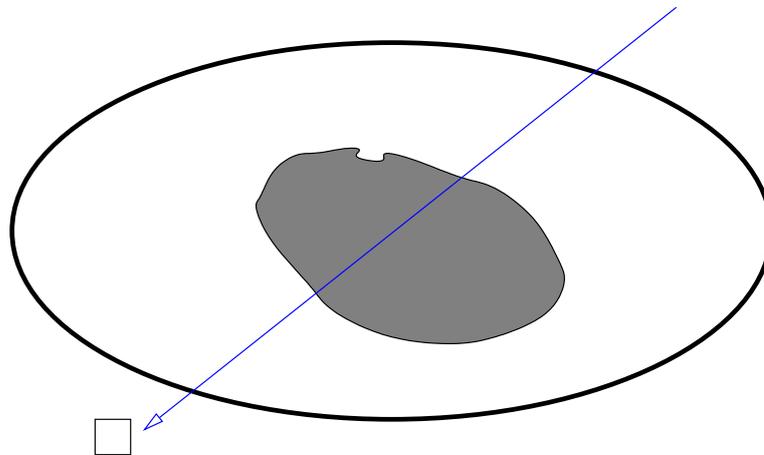


Abbildung 1.1: Ein Strahl wird durch ein Objekt geschickt und auf die Intensität auf der anderen Seite durch einen Detektor gemessen. Die Absorption durch das Material ist ein Integral entlang dieser Linie.

genes Material geschickt, so wird ein Teil des Strahls vom Material absorbiert, der Rest

⁷Hierzu muss man natürlich wieder alles von der Frequenz 2π auf ω zurückskalieren.

setzt seinen Weg durch das Material fort, Brechung, Beugung und ähnliche Effekte wollen wir hier erst einmal ignorieren⁸. Bezeichnen wir diese Absorptionsrate⁹ mit $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, und mit $I(x)$ die Intensität des Strahls an dieser Stelle, dann gilt für zwei Punkte $x, x + \delta$ auf dem Strahl laut [32] näherungsweise¹⁰ die Beziehung

$$I(x + \delta) - I(x) \approx -f(x) \delta I(x), \quad \text{d.h.} \quad I(x + \delta) \approx I(x) (1 - f(x) \delta).$$

Um aus dieser multiplikativen Beziehung eine additive zu machen, logarithmieren wir beide Seiten, so daß wir mit ein klein bisschen Rechnerei¹¹

$$\begin{aligned} \log I(x + \delta) &= \log I(x) + \log(1 - f(x) \delta) = \log I(x) - f(x) \delta + O(\delta^2) \\ &\approx \log I(x) - f(x) \delta \end{aligned}$$

erhalten – schließlich ist die Taylorentwicklung von $\log(1 - ax)$ an $x = 0$ ja

$$\log(1 - ax) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j}{(1 - ay)} \Big|_{y=0} x^j = - \sum_{j=1}^{\infty} (ax)^j.$$

Zerlegen wir die Strecke von der Quelle x_S zum Detektor x_D in $N + 1$ Stückchen der Länge δ , dann ist

$$\begin{aligned} \log \frac{I(x_S)}{I(x_D)} &= -(\log I(x_D) - \log I(x_S)) \\ &= - \sum_{j=0}^N \log I(x_S + (j+1)\delta) - \log I(x_S + j\delta) \approx \sum_{j=0}^N f(x_S + j\delta) \delta, \end{aligned}$$

was nun wieder nichts anderes als eine *Quadraturformel* für das *Linienintegral*

$$\int_{[x_S, x_D]} f(x) dx := \|x_D - x_S\| \int_0^1 f(\lambda x_S + (1 - \lambda)x_D) d\lambda$$

ist, wobei die Normalisierung so gewählt wurde, daß $\int_{[x_S, x_D]} 1 dx = \|x_D - x_S\|$ die Länge des Streckenzugs reproduziert. Damit sind wir auch schon fast bei der Radontransformation, die 1917 von Radon zu rein mathematischen Zwecken eingeführt wurde und die zu einer Funktion f alle möglichen Linienintegrale berechnet. Dazu müssen wir die Linien in \mathbb{R}^2 nur noch parametrisieren, was wir beispielsweise mit einem Richtungsvektor y , $\|y\| = 1$, und dem vorzeichenbehafteten Abstand s der Geraden zum

⁸Das kann man dadurch rechtfertigen, daß man annimmt, daß der Strahl hinreichend “hart”, also energiereich ist. Ob das immer den Patienten freut, sei an dieser Stelle einmal dahingestellt.

⁹Die zumindest bei monochromatischen Röntgenstrahlen proportional zur Dichte ist, siehe [32, S. 2].

¹⁰Das ist Physik – da ist zwischen näherungsweise und exakt eigentlich kein wirklicher Unterschied.

¹¹Taylor an der Stelle 0 nach δ und das ist klein!

Nullpunkt tun können. Die Menge \mathcal{L} aller Geraden in \mathbb{R}^2 kann man somit mit $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ identifizieren, wobei $\mathbb{S}^1 = \{y : \|y\| = 1\}$ die zweidimensionale Einheitskugel, auch als Einheitskreis bekannt, ist.

Übung 1.1 Wann schneiden sich zwei Geraden $L, L' \in \mathcal{L}$? ◇

Dann ist das zugehörige Linienintegral zu dieser Linie $L = (s, y) \in \mathcal{L}$ definiert als

$$\int_L f(x) dx := \int_{\mathbb{R}} f(sy^\perp + ty) dt, \quad y^\perp = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Übung 1.2 Zeigen Sie, daß die Gerade L durch den Punkt $s y^\perp$ geht. ◇

Definition 1.1 Die Radontransformation R ordnet einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Linienintegrale zu:

$$Rf(L) := \int_L f(x) dx.$$

$Rf : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ ist also eine Funktion von der Menge aller Geraden in \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} .

Man sieht also: Das Ergebnis der Radontransformation hat einen noch obskureren Definitionsbereich als beispielsweise die Berechnung der Fourierkoeffizienten. Dennoch ist sie alles andere als obskur, denn diese Funktionen, $F(L)$, sind ja gerade die gemessenen Werte bei der Tomographie, so daß sich in der Tomographie das folgende mathematische Problem stellt:

Berechne die Inverse der Radontransformation einer Funktion

Um dieses Problem mathematisch und letztendlich auch numerisch angehen zu können¹² benötigen wir aber zuerst einmal einiges an Theorie. Nur so viel im Moment: Die gute Nachricht ist, daß die Radontransformation invertierbar ist, die schlechte, daß die normalerweise "gemessenen" Linienintegrale dafür nicht ausreichen. Daß alles dennoch funktioniert, liegt an geeignet gewählten numerischen Verfahren und der Tatsache, daß man in der medizinischen Bildverarbeitung normalerweise nicht die exakten Dichtewerte berechnen muss, sondern, daß es sehr viel wichtiger ist, *Dichteveränderungen* zu bestimmen, denn diese markieren den Übergang zwischen verschiedenen Gewebetypen. Nicht die Farbe zählt, der Kontrast ist wichtig.

¹²Wir werden sehen, daß das alles nicht so einfach ist.

Division and multiplication were discovered. Algebra was invented and provided in interesting diversion for a minute or two. And then he felt the fog of numbers drift away, and looked up and saw the sparkling, distant mountains of calculus.

T. Pratchett, *Men at arms*

Die kontinuierliche Fouriertransformation

2

Man kann sich mit Integraltransformationen nicht beschäftigen, ohne zuerst “die Mutter aller Transformationen”, nämlich die *Fouriertransformation* gesehen zu haben, die nicht nur ein zentraler Prototyp sondern vor allem ein wichtiges Hilfsmittel beim Studium der anderen Transformationen ist. Beispielsweise wird die Invertierbarkeit der Radontransformation mit Hilfe der Fouriertransformation gezeigt werden, die meisten Rekonstruktionsalgorithmen basieren ebenfalls auf der Fouriertransformation und ihrer numerischen Tochter, der FFT¹³.

2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Wir werden hier die Fouriertransformation in beliebig vielen Variablen betrachten, werden aber sehen, daß das in vielen Fällen weniger schlimm als befürchtet sein wird, da sich die Exponentialfunktion ja aufspalten lässt:

$$e^{i\alpha^T x} = e^{i\alpha_1 x_1} \dots e^{i\alpha_d x_d}.$$

Aber immer schön der Reihe nach . . .

Wir werden immer d für die Anzahl der Variablen verwenden und somit Funktionen von \mathbb{R}^d nach \mathbb{R} betrachten. Dazu brauchen wir zuerst einmal die Funktionenräume.

¹³Fast Fourier Transform.

Definition 2.1 Der Raum der L_p -Funktionen, $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, besteht aus allen Funktionen, für die Norm

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases} \quad (2.1)$$

endlich ist:

$$L_p := L_p(\mathbb{R}^d) := \{f : \|f\|_p < \infty\}.$$

Daß die Norm eine Norm ist und daß die L_p -Räume unter dieser Norm vollständige, normierte Räume sind, kann man leicht in Standardbüchern zur Analysis nachschlagen, z.B. [34]. Die *Fouriertransformierte* einer Funktion $f \in L_1$ ist nun für $\xi \in \mathbb{R}^d$ als

$$\mathcal{F}f(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx \quad (2.2)$$

definiert, unterscheidet sich also nicht wesentlich von der “normalen” univariaten Fouriertransformation. Da $|e^{-i\xi^T x}| = 1$ ist, ist der Integrand auf der rechten Seite von (2.2) ebenfalls in L_1 und das Integral existiert für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Mit anderen Worten: Die Fouriertransformierte ist tatsächlich wohldefiniert.

Übrigens ist die Fouriertransformierte als Integraltransformation ein eher modernes Objekt, Fourier¹⁴ selbst hat “nur” die Fourierreihen “erfunden” und das zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die aber nun wieder einiges mit den stehenden Wellen in Musikinstrumenten zu tun hat.

Bemerkung 2.2 1. In ihrer physikalischen oder technischen Interpretation liefert die Fouriertransformierte eines “Signals” (das man als Amplitudenfunktion der Zeit ansieht), den Anteil der entsprechenden Frequenz an diesem Signal. Dabei interpretiert man den komplexen Wert $\widehat{f}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)| e^{i\theta(\xi)}$ als Anteil mit Amplitude $|\widehat{f}(\xi)|$ und Phase $\theta(\xi)$.

2. Die Bedingung $f \in L_1$ garantiert ja, daß die $\widehat{f}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert und daß

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \underbrace{|e^{-i\xi t}|}_{=1} dt = \|f\|_1. \quad (2.3)$$

¹⁴Jean Baptiste Fourier, 1768–1830, französischer Mathematiker und Politiker. Er war nicht nur Mitglied der “Académie des Sciences”, sondern (vorher) auch Teilnehmer an der Ägypten-Expedition von Napoleon (Bonaparte) als wissenschaftlicher Berater und Gouverneur des Departement Isère mit Hauptstadt Grenoble. In den beiden letzteren Eigenschaften trug er nicht unwesentlich (als Förderer von Champollion) zur Entzifferung der Hieroglyphen bei, siehe [9].

Allerdings ist diese Bedingung “nur” hinreichend, aber eben nicht notwendig für die Existenz der Fouriertransformierten.

3. Manchmal wird die Fouriertransformierte auch noch mit dem Vorfaktor $(2\pi)^{d/2}$ versehen, wir werden bald sehen, warum. Man sollte also bei der Verwendung von Literatur immer gut aufpassen, welche Normierung dort gewählt ist, sonst kann so ein konstanter Faktor für üble Fehler sorgen.
4. Man kann die Fouriertransformierte auch für allgemeinere “Funktionen”klassen als L_1 definieren, beispielsweise für temperierte Distributionen, siehe z.B. [26, 47].
5. Außerdem gibt es die Fouriertransformation nicht nur auf \mathbb{R}^d sondern auf lokal kompakten abelschen Gruppen unter Verwendung des sogenannten Haar-Maßes; dann sieht man, daß die Fouriertransformierte auf der dualen Gruppe definiert ist. Das soll uns aber im Moment noch nicht stören, in unserem einfachen aber bedeutenden Spezialfall spielt \mathbb{R}^d beide Rollen.
6. Die bedeutendste Gruppenoperation¹⁵ auf \mathbb{R}^d ist die Translation die durch den Operatoren τ_y , definiert als

$$\tau_y f = f(\cdot + y) \quad (2.4)$$

realisiert werden soll. Darüberhinaus definiert jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Dilatation

$$\sigma_A f = f(A \cdot). \quad (2.5)$$

Proposition 2.3 Für $f \in L_1$ ist die Funktion \hat{f} gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir bestimmen für $\xi, \delta \in \mathbb{R}^d$ die Differenz

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(\xi + \delta) - \hat{f}(\xi) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(e^{-i(\xi+\delta)^T x} - e^{-i\xi^T x} \right) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \underbrace{\left| e^{-i\xi^T x} \right|}_{=1} \left| e^{-i\delta^T x} - 1 \right| dx \end{aligned}$$

Wegen $f \in L_1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus [-M, M]^d} |f(x)| dx < \varepsilon$$

¹⁵Das heißt, sie ist insbesondere invertierbar.

ist. Damit ist dann¹⁶ unter Verwendung von Übung 2.1,

$$\begin{aligned}
 & \left| \widehat{f}(\xi + \delta) - \widehat{f}(\xi) \right| \\
 & \leq \int_{[-M, M]^d} |f(x)| \left| e^{-i\delta^T x} - 1 \right| dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus [-M, M]^d} |f(x)| \left| e^{-i\delta^T x} - 1 \right| dx}_{\leq 2} \\
 & \leq \int_{[-M, M]^d} |f(x)| \left| e^{-i\delta^T x} - 1 \right| dx + 2\varepsilon \\
 & \leq M \|\delta\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx + 2\varepsilon = M \|\delta\|_1 \|f\|_1 + 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Aber diesen Ausdruck bekommen wir *unabhängig von* ξ so klein, wie wir wollen¹⁷, denn jedes $\varepsilon > 0$ liefert uns ein M und passend zu diesem M können wir δ so wählen¹⁸, daß

$$\left| \widehat{f}(\xi + \delta) - \widehat{f}(\xi) \right| \leq 3\varepsilon$$

ist. □

Übung 2.1 Zeigen Sie: Für $a \in \mathbb{R}^d$ und p, q , so daß $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$\left| e^{-ia^T x} - 1 \right| \leq \|a\|_p \|x\|_q.$$

◇

Definition 2.4 (Faltung) Zu $f, g \in L(\mathbb{R}^d)$ definieren wir¹⁹ die Faltung

$$f * g := \int_{\mathbb{R}} f(\cdot - t) g(t) dt \quad * : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow L(\mathbb{R}). \quad (2.6)$$

Als nächstes stellen wir ein paar einfache Eigenschaften der Fouriertransformierten zusammen – daß die Fouriertransformierte linear in f bzw. c ist, das braucht nicht mehr besonders betont werden.

Satz 2.5 (Eigenschaften der Fouriertransformierten) Für $f \in L_1$ gelten die folgenden Aussagen:

¹⁶Diese Sorte Argument mit einem “relevanten” und einem “irrelevanten” Integrationsbereich ist ziemlich häufig.

¹⁷Und genau das ist die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit!

¹⁸Jedes δ mit $\|\delta\|_1 \leq \varepsilon / (M\|f\|_1)$ schafft das ...

¹⁹Vorbehaltlich Existenz der unendlichen Summen.

1. Für $y \in \mathbb{R}^d$ ist

$$(\tau_y f)^\wedge(\xi) = e^{iy^T \xi} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.7)$$

Translationen werden also zu Phasenverschiebungen.

2. Für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist

$$(\sigma_A f)^\wedge(\xi) = \frac{\widehat{f}(A^{-T}\xi)}{|\det A|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.8)$$

3. Für $g \in L_1$ ist $f * g \in L_1$ und es gilt für $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad (2.9)$$

4. Sind außerdem $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in L_1$, $j = 1, \dots, d$, dann gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^\wedge(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi), \quad j = 1, \dots, d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.10)$$

5. Sind $(\cdot)_j f \in L_1$, $j = 1, \dots, d$, dann ist \widehat{f} differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{f}(\xi) = (-i(\cdot)_j f)^\wedge(\xi), \quad j = 1, \dots, d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.11)$$

6. Ist $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, dann ist

$$f(x) = \left(\widehat{f} \right)^\vee(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi \quad (2.12)$$

Die Operation $f \mapsto f^\vee := \frac{1}{(2\pi)^d} f^\wedge(-\cdot)$ bezeichnet man als inverse Fouriertransformation²⁰.

Beweis: Für 1) berechnen wir

$$\begin{aligned} (\tau_y f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) e^{-i\xi^T x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T(x-y)} dx = e^{iy^T \xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx \\ &= e^{iy^T \xi} \widehat{f}(\xi), \end{aligned}$$

2) erhalten wir durch

$$(\sigma_A f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(Ax) e^{-i\xi^T x} dx = |\det A^{-1}| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T A^{-1}x} dx = \frac{\widehat{f}(A^{-T}\xi)}{|\det A|};$$

²⁰Die Gründe dafür sind ja wohl offensichtlich.

in beiden Fällen war es hierbei sehr hilfreich, daß die Transformationen \mathbb{R}^d *bijektiv* auf sich selbst abbilden.

Die erste Aussage von 3) folgt aus

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(s-t) dt \right| ds \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)g(s)| dt ds = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

der zweite, etwas interessantere Teil, hingegen aus

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(s)g(x-s) ds \right) e^{-i\xi^T x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(s) e^{i\xi^T s} g(x-s) e^{i\xi^T(x-s)} ds dx = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Für 4) verwenden wir partielle Integration²¹, die uns für $j = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-i\xi^T x} dx = - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i\xi^T x} dx \\ &= i\xi \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx = i\xi \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

liefert. 5) erhalten wir, indem wir für $j = 1, \dots, d$ und $h > 0$ den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{f}(\xi + h e_j) - \widehat{f}(\xi)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{e^{-i(\xi + h e_j)^T x} - e^{-i\xi^T x}}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} \frac{e^{-ihx_j} - 1}{h} dx \end{aligned}$$

betrachten; das Integral existiert, weil $xf \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-ihx_j} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-ix_j) e^{-ihx_j} = -ix_j$$

ist, folgt (2.11). Der Beweis von 6) ist ein klein wenig aufwendiger und verwendet für die *Fejér-Kerne*

$$F_\lambda := \lambda^d F(\lambda \cdot), \quad \lambda > 0, \quad F(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-1,1]^d} \prod_{j=1}^d (1 - |t_j|) e^{ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

²¹Daß dies gerechtfertigt ist, liegt an der Tatsache, daß für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ immer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = 0$ sein muß und daß die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ *dicht* in $L_1(\mathbb{R}^d)$ sind. Deswegen muß man sich um "Randwerte" hier nicht kümmern.

auf \mathbb{R}^d , die eigentlich nichts anderes als die inverse Fouriertransformation²² einer Dachfunktion mit kompaktem Träger $[-1, 1]^d$ ist. Diese Kerne haben die Eigenschaft, daß für jedes $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - f * F_\lambda\|_1 = 0 \quad (2.13)$$

gilt, siehe [26, S. 124–126] für den Fall $d = 1$, der Rest ist ein einfaches Tensorproduktargument. Damit konvergiert $f * F_\lambda \rightarrow f$ auch punktweise fast überall²³. Und es gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f * F_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) F_\lambda(x-t) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \left(\lambda \int_{[-1,1]^d} \prod_{j=1}^d (1 - |\xi_j|) e^{i(x-t)^T \lambda \xi} d\xi \right) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \int_{[-\lambda, \lambda]^d} \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right) e^{i(x-t)^T \xi} d\xi dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\lambda, \lambda]^d} \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-i\xi^T t} dt}_{=\widehat{f}(\xi)} e^{ix^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]^d} \underbrace{\prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right)}_{(1-1/\sqrt{\lambda})^d \leq \cdot \leq 1} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi \\ &\quad \underbrace{\rightarrow (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\sqrt{\lambda} \leq |\xi_j| \leq \lambda} \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right) \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi, \\ &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi, \end{aligned}$$

²²Die auf alle Fälle für L_1 -Funktionen wohldefiniert ist, was wir zeigen müssen ist, daß sie die Inverse der Fouriertransformation ist!

²³Zumindest für eine Teilfolge, siehe [12, S. 96].

denn

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sqrt{\lambda} \leq |\xi_j| \leq \lambda} \prod_{j=1}^d \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right) \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi \right| \\ & \leq \int_{\sqrt{\lambda} \leq |\xi_j| \leq \lambda} \underbrace{\prod_{j=1}^d \left|1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right|}_{\leq 1} \underbrace{|\widehat{f}(\xi)|}_{=1} \underbrace{|e^{ix^T \xi}|}_{=1} d\xi \leq \int_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus [-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]^d} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

da $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Also ist die Inverse der Fouriertransformation, \widehat{f}^\vee eine *stetige* Funktion²⁴, die fast überall mit f übereinstimmt, so daß wir also sogar annehmen können, daß f stetig sein muss, wenn $\widehat{f} \in L_1$ ist. \square

Übung 2.2 Beweisen Sie *ohne* Verwendung von (2.10) die folgende Aussage: Sind $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, dann ist $(f')^\wedge(0) = 0$.

Hinweis: Partielle Integration. \diamond

Der nächste Klassiker gibt uns Information über das Verhalten der Fouriertransformierten “weit draussen”.

Proposition 2.6 (Riemann–Lebesgue–Lemma) Für $f \in L_1$ ist²⁵

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \quad (2.14)$$

Beweis: Ist auch $\frac{\partial}{\partial x_j} f \in L_1$, $j = 1, \dots, n$, so bekommt man (2.14) sehr einfach aus (2.10) und (2.3):

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1 \geq \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^\wedge(\xi) \right| = |\xi_j| |\widehat{f}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, d,$$

also

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \max_{j=1, \dots, d} \frac{1}{|\xi_j|} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_1 \rightarrow 0, \quad \|\xi\| \rightarrow \infty$$

Für beliebiges $f \in L_1$ und differenzierbares $g \in L_1$ mit²⁶ mit $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ ist

$$\varepsilon \geq \|f - g\|_1 \geq \left| \widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi) \right| \geq \left| \widehat{f}(\xi) \right| - \left| \widehat{g}(\xi) \right|,$$

²⁴Proposition 2.3 gilt auch in diesem Fall, es ist immer noch egal, gegen welche Wahl von $e^{\pm i \xi^T x}$ integriert wird!

²⁵Wie schon vorher bezeichnet $\|x\|$ die euklidische Norm eines endlichdimensionalen Vektors, aber natürlich ist in diesem Kontext die Norm irrelevant.

²⁶Man beachte, daß sogar die *unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger* eine dichte Teilmenge von $L_1(\mathbb{R})$ bilden.

also

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right| \leq \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} |\widehat{g}(\xi)| + \|f - g\|_1 \leq \varepsilon$$

und da man ε beliebig klein wählen kann, folgt die Behauptung. \square

Der dritte im Bunde der Klassiker, also der Eigenschaften, die man von der Fouriertransformierten unbedingt kennen muss, ist schließlich eine zentrale Identität, die uns sagt, daß die Fouriertransformierte im wesentlichen eine *Isometrie* auf L_2 ist.

Satz 2.7 (Parseval²⁷/Plancherel²⁸)

Für $f, g \in L_1 \cap L_2$ ist²⁹

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \quad (2.15)$$

also insbesondere, mit $f = g$,

$$\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left\| \widehat{f} \right\|_2. \quad (2.16)$$

Diese Aussage hilft uns nun, die Definition der Fouriertransformierten auf L_2 zu übertragen: Zu $f \in L_2$ betrachtet man eine Folge³⁰

$$f_n := \chi_{[-n,n]^d} \cdot f \in L_1 \cap L_2, \quad n \in \mathbb{N},$$

von “abgeschnittenen” Funktionen die für $n \rightarrow \infty$ in der Norm $\|\cdot\|_2$ gegen f konvergiert. Da³¹

$$\left\| \widehat{f_{n+k}} - \widehat{f_n} \right\|_2 = \left\| (f_{n+k} - f_n)^\wedge \right\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f_{n+k} - f_n\|_2, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

ist $\widehat{f_n}$ ebenfalls eine Cauchyfolge und konvergiert gegen eine Funktion in L_2 , die wir \widehat{f} nennen wollen und die eine vernünftige Definition der Fouriertransformierten auf L_2 liefert! Außerdem erklärt (2.16), warum die Fouriertransformation auch gerne als

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx$$

²⁷Marc-Antoine Parseval des Chênes, 1755–1836, Zeitgenosse von Fourier, der ziemlich heftig in die Wirren der französischen Revolution verwickelt wurde, publizierte überhaupt nur 5 (in Worten: “fünf”) Arbeiten, die er aber allesamt der *Académie des Sciences* vorlegte.

²⁸Leider keine biographischen Informationen auffindbar.

²⁹Die scheinbare Asymmetrie dieser Formel löst sich auf, wenn man f, g also *komplexwertige* Funktionen wählt, denn dann muss man auch im linken Integral komplex konjugieren. Sesquilinearform und so ...

³⁰Siehe Übung 2.3!

³¹Und hier tritt Satz 2.7 in Aktion!

definiert wird, denn das ist dann *wirklich* eine Isometrie!

Übung 2.3 Hat eine Funktion $f \in L_2$ kompakten Träger, dann ist $f \in L_1$. \diamond

Beweis von Satz 2.7: Wir definieren

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(t-x) dt = (f * g(-\cdot))(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $\widehat{h(0)} = \int f g$. Außerdem ist

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \underbrace{(g(-\cdot))^\wedge(\xi)}_{=\widehat{g}(\xi)} = \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Sind nun f und g so “brav”, daß $\widehat{f}, \widehat{g} \in L_2$ ist³², dann ist mit (2.12)

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{h}(\xi) e^{i0\xi} d\xi = h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx,$$

was (2.15) liefert. Und die *Plancherel-Identität* (2.16) ist dann eine unmittelbare Konsequenz aus der *Parseval-Formel* (2.15). \square

2.2 Reihen, Periodisierung, Poisson

Der letzte im Bunde der “großen Klassiker” über die Fouriertransformation ist die Poissonsche Summenformel, die außerdem einen sehr schönen Bezug zwischen der Fouriertransformierten und der Fourierreihe, jetzt auf dem *Torus*

$$\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z}^d) \simeq [-\pi, \pi]^d$$

herstellt. Die zugehörigen Funktionenräume $L_p(\mathbb{T}^d)$ sind 2π -periodisch in dem Sinn, daß

$$f(\cdot + 2\pi\alpha) = f, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.17)$$

Definition 2.8 Die Periodisierung einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist als

$$f_* = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(\cdot + 2\pi\alpha) \quad (2.18)$$

definiert, vorausgesetzt natürlich, die Summe auf der rechten Seite existiert.

Lemma 2.9 (Periodisierungen) Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ so ist $f_* \in L_1(\mathbb{T}^d)$ eine 2π -periodische Funktion mit $\|f_*\|_1 \leq \|f\|_1$.

³²Das ist beispielsweise der Fall, wenn f und g differenzierbar sind; dies folgt aus (2.10) und dem Riemann–Lebesgue–Lemma, Proposition 2.6.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\|f_*\|_1 &= \int_{\mathbb{T}^d} |f_*(x)| \, dx = \int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(x + 2\pi\alpha) \right| \, dx \leq \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |f(x + 2\pi\alpha)| \, dx \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \int_{2\pi\alpha + [-\pi, \pi]^d} |f(x + 2\pi\alpha)| \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx = \|f\|_1,\end{aligned}$$

so daß $f_* \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ist. Die Periodizität ist eine einfache Verschiebung des Summationsindex in

$$f_*(\cdot + 2\pi\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} f(\cdot + 2\pi(\alpha + \beta)) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} f(\cdot + 2\pi\beta) = f_*$$

von der Form $\beta \rightarrow \beta - \alpha$. □

Übung 2.4 Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $\|f_*\|_1 < \|f\|_1$ ist. ◇

Ist nun $f \in L_1$, dann besitzt die zugehörige Periodisierung f_* eine *Fourierreihe*

$$f_*(x) \simeq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}_*(\alpha) e^{i\alpha^T x}, \quad x \in \mathbb{T}^d,$$

die durch ihre Koeffizienten

$$\widehat{f}_*(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i\alpha^T x} \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d, \quad (2.19)$$

definiert ist³³ und die natürlich rein intuitiv etwas mit der Fouriertransformierten \widehat{f} von f zu tun haben muss. Und tatsächlich:

$$\begin{aligned}\widehat{f}_*(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} f(x + 2\pi\beta) e^{-i\alpha^T x} \, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d + 2\pi\beta} f(x) e^{-i\alpha^T(x - 2\pi\beta)} \, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d + 2\pi\beta} f(x) e^{-i\alpha^T x} \underbrace{e^{i2\pi\alpha^T \beta}}_{=1} \, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\alpha^T x} \, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{f}(\alpha),\end{aligned}$$

der Koeffizient der Fourierreihe zur Periodisierung ist nichts anderes als die Fouriertransformierte an dieser Stelle. Und schon sind wir bei der Poissonschen Summenformel.

³³Wir haben wieder die Gruppe $\mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z}^d)$ und ihre duale $2\pi\mathbb{Z}^d$.

Satz 2.10 (Poisson³⁴-Summenformel)

Für $f, \hat{f} \in L_1$ gilt

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(2\pi\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\alpha) \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(2\pi\alpha). \quad (2.20)$$

Beweis: Angenommen die Partialsummen der Fourierreihe von f_* würden konvergieren³⁵, dann ist, da ja $\hat{f}(\alpha) = \hat{f}_*(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\alpha) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_*(\alpha) \underbrace{e^{i\alpha^T 0}}_{=1} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_*(\alpha) e^{i\alpha^T \cdot} \right) (0) = f_*(0) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(0 + 2\pi\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(2\pi\alpha), \end{aligned}$$

was auch schon die erste Identität liefert. Mit deren Hilfe und (2.8) ergibt sich dann, daß

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(\alpha) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} (\sigma_{(2\pi)^{-1}I} f)(2\pi\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} (\sigma_{(2\pi)^{-1}I} f)^\wedge(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(2\pi\alpha). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.11 Die Poissonsche Summenformel (2.20) ist ja offensichtlich eine punktweise Angelegenheit und damit eigentlich erst einmal nichts für L_1 -Funktionen, die man auf einer Menge vom Maß Null, und das ist \mathbb{Z}^d , beliebig abändern kann. Allerdings verwenden wir in Satz 2.10 die Fouriertransformation vorwärts und rückwärts³⁶, zumindest, wenn wir beide Formeln aus (2.20) wollen, und dazu brauchen wir, daß f und \hat{f} beide zu L_1 gehören. Nach Proposition 2.3 sind dann aber auch $f, \hat{f} \in L_1 \cap C_u(\mathbb{R}^d)$ und damit punktweise perfekt definiert.

2.3 Mittelwerte, Lebesgue, Laplace

Bemerkung 2.11 wirft die Frage auf, wie es denn nun so um die punktweise Auswertung von L_1 -Funktionen bestellt ist, denn a priori ist die ja nicht definiert, zumindest

³⁴Siméon Denis Poisson, 1781–1840, studierte bei Laplace und Legendre, Beiträge zur Fourier-Analyse und Wahrscheinlichkeitstheorie (“Poisson-Verteilung”), schrieb zwischen 300 und 400 Arbeiten, auch über Elektrizität, Magnetismus und Astronomie.

³⁵Ansonsten müssten wir ein Summationsverfahren, beispielsweise den Tensorprodukt-Féjer-Kern verwenden, siehe [36].

³⁶Nur um das nochmal klarzustellen: **Strukturell** sind Fouriertransformation und inverse Fouriertransformation dasselbe, beim einen haben wir $e^{-i\cdot}$ im Integral, beim anderen den *dualen Charakter* $e^{i\cdot}$.

nicht wohldefiniert, denn an jedem Punkt können wir die Funktion ja eigentlich beliebig abändern. Allerdings gibt es sehr wohl eine vernünftige Art und Weise, eine Punktauswertung für lediglich integrierbare Funktionen zu definieren, und zwar in gewissem Sinne wieder über eine Art “Integraltransformation”, nämlich eine *Mittelung*. Zu diesem Zweck bezeichne

$$B_\delta(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq \delta\}, \quad |B_\delta(x)| = \int_{B_\delta(x)} dt$$

die Kugel mit Radius $\delta > 0$ um x und deren Volumen. Nun definieren wir den Wert von f an der Stelle x als den Mittelwert

$$\mu_\delta f(x) := \frac{1}{V_\delta} \int_{B_\delta(x)} f(t) dt = \frac{1}{V_\delta} \int_{B_\delta(0)} f(t+x) dt. \quad (2.21)$$

Satz 2.12 (Lebesgue) *Ist f lokal integrierbar, so gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$*

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta f(x). \quad (2.22)$$

Einen Punkt x , für den (2.22) gilt, bezeichnet man als *Lebesgue–Punkt* von f und der Satz von Lebesgue, Satz 2.12, besagt, daß die Menge der Lebesgue–Punkte dicht in \mathbb{R}^d liegt, genauer gesagt, daß ihr Komplement eine Menge vom Maß Null ist. Wenn wir die Werte der Funktion aber dort passend verändern, dann ist sie im L_p –Sinne nach wie vor dieselbe Funktion, hat aber nun **den ganzen** \mathbb{R}^d als Lebesgue–Punkte.

Was das Ganze für die Poisson–Summenformel so interessant macht, ist die Tatsache, daß an Lebesgue–Punkten von f und damit auch von f_* die Fourierreihe konvergiert, siehe [26]. Außerdem kann man an Lebesgue–Punkten auch die inverse Fouriertransformation “direkt” ohne die Annahme $\widehat{f} \in L_1$ über

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} e^{-\delta \|\xi\|^2 / 2} d\xi$$

bestimmen; die Funktion $e^{-\delta \|\xi\|^2 / 2}$ ist dabei der gute alte *Weierstrass–Kern*. Das Ganze ist nicht so ganz einfach, aber durchaus interessant und hat viel mit Approximationen der Form

$$f \simeq \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) K((\cdot - t)/\delta) dt, \quad \int_{\mathbb{R}^d} K(t) dt = 1, \quad (2.23)$$

zu tun. Für gewisse *Kerne* K , genauer, solche von Fejér–Typ³⁷, konvergiert³⁸ nämlich (2.23) an jedem Lebesgue–Punkt von f . Das ist der Satz von Bochner, siehe [2]. So interessant aber diese Dinge sind, wir wollen sie im Moment nicht weiter vertiefen.

³⁷Zu denen nun wieder der klassische Fejér–Kern gehört, siehe [36].

³⁸siehe auch nochmal (2.13) im Beweis von Satz 2.5

Eine bedeutsame Eigenschaft der Fouriertransformation, insbesondere aber der Fourierreihen, wollen wir uns aber noch ansehen, die auf der simplen Tatsache beruht, daß

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{i\xi^T x} = i\xi_j e^{i\xi^T x}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e^{i\xi^T x} = -\xi_j^2 e^{i\xi^T x},$$

ist und somit für den Laplace-Operator $\Delta := \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ die Identität

$$\Delta e^{i\xi^T x} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e^{i\xi^T x} = -e^{i\xi^T x} \sum_{j=1}^d \xi_j^2$$

bzw.

$$(\Delta + \|\xi\|_2^2) e^{i\xi^T x} = 0 \tag{2.24}$$

gilt:

Die Funktion $x \mapsto e^{i\xi^T x}$ ist eine Eigenfunktion des Laplace-Operators zum Eigenwert $-\|\xi\|_2^2$.

Und das ist im Übrigen der Grund, warum Fourier die Fourierreihen eingeführt hat, denn er wollte das Problem

Zu einer Funktion $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ finde $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $f'' = g$ ist.

lösen. Moderner: Zu $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ finde $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$, so daß $\Delta f = g$ ist. In beiden Fällen ist der Trick einfach, wir brauchen nämlich nur f durch seine Fourierreihe zu ersetzen³⁹:

$$\Delta f(x) = \Delta \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\alpha) e^{i\alpha^T x} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\alpha) (-\|\alpha\|_2^2) e^{i\alpha^T x}$$

und dies komponentenweise mit der Fourierreihe

$$g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \widehat{g}(\alpha) e^{i\alpha^T x}$$

zu vergleichen, um auf die Lösung

$$\widehat{f}(\alpha) = -\frac{1}{\|\alpha\|_2^2} \widehat{g}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},$$

³⁹Zu jener Zeit wurde mit Reihen gerechnet, als gäbe es kein Morgen oder zumindest keine Divergenz – ein bisschen zu dieser Geschichte findet sich in [36].

zu kommen. Solch einen Operator, bei dem jeder Term eine Fourierreihe “einfach” mit einer Zahl multipliziert wird, nennt man aus naheliegenden Gründen einen *Fouriermultiplikator*. Das kontinuierliche Gegenstück⁴⁰ liefert

$$\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{\|\xi\|_2^2} \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

und damit eine “explizite” Lösungsformel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} -\frac{1}{\|\xi\|_2^2} \widehat{g}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} -\frac{1}{\|\xi\|_2^2} \int_{\mathbb{R}^d} g(t) e^{-i\xi^T t} dt e^{ix^T \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(t) \int_{\mathbb{R}^d} -\frac{e^{i\xi^T(x-t)}}{(2\pi)^d \|\xi\|_2^2} d\xi dt =: \int_{\mathbb{R}^d} g(t) P(x-t) dt \end{aligned}$$

als eine Integraltransformation mit dem *Poisson-Kern*

$$P(x) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\xi^T x}}{\|\xi\|_2^2} d\xi = -(\|\cdot\|_2^{-2})^\vee(x).$$

Das ist sicherlich eine nette Beziehung und ein systematischerer⁴¹ Zugang als der in beispielsweise [12], aber jetzt ist’s trotzdem erst mal genug damit!

Übung 2.5 Bestimmen Sie den Poisson-Kern für Fourierreihen. ◇

2.4 Distributionen und eine seltsame Ableitung

So schön der Funktionsbegriff ist, bei der Fouriertransformierten haben wir immer ein Problem: Wir gehen von einer L_1 -Funktion aus und landen dann bei einer gleichmäßig stetigen Funktion mit gewissen Abklingeigenschaften gegen ∞ , siehe die Propositionen 2.3 und 2.6. Das führte dann dazu, daß bestimmte Resultate die nicht ganz so “griffige” Bedingung $f, \widehat{f} \in L_1$ voraussetzen mussten. Diese Probleme kann man vermeiden, indem man den Funktionenbegriff geeignet erweitert und zu Distributionen übergeht – in [47]⁴² wird die Fouriertransformation im wesentlichen gleich für *temperierte Distributionen* gemacht. Aber immer schön der Reihe nach.

Definition 2.13 (Testfunktionen und Distributionen)

⁴⁰Man ersetzt “einfach” die Summation durch Integration.

⁴¹In dem Sinne, daß der Poisson-Kern nicht einfach vom Himmel fällt.

⁴²Das ist **die** Bibel der Funktionalanalysis, nicht einfach zu lesen – zum Einstieg ist [27] viel besser geeignet – aber sehr dicht und extrem viel Material.

1. Der Raum $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ der Testfunktionen ist als⁴³

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \text{supp } f \text{ kompakt, } \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right| < \infty \right\} \quad (2.25)$$

mit der Norm⁴⁴

$$\|f\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \max_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right| \quad (2.26)$$

definiert.

2. Eine Distribution T ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$.

3. Eine Distribution wird regulär genannt, wenn es eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gibt, so daß

$$T(\phi) = T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d). \quad (2.27)$$

Bemerkung 2.14

1. Jeder Ausdruck der Form (2.27) ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ und damit eine Distribution.

2. Für $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Punktauswertung $\phi \mapsto \phi(x)$ auf $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ offenbar ein lineares Funktional, das obendrein stetig ist, denn Konvergenz in $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ bedeutet ja gleichmäßige, also insbesondere punktweise Konvergenz, so daß mit $\phi_n \rightarrow \phi$ auch $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$ gilt.

3. Die Punktauswertung ist keine reguläre Distribution mehr! Dennoch ist sie Grenzwert der Folge

$$T_n(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(t) \phi(t) dt, \quad f_n = n/2 \chi_{[x-1/n, x+1/n]}, \quad (2.28)$$

von regulären Distributionen.

4. Als "Funktionsersatz" hat eine Distribution natürlich den Nachteil, daß $T(x)$ als punktweises Objekt überhaupt nicht definiert und keinesfalls sinnvoll ist.

⁴³Zur Erinnerung: Der Träger einer Funktion f ist definiert als $\text{supp } f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$, wobei $\overline{\Omega}$ den Abschluss der Menge Ω bezeichnet.

⁴⁴Wegen des kompakten Trägers ist die Verwendung von "max" gerechtfertigt.

Das Beispiel der Punktauswertung zeigt uns schon, wo der Vorteil der Distributionen liegt: Während die Folge f_n **nicht** in L_1 konvergiert⁴⁵, so konvergiert sie immer noch im distributiven Sinne. Man kann durch partielle Integration auch Ableitungen von Distributionen definieren, indem man sich von regulären Distributionen motivieren lässt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} T \right) (\phi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \phi(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} T \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \phi \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

und da die rechte Seite von (2.29) nichts mehr mit irgendeinem f zu tun hat und wieder ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ ist⁴⁶, kann man den Ausdruck zur Definition der Ableitung einer Distribution verwenden, mit dem schönen Nebeneffekt, daß nun, im Gegensatz zu Funktionen, beispielsweise Ableitung und Grenzwertbildung vertauschbar sind. Wir wollen hier nicht weiter ins Detail gehen, die Grundlagen der Distributionstheorie sind beispielsweise in [12] sehr schön dargestellt.

Für die Erweiterung der Fouriertransformation brauchen wir aber eine etwas speziellere Klasse von Distributionen.

Definition 2.15 (Temperierte Distributionen)

1. Die Schwarz-Klasse $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ besteht aus allen schnell abfallenden Funktionen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| p(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right| < \infty, p \in \Pi, \alpha \in \mathbb{N}_0^d \right\} \quad (2.30)$$

unter Verwendung der Norm

$$\|f\| = \sup_{p \in \Pi} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| p(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right|. \quad (2.31)$$

2. Eine temperierte Distribution T ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Nachdem $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, und zwar in dem Sinne, daß wir es nicht nur mit einer Inklusion der Mengen zu tun haben, sondern daß auch die Topologie, die durch (2.31) definiert ist, stärker als die aus (2.26), ist jede temperierte Distribution eine Distribution⁴⁷, nicht aber umgekehrt.

Nun sind wir aber im Geschäft! Denn $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist ja in $L_1(\mathbb{R}^d)$ enthalten, so daß für jedes $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Fouriertransformierte wohldefiniert ist und wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

⁴⁵Und somit keine Cauchyfolge sein kann, denn L_1 ist ja bekanntlich vollständig.

⁴⁶Deswegen die ziemlich heftige Norm bei der Definition der Testfunktionen

⁴⁷Hurrah, die Namenswahl ist vernünftig.

liegt⁴⁸ und wir nun, wie im Fall der Ableitungen, die Fouriertransformierte \widehat{T} einer temperierten Distribution⁴⁹ als

$$\widehat{T}(\phi) = T(\widehat{\phi}), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad (2.32)$$

definieren können - und auch die inverse Fouriertransformation ist nun nahezu trivial:

$$T^\vee(\phi) = T(\phi^\vee), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad (2.33)$$

und wir erhalten sofort, daß

$$\widehat{T}^\vee(\phi) = T^\vee(\widehat{\phi}) = T(\widehat{\phi}^\vee) = T(\phi), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

also $\widehat{T}^\vee = T$. Für die Fouriertransformation temperierter Distributionen gelten wieder dieselben Eigenschaften wie für die Fouriertransformation, hier nur ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} T\right)^\wedge(\phi) &= -\widehat{T}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi\right) = -T\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi\right)^\wedge\right) = -T(-i\xi_j \widehat{\phi}) \\ &= (ix_j T)^\wedge(\widehat{\phi}) = (ix_j \widehat{T})(\phi). \end{aligned}$$

Eine ganze Menge mehr zu diesem Thema findet sich in [47].

Was aber hat das nun alles mit Ableitungen zu tun? Ganz einfach: Wir haben im letzten Kapitel die Lösung der Differentialgleichung $\Delta f = g$ über den Poisson-Kern bestimmen können, und zwar über die einfache Beziehung

$$\Delta f = g \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{f} = -\left(\frac{1}{\|\cdot\|_2^2}\right)^\wedge \widehat{g} = -(\|\cdot\|_2^{-2})^\wedge \widehat{g}.$$

Der Laplace-Operator ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung, was sehr gut mit der 2 im Exponenten der Norm verträgt. Das erweitern wir jetzt ein klein wenig.

Definition 2.16 Für $r \in \mathbb{R}$ definieren wir das Riesz-Potential⁵⁰ der Ordnung r über seine Fouriertransformation als

$$(I^r f)^\wedge(\xi) = \|\xi\|_2^{-r} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.34)$$

Dabei entspricht $r > 0$ einem Differentialoperator, $r < 0$ einem "inversen" Differentialoperator, also einer Art Integraloperator.

⁴⁸Das schnelle Abfallen folgt aus der Differenzierbarkeit und unserem guten alten Satz 2.5.

⁴⁹Achtung: Dieses Objekt ist immer noch ein lineares Funktional, also insbesondere **nicht** punktweise definiert.

⁵⁰Marcel und Frederic Riesz waren zwei Brüder, die mathematisch gleichermaßen erfolgreich waren. Nach welchem von den beiden dieses Potential – und bitte, bitte, schreiben Sie nicht Potenzial – benannt ist, weiß ich leider nicht.

Man kann das Riesz–Potential als einen Ableitungsoperator der Ordnung r auffassen, hat jetzt also auch Ableitungen beliebiger gebrochener Ordnungen zur Verfügung, die wir nun wieder ganz dreist als $\Delta^{r/s}$ schreiben – für $r = 2$ erhalten wir dann auch ganz automatisch den guten alten Laplace zurück. Auf Distributionen sind diese “Differentialoperatoren” immer definiert⁵¹, aber man könnte nun eine Funktion als differenzierbar von der Ordnung $r > 0$ im Fouriersinne bezeichnen, wenn

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (1 + \|\xi\|_2^2)^{r/2} \widehat{f}(\xi) = 0. \quad (2.35)$$

Definition 2.17 Der Sobolev–Raum $H^r(\mathbb{R}^d)$ besteht aus allen Funktionen in $L_2(\mathbb{R}^d)$, für die die zugehörige Norm

$$\|f\|_{H^r}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|_2^2)^r |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.36)$$

endlich ist.

Das schöne an der Definition (2.36) ist die Tatsache, daß derartige Funktionen auch wirklich differenzierbar sind.

Satz 2.18 (Sobolevscher Einbettungssatz) Ist $r > \frac{d}{2} + k$, dann ist $H^r(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Wir wählen einen Multiindex α der Ordnung k , $|\alpha| = k$, und betrachten für $f \in H^r(\mathbb{R}^d)$ die Funktion $g(\xi) = (-i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Wir wollen zeigen, daß $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, daß also

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)| d\xi < \infty$$

ist. Dazu wählen wir ein beliebiges $C > 0$, spalten das Integral auf und verwenden dann fröhlich die Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |g(\xi)| d\xi &= \int_{\|\xi\|_2 \leq C} |g(\xi)| d\xi + \int_{\|\xi\|_2 > C} |g(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\|\xi\|_2 \leq C} |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_{\|\xi\|_2 > C} |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\int_{\|\xi\|_2 \leq C} |\xi^\alpha|^2}}_{\leq C^k} \underbrace{\sqrt{\int_{\|\xi\|_2 \leq C} |\widehat{f}(\xi)|^2}}_{\leq \|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2} d\xi + \underbrace{\sqrt{\int_{\|\xi\|_2 > C} |(1 + \|\xi\|_2^2)^{r/2} \widehat{f}(\xi)|^2}}_{=\|f\|_{H^r}} d\xi \times \\ &\quad \times \sqrt{\int_{\|\xi\|_2 > C} |(1 + \|\xi\|_2^2)^{-r/2} \xi^\alpha|^2} d\xi. \end{aligned}$$

⁵¹Wundert das noch jemanden?

Die ersten drei Größen sind natürlich endlich, nur das dritte Integral braucht noch ein bisschen Beachtung⁵². Dazu verwenden wir *Polarkoordinaten*⁵³ $\xi = sv$, $s \in \mathbb{R}_+$, $\|v\|_2 = 1$ mit $d\xi = s^{d-1} ds dv$, und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\|\xi\|_2 > C} \left| (1 + \|\xi\|_2^2)^{-r/2} \xi^\alpha \right|^2 d\xi \\ &= \int_C^\infty \int_{\|v\|_2=1} (1 + s^2)^{-r} s^{2k} \underbrace{(v^\alpha)^2}_{\leq 1} s^{d-1} dv ds \\ &\leq \left(\int_{\|v\|_2=1} dv \right) \int_C^\infty (1 + C^{-2}) s^{2k-2r+d-1} ds \end{aligned}$$

und das Integral existiert, wenn der Exponent < -1 ist, also wenn $2k - 2r + d < 0$ oder eben $r > k + \frac{d}{2}$ ist.

Ist nun aber g integrierbar, dann existiert die inverse Fouriertransformierte

$$F(x) := g^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi$$

als gleichmäßig stetige Funktion und weil

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial x^\alpha} F \right)^\wedge(\xi) = g(\xi) = \left(\frac{\partial^k}{\partial x^\alpha} f \right)^\wedge(\xi)$$

müssen f und F fast überall übereinstimmen, also in unserem Sinne gleich sein. \square

⁵²Und irgendwann muss ja die Bedingung $r > \frac{d}{2} + k$ ins Spiel kommen!

⁵³Die werden uns im nächsten Kapitel sowieso noch ein wenig mehr beschäftigen.

*Sine victoriae spe nemo volens in
aciem descendit.*

*Ohne Hoffnung auf Sieg zieht
niemand freiwillig in den Kampf.*

Petrarca, *De spe vincendi* – Von der
Hoffnung auf Sieg, 1366

Radontransformation und Signalverarbeitung

3

Die praktische Relevanz der Radontransformation für die Tomographie haben wir ja bereits in Kapitel 1.2 kennengelernt. Hier wollen wir uns etwas systematischer erst einmal mit ihren mathematischen Eigenschaften befassen. Um auch eine Idee zu bekommen, wie man die Inverse der Radontransformation *numerisch* berechnet, nutzen wir das Kapitel auch gleich für einen kleinen Ausflug in die Welt der Signalverarbeitung, allerdings mit Blick auf deren *kontinuierliche* Aspekte.

3.1 Die Radontransformation – Definition und Invertierbarkeit

Auch wenn unser Beispiel “nur” zweidimensionaler Natur war und in der praktischen Anwendung Tomographie auch naturgemäß ist, wollen wir die Radontransformation im \mathbb{R}^n betrachten. Dazu erst mal ein wenig Terminologie.

Definition 3.1

1. Die Einheitskugel bzw. Einheitssphäre im \mathbb{R}^d bezeichnen wir mit

$$\mathbb{S}^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}.$$

2. Für $v \in \mathbb{S}^d$ und $s \in \mathbb{R}$ ist die Radontransformation definiert als⁵⁴

$$Rf(v, s) := \int_{v^T x = s} f(x) dx. \quad (3.1)$$

⁵⁴Wobei das dx hier ein $n - 1$ -dimensionales Flächenmaß bezeichnet.

Die Menge $H = H(v, t) = \{x \in \mathbb{R}^d : v^T x = s\}$ ist eine *affine Hyperebene* im \mathbb{R}^d und das Integral über H in (3.1) kann formal folgendermaßen definiert werden: Jede *orthogonale Matrix* $V \in \mathbb{R}^{d \times d-1}$ mit⁵⁵ $V^T V = I$ und der Eigenschaft $V^T v = 0$ ermöglicht eine Parametrisierung des Integrals als

$$\int_H f(x) dx = \int_{v^T x = s} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(sv + Vy) dy.$$

Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl der Matrix V , denn die Spalten jeder derartigen Matrix müssen eine Orthonormalbasis des Untervektorraums von \mathbb{R}^d bilden, der auf v senkrecht steht. Seien V, V' zwei derartige Basen, dann muss es also eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{d-1 \times d-1}$ geben, so daß $V' = VQ$ ist⁵⁶ und wegen der Orthogonalität der beiden Basen ist

$$I = V'^T V' = Q^T V^T V Q = Q^T Q,$$

und somit Q eine “klassische” orthogonale Matrix. Jetzt brauchen wir nur noch eine einfache Variablentransformation durchzuführen,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(sv + V'y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(sv + VQy) dy = \underbrace{|\det Q|^{-1}}_{=1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(sv + Vy) dy,$$

und schon sehen wir, daß die Definition wirklich vom gewählten V unabhängig ist.

Eine erste wichtige Eigenschaft der Radontransformation lässt sich folgendermaßen beschreiben.

Lemma 3.2 (Projection Slice Theorem) Für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L_1(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g(s) Rf(v, s) ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(v^T x) dx, \quad v \in \mathbb{S}^d. \quad (3.2)$$

Beweis: Wir setzen erst einmal alle Definitionen ein:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(s) Rf(v, s) ds &= \int_{\mathbb{R}} g(s) \int_{v^T x = s} f(x) dx ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(s) \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(sv + Vy) dy ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(s) f\left([v, V] \begin{bmatrix} s \\ y \end{bmatrix}\right) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(e_1^T x) f([v, V]x) dx = \underbrace{|\det[v, V]|^{-1}}_{=1} \int_{\mathbb{R}^d} g(e_1^T [v, V]^{-1} x) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(v^T x) f(x) dx, \end{aligned}$$

⁵⁵Die Matrix heißt “orthogonal”, weil ihre $d - 1$ Spaltenvektoren orthogonal sind, was genau die Bedeutung der Bedingung $V^T V = I$ ist – die “umgekehrte” Forderung $V V^T = I$ ist übrigens nicht realisierbar, weil ja V nur Rang $d - 1$ haben kann!

⁵⁶Die Elemente der “neuen” Basis V' sind Linearkombinationen der “alten” Basis V .

da die Matrix $[v, V]$ auch wieder orthogonal ist und deshalb

$$e_1^T [v, V]^{-1} = e_1^T [v, V]^T = ([v, V] e_1)^T = v^T$$

ist. □

Das Schöne an Lemma 3.2 ist, daß es uns auch gleich ein Resultat für die Fouriertransformation liefert, indem wir ganz einfach $g(x) = e^{-i\sigma x}$ wählen, denn dann wird aus (3.2) sofort die Identität

$$(Rf(v, \cdot))^{\wedge}(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma s} Rf(v, s) ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\sigma v^T x} dx = \widehat{f}(\sigma v).$$

Korollar 3.3 (Fourier Slice Theorem) Für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(Rf(v, \cdot))^{\wedge}(\sigma) = \widehat{f}(\sigma v), \quad v \in \mathbb{S}^d, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Korollar 3.4 Die Abbildung $f \mapsto Rf$ ist injektiv.

Beweis: Angenommen, $Rf = Rf'$, also $R(f - f') = 0$, dann ist, da wir jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$ als $\xi = \sigma v$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{S}^d$, schreiben können, gemäß (3.3) auch

$$(f - f')^{\wedge}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Das ist aber nur für $f = f'$ möglich. □

Daß die Radontransformation injektiv ist, ist schon einmal ein gutes Zeichen, denn damit haben wir Hoffnung, daß sie auch wirklich invertierbar ist. Und in der Inversionsformel taucht dann auch nochmal unser schönes Riesz-Potential auf.

Satz 3.5 (Inverse Radontransformation) Sind $f, \widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, dann ist

$$R^* I^{1-d} Rf = f \quad (3.4)$$

mit der dualen Radontransformation oder Rückprojektion

$$R^* f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} f(v, x^T v) dv, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.5)$$

Beweis: Jeder Punkt $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^d$ läßt sich auf zwei Arten als $\xi = \sigma v$ darstellen, nämlich mit $\sigma = \|\xi\|_2$, $v = \xi/\|\xi\|_2$ und $\sigma = -\|\xi\|_2$, $v = -\xi/\|\xi\|_2$. Dank der inversen

Fouriertransformation ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi = \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^d} \widehat{f}(\sigma v) e^{ix^T(\sigma v)} |\sigma|^{d-1} dv d\sigma \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^d} (Rf(v, \cdot))^\wedge(\sigma) e^{ix^T(\sigma v)} |\sigma|^{d-1} dv d\sigma \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (Rf(v, \cdot))^\wedge(\sigma) e^{i(x^T v)\sigma} |\sigma|^{d-1} d\sigma}_{=I^{1-d}Rf(v, x^T v)} dv \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} I^{1-d} Rf(v, x^T v) dv = R^* I^{1-d} Rf(x),
\end{aligned}$$

was uns auch schon die Invertierungsformel gibt. □

Den Namen “duale Radontransformation” sollten wir allerdings noch erklären! Obwohl das gar nicht so schlimm ist, denn wir müssen uns nur noch mal das “Projection Slice Theorem”, d.h. Gleichung (3.2), ansehen, um auf

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{R}} g(s) Rf(v, s) ds dv &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(v^T x) f(x) dx dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \underbrace{\int_{\mathbb{S}^d} g(v^T x) dv}_{=R^*g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} R^*g(x) f(x) dx
\end{aligned}$$

zu kommen – R ist also eine *Adjungierte* zu R . Dabei sehen wir $g(s)$ als eine Funktion auf $\mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$ an, die in der ersten Variable konstant ist.

So schön die exakte, theoretische Rekonstruktionsformel (3.4) ist, so wenig nützlich ist sie allerdings laut [31] für praktische Zwecke. Dort verwendet man eine andere Eigenschaft der dualen Radontransformierten verwendet, die wir uns jetzt ansehen wollen.

Satz 3.6 (Filtered Backprojection) Für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L_1(\mathbb{S}^d \times \mathbb{R})$ ist

$$(R^*g) * f = R^*(g * Rf). \quad (3.6)$$

Beweis: Nach Definition der Operatoren ist für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
((R^*g) * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (R^*g)(t) f(x-t) dt \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^d} g(v, v^T t) f(x-t) dv dt \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^d} g(v, v^T(x-t)) f(t) dv dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(v, v^T(x - sv - Vy)) f(sv + Vy) dy ds dv \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{R}} g(v, v^T x - s) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(sv + Vy) dy}_{= \int_{v^T y = s} f(y) dy = Rf(v, s)} ds dv \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} (g(v, \cdot) * Rf(v, \cdot)) (v, v^T x) dv = R^*(g * Rf)
\end{aligned}$$

wie behauptet, wobei der Beweis auch klarmacht, bezüglich welcher Variablen die Faltungen zu verstehen sind. \square

Bemerkung 3.7 Um das mit den Faltungen und Transformationen nochmal klarzustellen: Bei einer Funktion auf \mathbb{R}^d hat man die ganz „normalen“ Faltungen und die Fouriertransformation, bei einer Funktion auf $\mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$ wird immer nur bezüglich der zweiten Variablen, also dem Argument in \mathbb{R} transformiert und gefaltet. Das ist ja eigentlich auch nur vernünftig, denn \mathbb{S}^d hat ja gar nicht die passende Struktur⁵⁷ dazu.

Die gefilterte Rückprojektion (3.6) bestimmt f als Lösung eines linearen Systems nämlich

$$Tf = b, \quad T : f \mapsto (R^*g) * f, \quad b = R^*(g * y).$$

wobei $y = Rf$ die Messung ist. Dabei ist g eine frei wählbare Hilfsfunktion, die man natürlich in der Praxis passend aussuchen sollte⁵⁸. Diese Vorgehensweise hat zwei große Vorteile:

1. Wir vermeiden das doch sehr unhandliche Riesz-Potential, das an sich schon der Lösung einer Differentialgleichung entspricht und müssen „lediglich“ Rückprojektionen berechnen.
2. Für die Lösung von Problemen der Form $Tf = b$ gibt es eine Vielzahl von Verfahren, die, wenn nötig, in einem gewissen Rahmen auch unter- oder überbestimmte Probleme verarbeiten können. Normalerweise habe wir es mit ersteren zu tun, denn in den meisten Fällen kann man schon aus technischen Gründen gar nicht $Rf(v, s)$ für **alle** $v \in \mathbb{S}^d$ und $s \in \mathbb{R}$ berechnen.

3.2 Gefiltert? Signale und Filter

Die in (3.6) angegebene Invertierungsformel spricht von einer *gefilterten* Rückprojektion. Klar, was „Rückprojektion“ bedeutet, das wissen wir, das ist einfach ein anderer

⁵⁷Translationsinvarianz!

⁵⁸Mal sehen, ob wir noch dazu kommen werden.

Name für die duale Radontransformation, also den Operator R^* aus (3.5). Um die Bedeutung des Zusatzes “gefiltert” zu verstehen, müssen wir uns ein klein wenig Signalverarbeitung ansehen, diesmal aber in ihrer kontinuierlichen Ausprägung. Zur diskreten oder *digitalen* Signalverarbeitung lässt sich in [18, 37, 40] einiges finden.

Ein *Signal* im Sinne der Signalverarbeitung ist nichts anderes als eine Funktion $f \in X$ aus einem Funktionenraum X , wobei wir in unserem Fall $X = L_p$ für ein passendes p annehmen können. Ein *Filter* ist dann erst einmal nur eine Operator $F : X \rightarrow Y$, der einem Signal $f \in X$ das “gefilterte” Signal $Ff \in Y$ zuordnet. Soweit ist das alles so allgemein, daß man nur wenig damit anfangen kann. Deswegen versteht man spätestens seit Hamming [18] unter einem “Filter” eine eingeschränkte Klasse.

Definition 3.8 Ein Operator⁵⁹ $F : L_p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^d)$ heißt LTI-Filter oder eben nur kurz und einfach Filter, wenn

1. F ein stetiger linearer Operator ist,
2. die Aktion von F zeitinvariant ist:

$$(Ff)(\cdot + y) = F(f(\cdot + y)), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Übung 3.1 Zeigen Sie: Ein Operator $F : X \rightarrow Y$ auf Banachräumen X, Y ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist. [33, S. 149] \diamond

Mit dem Translationsoperator τ aus (2.4) in Bemerkung 2.2 kann man die Zeitinvarianz auch sehr schön als die Kommutativitätseigenschaft

$$F\tau_y = \tau_y F, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.7)$$

formulieren. Viel schöner ist aber die Tatsache, daß wir solche Operatoren sehr schön darstellen können.

Definition 3.9 Die Impulsantwort eines Filters F ist die Distribution $f = F\delta$ mit der Dirac-Distribution δ , definiert durch $\delta\phi = \phi(0)$.

Das folgende “Resultat” ist hier in “handwaving”-Form verfasst, denn es schmeißt Distributionen, Funktionen und alles einfach durcheinander. Man kann das auch formal sauber und korrekt machen, aber dann wird’s aufwendig, siehe [14].

Proposition 3.10 Ein Operator F ist genau dann ein Filter, wenn $Fg = f * g$ ist.

⁵⁹Die “Einschränkung” $X = Y = L_p(\mathbb{R}^d)$ könnte man auch weiter fassen, muss man aber nicht!

Beweis: “ \Rightarrow ”: Für die Darstellung nutzen wir die triviale⁶⁰ Identität

$$g(x) = (g * \delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\cdot - t) \delta(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(t) \delta(x - t) dt,$$

um auf⁶¹

$$Fg = F \int_{\mathbb{R}^d} g(t) \delta(\cdot - t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(t) F\delta(\cdot - t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(t) f(\cdot - t) dt = f * g$$

zu kommen.

“ \Leftarrow ”: Hier prüfen wir nur die Zeitinvarianz nach, was wegen

$$\begin{aligned} (\tau_y Fg)(x) &= (Fg)(x + y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x + y - t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \tau_y g(x - t) dt = (f * \tau_y g)(x) \end{aligned}$$

aber keine große Überraschung ist. □

Wenn man also mal von solchen “Banalitäten” wie Existenz absieht, dann sind Filter also gerade Faltungen, oder, wenn man zur Fouriertransformierten übergeht, Multiplikationen mit einer Funktion:

$$Fg = f * g \quad \Leftrightarrow \quad (Fg)^\wedge = \hat{f} \hat{g}.$$

Die Fouriertransformierte \hat{f} der Impulsantwort f bezeichnet man als *Transferfunktion* des Filters F und wegen der linearen Beziehung zwischen der Fouriertransformierten der gefilterten Funktion und der Funktion spricht man auch von einem *linearen System*.

Beispiel 3.11 (Partielle Differentialoperatoren) *Ein partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist ein Filter! Zur Erinnerung⁶²: Ein partieller Differentialoperator der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten ist ein Operator der Form*

$$F = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| \leq n.$$

Für hinreichend glatte Funktion g und $\xi \in \mathbb{R}^d$ ist dann gemäß (2.10)

$$(Fg)^\wedge(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} g \right)^\wedge(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha (-i\xi)^\alpha \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

⁶⁰Bis auf die Tatsache, daß in L_p -Räumen ja gar keine Punktauswertungen definiert sind.

⁶¹Wobei wir ganz großzügig Integration und den linearen Operator vertauschen.

⁶²Oder, alternativ, zum Kennenlernen.

mit der polynomialen Transferfunktion

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq n} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Daran sieht man schon das Problem: Die zugehörige Impulsantwort $f = \widehat{f}^\vee$ ist nicht wirklich wohldefiniert, denn ein Polynom gehört ja nicht zu L_1 oder L_2 . Da bleiben dann wieder nur die Distributionen ...

Besondere Klassen von Filtern beschreibt man durch ihren Frequenzgang, also dadurch, welche Frequenzen sie sperren und welche sie durchlassen.

Definition 3.12 Seien $0 < C_1 < C_2 \in \mathbb{R}$. Ein Filter F heißt

1. Tiefpassfilter, wenn $\widehat{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| > C_1$.
2. Hochpassfilter, wenn $\widehat{f}(\xi) = 0$ für $|\xi| < C_1$.
3. Bandpassfilter, wenn $\text{supp } \widehat{f} \subseteq [C_1, C_2]^d$.

Der ideale Tiefpassfilter wäre natürlich durch die charakteristische Funktion $\widehat{f} = \chi_{[-1,1]^d}$ des Einheitswürfels als Übertragungsfunktion gegeben, was zum *Sinus Cardinalis*, oder kurz zur *sinc-Funktion*

$$f(x) = \frac{1}{\pi^d} \text{sinc } x, \quad \text{sinc } x := \prod_{j=1}^d \frac{\sin x_j}{x_j},$$

führen würde, die in Abb. 3.1 zu bewundern, theoretisch äußerst bedeutsam, aber praktisch nicht realisierbar ist – zum Thema realisierbare Filter siehe [14, 37].

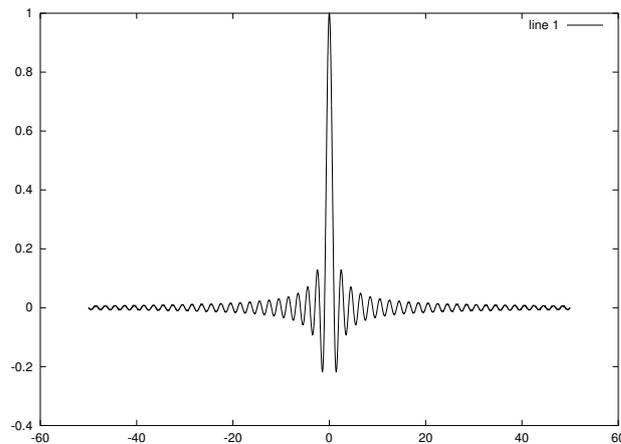
Übung 3.2 Zeigen Sie:

$$\chi_{[-C,C]^d}^\vee(x) = \left(\frac{C}{\pi}\right)^d \text{sinc } Cx, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.8)$$

◇

3.3 Bandbeschränkte Funktionen und Shannon

Denkt man einmal einen Moment lang an eine Tonaufnahme, beispielsweise eines Musikstücks, so ist die Technik ja nur imstande, einen bestimmten Frequenzbereich aufzuzeichnen – typische Studiomikrophone haben etwa einen Frequenzgang von 20-20000

Abbildung 3.1: Die Funktion $\text{sinc } x$.

Hz⁶³ und auch die Aufnahmefähigkeit des menschlichen Gehörs ist beschränkt. Das so aufgenommene Signal ist dann eine Funktion, deren *Spektrum*, also deren Fouriertransformierte, einen kompakten Träger, in diesem Fall in \mathbb{R} hat. Solche Funktionen spielen eine zentrale Rolle in der Signalverarbeitung.

Definition 3.13 Eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ heißt bandbeschränkt, wenn es eine kompakte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gibt, so daß $\text{supp } \hat{f} \subseteq \Omega$.

So gesehen sind bandbeschränkte Funktionen eigentlich die einzigen, die in einer “realen” Aufnahmewelt existieren können. Bandbeschränkte Funktionen sind aber noch viel schöner, sie sind nämlich sehr brave Funktionen und sogar unendlich oft differenzierbar.

Proposition 3.14 Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ bandbeschränkt, dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Da \hat{f} gleichmäßig stetig ist und kompakten Träger hat, damit also zu L_1 gehört, gehört für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ auch die Funktion $(-i \cdot)^\alpha \hat{f}$ zu L_1 und hat damit eine inverse Fouriertransformierte

$$F_\alpha := \left((-i \cdot)^\alpha \hat{f} \right)^\vee \in C_u(\mathbb{R}^d),$$

siehe Proposition 2.3. Da andererseits

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f - F_\alpha \right)^\wedge = 0$$

⁶³Hz = “Hertz”, Schwingungen pro Sekunde.

ist, können wir also F_α mit der entsprechenden partiellen Ableitung von f identifizieren und da all diese Funktionen gleichmäßig stetig sind⁶⁴, folgt die Behauptung. \square

Will man zusätzlich, daß nicht nur $f \in L_1$, sondern daß f und \widehat{f} **beide** glatt sind, also $f, \widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, dann bettet man die ganze Geschichte in \mathbb{C}^d ein und landet bei einem Klassiker der Funktionentheorie und der Fourieranalysis, den man beispielsweise in [47, S. 161] findet, wo er⁶⁵ auch für temperierte Distributionen bewiesen wird. Wir wollen diesen Satz, der eine bemerkenswerte Nähe zum Sobolevschen Einbettungssatz 2.18 aufweist, hier nicht beweisen⁶⁶, sondern nur der Vollständigkeit halber angeben.

Satz 3.15 (Paley–Wiener) *Eine holomorphe⁶⁷ Funktion $F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann Fouriertransformierte*

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-iz^T x} dx, \quad z \in \mathbb{C}^d,$$

einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, deren Träger in $[-M, M]^d$ enthalten ist, wenn es zu jedem $n > 0$ eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$|F(z)| \leq C (1 + |z|)^{-n} e^{M|\Im z|}$$

gilt.

Was uns hier aber viel mehr interessieren soll, ist einer der ganz zentralen Sätze der Signalverarbeitung, der eine Aussage über die Reproduzierbarkeit von Funktionen aus diskreten Messungen, also *Abtastungen* machen wird. Obwohl – eigentlich ist er ein Satz über Interpolation, der Shannonsche⁶⁸ Abtastsatz⁶⁹, sagt uns nun, daß man bandbeschränkte Funktionen rekonstruierbar abtasten kann. Die *Abtastung*, auf gut Deutsch das “*Sampling*”, einer Funktion f ist nichts anderes als die Folge

$$S_h f = (f(h\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}^d), \quad (3.9)$$

die nur eben nicht mit \mathbb{N} , sondern halt mit \mathbb{Z}^d indiziert ist. Den Operator S_h , der jeder Funktion so eine Folge zuordnet, bezeichnet man als *Abtastoperator* oder *Samplingoperator*. Die Frage ist dann: *Wann enthält diese Folge die volle Information über f ?*

⁶⁴Das ist also sogar noch ein klein wenig mehr!

⁶⁵Wen wundert’s?

⁶⁶Der Beweis ist aber gar nicht so schwer und folgt den üblichen Wegen, die wir hier schon einige Male gegangen sind.

⁶⁷Der komplexe Differentiationsbegriff wird beispielsweise in [21] sehr schön erklärt.

⁶⁸Claude Elwood Shannon, 1916–2001, Elektroingenieur und Mathematiker, Erfinder des Wortes “bit” und Entwickler von Schachprogrammen (und zwar um 1950).

⁶⁹Der eigentlich gar nicht von Shannon ist, siehe Bemerkung 3.17. Das heißt – von Shannon ist der Satz wohl schon, aber Whittaker hat ihn halt vor ihm auch schon bewiesen. Es ist dabei ziemlich sicher, daß Whittaker Shannons Resultat nicht kannte und ziemlich wahrscheinlich, daß es auch umgekehrt der Fall war.

Der einfachste Weg, aus der Folge wieder eine Funktion zu machen, ist ein sogenannter *Quasiinterpolant*⁷⁰

$$Q_h f = S_h f * \phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} S_h f(\alpha) \phi(\cdot - \alpha), \quad (3.10)$$

natürlich in der Hoffnung, daß $Q_h f \rightarrow f$ für $h \rightarrow 0$, was normalerweise natürlich auch von der verwendeten Funktion ϕ , bzw. der “Interaktion” zwischen f und ϕ abhängt. Erfreulicherweise gibt es für bandbeschränkte Funktionen aber sogar ein universelles ϕ , nämlich die Funktion

$$\text{sinc}_\pi := \text{sinc}(\pi \cdot).$$

Satz 3.16 (Abtastatz von Shannon) *Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine bandbeschränkte Funktion mit $\text{supp } \hat{f} \in [-T, T]^d$ und ist $h < h^* = \frac{\pi}{T}$, dann ist*

$$f = (S_h f * \text{sinc}_\pi)(h^{-1} \cdot) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi(x_j/h - \alpha_j)}{\pi(x_j/h - \alpha_j)}. \quad (3.11)$$

*Die Rekonstruktion ist also **exakt**.*

Übung 3.3 Zeigen Sie (ohne Verwendung von Satz 3.16): Der Quasiinterpolant in (3.11) ist ein Interpolant. \diamond

Bemerkung 3.17 *Die Kopplung zwischen der Bandbreite T der Funktion f und der Abtastgenauigkeit h ist ein wirklich zentrales Konzept der Signalverarbeitung, stellt es doch das Verbindungsglied zwischen dem Diskreten und dem Kontinuum dar. Daher noch ein paar Anmerkungen:*

1. *In vielen Büchern heißt es, daß die Abtastfrequenz $1/h$, oftmals auch als “Nyquist-Frequenz” bezeichnet, sogar die **Hälfte** der maximalen Frequenz T sein soll, siehe z.B. [25]. Solche Konstanten kommen von einer etwas anderen Normierung von Frequenzen (mit 2π) oder auch der Fouriertransformierten.*
2. *Die sinc-Funktion ist kein wirklich guter Weg zur Rekonstruktion eines Signals. Sie hat ja keinen endlichen Träger und fällt nur linear⁷¹ ab, so daß man mit Abschneiden und den dabei auftretenden Fehlern sehr vorsichtig sein muß.*

⁷⁰Es gibt angeblich eine Aussage von G. G. Lorentz, einem der “Väter” der Approximationstheorie, zu diesem Begriff, die da (sinngemäß) lautet: *Entweder das Ding interpoliert, was soll dann das “Quasi”, oder das Ding interpoliert nicht, was soll dann das “Interpolant”?* Wenn sie nicht echt ist, ist sie zumindest gut erfunden, aber trotzdem hat sich der Begriff inzwischen im allgemeinen Sprachgebrauch festgesetzt.

⁷¹Also wie $1/x$.

3. In vielen Fällen wählt man die Abtastrate h einfach als h^*/k für ein ganzzahliges k , was nichts anderes ist als die Abtastfrequenz k -mal so groß wie nötig anzusetzen. In diesem Fall spricht man von “ k -fachem Oversampling”⁷².
4. Die Beweise des Abtastsatzes aus Bücher der elektrotechnischen Literatur, z.B. [17] oder [40], und die dort verwendeten Argumentationen, sind oftmals (zumindest für Mathematiker) nur schwer nachzuvollziehen, um es vorsichtig zu formulieren. Daß es auch anders geht sieht man in [30]. Der jetzt folgende Beweis ist eine Modifikation des Beweises aus [25].
5. Auch die Geschichte des Satzes ist etwas verwickelter. Laut [30] wurde er zuerst (theoretisch, als kardinales Interpolationsresultat) 1935 von Whittaker bewiesen [45] und 1949 von Shannon im Kontext der Signalverarbeitung wiederentdeckt [41]. Es gibt hier übrigens auch sehr enge Beziehungen zu den kardinalen Splines, [38].

Beweis von Satz 3.16: Wegen der Bandbeschränktheit ist natürlich $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Wegen der Orthogonalität der komplexen Exponentialfunktionen ist für $h > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^d$

$$S_h f(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} (S_h f)^\wedge(\theta) e^{i\alpha^T \theta} d\theta, \quad (S_h f)^\wedge(\theta) := \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} S_h f(\beta) e^{-i\beta^T \theta}, \quad (3.12)$$

aber eben auch

$$\begin{aligned} S_h f(\alpha) &= f(h\alpha) = \hat{f}^\vee(h\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ih\alpha^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \int_{h^{-1}(2\pi\beta + [-\pi, \pi]^d)} \hat{f}(\xi) e^{ih\alpha^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} h^{-d} \int_{2\pi\beta + [-\pi, \pi]^d} \hat{f}(h^{-1}\xi) e^{i\alpha^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \hat{f}(h^{-1}(\xi + 2\pi\beta)) e^{i\alpha^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(h^{-1}(\xi + 2\pi\beta)) \right) e^{i\alpha^T \xi} d\xi, =: \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} F(\xi) e^{i\alpha^T \xi}, \end{aligned}$$

das heißt

$$S_h f(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} F(\xi) e^{i\alpha^T \xi}, \quad F := \frac{1}{h^d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}\left(\frac{\cdot + 2\pi\beta}{h}\right); \quad (3.13)$$

⁷²Was ja beispielsweise von CD-Playern bekannt sein sollte.

dieses F ist also ein Periodisierung der Fouriertransformierten, bis auf den h^{-1} -Faktor genau dasselbe wie (2.18). Darüber hinaus ist $F \in C(\mathbb{T}^d) \subset L_1(\mathbb{T}^d)$ – die Funktion ist offensichtlich 2π -periodisch und wegen der Bandbeschränktheit von f ist für jedes $\xi \in \mathbb{T}^d$ die Summe sogar nur endlich. Da die Exponentialfunktionen $e^{i\alpha^T \cdot}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, können wir aus (3.12) und (3.13) folgern, daß

$$h^{-d} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(\frac{\xi + 2\pi\beta}{h}\right) = F(\xi) = (S_h f)^\wedge(\xi) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} f(h\beta) e^{-i\beta^T \xi}, \quad \xi \in \mathbb{T}^d. \quad (3.14)$$

Ist nun h so klein, daß

$$\begin{aligned} h^{-1} [-\pi, \pi]^d \supseteq [-T, T]^d &\iff [-\pi, \pi]^d \supseteq [-Th, Th]^d \iff Th < \pi \\ &\iff h < \frac{\pi}{T}, \end{aligned}$$

dann erhalten wir für $j = 1, \dots, d$ und $\xi \in \mathbb{T}^d$ im Falle $\beta_j > 0$, daß

$$h^{-1} (\xi + 2\pi\beta)_j > \frac{T}{\pi} (-\pi + 2\pi\beta_j) \geq T(-1 + 2\beta_j) \geq T,$$

und analog für $\beta_j < 0$, daß $h^{-1} (\xi + 2\pi\beta)_j < -T$. Das heißt aber, daß die Summe auf der linken Seite von (3.14) nur aus dem Term $\alpha = 0$ besteht und wenn wir nun noch ξ durch $h\xi$ ersetzen, dann erhalten wir, daß

$$\widehat{f}(\xi) = h^d \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) e^{-ih\alpha^T \xi},$$

und somit ergibt sich, da $T < \pi/h$ ist, aus der T -Bandbeschränktheit von f , daß

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-T, T]^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix^T \xi} d\xi = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \int_{[-T, T]^d} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) e^{i(x-h\alpha)^T \xi} d\xi \\ &= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) \int_{h^{-1}\mathbb{T}^d} e^{i(x-h\alpha)^T \xi} d\xi \\ &= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^d \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) \prod_{j=1}^d \left[\frac{e^{i(x_j - h\alpha_j)\xi}}{i(x_j - h\alpha_j)} \Big|_{\xi=-\pi/h}^{\pi/h} \right] \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) \prod_{j=1}^d \underbrace{\frac{e^{i(x_j - h\alpha_j)\pi/h} - e^{-i(x_j - h\alpha_j)\pi/h}}{2i}}_{=\sin \pi(x_j/h - \alpha_j)} \underbrace{\frac{h}{\pi} \frac{1}{(x_j - h\alpha_j)}}_{=(\pi(x_j/h - \alpha_j))^{-1}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) \prod_{j=1}^d \frac{\sin \pi (x_j/h - \alpha_j)}{\pi (x_j/h - \alpha_j)} = (S_h f * \text{sinc}_\pi)(\cdot/h),$$

was damit (3.11) liefert. □

Der Clou im Beweis von Satz 3.16 ist die Betrachtung der ‘Poissonschen Summenformel’, vergleiche mit (2.20),

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}\left(\frac{\xi + 2\pi\alpha}{h}\right) = h^d \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} f(h\alpha) e^{-i\alpha^T \xi}, \quad \xi \in \mathbb{T}^d, \quad (3.15)$$

die die *Periodisierung* der Fouriertransformierten einer Funktion mit der Fouriertransformierten der Abtastfolge verknüpft, und zwar prinzipiell *ohne* jedwede Forderung von Bandbeschränktheit⁷³ oder hinreichend feine Abtastung. Ist nun h so groß, daß die Funktion $\widehat{f}(h^{-1}\cdot)$ über das Intervall $[-\pi, \pi]$ ‘hinausragt’, dann wird die Funktion durch die überlappenden Teile periodisch ‘verschmiert’, siehe Abb. 3.2. Aus dieser Funktion

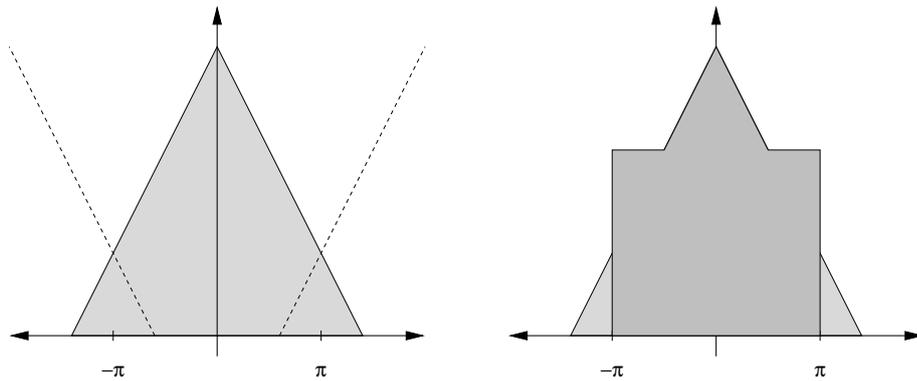


Abbildung 3.2: Periodisierung einer Funktion mit ‘zu großem’ Träger, die schraffiert unterlegte Funktion wird dann periodisch fortgesetzt. Natürlich ist es nicht möglich, die Funktion links *eindeutig* aus der Periodisierung zu rekonstruieren.

läßt sich \widehat{f} natürlich nicht mehr rekonstruieren. Aber es ist sogar noch schlimmer: Durch die Überlagerung von Frequenzen die eigentlich nichts miteinander zu tun haben und nun modulo 2π betrachtet werden, kommt es bei der Rekonstruktion des Signals im Falle von Unterabtastung zu sehr unerwünschten Effekten, die man als *Aliasing* bezeichnet.

⁷³Außer man möchte, daß die Summe auf der linken Seite von (3.15) existiert, dann sollte vielleicht doch zumindest $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ sein.

3.4 Die gefilterte Rückprojektion

Nach all diesen Zwischenbemerkungen und zweifellos interessanten Exkursen wird es aber wieder Zeit, uns der gefilterten Rückprojektion als *numerisches* Verfahren zur Invertierung der Radontransformation zuzuwenden. Dazu definieren die Messung $y := Rf \in L_1(\mathbb{S}^d \times \mathbb{R})$ und die Impulsantwort des zu betrachtenden Filters als $G := R^*g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit unserem "freien Parameter", der *Rekonstruktionsfunktion* g . Die Formel (3.6) nimmt dann die Gestalt

$$G * f = R^*(g * y). \quad (3.16)$$

Ideal wäre natürlich $G = \delta$, denn dann stünde da ja die gesuchte Lösung

$$f = R^*(g * y). \quad g = (R^*)^{-1} \delta,$$

sofort da. Das können wir natürlich vergessen, denn wir brauchen uns nicht einbilden, daß die Funktion g mit $R^*g = \delta$ so einfach zu finden sein wird oder gar irgendwelche schöne Eigenschaften haben könnte.

Übung 3.4 Was ist eigentlich die (inverse) Fouriertransformation $\widehat{\delta}(\delta^\vee)$ der δ -Distribution?
◇

Bevor wir damit beginnen, machen wir uns die Notation ein wenig leichter und verwenden ab sofort für $g \in L_1(\mathbb{S}^d \times \mathbb{R})$ die Schreibweise

$$\widehat{g}(v, \sigma) = (g(v, \cdot))^\wedge(\sigma), \quad v \in \mathbb{S}^d, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Aber zumindest sollten wir für unser Rekonstruktionsverfahren g *einfach* wählen und ein guter Weg dahin ist mit Sicherheit die Verwendung passender Symmetrien. Wir erinnern uns: So ein Paar $(v, s) \in \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$ beschreibt eine *Hyperebene* durch ihren Normalenvektor v und ihren Anstand s vom Ursprung, und da ist natürlich (v, s) und $(-v, -s)$ dasselbe. Eine minimale Symmetrie von g sollte das natürlich berücksichtigen, und solche Funktionen haben nun wieder eine eher schöne Rückprojektion, zumindest, wenn man deren Fouriertransformierte betrachtet.

Satz 3.18 Erfüllt eine Funktion $g \in L_1(\mathbb{S}^d \times \mathbb{R})$ die Symmetriebedingung⁷⁴ $g(v, s) = g(-v, -s)$, dann ist

$$(R^*g)^\wedge(\xi) = \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}, \|\xi\|_2\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (3.18)$$

⁷⁴Man könnte auch sagen, g ist eine *gerade Funktion*. Vielleicht sollte man es sogar sagen?

Bemerkung 3.19 Die Symmetriebedingung ist eine notwendige Bedingung dafür, daß g die Radontransformation einer Funktion f ist, denn schließlich ist ja beinahe trivialerweise

$$Rf(v, s) = \int_{v^T x = s} f(x) dx = \int_{(-v)^T x = -s} f(x) dx = Rf(-v, -s). \quad (3.19)$$

Damit kann die Radontransformation **keine** surjektive Abbildung sein, eine ungerade Funktion, bei der $f(v, s) = -f(-v, -s)$ ist, ist beispielsweise nicht als Radontransformation realisierbar, denn das widerspricht ja (3.19).

Und das hätte man eigentlich schon viel früher sagen können!

Lemma 3.20 Ist $g : \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$ gerade, dann gibt es $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $g = Rf$ ist.

Beweis: Wir gehen die Sache wieder einmal ausschließlich formal an, der sichere Kontext hierfür wären wieder einmal die temperierten Distributionen. Mit Funktionen ist es aus den üblichen Gründen ohne Zusatzannahmen⁷⁵ etwas schwieriger.

Für $v \in \mathbb{S}^d$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ setzen wir dann

$$h(\sigma v) = \widehat{g}(v, \sigma) = (g(v, \cdot))^{\wedge}(\sigma)$$

und da sich wegen

$$\widehat{g}(v, \sigma) = (g(v, \cdot))^{\wedge}(\sigma) = (g(-v, -\cdot))^{\wedge}(\sigma) = \widehat{g}(-v, -\sigma)$$

die Symmetrie von g auf dessen⁷⁶ Fouriertransformierte überträgt, ist h in Polarkoordinaten wohldefiniert, wenn man mal von der offensichtlichen Mehrdeutigkeit absieht. Also ist

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^d} h(\sigma v) |\sigma|^{d-1} e^{i(\sigma v)^T x} dv d\sigma = \frac{2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) e^{i\xi^T x} d\xi$$

eine Funktion⁷⁷ mit der Eigenschaft, daß $\widehat{f}(\sigma v) = \widehat{g}(v, \sigma)$, was nach (3.3) nichts anderes als $Rf = g$ bedeutet. \square

Bemerkung 3.21 Anders gesagt: Bis auf die üblichen Schwierigkeiten mit Funktionenräumen ist die Radontransformation surjektiv auf die geraden Funktionen.

Als letztes Hilfsmittel für den Beweis von Satz 3.18 benötigen wir noch eine weitere Eigenschaft der Radontransformation und ihrer Dualen, die zeigt.

⁷⁵Beispielsweise wieder von der Art $g, \widehat{g} \in L_1(\mathbb{S}^d \times \mathbb{R})$

⁷⁶Oder "deren"?

⁷⁷Oder eben Distribution!

Lemma 3.22 Für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist

$$(R^* R f)^\wedge(\xi) = \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{f}(\xi), \quad (3.20)$$

also $R^* R = I^{d-1}$.

Bemerkung 3.23

1. Wie wir schon gelernt haben, kann man das Riesz-Potential als eine Art Differentialoperator ansehen. Und nachdem es für alles auch einen offiziellen Namen gibt, werden solche Operatoren, die über entsprechende Fouriermultiplikatoren definiert sind, auch als Pseudodifferentialoperatoren bezeichnet.
2. Darüberhinaus ist (3.20) eine Multiplikation von Fouriertransformierten, also nichts anderes als eine Faltung des Kerns $(\|\cdot\|_2^{1-d})^\vee$.

Übung 3.5 Berechnen Sie die Impulsantwort zur Transferfunktion $F(\xi) = \|\xi\|_2^{1-d}$. \diamond

Beweis: Wir gehen ganz ähnlich wie beim Beweis der Invertierungsformel in Satz 3.5 vor, nur betrachten wir diesmal

$$\begin{aligned} (I^{d-1} f)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi^T x} d\xi \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^d} \underbrace{\|\sigma v\|^{1-d}}_{=|\sigma|^{1-d}} \widehat{f}(\sigma v) e^{ix^T(\sigma v)} |\sigma|^{d-1} dv d\sigma \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{R}} (Rf)^\wedge(v, \sigma) e^{i\sigma x^T v} d\sigma dv = \frac{1}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^d} Rf(v, v^T x) dv \\ &= (R^* R) f(x) \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 3.18: Wir schreiben g als Radontransformierte einer Funktion f , d.h. $g = Rf$, was ja nach Lemma 3.20 möglich ist. Damit ist dann $R^* g = R^* R f = I^{d-1} f$, also, mal wieder wegen (3.3), für $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} (R^* g)^\wedge(\xi) &= \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{f}(\xi) = \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{f}\left(\|\xi\| \frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right) \\ &= \|\xi\|_2^{1-d} Rf\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}, \cdot\right)^\wedge(\|\xi\|) = \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}, \|\xi\|_2\right), \end{aligned}$$

was sich wegen der Stetigkeit der Fouriertransformierten unmittelbar auf alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ überträgt. □

Eigentlich hätten wir uns den ganzen Aufwand sparen können⁷⁸, denn in praktischen Anwendungen wählt man g nun “noch symmetrischer” und zwar als eine *radiale Funktion*, deren Wert **nicht** mehr vom Richtungsanteil, sondern nur noch vom Abstand zum Ursprung abhängt, also

$$g(v, s) = \phi(s), \quad v \in \mathbb{S}^d, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Das heisst – wir wählen natürlich eine **gerade** radiale Funktion, dann ist G ebenfalls eine gerade Funktion. Nach Satz 3.18 ist dann

$$\widehat{G}(\xi) = (R^*g)^\wedge(\xi) = \|\xi\|_2^{1-d} \widehat{\phi}(\|\xi\|_2), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

ebenfalls eine radiale Funktion. Ziel ist nun die Rekonstruktion von *bandbeschränkten Funktionen*, denn das sind ja gerade diejenigen, die nach dem Abtastatz 3.16 numerisch zugänglich und aus endlich vielen “Meßwerten” rekonstruierbar sind. Bezeichnen wir die gewünschte “Bandbreite” wieder wie in Definition 3.13 mit Ω . Ideal für die Rekonstruktion solcher Funktionen natürlich die Funktion

$$\widehat{G}(\xi) = \chi_\Omega(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega, \\ 0, & \xi \notin \Omega, \end{cases} \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

denn dann ist

$$(G * f)^\wedge = \widehat{G} \widehat{f} = \chi_\Omega \widehat{f} = \widehat{f}$$

und damit auch

$$G * f = (G * f)^\wedge{}^\vee = \widehat{f}^\vee = f.$$

Um das mit einer radialen Funktion G schaffen zu können, muß der Bandbereich Ω radialsymmetrisch sein, so daß wir am besten $\Omega = \omega \mathbb{S}^d$ als eine Kugel mit Radius ω wählen sollten. Um etwas mehr Freiheiten bei der Wahl unseres Filters zu haben, benutzen wir als Ausgangspunkt eine *univariate* Transferfunktion ψ , die die Eigenschaft

$$\psi(\xi) \sim 1, \quad |\xi| \leq 1, \quad \psi(\xi) = 0, \quad |\xi| > 1,$$

haben soll und setzen

$$\widehat{G}(\xi) := \psi\left(\frac{\|\xi\|_2}{\omega}\right), \quad \text{d.h.} \quad \widehat{g}(\xi) := \widehat{v}(\|\xi\|_2) = \|\xi\|_2^{d-1} \psi\left(\frac{\|\xi\|_2}{\omega}\right), \quad (3.22)$$

so daß die Funktion g , mit der wir ja auch zu falten haben, im Gegensatz zu G von der zugrundeliegenden Raumdimension abhängt.

Für praktische Zwecke ist es natürlich wichtig, sich genau Gedanken zu machen, welche Bandbreite man rekonstruieren möchte, aber an dieser Stelle können wir, um einen ersten Eindruck zu erhalten, ganz einfach $\omega = 1$ wählen und den idealen Tiefpassfilter $\psi = \chi_\Omega$ mit der Einheitskugel Ω betrachten. Das führt für $d = 2$ zu $G =$

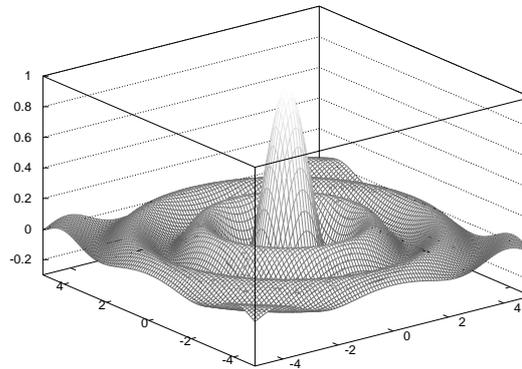


Abbildung 3.3: Die Funktion $G(x) = \text{sinc}_\pi(\|x\|_2)$. Sie hat nicht direkt was mit dem Text zu tun, sieht aber schön aus und hat so zumindest als hübsches Beispiel für eine radiale Funktion ihre Existenzberechtigung.

$\text{sinc}\|x\|_2$, siehe 3.3 und zu $\widehat{g}(\xi) = ((\cdot)\chi_{[-1,1]})(\|\xi\|_2) = \phi(\|\xi\|_2)$ mit der univariaten Funktion $\phi = |\cdot|\chi_{[-1,1]}$. Laut [31] wurde dieser Filter von Ramachandran und Lakshminarayanan vorgeschlagen, was ihm den schönen⁷⁹ Namen *Ram-Lak Filter* eingebracht hat.

Die Funktion $v(s)$ lässt sich⁸⁰ nun aus ihrer Fouriertransformierten

$$\widehat{v}(\sigma) = |\sigma|\chi_{[-1,1]}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

recht einfach bestimmen:

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|\chi_{[-1,1]}(\sigma) e^{i\sigma s} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |\sigma| e^{i\sigma s} d\sigma \\ &= -\int_{-1}^0 \sigma e^{i\sigma s} d\sigma + \int_0^1 \sigma e^{i\sigma s} d\sigma \\ &= -\left[\sigma \frac{e^{i\sigma s}}{is} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \frac{1}{is} e^{i\sigma s} d\sigma + \left[\sigma \frac{e^{i\sigma s}}{is} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{is} e^{i\sigma s} d\sigma \\ &= \underbrace{\frac{e^{is} - e^{-is}}{is}}_{=2s^{-1} \sin s} + \left[\frac{1}{-s^2} e^{i\sigma s} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{-s^2} e^{i\sigma s} \right]_0^1 = 2 \text{sinc } s - \frac{e^{is} - 2 + e^{-is}}{-s^2} \end{aligned}$$

⁷⁸Aber diese Betrachtungen gaben uns ja weitere "Einsicht" ins Wesen der Radontransformation!

⁷⁹Und zumindest kürzeren.

⁸⁰Wir sind immer noch im Fall $d = 2$!

$$= 2\operatorname{sinc} s - \frac{(e^{is/2} - e^{-is/2})^2}{(2is/2)^2} = 2\operatorname{sinc} s - \left(\operatorname{sinc} \frac{s}{2}\right)^2.$$

Die scharfen Kanten von Ram-Lak im Fourierbereich und die daraus resultierende schlechte Abfallrate⁸¹ von v führen allerdings in praktischen Anwendungen zu unerwünschten radialen Artefakten, siehe [32], die man vermeiden kann, indem man zum Filter $\hat{\phi} = \chi_{[-1,1]} \cos \frac{\pi \cdot}{2}$ übergeht, der nun zumindest global stetig ist und dessen zugehöriges v schon deutlich schneller abfällt. Shepp und Logan haben 1974 schließlich auch noch $\hat{\phi} = \chi_{[-1,1]} \operatorname{sinc} \frac{\pi \cdot}{2}$ vorgeschlagen, was das Spiel sozusagen umdreht, denn die sinc-Funktion ist ja die (inverse) Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion.

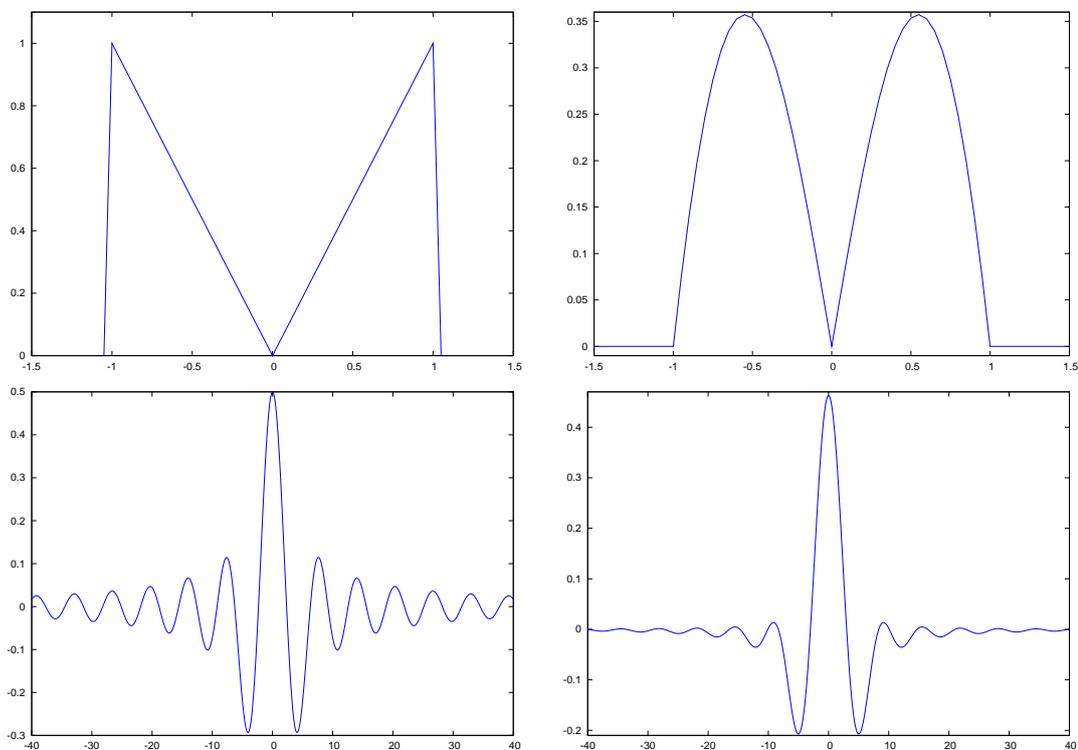


Abbildung 3.4: Die Funktionen \hat{v} (oben) und v (unten) für Ram-Lak (links) und den cos-Filter (rechts). Man sieht deutlich, daß letzterer deutlich schneller abklingt, ganz genau so, wie es die Theorie vorhersagt.

Übung 3.6 Berechnen Sie die Funktion v zu $\hat{\phi} = \chi_{[-1,1]} \cos \frac{\pi \cdot}{2}$.

◇

⁸¹Siehe Satz 2.18.

Eine explizite Berechnung von g ist hingegen schon im Ram–Lak–Fall nicht mehr so einfach, da

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi^T x} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|_2^{d-1} \chi_{[-1,1]}(\|\xi\|_2) e^{i\xi^T x} d\xi \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^d} |\sigma|^{d-1} \chi_{[-1,1]}(\sigma) e^{i\sigma v^T x} |\sigma|^{d-1} dv d\sigma \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^d} e^{i\sigma v^T x} dv \right)}_{=: J_0(\sigma \|x\|_2)} |\sigma|^{2d-2} \chi_{[-1,1]}(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

ist, wobei J_0 eine sogenannte *Bessel-Funktion*⁸² bezeichnet. Diese besonderen *speziellen Funktionen* schreien ein wenig nach separater Behandlung, die wir ihnen im nächsten Unterkapitel gönnen werden.

3.5 Besselfunktionen

Wir haben gesehen, daß bei der Behandlung radialer Funktionen, also von Funktionen der Form $f(x) = \phi(\|x\|_2)$ in der Fouriertransformation etwas seltsames passiert, nämlich

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi^T x} dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^d} f(\sigma v) e^{i\sigma \xi^T v} |\sigma|^{d-1} dv d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{S}^d} e^{-i\sigma \xi^T v} dv \right) \phi(\sigma) |\sigma|^{d-1} d\sigma, \end{aligned}$$

so daß das Integral

$$\Psi(\sigma, \xi) = \int_{\mathbb{S}^d} e^{-i\sigma \xi^T v} dv \quad (3.23)$$

eine besondere Bedeutung haben muss. Immerhin ist es äußerst plausibel, daß Ψ eine radiale Funktion in ξ sein muss, denn wir können das innere Produkt als

$$\xi^T v = \|\xi\|_2 \sin \theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

schreiben und wenn v über die gesamte Einheitssphäre \mathbb{S}^d läuft, dann läuft das Integral unabhängig von x über alle θ – das ist einfach die Symmetrie der Einheitskugel. Für $d = 2$ erhalten wir beispielsweise mit der Parametrisierung

$$v = \frac{\xi^\perp \cos \theta + \xi \sin \theta}{\|\xi\|},$$

⁸²Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846, deutscher Astronom, Zeitgenosse und Freund von Gauss, von 1810 bis zu seinem Tod Direktor des preussischen Observatoriums in Königsberg. Die nach ihm benannten Funktionen entstanden im Zusammenhang mit Untersuchungen zu den Planetenbahnen.

daß

$$\Psi(\sigma, \xi) = \Psi(\sigma, \|\xi\|_2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sigma \|\xi\|_2 \sin \theta} d\theta = J(\sigma \|\xi\|_2) = J(\sigma \|\xi\|_2)$$

für

$$J(x) := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \theta} d\theta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der allgemeine Fall ergibt sich, indem wir v als

$$v = \frac{\xi \sin t + w \cos \theta}{\|\xi\|_2}, \quad w \in \mathbb{S}^d \cap \xi^\perp = \{y \in \mathbb{S}^d : \xi^T y = 0\} \sim \mathbb{S}^{d-1}$$

parametrisieren und das Integral in

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} e^{-i\xi^T v} dv &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-i\|\xi\|_2^{-1} \xi^T (\xi \sin \theta + w \cos \theta)} dw d\theta \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} dw \right)}_{=: S_{d-1}} \int_{\mathbb{T}} e^{-i\|\xi\|_2 \sin \theta} d\theta = S_{d-1} J(\|\xi\|_2) \end{aligned}$$

zerlegen. Fazit: Das Integral ist immer eine Besselfunktion, die Dimension kommt nur über die Konstante S_{d-1} ins Spiel. Insgesamt hat also eine radiale Funktion $f = \phi(\|\xi\|_2)$ immer die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(\xi) = S_{d-1} \int_{\mathbb{R}} \phi(\sigma) J(\sigma \|\xi\|_2) |\sigma|^{d-1} d\sigma. \quad (3.24)$$

Und auch (3.24) ist eine Integraltransformation von ϕ , in der allerdings die Rolle der Exponentialfunktion von der Besselfunktion übernommen wird. Viele Formeln und verschiedene Darstellungen der Besselfunktion finden sich in [1]⁸³.

Was kann man nun so auf die Schnelle über die Besselfunktion sagen? Naja, sie ist auf alle Fälle einmal reell, da

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \theta} d\theta &= \int_{-\pi}^0 e^{-ix \sin \theta} d\theta + \int_0^{\pi} e^{-ix \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi} e^{-ix \sin \theta} + e^{ix \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos(x \cos(\theta - \pi)) d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi}^0 \cos(x \cos \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos(x \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

⁸³Eine Art "Formelsammlung für Fortgeschrittene".

was uns also die alternative und passend normierte⁸⁴ Definition

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.25)$$

liefert. Dieses J_0 ist eine *gerade Funktion*⁸⁵ in x und als solche auch leicht symmetrisch für $x < 0$ fortsetzbar, wobei es aber immer genügt, J_0 auf \mathbb{R}_+ zu betrachten. Ein paar

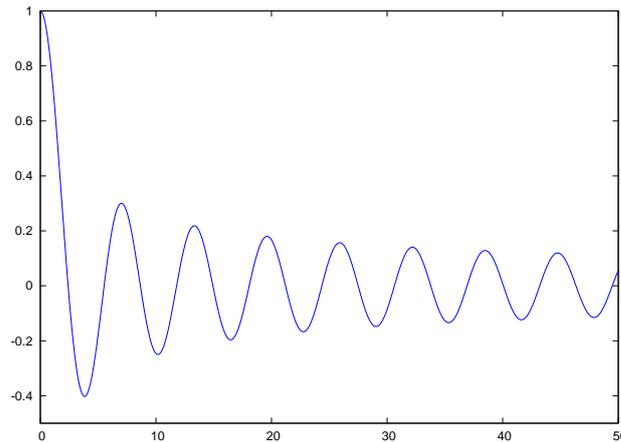


Abbildung 3.5: Die Besselfunktion J_0 auf dem Intervall $[0, 50]$. Eine abklingende sinusähnliche Schwingung.

wichtige Eigenschaften der Besselfunktionen aus [24] sind wie folgt.

Satz 3.24 (Eigenschaften der Besselfunktion) Sei J_0 die Besselfunktion aus (3.25).

1. J_0 erfüllt die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.26)$$

2. Die Nullstellen $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ von J_0 erfüllen die Beziehung

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < \lambda_k < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

⁸⁴Wobei das Vorzeichen und die Konstante eigentlich ziemlich irrelevant wären, aber die Normierung $J_0(0) = 1$ ist einfach Standard

⁸⁵Im klassischen Sinne.

3. Für zwei Nullstellen $\lambda \neq \mu$ von J_0 ist

$$\int_0^1 x J_0(\lambda x) J_0(\mu x) dx = 0, \quad (3.28)$$

die Besselfunktionen bilden also ein Orthogonalsystem.

Beweis: Für (3.26) leiten wir unter dem Integral ab und erhalten

$$\frac{d}{dx} \cos(x \cos \theta) = -\sin(x \cos \theta) \cos \theta$$

sowie

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(x \cos \theta) = -\cos(x \cos \theta) \cos^2 \theta$$

und daher, mit ein wenig partieller Integration,

$$\begin{aligned} & J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \cos(x \cos \theta) - \frac{1}{\pi x} \int_0^\pi \cos \theta \sin(x \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \cos(x \cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{\pi x} \underbrace{[\sin \theta \sin(x \cos \theta)]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{\pi x} \int_0^\pi x \sin^2 \theta \cos(x \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{(1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}_{=0} \cos(x \cos \theta) = 0. \end{aligned}$$

Als nächstes verwenden wir die Variablentransformation $\theta \rightarrow \pi - \theta$ in

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta = \int_{\pi/2}^\pi \cos(x \underbrace{\cos(\pi - \theta)}_{=\cos(-\theta)=\cos \theta}) d\theta = \int_{\pi/2}^\pi \cos(x \cos \theta) d\theta,$$

was zusammen mit (3.25) die alternative Formel

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta \quad (3.29)$$

ergibt. Dann liefert die Variablentransformation $\tau = x \cos \theta$ mit⁸⁶

$$d\tau = \frac{d\tau}{d\theta} d\theta = -x \sin \theta d\theta = -\sqrt{x^2 - x^2 \cos^2 \theta} d\theta = -\sqrt{x^2 - \tau^2} d\theta,$$

⁸⁶Das ist mehr Physik als Mathematik, aber ein netter Weg, sich solche Transformationen zu merken. Und nicht vergessen: $x \in \mathbb{R}_+$!

daß

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos \tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (3.30)$$

Den Nenner kann man als $\sqrt{(x + \tau)(x - \tau)}$ schreiben, was sich für $\tau \rightarrow x$ wie $t^{\frac{1}{2}}$ für $t \rightarrow 0$ verhält und daher eine integrierbare Singularität ist⁸⁷. Ist nun $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{N}$, dann hat der Integrand seine Nullstellen genau an $(j + \frac{1}{2})\pi$, $j = 0, \dots, k$, was für $j < k$ ziemlich offensichtlich⁸⁸ und für $j = k$ eine Anwendung von l'Hospital ist. Jetzt fixieren⁸⁹ wir $k \in \mathbb{N}_0$, setzen $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ und definieren

$$c = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau, \quad d_j = \left| \int_{j\pi + [-\pi/2, \pi/2]} \frac{\cos \tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau \right|, \quad j = 1, \dots, k.$$

Nun ist natürlich $c > 0$ und $c < d_1 < \dots < d_k$, weil ja für steigendes j der Nenner immer mehr abnimmt. Außerdem ist

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} J_0(x) \\ &= \frac{\pi}{2} J_0\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau + \sum_{j=1}^k \int_{j\pi + [-\pi/2, \pi/2]} \frac{\cos \tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau \\ &= c + \sum_{j=1}^k (-1)^j d_j = \begin{cases} c + \sum_{j=1}^m (d_{2j} - d_{2j-1}), & k = 2m, \\ (c - d_1) + \sum_{j=1}^m (d_{2j} - d_{2j+1}), & k = 2m + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

und da für gerades k alle Summanden positiv, für ungerades k hingegen alle Summanden negativ sind, verhält sich das Vorzeichen von $J_0\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ wie $(-1)^k$. Zusammen mit der Stetigkeit der Besselfunktion ergibt das dann (3.27).

Die Orthogonalitätseigenschaft (3.28) folgt erstaunlicherweise⁹⁰ aus der Differentialgleichung (3.26). In der Tat:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_0(\lambda x) J_0(\mu x) dx &= - \int_0^1 x \left(J_0''(\lambda x) + \frac{1}{\lambda x} J_0'(\lambda x) \right) J_0(\mu x) dx \\ &= - \int_0^1 J_0''(\lambda x) x J_0(\mu x) dx - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0'(\lambda x) J_0(\mu x) dx \end{aligned}$$

⁸⁷Wäre ja auch seltsam, wenn wir plötzlich eine divergente Darstellung für J_0 bekämen!

⁸⁸Denn da ist der Nenner ja positiv und der Zähler wird 0.

⁸⁹Dann sparen wir uns einen Index.

⁹⁰Also gut, so erstaunlich ist das nun auch wieder nicht, schon gleich gar nicht, wenn man sich ein wenig mit orthogonalen Polynomen beschäftigt, da ist das fast ein Standardtrick, siehe [42].

$$\begin{aligned}
&= - \underbrace{\left[\frac{1}{\lambda} J_0'(\lambda x) x J_0(\mu x) \right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0'(\lambda x) J_0(\mu x) dx \\
&\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0'(\lambda x) x J_0'(\mu x) dx - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0'(\lambda x) J_0(\mu x) dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 J_0'(\lambda x) x J_0'(\mu x) dx.
\end{aligned}$$

Dasselbe Spiel können wir aber auch treiben, indem wir die Differentialgleichung für $J_0(\mu x)$ einsetzen, was ganz analog

$$\int_0^1 x J_0(\lambda x) J_0(\mu x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^1 J_0'(\lambda x) x J_0'(\mu x) dx,$$

also auch

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \mu) \int_0^1 x J_0(\lambda x) J_0(\mu x) dx \\
&= \int_0^1 J_0'(\lambda x) x J_0'(\mu x) dx - \int_0^1 J_0'(\lambda x) x J_0'(\mu x) dx = 0
\end{aligned}$$

ergibt, so daß zwei Besselfunktionen mit unterschiedlichen Faktoren λ, μ tatsächlich orthogonal sein müssen. Daß

$$\int_0^1 x J_0^2(\lambda x) dx > 0$$

ist, versteht sich ohnehin von selbst. □

Mit den Besselfunktionen können wir also, ganz wie mit den Exponentialfunktionen $e^{k \cdot}$, Orthogonalreihenentwicklungen untersuchen, indem wir f als

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k J_0(\lambda_k \cdot), \quad f_k = \frac{\int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(\lambda_k x) dx}$$

entwickeln, was dann also eine *diskrete Besseltransformation* wäre.

Was uns in diesem Zusammenhang aber noch interessiert ist die *Asymptotik* der Besselfunktion, also die Frage, wie sich $J_0(x)$ für $x \rightarrow \infty$ benimmt. Das ist nun alles andere als trivial oder auch nur einfach. Ein Beweistrick besteht laut [24] darin, zuerst nachzuweisen, daß die Funktion $\sqrt{x} J_0(x)$ die Differentialgleichung

$$f''(x) + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) f(x) = 0$$

erfüllt, woraus man auf eine Asymptotik der Form

$$J_0(x) = \alpha \frac{\sin(x + \varphi)}{\sqrt{x}} + \frac{r(x)}{x^{3/2}}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |r(x)| < \infty,$$

schliessen kann⁹¹. Dieses Verhalten wie $x^{-1/2}$ ist nicht wirklich gut, aber klingt immerhin deutlich schneller ab als die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus.

Nun legt der Index “0” in J_0 natürlich die Vermutung nahe, daß es auch andere Besselfunktionen, nämlich solche *der Ordnung* $n \in \mathbb{N}_0$ geben könnte. Diese Vermutung ist natürlich richtig und die entsprechenden Funktionen sind Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)f(x) = 0,$$

und können als

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta - n(\pi - \theta)) d\theta \quad (3.31)$$

bzw⁹².

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta \quad (3.32)$$

geschrieben werden. Die Besselfunktionen beliebiger Ordnung haben auch ihre Version der Eigenschaften wie sie in Satz 3.24 für die Ordnung 0 beschrieben wurden, siehe [4, 24].

Eine nette Anwendung von Besselfunktionen⁹³ ist die Auflösung der Gleichung

$$\phi = \sin(\omega t + x\phi), \quad (3.33)$$

nach ϕ , was zur expliziten Lösung

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nx)}{nx} \sin n\omega t \quad (3.34)$$

führt. Und (3.33) ist eine Gleichung, die bei der Berechnung der Planetenbewegung, aber auch bei frequenzmodulierten Synthesizern in der Musik auftritt, siehe [4], wo sich auch einiges über Besselfunktionen finden lässt.

⁹¹Jackson verweist auf den “Klassiker” [5].

⁹²Und jetzt auch mit passender Normierung.

⁹³Die uns für die Radontransform zwar nicht weiterhilft, aber was soll's?

3.6 Die Numerik: Gefilterte Rückprojektion für diskrete Daten

Zum Abschluss dieses Kapitels sehen wir uns nun die gefilterte Rückprojektion in der “Realität” oder zumindest in der Realisierung an. Nachdem hier die Details von der Scangeometrie abhängen, wollen wir uns die einfachste Form einer solchen Geometrie ansehen, nämlich das *Standard Parallel Scanning*, bei dem die Winkel und die Entfernungen gleichmäßig verteilt sind. Und natürlich findet das alles jetzt im \mathbb{R}^2 statt.

Definition 3.25 *Beim Parallel Scanning mit Auflösung $\rho > 0$ ist Rf für die Parameter*

$$\begin{aligned} v_j &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{bmatrix}, & \varphi_j &= \frac{\pi j}{p}, & j &= 0, \dots, p-1, \\ s_k &= \frac{\rho k}{q}, & k &= -q, \dots, q, \end{aligned}$$

bekannt, das heißt, es liegen die $p(2q+1)$ Messungen

$$y_{jk} = y(v_j, s_k) = Rf(v_j, s_k), \quad j = 0, \dots, p-1, \quad k = -q, \dots, q,$$

vor.

Die Frequenzauflösung spiegelt sich sofort in einer zentralen Annahme wieder, wir nehmen nämlich an, daß die gemessene Funktion f ihren Träger in der Kugel B_ρ mit Radius ρ hat und außerhalb derselben Null ist – wir messen also sozusagen alles, was zu messen ist⁹⁴:

$$f(x) = 0, \quad \|x\|_2 > \rho. \quad (3.35)$$

Jetzt ist natürlich unsere Wunschannahme, daß f obendrein auch noch bandbeschränkt sein sollte, dahin – laut Heisenberg kann eine Funktion nicht gleichzeitig mit ihrer Fouriertransformierten einen kompakten Träger haben. Deswegen beschränkt man sich mit dem Begriff der *wesentlich bandbeschränkten* Funktion, bei der die Fouriertransformation ausserhalb von Ω vernachlässigbar ist. Nochmal zur Erinnerung: Wir wollen die gefilterte Rückprojektion (3.16) verwenden, also f über die Gleichung

$$G * f = R^*(g * y) \quad (3.36)$$

bestimmen, wobei G ja dank unserer Wahl der Ausgangsfunktion eine “ δ -ähnliche” Gestalt hat, so daß es die rechte Seite ist, die wir numerisch bestimmen müssen, also eine Diskretisierung des Faltungsintegrals

$$(g * y)(v, s) = \int_{\mathbb{R}} g(s-t) y(v, s) ds = \int_{-\rho}^{\rho} g(s-t) y(v, s) ds, \quad (3.37)$$

⁹⁴Diese Annahme ist theoretisch bedeutsam und praktisch leicht zu erfüllen: Ein Objekt, dessen Dichte auch außerhalb des Scanners größer als Null ist, passt schlicht und einfach nicht in den Scanner rein.

letzteres, weil ja $y(v, \cdot)$ außerhalb der Kugel mit Radius ρ verschwindet. Dafür gibt es noch einmal einen Abtastatz, diesmal für Integrale, bzw. Quadraturformeln, den wir uns hier nur in seiner allereinfachsten Form ansehen wollen, für den allgemeineren, gar nicht mal viel schwerer zu beweisenden Fall siehe [31, Theorem 4.1].

Lemma 3.26 Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$ eine T -bandbeschränkte Funktionen und $0 < h < \frac{\pi}{T}$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk). \quad (3.38)$$

Beweis: Der Beweis beruht auf der Poissonschen Summenformel. Dazu setzen wir $g = hf(h \cdot)$ und erhalten nach (2.20) und (2.8), daß

$$\begin{aligned} h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (hf(\cdot/h))^\wedge(2k\pi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{h}\right) = \hat{f}(0) + \sum_{k \neq 0} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{h}\right) \end{aligned}$$

und da für $k \neq 0$

$$\left| \frac{2k\pi}{h} \right| \geq |2kT| > T$$

verschwindet die Summe komplett und es bleibt nur

$$h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(hk) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

übrig. □

Nehmen wir also an, daß unsere s -Abtastung fein genug ist, so daß wie in Lemma 3.26 die Rechtecksregel exakt ist⁹⁵, da heißt, $\frac{\rho}{q} < \frac{\pi}{\Omega}$, dann können wir, zumindest in sehr guter Näherung⁹⁶, das Integral in (3.37) als

$$(g * y)(v, s) = \frac{\rho}{q} \sum_{k=-q}^q g\left(s - \frac{\rho k}{q}\right) y\left(v, \frac{\rho k}{q}\right) \quad (3.39)$$

bestimmen. Zur numerischen Behandlung der Rückprojektion

$$R^*(g * y)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} (g * y)(v, v^T x) dv, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.40)$$

⁹⁵So kann man Lemma 3.26 ja schliesslich auch sehen.

⁹⁶Zur Erinnerung: f hat kompakten Träger, kann also beim besten Willen **nicht** bandbeschränkt sein!

müssen wir zeigen, daß für jedes feste $x \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$h(v) = (g * y)(v, v^T x), \quad v \in \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{T}$$

wesentlich bandbeschränkt ist, das heißt, daß ihre Fourierkoeffizienten⁹⁷

$$\widehat{h}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ik\theta} (g * y)(v_\theta, v_\theta^T x), \quad v_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

für $|k| > 2\Omega\rho$ vernachlässigbar sind, denn dann können wir Lemma 3.26 auch auf (3.40) anwenden und auch da wieder das Integral durch eine Rechtecksregel ersetzen, was uns dann die endgültige Diskretisierung

$$f(x) \sim (G * f)(x) = \frac{\pi\rho}{pq} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=-q}^q g\left(v_j^T x - \frac{\rho k}{q}\right) y_{jk} \quad (3.41)$$

für die Rekonstruktion liefert. Fixieren wir also $x \in \mathbb{R}^2$ und sehen uns h an: Da wir den Träger von \widehat{g} ja auf $[-\omega, \omega]$ eingeschränkt haben, siehe (3.22), ist

$$\begin{aligned} h(v) &= (g * y)(v, v^T x) = ((g * y)^\wedge)^\vee(v, v^T x) = (\widehat{g}\widehat{y})^\vee(v, v^T x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\sigma) \widehat{y}(v, \sigma) e^{i\sigma v^T x} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \widehat{g}(\sigma) \underbrace{\widehat{y}(v, \sigma)}_{=(Rf)^\wedge(v, \sigma)} e^{i\sigma v^T x} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \widehat{g}(\sigma) \widehat{f}(\sigma v) e^{i\sigma v^T x} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \widehat{g}(\sigma) \int_{\mathbb{R}^2} f(t) e^{-i\sigma v^T t} dt e^{i\sigma v^T x} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\|t\|_2 \leq \rho} f(t) \int_{-\omega}^{\omega} \widehat{g}(\sigma) e^{i\sigma v^T (x-t)} d\sigma dt \end{aligned}$$

und daher

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|t\|_2 \leq \rho} f(t) \int_{-\omega}^{\omega} \widehat{g}(\sigma) \underbrace{\int_{\mathbb{T}} e^{i\sigma v_\theta^T (x-t) - ik\theta} d\theta}_{\sim J_k(\sigma \|x-t\|_2)} d\sigma dt. \quad (3.42)$$

Und jetzt sind es wieder die guten alten Besselfunktionen, bzw. deren Asymptotik, die zur Rettung eilen und mit deren Hilfe man belegen kann, daß h tatsächlich eine wesentlich bandbeschränkte Funktion ist.

Wir wollen uns diese Asymptotik **nicht** ansehen, denn das würde dann doch etwas zu weit führen, aber man sollte nochmals betonen, daß auch bei der Numerik der gefilterten Rückprojektion nicht viel ohne die Besselfunktionen geht. Ähnliche Überlegungen muss man nun für jede Scannergeometrie durchführen, vom *Fan Beam* bis hin zum heute aktuellen *Spiral-CT*. Aber nachdem es uns ja “nur” ums Prinzip geht, wollen wir’s erst einmal dabei belassen.

⁹⁷Da $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{T}$ ist, kann h als 2π -periodische Funktion aufgefasst werden, deren natürliches Fourierstück eben die Fourierreihe ist.

*Du glaubst, ich laufe dem
Sonderbaren nach, weil ich das
Schöne nicht kenne, nein, weil du das
Schöne nicht kennst, deswegen suche
ich das Sonderbare.*

G. Chr. Lichtenberg

Die Laplace–Transformation

4

Auf den ersten Blick wirkt die Laplace–Transformation eher wie eine verkleidete Fouriertransformation, allerdings eine mit durchaus anderen Eigenschaften. Motiviert ist ihre Verwendung heute vor allem durch Anwendungen aus der Elektrotechnik, wo sie zur Untersuchung von “Systemen” eingesetzt wird, die meistens durch Differential- oder Differenzgleichungen beschrieben sind. Laut [19] ist die Laplacetransformation aus den Bestrebungen des 19. Jahrhunderts entstanden, gewöhnliche Differentialgleichungen zu “algebraisieren”, was auf der Beobachtung basiert, daß man gewöhnliche⁹⁸ Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten als *Polynom* in dem Differentialoperator schreiben kann:

$$\sum_{j=0}^n a_j \frac{d^j}{dx^j} = p \left(\frac{d}{dx} \right) = p(D), \quad p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad p \in \Pi_n. \quad (4.1)$$

Der technische Hintergrund der Laplace–Transformation ist, daß man, beispielsweise in der Regelungstechnik, sogenannte *Schaltfunktionen* betrachtet, siehe [11], die nur in der Zukunft, nicht aber in der Vergangenheit modifiziert werden können – eine durchaus realistische Vorstellung. Da sie in der Technik zumeist für Zeitreihen verwendet wird, werden wir sie hier nur in einer Variablen definieren und untersuchen.

4.1 Definition, -sbereich und elementare Eigenschaften

Definition 4.1

1. Der Raum Ω besteht aus allen Funktionen⁹⁹ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß

⁹⁸Und wenn es sein muss auch und sogar partielle ...

⁹⁹Henrici[19] verwendet Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, die dann aber nur für alle reellen Parameterwerte definiert sein müssen.

- (a) $f(x) = 0$ für $x < 0$,
 (b) f ist stetig auf \mathbb{R} außer einer abzählbaren, Häufungspunktfreien Folge von Sprungstellen, an denen rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren,
 (c) $f \in L_1[0, 1]$ – dies ist eine Integrierbarkeitsforderung an der Randstelle 0.

2. Die Laplace–Transformation einer Funktion $f \in \Omega$ ist als

$$\mathcal{L}f(z) = f^b(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.2)$$

für alle z , für die das Integral existiert, definiert. Die Kurzschreibweise “ f^b ” ist **nicht** Standard, aber irgendwie muss man es ja abkürzen.

3. Mit

$$A(f) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \int_0^\infty |f(t)e^{-zt}| dt < \infty \right\} \quad (4.3)$$

bezeichnen wir den Bereich der absoluten Konvergenz des Laplace–Integrals.

Offensichtlich ist die Laplace–Transformation genau wie die Fourier–Transformation wieder ein linearer Operator. Dennoch fallen zwei Dinge sofort auf:

- Die Laplace–Transformation benötigt lediglich Kenntnisse der Funktion f auf dem Halbraum \mathbb{R}_+ , das ist das Zugeständnis an die Tatsache, daß man nur die Zukunft beeinflussen kann.
- Die Laplace–Transformation verwendet reelle Funktionen, aber einen *komplexen* Parameter z .

Für Funktionen $f, g \in \Omega$ haben wir es mit einer vereinfachten Faltung zu tun,

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(t)g(x-t) dt = \int_0^x f(t)g(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

bei der das Integral nur über einen endlichen Bereich läuft.

Beispiel 4.2 (Laplace–Transformation einfacher Funktionen)

1. Eine besonders populäre Funktion in der Regelungstechnik ist die Sprungfunktion oder Heavisidefunktion σ , die für $x < 0$ den Wert 0 und für $x > 0$ den Wert 1 hat¹⁰⁰ und deren Laplacetransformation

$$\sigma^b(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dt = \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} \right]_0^\infty = \frac{1}{z} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{z} e^{-t\Re z} (\cos t\Im z - i \sin t\Im z) = \frac{1}{z}$$

genau dann existiert, wenn $\Re z > 0$ ist.

¹⁰⁰Dazwischen kann man sich etwas beliebiges aussuchen – solange der Wert nur endlich ist, ist er für das Integral, also die Laplace–Transformation irrelevant.

2. Eine andere einfache Funktion ist $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wofür wir

$$f^b(z) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-zt} dt = \int_0^\infty e^{-(z-\alpha)t} dt = \sigma^b(z - \alpha) = \frac{1}{z - \alpha},$$

was nun schon $\Re(z - \alpha) > 0$, also $\Re z > \alpha$ verlangt.

3. Der Rechteckspuls $\chi_{[0,1]}$ hingegen hat die Laplacetransformation

$$\chi_{[0,1]}^b(z) = \int_0^1 e^{-zt} dt = \frac{1}{z} [e^{-zt}]_0^1 = \frac{e^{-z} - 1}{z}$$

und ist für alle $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert.

4. Zum mehr oder weniger krönenden Abschluss schließlich noch die Rampenfunktion $\rho(x) = x$:

$$\int_0^\infty t e^{-zt} dt = \left[t \frac{e^{-tz}}{z} \right]_{t=0}^\infty + \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-tz} dt = \frac{1}{z^2},$$

wieder mit $\Re z > 0$.

5. Die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ hat für **kein** $z \in \mathbb{C}$ eine Laplacetransformation, da dann für $t \rightarrow \infty$ der Betrag des Integranden,

$$\left| e^{t^2 - zt} \right| = \underbrace{\left| e^{t^2 - \Re z t} \right|}_{=1} \left| e^{-i \Im z t} \right|$$

ja schon divergiert.

Mit ein wenig Phantasie¹⁰¹ können wir daraus schon zwei Dinge erkennen: Der Definitionsbereich der Laplace-Transformation wird¹⁰² von der zugrundeliegenden Funktion f abhängen und eine Teilmenge der rechten Halbebene sein, im ‘‘Idealfall’’ die ganze rechte Halbebene $\Re z \geq 0$. Wir sehen auch, daß die imaginäre Achse ein besondere Rolle spielt, denn dort brauchen wir dann schon, daß $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ ist, siehe 1) in Proposition 4.4. Aber zuerst einmal zum Bereich $A(f)$.

Proposition 4.3 (Der Bereich $A(f)$) Für $f \in \Omega$ ist $A(f)$ entweder ganz \mathbb{C} oder eine offene oder abgeschlossene Halbebene. Wächst f langsam genug, d.h. ist

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x) e^{-\alpha x}| =: M < \infty,$$

dann ist $A(f) \supseteq \{z \in \mathbb{C} : \Re z > \alpha\}$.

¹⁰¹Dies ist die hundertste Fußnote in diesem Skript!

¹⁰²Im Gegensatz zur Fourier-Transformation, hier beginnen also schön langsam die Unterschiede!

Beweis: Die absolute Konvergenz hängt wegen

$$\int_0^\infty |f(t) e^{-zt}| dt = \int_0^\infty |f(t)| |e^{-\Re z t}| \underbrace{|e^{-i\Im z t}|}_{=1} dt$$

zuerst einmal nur vom Realteil von z ab. Da aber

$$|e^{-st}| > |e^{-s't}|, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wann immer $s < s'$ ist, impliziert $z \in A(f)$ und $\Re z < \Re z'$ auch $z' \in A(f)$, so daß $A(f)$ nur eine komplexe Halbebene sein kann, schlimmstenfalls halt ganz \mathbb{C} . Auch die zweite Aussage ist mit

$$\int_0^\infty |f(t) e^{-zt}| dt \leq C M \int_0^\infty |e^{-(z-\alpha)t}| dt = C M \int_0^\infty e^{-(\Re z - \alpha)t} dt = \frac{C M}{\Re z - \alpha}$$

leicht gezeigt. □

Proposition 4.4 (Einfache Eigenschaften der Laplace-Transformation)

1. Für $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ und $\xi \in \mathbb{R}$ ist $f^b(i\xi) = \widehat{f}(\xi)$.
2. Für $f, g \in L_1(\mathbb{R}_+)$ ist $(f * g)^b = f^b g^b$.
3. Ist $f \in \Omega$, $f(0) = 0$, dann ist für $z \in A(f)$

$$(f')^b(z) = z f^b(z) \tag{4.4}$$

sowie

$$\left(\int_0^\cdot f(t) dt \right)^b(z) = \frac{1}{z} f^b(z). \tag{4.5}$$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$((\cdot)^n f)^b = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} f^b(z). \tag{4.6}$$

5. Ist das Laplace-Integral konvergent für $\Re z > \alpha$, dann gilt für $c > \alpha$ die Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z=c} f^b(z) e^{xz} dz, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{4.7}$$

Beweis: Eigenschaft 1 ist einfaches Einsetzen in die Definition (4.2), Eigenschaft 2 ergibt sich wieder durch die einfache Rechnung

$$\begin{aligned}
 (f * g)^{\flat}(z) &= \int_0^{\infty} (f * g)(t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) e^{-zs} g(t-s) e^{-z(t-s)} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(s) e^{-zs} \int_{-s}^{\infty} g(t) e^{-zt} dt ds = \int_0^{\infty} f(s) e^{-zs} \int_0^{\infty} g(t) e^{-zt} dt ds \\
 &= f^{\flat}(z) g^{\flat}(z)
 \end{aligned}$$

und $g(t) = 0$ für $t \in [-s, 0]$.

Für 3 verwenden wir wieder partielle Integration:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-zt} dt = [f(t) e^{-zt}]_{t=0}^{\infty} + z \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

und die Voraussetzungen garantieren dann die Gültigkeit von (4.4). Andererseits ist aber auch

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x),$$

weswegen (4.5) direkt aus (4.4) folgt.

Um 4 zu verifizieren, betrachten wir nur

$$\int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} f(t) (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} e^{-zt} dt = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt.$$

Die Umkehrformel (4.7) ist, wie es sich gehört, natürlich wieder etwas komplizierter. Dazu setzen wir $F(z) = f^{\flat}(z)$, $\Re z > \alpha$, und bemerken wegen $f \in \Omega$, daß

$$F(z) e^{xz} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{(x-t)z} dt$$

ist, und sich somit mit $c > \alpha$ und $T > 0$ für das imaginärachsenparallele Integral

$$\begin{aligned}
 &\int_{c+i[-T,T]} F(z) e^{xz} dz \\
 &= \int_{c+i[-T,T]} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{(x-t)z} dt dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{c+i[-T,T]} e^{(x-t)z} dz dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-T}^T e^{(x-t)(c+i\omega)} i d\omega dt
 \end{aligned}$$

ergibt. Das innere Integral ist

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T e^{(x-t)(c+i\omega)} i \, d\omega \\ &= i e^{c(x-t)} \int_{-T}^T e^{i(x-t)\omega} \, d\omega = 2 \frac{i e^{c(x-t)}}{x-t} \frac{e^{i(x-t)T} - e^{-i(x-t)T}}{2i} \\ &= 2i \frac{e^{c(x-t)}}{x-t} \sin(x-t)T. \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks und eine Variablentransformation $u = T(x-t)$ liefert dann

$$\begin{aligned} & \int_{c+i[-T,T]} F(z) e^{xz} \, dz \\ &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{c(x-t)}}{x-t} \sin(x-t)T \, dt = 2i \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{u}{T}\right) \frac{e^{cu/T}}{u/T} \sin u \frac{du}{T} \\ &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{u}{T}\right) e^{cu/T} \frac{\sin u}{u} \, du, \end{aligned}$$

so daß, solange f an der Stelle x stetig ist,

$$\int_{\Re z=c} F(z) e^{xz} \, dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c+i[-T,T]} F(z) e^{xz} \, dz = 2i \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\sin u}{u} \, du. \quad (4.8)$$

Hier können wir den konstanten Term $f(x)$ herausziehen und da

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} \, du = \frac{\pi}{2}, \quad (4.9)$$

siehe [1], und sinc eine gerade Funktion ist, erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z=c} f^b(z) e^{xz} \, dz$$

wie in (4.7) behauptet. Ist f nun an der Stelle x gerade nicht stetig¹⁰³, dann ist das auch nicht weiter schlimm, denn dann spalten wir das Integral in

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{u}{T}\right) e^{cu/T} \frac{\sin u}{u} \, du \\ &= \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{u}{T}\right) e^{cu/T} \frac{\sin u}{u} \, du + \int_0^{\infty} f\left(x - \frac{u}{T}\right) e^{cu/T} \frac{\sin u}{u} \, du \end{aligned}$$

¹⁰³So ein Pech aber auch!

auf und verwenden nun die links- und rechtsseitigen Grenzwerte, die wegen $f \in \Omega$ ja existieren müssen. Die “modifizierte” Version der Umkehrformel ist an solchen Unstetigkeitsstellen dann

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z=c} f^b(z) e^{xz} dz. \quad (4.10)$$

□

Übung 4.1 Beweisen Sie (4.9). ◇

Bemerkung 4.5 Die Laplacetransformation, wie wir sie hier betrachten, ist eher eine “Light-Version”, es gibt sehr viel subtilere Betrachtungen, beispielsweise über Konvergenzbereiche und Voraussetzungen an f , damit überhaupt eine Laplace-Transformation existiert, siehe [19, 46]. Eine Behandlung der Laplace-Transformation in ihrer vollen Pracht wäre auch schon wieder eine Vorlesung für sich.

4.2 Lineare Systeme und Differentialgleichungen

Der Nutzen der Laplacetransformation bei der Behandlung von Differentialgleichungen ist relativ unmittelbar zu sehen. Nehmen wir einfach mal an, wir hätten zwei Differentialoperatoren $p(D)$, $q(D)$ mit konstanten Koeffizienten und wollen die Differentialgleichung

$$p(D)f = q(D)g$$

nach f auflösen, dann liefert uns ein Übergang zur Laplace-Transformierten mit (4.4), daß

$$p(z) f^b(z) = (p(D)f)^b(z) = (q(D)g)^b(z) = q(z) g^b(z) \quad \Rightarrow \quad f^b(z) = \frac{q(z)}{p(z)} g^b(z)$$

und mit Hilfe der Umkehrformel (4.7) können wir auch f bestimmen – zumindest, wenn wir alle Konvergenzfragen geflissentlich ignorieren. Wir wollen hier keine vollständige Theorie herleiten, sondern zuerst einmal ein einfaches elektrotechnisches Beispiel aus [19] betrachten.

Beispiel 4.6 Bei dem Schaltkreis aus Abb. 4.1 wird zeitabhängig eine Spannung $U(t)$ angelegt – typischerweise ist das ein Einschaltvorgang zum Zeitpunkt $t = t^*$, also $U(t) = 0$, $t < t^*$ und $U(t) = 1$, $t > t^*$, und man möchte wissen, welcher Strom in dem Stromkreis fließt, in dem ein Widerstand (links), eine Spule (rechts) und ein Kondensator (unten) eingebaut sind. Der Spannungsabfall, in Abhängigkeit vom Stromfluss V in den drei Bauteilen ist

Widerstand: $\rho V(t)$ (Ohmsches Gesetz), $\rho =$ Widerstand in Ohm.

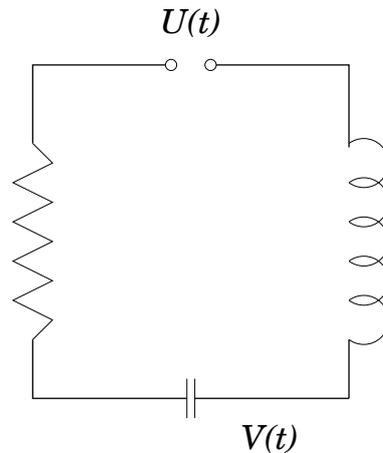


Abbildung 4.1: Eine einfache Schaltung mit einer Spule, einem Widerstand und einem Kondensator. Gesucht ist der (zeitabhängige) Stromfluss $V(t)$ bei Anlegen einer Spannung $U(t)$.

Kondensator: $\frac{1}{\gamma} \int_0^t V(\tau) d\tau$ (Ladung/Kapazität), $\gamma =$ Kapazität des Kondensators.

Spule: $\lambda V'(t)$ (Faradaysches Gesetz), $\lambda =$ Induktivität der Spule.

Das Kirchhoffsche Gesetz¹⁰⁴ verbindet dann die Spannung und den Stromfluss über die Integrodifferentialgleichung¹⁰⁵

$$U(t) = \rho V(t) + \frac{1}{\gamma} \int_0^t V(\tau) d\tau + \lambda \frac{dV}{dt}(t) \quad (4.11)$$

Die Laplacetransformation von (4.11) ist dann

$$U^b(z) = \rho V^b(z) + \frac{1}{\gamma z} V^b(z) + \lambda z V^b(z) = \left(\rho + \frac{1}{\gamma z} + \lambda z \right) V^b(z),$$

also

$$V^b(z) = \frac{1}{\rho + \frac{1}{\gamma} z^{-1} + \lambda z} U^b(z) =: G(z) U^b(z)$$

mit der Übertragungsfunktion $G(z)$. Im Falle eines Einschaltvorgangs zum Zeitpunkt t^* ist

$$U^b(z) = \frac{e^{-t^*z}}{z},$$

¹⁰⁴Zur Physik konsultiere man bitte die einschlägige Literatur – ich habe dieses Beispiel auch nur aus [19] abgeschrieben.

¹⁰⁵Das heisst wirklich so!

siehe Beispiel 4.2, also

$$V^b(z) = \frac{e^{-t^*z}}{\frac{1}{\gamma} + \rho z + \lambda z^2} \quad \Rightarrow \quad V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z > t^*} \frac{e^{(t-t^*)z}}{\frac{1}{\gamma} + \rho z + \lambda z^2} dz, \quad (4.12)$$

was erst einmal ausgerechnet sein will.

Am einfachsten wäre in Beispiel 4.6 sicherlich der Fall $t^* = 0$, also den Einschaltzeitpunkt 0. Na gut, das ist ja im wesentlichen nur eine Normierungsfrage und an sich nicht weiter schlimm. Aber es bleibt nach wie vor die Frage, wie wir das Invertierungsintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z > t^*} \frac{e^{tz}}{\frac{1}{\gamma} + \rho z + \lambda z^2} dz$$

ausrechnen sollen. Nun, es wäre sicherlich einfacher, wenn wir f^b in eine Gestalt bringen würden, die wir als Laplacetransformation bekannter Funktionen, also beispielsweise von Funktionen aus Beispiel 4.2, identifizieren können. Und dazu gibt es einen sehr netten einfachen Trick, nämlich die *Partialbruchzerlegung*.

Die ‘‘Maschinerie’’ hinter der Partialbruchzerlegung ist ein Klassiker der Algebra, die *Bezout-Indetität*, die im Übrigen ganz allgemein in euklidischen Ringen gilt und auch normalerweise über den euklidischen Algorithmus bewiesen wird, für den sie eine Art Abfallprodukt darstellt, siehe z.B. [35]. Unsere Version hier stammt aus [7] und hat den großen Vorteil, *quantitativ* zu sein, und uns Gradbeschränkungen für die Funktionen zu geben.

Satz 4.7 (Bézout-Identität) Seien $f, g \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome vom Grad m und n ohne gemeinsame Nullstellen und $h \in \Pi_{n+m-1}$. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n-1$ und $m-1$, so daß

$$f p + g q = h \quad (4.13)$$

ist.

Beweis: Mit ζ_1, \dots, ζ_m und η_1, \dots, η_n bezeichnen wir die Nullstellen von f bzw. g , d.h.,

$$f = f_m (x - \zeta_1) \cdots (x - \zeta_m) \quad \text{und} \quad g = g_n (x - \eta_1) \cdots (x - \eta_n).$$

Nun wählen wir $p \in \Pi_{n-1}[\mathbb{C}]$ als Lösung des Interpolationsproblems¹⁰⁶

$$p(\eta_j) = \frac{h(\eta_j)}{f(\eta_j)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

¹⁰⁶Sind die Nullstellen von f und g alle einfach, dann handelt es sich um ein *Lagrange-Interpolationsproblem* (also Interpolation von Funktionswerten), ansonsten um ein *Hermite-Interpolationsproblem*, bei dem auch Ableitungen zu interpolieren sind – auf letzteren Fall wollen wir hier nicht im Detail eingehen, siehe aber z.B. [7].

und $q \in \Pi_{m-1}[\mathbb{C}]$ als Lösung von

$$q(\zeta_j) = \frac{h(\zeta_j)}{g(\zeta_j)}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Diese Größen sind wohldefiniert, da f und g keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Das Polynom $h = fp + gq$ hat dann Grad $n + m - 1$ und erfüllt

$$h(\zeta_j) = \underbrace{f(\zeta_j)}_{=0} p(\zeta_j) + g(\zeta_j) \underbrace{q(\zeta_j)}_{=h(\zeta_j)/g(\zeta_j)} = h(\zeta_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

sowie

$$h(\eta_j) = f(\eta_j) \underbrace{p(\eta_j)}_{=h(\eta_j)/f(\eta_j)} + g(\eta_j) \underbrace{q(\eta_j)}_{=0} = h(\eta_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

und damit stimmt $h \in \Pi_{n+m-1}[\mathbb{C}]$ an den $n + m$ Punkten $\zeta_1, \dots, \zeta_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ mit dem Polynom $r \in \Pi_{n+m-1}$ überein, weswegen $h = r$ sein muß. \square

Übung 4.2 Zeigen Sie, daß die Polynome in (4.13) auf keinen Fall eindeutig sind, wenn man auf die Gradbeschränkung verzichtet und geben Sie an, wie man ausgehend von einer speziellen Lösung p^*, q^* alle Lösungen p, q von (4.13) finden kann. Dieses Verfahren ist in der Signalverarbeitungs-/Waveletgemeinde unter dem Namen “Lifting scheme” populär. \diamond

Was jetzt noch bleibt ist die “Partialbruchzerlegung” von rationalen Funktionen und die läuft nun wieder via Bézout.

Lemma 4.8 Sei $f = p/q, p, q \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p < \deg q$, eine rationale Funktion und seien ζ_1, \dots, ζ_m die Nullstellen von q mit Vielfachheiten μ_1, \dots, μ_m , also

$$q = \prod_{j=1}^m (\cdot - \zeta_j)^{\mu_j}.$$

Dann gibt es Polynome $p_j \in \mathbb{C}[x]$, $\deg p_j < \mu_j, j = 1, \dots, m$, so daß

$$f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{p_j(z)}{(z - \zeta_j)^{\mu_j}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus Z(q) := \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}. \quad (4.14)$$

Beweis: Induktion über m , für $m = 1$ ist nichts zu tun, denn dann haben wir ja nur einen Faktor und eine Konstante im Zähler. Sei also die Aussage für ein $m \geq 1$ bewiesen,

dann nehmen wir an, daß q von der Form $q(z) = z^{\mu_1 + \dots + \mu_m} + \dots$ ist, was sich durch Normalisierung ja immer erreichen läßt und zerlegen es in

$$q(z) = \underbrace{(z - \zeta_1)^{\mu_1} \cdots (z - \zeta_{m-1})^{\mu_{m-1}}}_{=:q_0(z)} \underbrace{(z - \zeta_m)^{\mu_m}}_{=:q_m(z)}, \quad Z(q_0) \cap Z(q_m) = \emptyset.$$

Nach Satz 4.7 gibt es daher Polynome p_0, p_m vom Grad $\mu_m - 1$ und $m - \mu_m - 1$, also insbesondere

$$\deg p_0 < \deg q_0, \quad \deg p_m < \deg q_m, \quad (4.15)$$

so daß

$$p_m(z) q_0(z) + p_0(z) q_m(z) = p(z)$$

und damit ist

$$\begin{aligned} & \frac{p_0(z)}{q_0(z)} + \frac{p_m(z)}{(z - \zeta_m)^{\mu_m}} \\ &= \frac{p_0(z)}{q_0(z)} + \frac{p_m(z)}{q_m(z)} = \frac{p_0(z) q_m(z) + p_m(z) q_0(z)}{q_0(z) q_m(z)} = \frac{p(z)}{q(z)} = f(z). \end{aligned}$$

Nach der Induktionshypothese und wegen (4.15) können wir die rationale Funktion p_0/q_0 , die nur die $m - 1$ verschiedenen Nullstellen $\zeta_1, \dots, \zeta_{m-1}$ besitzt wie in (4.14) weiter zerlegen und erhalten somit, daß

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{p_0(z)}{q_0(z)} + \frac{p_m(z)}{(z - \zeta_m)^{\mu_m}} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{p_j(z)}{(z - \zeta_j)^{\mu_j}} + \frac{p_m(z)}{(z - \zeta_m)^{\mu_m}} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{p_j(z)}{(z - \zeta_j)^{\mu_j}}, \end{aligned}$$

mit $\deg p_j < \mu_j$, was gerade (4.14) für den Fall m ist. □

Korollar 4.9 *Ist $f = p/q$, $\deg p < \deg q$, eine rationale Funktion und hat q nur einfache Nullstellen ζ_1, \dots, ζ_m , dann ist*

$$f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{z - \zeta_j}, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Korollar 4.9 hilft uns nun, die Laplacetransformation in vielen Fällen auf einfache Art und Weise zu invertieren: Hat nämlich die Nennerfunktion q der (hoffentlich) rationalen Funktion $G(z) U^b(z)$ nur einfache Nullstellen¹⁰⁷, dann können wir diese wie in (4.16) in Partialbrüche zerlegen und deren Komponenten dann einfach zurücktransformieren, denn die inverse Laplacetransformation der Funktionen $(z - \zeta_j)^{-1}$ ist uns ja bekannt – das ist $x \mapsto e^{\zeta_j x}$.

¹⁰⁷Und das ist für ein Polynom gewissermaßen der “Normalfall”.

Beispiel 4.10 (Fortsetzung von Beispiel 4.6) Da die Nullstellen des quadratischen Polynoms $\lambda z^2 + \rho z + 1/\gamma$ den Wert

$$\zeta_{\pm} = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\lambda/\gamma}}{2\lambda}, \quad \rho^2 \gamma \neq 4\lambda,$$

haben und sich die Partialbruchzerlegung eines quadratischen Polynoms als

$$\frac{1}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)} = \frac{\alpha_1}{z - \zeta_1} + \frac{\alpha_2}{z - \zeta_2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)z - \alpha_1\zeta_2 - \alpha_2\zeta_1}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)}$$

zu den Bedingungen $\alpha_2 = -\alpha_1$ und

$$-1 = \alpha_1\zeta_2 + \alpha_2\zeta_1 = \alpha_1(\zeta_1 - \zeta_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

führt, ist

$$V^b(z) = \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + \rho z + \lambda z^2} = \frac{1}{\lambda(\zeta_+ - \zeta_-)} \left(\frac{1}{z - \zeta_-} - \frac{1}{z - \zeta_+} \right) \quad (4.17)$$

und damit

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{2}{\sqrt{\rho^2 - 4\frac{\lambda}{\gamma}}} \left(e^{\left(\frac{-\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\lambda/\gamma}}{2\lambda}\right)t} - e^{\left(\frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 - 4\lambda/\gamma}}{2\lambda}\right)t} \right) \\ &= \frac{2e^{-\rho t/(2\lambda)}}{\sqrt{\rho^2 - 4\frac{\lambda}{\gamma}}} \left(e^{\frac{-\sqrt{\rho^2 - 4\lambda/\gamma}}{2\lambda}t} - e^{\frac{\sqrt{\rho^2 - 4\lambda/\gamma}}{2\lambda}t} \right). \end{aligned}$$

Für einen positiven Wert von $\rho^2 - 4\frac{\lambda}{\gamma}$, also einen vergleichsweise hohen Widerstand, gilt dann $V(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ – schließlich ist $-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\frac{\lambda}{\gamma}}$ in diesem Fall reell und negativ. Ist hingegen die Diskriminante $\rho^2 - 4\frac{\lambda}{\gamma}$ negativ, also $\sqrt{\rho^2 - 4\frac{\lambda}{\gamma}} = i\sqrt{4\frac{\lambda}{\gamma} - \rho^2}$, dann ist

$$\begin{aligned} V(t) &= -\frac{2e^{-\rho t/(2\lambda)}}{i\sqrt{4\frac{\lambda}{\gamma} - \rho^2}} \left(e^{\frac{i\sqrt{4\lambda/\gamma} - \rho^2}{2\lambda}t} - e^{\frac{-i\sqrt{4\lambda/\gamma} - \rho^2}{2\lambda}t} \right) \\ &= \frac{4e^{-\rho t/(2\lambda)}}{\sqrt{4\frac{\lambda}{\gamma} - \rho^2}} \sin \frac{\sqrt{4\lambda/\gamma} - \rho^2}{2\lambda}t \end{aligned}$$

und die Schaltung in Abb. 4.1 ist in diesem Fall ein gedämpfter Oszillator.

4.3 Vollständig monotone Funktionen

Die Laplacetransformation einer nichtnegativen Funktion $f \geq 0$ hat eine interessante Eigenschaft: Bildet man nämlich nur für reelle Werte $x > 0$ die Ableitungen $(f^\flat)^{(k)}(x)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (f^\flat)^{(k)}(x) &= \frac{d^k}{dx^k} \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt = \int_0^\infty f(t) (-t)^k e^{-xt} dt \\ &= (-1)^k \int_0^\infty \underbrace{f(t) t^k}_{\geq 0} e^{-xt} dt, \end{aligned}$$

die Ableitungen sind also wechselweise positiv und negativ. Das ist so eine schöne Eigenschaft, daß man dieser Funktionenklasse einen eigenen Namen gibt.

Definition 4.11 Eine Funktion heißt vollständig monoton, wenn $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}_0$, gilt.

Der Name “vollständige Monotonie” ist leicht erklärt: Derartige Funktionen sind nicht-negativ ($k = 0$), monoton fallend ($k = 1$), konvex ($k = 2$) und so weiter und alle Ableitungen haben bis auf Vorzeichen¹⁰⁸ dieselbe Eigenschaft. Und wir haben bereits gesehen, daß es solche Funktionen gibt und wie wir sie bekommen, nämlich als Laplace-Transformationen positiver Funktionen. Und das ist “im wesentlichen” auch alles, wie der berühmte Satz von Bernstein besagt, nur daß wir nicht Funktionen sondern allgemeiner Maße zu transformieren haben. Dazu brauchen wir eine moderate Erweiterung des Integrationsbegriffs.

Definition 4.12 (Totale Variation)

1. Eine Zerlegung $X = \{x_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ von \mathbb{R}_+ ist eine Menge von abzählbar vielen Punkten

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \infty,$$

die¹⁰⁹ keine Häufungspunkte haben soll.

2. Mit \mathcal{Z}_δ , $\delta > 0$, bezeichnen wir die Menge alle Zerlegungen mit der zusätzlichen Eigenschaft $x_{j+1} - x_j < \delta$.
3. Für $X \in \mathcal{Z}_\delta$ definieren wir die X -Variation einer Funktion f als

$$V_X(f) := \sum_{j=1}^{\infty} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

¹⁰⁸Aus “steigend” wird dann “fallend”, aus “konvex” wird “konkav” etc.

¹⁰⁹Um unnötige Komplikationen auszuschließen

und die totale Variation von f als¹¹⁰

$$V(f) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{X \in \mathcal{Z}_\delta} V_X(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{X \in \mathcal{Z}_\delta} \sum_{j=1}^{\infty} |f(x_j) - f(x_{j-1})|. \quad (4.18)$$

4. Eine Funktion f ist von beschränkter Variation, wenn $V(f) < \infty$ ist.

Was beschränkte Variation eigentlich bedeutet, sieht man ganz gut, wenn man einmal kurz annimmt, daß f stetig differenzierbar wäre, denn dann gibt es für $X \in \mathcal{Z}_\delta$ nach dem Zwischenwertsatz¹¹¹ Punkte $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$\begin{aligned} V_X(f) &= \sum_{j=1}^{\infty} |(x_j - x_{j-1}) f'(\xi_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) |f'(\xi_j)| \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f'(x)| dx, \end{aligned}$$

also ist eine Funktion f beschränkter Variation “im wesentlichen” durch $f' \in L_1$ beschrieben.

Definition 4.13 (Stieltjes-Integral) Das Stieltjes-Integral, gerne auch als Riemann-Stieltjes-Integral bezeichnet, siehe [20], ist dann als

$$\int_{\mathbb{R}_+} g df = \int_{\mathbb{R}_+} g(x) df(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} g(\xi_j) (f(x_j) - f(x_{j-1})), \quad (4.19)$$

für

$$X \in \mathcal{Z}_\delta, \quad x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j, \quad (4.20)$$

definiert und existiert, wenn der Grenzwert unabhängig von der Wahl des jeweiligen $X \in \mathcal{Z}_\delta$ existiert.

Bemerkung 4.14

1. Eigentlich definiert man totale Variation und Stieltjes-Integral “nur” für Intervalle und erweitert dann auf das uneigentliche Integral – dieser Prozess steht hinter der etwas “schlampigen” Definition in (4.18) und (4.19).

2. Aus (4.19) folgt sofort, daß

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g df \right| \leq \|g\|_{\infty} V(f), \quad \|g\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|, \quad (4.21)$$

das Stieltjes-Integral bezüglich Funktionen von beschränkter Variation geht also in Ordnung.

¹¹⁰Kleine Übung: Warum existiert der Limes in (4.18)?

¹¹¹Beziehungswise mit Taylor nullter Ordnung

Übung 4.3 Beweisen Sie (4.21) und zeigen Sie, daß für stetig differenzierbares f

$$\int_{\mathbb{R}} g df = \int_{\mathbb{R}} g(x) f'(x) dx$$

gilt. ◇

Man kann nun mit Stieltjes-Integralen dieselben Dinge machen wie mit Riemann-Integralen, also Transformationssätze etc. Eine schöne Einführung findet sich in [46], wir haben leider keinen Platz dafür, sondern wir wollen uns um die Beschreibung vollständig monotoner Funktionen kümmern.

Satz 4.15 (Satz von Bernstein) *Ist f eine beschränkte, vollständig monotone Funktion auf \mathbb{R}_+ , dann existiert eine beschränkte und nicht steigende Funktion g , so daß*

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dg(t), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (4.22)$$

ist – f ist also die Laplace-Transformierte des nichtnegativen Maßes dg .

So, der Beweis wird ein bisschen dauern. Für den Rest dieses Kapitels ist f immer eine nichtdegenerierte vollständig monotone Funktion, es gilt also

$$(-1)^k f^{(k)} \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) < \infty. \quad (4.23)$$

Der erste Schritt besteht darin, ausgehend von f ein seltsames lineares Funktional I auf dem Vektorraum¹¹² Π der Polynome zu betrachten, das durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \mapsto I(p) = I(e^{-\cdot} p) := \sum_{k=0}^n p_k (-1)^k f^{(k)}(1)$$

definiert ist. Der Clou dieses Funktionals besteht darin, daß es positiv ist .

Proposition 4.16 *Ist p ein nichtnegatives Polynom auf \mathbb{R}_+ , d.h. $p(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, dann ist $I(p) \geq 0$.*

Zu diesem Zweck zuerst einmal eine Aussage über positive Polynome, die auch für sich von Interesse sein sollte.

Lemma 4.17 *Ist p nichtnegativ auf \mathbb{R} , so gibt es reelle Polynome q_1, q_2 , so daß*

$$p(x) = q_1^2(x) + q_2^2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.24)$$

ist. Ist p nichtnegativ auf \mathbb{R}_+ , so gibt es reelle Polynome q_1, q_2, r_1, r_2 , so daß

$$p(x) = q_1^2(x) + q_2^2(x) + x r_1^2(x) + x r_2^2(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (4.25)$$

ist.

¹¹²Algebra brauchen wir hier nicht.

Beweis: Das Polynom p hat reelle Nullstellen ξ_j , $j = 1, \dots, m$ und paarweise konjugierte Nullstellen $\zeta_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, \dots, m'$, von der jeweiligen Vielfachheit μ_j, μ'_j und kann daher als

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha \prod_{j=1}^m (x - \xi_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{m'} (x - \zeta_j)^{\nu_j} (x - \bar{\zeta}_j)^{\nu_j} \\ &= \alpha \prod_{j=1}^m (x - \xi_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{m'} ((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^{\nu_j} \end{aligned}$$

faktoriert werden, wobei natürlich $\alpha > 0$ ist und alle μ_j gerade sein müssen. Die komplexen Terme sind ja bereits Summen von Quadraten und da wegen

$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2$$

das Produkt von Summen zweier Quadrate wieder eine Summe zweier Quadrate ist, wird der ganze komplexe Term eine Summe zweier Quadrate, und daraus folgt auch schon (4.24). Ist hingegen p nur auf \mathbb{R}_+ positiv, dann können manche μ_j auch ungerade sein, sagen wir μ_1, \dots, μ_m , allerdings sind die zugehörigen ξ_j dann negativ, so daß wir, nach Verschieben der Potenzen $(x - \xi_j)^{\mu_j - 1}$, jetzt mit geraden Exponenten, in den "Quadratteil", dank (4.24) unser p nun als

$$p(x) = \prod_{j=1}^m (x + \tilde{\xi}_j) (s_1^2(x) + s_2^2(x)), \quad \tilde{\xi}_j > 0,$$

schreiben können. Ist $m = 1$, dann ist die Sache einfach, denn dann erhalten wir

$$p(x) = \tilde{\xi}_1 (s_1^2(x) + s_2^2(x)) + x (s_1^2(x) + s_2^2(x)),$$

also (4.25). Nun nehmen wir an (4.25) würde für ein $m \geq 1$ gelten und p hätte $m + 1$ Nullstellen ungerader Vielfachheit, dann ist nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + \tilde{\xi}_{m+1}) (q_1^2(x) + q_2^2(x) + x r_1^2(x) + x r_2^2(x)) \\ &= \underbrace{\tilde{\xi}_{m+1} (q_1^2(x) + q_2^2(x))}_{\geq 0, x \in \mathbb{R}} + x^2 (r_1^2(x) + r_2^2(x)) \\ &\quad + x \underbrace{(q_1^2(x) + q_2^2(x) + \tilde{\xi}_{m+1} (r_1^2(x) + x r_2^2(x)))}_{\geq 0, x \in \mathbb{R}} \\ &= \tilde{q}_1^2(x) + \tilde{q}_2^2(x) + x (\tilde{r}_1^2(x) + \tilde{r}_2^2(x)), \end{aligned}$$

genau wie behauptet. □

Beweis von Proposition 4.16: Wegen (4.25) können wir das lineare Funktional als

$$I(p) = I(q_1^2) + I(q_2^2) + I((\cdot)r_1^2) + I((\cdot)r_2^2)$$

schreiben und brauchen also nur noch

$$I(q^2) = \sum_{j,k=0}^n (-1)^{j+k} f^{(j+k)}(1) q_j q_k$$

beziehungsweise

$$I((\cdot)q^2) = \sum_{j,k=0}^n (-1)^{j+k+1} f^{(j+k+1)}(1) q_j q_k$$

zu betrachten. Nun gilt aber für vollständig monotone Funktionen die schöne Eigenschaft¹¹³, daß die Matrizen

$$[f^{(j+k+\ell)}(x) : j, k = 0, \dots, n], \quad \ell \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

immer positiv semidefinit sind, siehe [46], was uns die Nichtnegativität der beiden Ausdrücke oben und damit auch die Behauptung liefert. \square

Jetzt verwenden wir natürlich besondere Polynome, nämlich die *Laguerre–Polynome*, die als

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.26)$$

definiert sind. Auch die fallen natürlich nicht vom Himmel, sondern bilden orthogonale Polynome bezüglich der Laplace–Transformation, da sie

$$\int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \delta_{m,n} \quad (4.27)$$

erfüllen. Zumindest ein Teil davon ist einfach, denn wir haben für $m < n$, daß

$$\int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) dx$$

und da $(e^{-x} x^n)^{(k)}(0) = (e^{-x} x^n)^{(k)}(\infty) = 0$ für $k < n$ ist, folgt (4.27) sofort durch partielle Integration.

Übung 4.4 Beweisen Sie (4.26) und den Rest von (4.27). \diamond

¹¹³Es wäre noch schöner, diese Eigenschaft zu beweisen, die auf einer Charakterisierung von Momentenfolgen beruht, aber leider fehlt uns dazu die Zeit.

Die Laguerre-Polynome zeichnen sich auch durch eine schöne Laplace-Transformierte aus, denn es ist ja

$$\begin{aligned} L_n^b(x) &= \int_0^\infty \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n) e^{-xt} dt = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n) e^{(1-x)t} dt \\ &= \frac{(x-1)^n}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-xt} dt = \frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Übung 4.5 Zeigen Sie, daß $((\cdot)^n)^b(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$ ist. **Hinweis:** Beispiel 4.2. \diamond

Nun können wir uns langsam an die Bestimmung unseres Maßes dg aus Satz 4.15 machen, indem wir die Koeffizienten

$$\gamma_n = I(L_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.29)$$

zu der Laguerre-Reihe¹¹⁴

$$G_t(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n L_n(x) t^n, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in [0, 1), \quad (4.30)$$

kombinieren. Daß diese Reihe brav konvergiert und die Abschätzung

$$0 \leq G_t(x) \leq \frac{f(0) e^{x/2}}{1-t} \quad (4.31)$$

erfüllt, findet sich wieder einmal in [46, Theorem 18d, Ch. IV]. Und siehe da, G_t ist schon fast das, was wir wollen, genauer gesagt, die Ableitung davon.

Satz 4.18 Für $1 \leq x < 2$ gilt

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G_t^b(x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^\infty e^{-xy} G_t(y) dy.$$

Beweis: Daß das Integral auf der rechten Seite überhaupt existiert, kann man durch ein wenig Abschätzung verifizieren, siehe¹¹⁵ [46]. Mit (4.30) und (4.28), unter gnadenlosem Vertauschen von Summe und Integral¹¹⁶ und mit (4.29) ist dann

$$\int_0^\infty e^{-xy} G_t(y) dy = \int_0^\infty e^{-xy} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n L_n(y) t^n dy$$

¹¹⁴Man sieht: Orthogonalreihenentwicklungen ziehen sich wie ein roter Faden durch die ganze Vorlesung.

¹¹⁵Wieder einmal.

¹¹⁶In [46] wird das auch gerechtfertigt.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{t^n (x-1)^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(t - \frac{t}{x}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \\
&= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(t - \frac{t}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \frac{(tx - t)^k}{(x - tx + t)^{k+1}},
\end{aligned}$$

wobei wir die Identität

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}, \quad (4.32)$$

[16, (5.57)] verwendet haben. Lassen wir nun $t \rightarrow 1$ gehen und vergewissern wir uns wieder, daß wir den Grenzwert mit der Summe vertauschen dürfen, so erhalten wir, daß

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} G_t(y) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = f(x)$$

ist – wieder einmal nach [46] sind vollständig monotone Funktionen nämlich analytisch und daher konvergiert die Taylorreihe. \square

Übung 4.6 Beweisen Sie (4.32). Im Spezialfall $k = 0$ ist das übrigens die geometrische Reihe! \diamond

Beweis von Satz 4.15: Nach Satz 4.18 sollte G_t so etwas wie die Ableitung unseres gesuchten g sein. Gut, dann setzen wir eben

$$h_t(x) = \int_0^x e^{-y} G_t(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

im wesentlichen als Stammfunktion zu G_t an. Da $G_t \geq 0$ ist, ist h_t eine nichtfallende Funktion mit $h_t(0) = 0$, die nach oben durch

$$h_t(x) = \int_0^x e^{-y} G_t(y) dy \leq \int_0^{\infty} e^{-y} G_t(y) dy = \gamma_0, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

auch durchgängig nach oben beschränkt ist. Damit gibt es eine Folge¹¹⁷ $t_j \rightarrow 1$, so daß $h_{t_j} \rightarrow h$, und zwar gleichmäßig auf \mathbb{R}_+ . Nun ist aber nach Satz 4.18

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} G_{t_j}(y) dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-(x-1)y} dh_{t_j}(y)$$

und damit, für $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dg(y), \quad g(y) = \int_0^y e^u dh(u).$$

\square

¹¹⁷Das ist der Satz von Helly, siehe z.B. [43, 46, 47].

Wer sind die Schönen
 die in Schaumhemden gehn,
 durch die Föhrde geht ihre Fahrt?
 Kein weiches Bett
 haben die Weißhaubigen
 und streifen bei Stille nicht [...]]
 das sind wieder die Wellen

Edda, Die Heidereksrätsel

Zeit, Frequenz und Wavelets

5

Im letzten Teil wollen wir uns noch mit einer etwas moderneren und momentan sehr populären Integraltransformation beschäftigen, nämlich der *Wavelettransformation*, zu einem *Wavelet* ψ , bei der einer Funktion f ein Integral der Form¹¹⁸

$$W_{\psi}f(t, s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) dx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

zugeordnet wird, also eine *Faltung* von f mit gestauchten Versionen von ψ . Der Vorteil der Wavelettransformation wird in ihrer Fähigkeit liegen, *gleichzeitig* gut Zeit- und Frequenzauflösung zu liefern. Also sehen wir uns erst einmal an, worum es dabei eigentlich geht, wobei wir uns hier auf den univariaten Fall¹¹⁹ beschränken werden, bei dem man auch genug sieht. Außerdem bieten multivariate Wavelets so viel Verallgemeinerungspotential, daß man kaum mehr weiss, wo man anfangen und aufhören soll.

5.1 Die gefensterete Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ordnet einer Funktion f ihr *Spektrum* zu, sagt uns also, in welchem Ausmaß welche Frequenzen in einem Signal vertreten sind. Das musikalische Analogon bestünde darin, daß man ein Musikstück lediglich dahingehend untersucht¹²⁰,

¹¹⁸Wir werden es später noch sauber normieren müssen, damit alles auch richtig “schön” wird.

¹¹⁹Unter Verwendung der Variablen t wie “Time”.

¹²⁰Ein ausgesprochen statistischer, wenn auch vielleicht ein wenig bürokratischer und nicht wirklich phantasievoller Weg, sich beispielsweise einer Beethoven-Symphonie zu nähern, vielleicht eher für Mozart angemessen?

welchen Anteil beispielsweise die Note “a” gehabt hätte. Das ist natürlich in vielen Anwendungen, von der Musikanalyse, beispielsweise im Kontext von Auto-Tune¹²¹ [3], bis hin zur Schwingungsanalyse von Werkzeugmaschinen¹²² völlig unzureichend, denn da möchte man wissen, ob in einem gewissen Zeitraum eine gewisse Frequenz auftritt.

Gut, im Prinzip ja kein Problem, dann bilden wir halt nur die Fouriertransformation eines “Schnipsels” von f , beispielsweise nur von

$$f|_{[t-\delta, t+\delta]} = f \cdot \chi_{[t-\delta, t+\delta]}, \quad \delta > 0.$$

Das ist dann auch schon die Idee der gefensterter Fouriertransformation: Man verwendet eine *Fensterfunktion* g , in unserem Beispiel $g = \chi_{[-\delta, \delta]}$ und untersucht dann

$$f_{g, t^*} := f \cdot g(\cdot - t^*), \quad t^* \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

zentriert also das Fenster um t^* . Dabei ist es natürlich vernünftig¹²³, daß g auch im wesentlichen um den Nullpunkt herum “lebt”.

Nehmen wir jetzt die Fouriertransformierte von (5.2), dann erhalten wir, daß

$$\widehat{f}_{g, t^*}(\xi) = (f \cdot g(\cdot - t^*))^\wedge(\xi) = \left(\widehat{f} * (\tau_{-t^*} g)^\wedge \right)(\xi) = \widehat{f} * (e^{it^* \xi} \widehat{g})(\xi),$$

im Spektrum haben wir also eine Faltung mit einer modulierten Version von \widehat{g} , was natürlich das Spektrum nicht unbeträchtlich verändert. Und solche *Fensterungsartefakte* kann man durch Wahl eines geeigneten Fensters zwar etwas minimieren, siehe [18, 25, 37], aber nie wirklich vollständig in den Griff bekommen. Das hat, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, systematische und fundamentale Gründe.

5.2 Zeit, Frequenz, Heisenberg

Eine *Zeit–Frequenz–Transformation* korreliert eine Funktion¹²⁴ $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit einer Familie

$$\Phi = (\phi_\gamma : \gamma \in \Gamma), \quad \phi_\gamma \in L_2(\mathbb{R}), \quad \|\phi_\gamma\| = 1, \quad \gamma \in \Gamma,$$

von Funktionen, die als *Zeit–Frequenz–Atome* bezeichnet werden, das heißt, man bildet¹²⁵

$$T_\Phi f(\gamma) = \langle f, \phi_\gamma \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_\gamma(t)} dt, \quad \gamma \in \Gamma \quad (5.3)$$

¹²¹Oder gibt es wirklich jemanden, der glaubt, Pop–Starlets könnten singen oder André Rieu Geige spielen?

¹²²Jede Bewegung regt eine Maschine als starres System zu Schwingungen an, und wenn diese in die Nähe der Eigenfrequenz der Maschine kommt, dann wird es gefährlich.

¹²³In den Voraussetzungen aber nicht gefordert

¹²⁴Im Kontext der Signalverarbeitung würden wir von einem Signal sprechen – ist aber eben auch nichts anderes.

¹²⁵... wieder einmal eine Integraltransformation.

Die Indexmenge Γ ist hierbei frei wählbar und bildet die Parametermenge des Bildes von T_Φ . Dieser allgemeine Zugang enthält natürlich auch bekannte Objekte.

Beispiel 5.1 Ist $\Gamma = \mathbb{R}$, $\gamma = \xi \in \mathbb{R}$ und damit $\phi_\gamma = e^{-i\xi}$, dann ist T_Φ gerade die Fouriertransformation.

Wegen der Parseval-Identität (2.15) ist nun aber auch

$$T_\Phi f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\phi_\gamma}(\xi)} d\xi, \quad (5.4)$$

so daß unsere Transformation wahlweise Information über die Funktion f oder aber die Fouriertransformation \widehat{f} enthält, nur dann eben durch Integration gegen $\overline{\widehat{\phi_\gamma}}$. Die Extremfälle wäre nun wahlweise $\phi_\gamma = \delta_x$, $x \in \mathbb{R}$, dann ist $T_\Phi f(\gamma) = f(x)$, oder eben $\phi_\gamma = 2\pi e^{-i\xi}$, was $\widehat{\phi_\gamma} = 2\pi \delta_\xi$, also $T_\Phi f(\gamma) = \widehat{f}(\xi)$ liefern würde. Im ersten Fall haben wir es mit *perfekter Zeitlokalisierung* zu tun, im anderen Fall mit *perfekter Frequenzlokalisierung*. Ideal für unsere oben genannten Zwecke wäre natürlich nun eine möglichst gute *simultane* Zeit- und Frequenzlokalisierung durch so ein ϕ_γ , aber das geht nur bis zu einem bestimmten Punkt.

Um diese Aussage auch quantifizieren zu können, definieren wir zuerst einmal die *Zeitlokalisierung* von $f \in L_2(\mathbb{R})$ als das erste Moment

$$\mu_t = \mu_t(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt, \quad (5.5)$$

und die *Frequenzlokalisierung* ganz entsprechend als

$$\mu_\xi = \mu_\xi(f) = \frac{1}{\|\widehat{f}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi \|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (5.6)$$

siehe (2.16).

Bemerkung 5.2 Der Name "Lokalisierung" für (5.5) erklärt sich ganz einfach: Ist $f \sim \delta_x$ für ein $x \in \mathbb{R}$, also konzentriert sich die ganze Masse von f um den Punkt x , sagen wir $\text{supp } f \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} |\mu_t - x| &= \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - x) |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} |t - x| |f(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\mu_t \sim x$. Generell könnte man μ_t und μ_ξ auch als Zeit- bzw. Frequenzschwerpunkt von f bezeichnen.

Eine Funktion ist natürlich genau dann gut lokalisiert, wenn sie nicht zu weit vom Mittelwert abweicht. Die Abweichung vom Mittelwert beschreibt man aber über die die *Variationen*¹²⁶ σ_t und σ_ξ , die als die zweiten Momente

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_t)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \sigma_\xi^2 = \frac{1}{2\pi \|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \mu_\xi)^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (5.7)$$

definiert sind.

Definition 5.3 Eine Funktion f hat perfekte Zeitlokalisierung, wenn $\sigma_t(f) = 0$ ist und perfekte Frequenzlokalisierung, wenn $\sigma_\xi(f) = 0$ gilt.

So schön und erstrebenswert die in Definition 5.3 eingeführten Begriffe sind – für “vernünftige” Funktionen gibt es sowas nicht! Das genau ist die Aussage der berühmten *Heisenbergschen*¹²⁷ *Unschärferelation*.

Satz 5.4 (Heisenbergsche Unschärferelation) Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$\sigma_t^2(f) \sigma_\xi^2(f) \geq \frac{1}{4}. \quad (5.8)$$

Insbesondere ist sowohl $\sigma_t(f) = 0$ als auch $\sigma_\xi(f) = 0$ unmöglich.

Beweis: Der Beweis aus [30] folgt einem “Original” von H. Weyl und macht die etwas stärkere Annahme, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} f(t) = 0$$

ist. Da diese Funktionen aber dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegen, ist das keine wirkliche Einschränkung.

Ersetzt man f durch $g := e^{-i\mu_\xi \cdot} f(\cdot + \mu_t)$, dann ist $\|g\| = \|f\|$ und

$$\begin{aligned} \mu_t(g) &= \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t \underbrace{|e^{-i\mu_\xi \cdot}|^2}_{=1} |f(t + \mu_t)|^2 dt = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_t) |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt - \frac{\mu_t}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt = \mu_t - \mu_t = 0 \end{aligned}$$

sowie, ganz analog,

$$\mu_\xi(g) = \frac{1}{\|\widehat{f}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |e^{-i\mu_t \xi} \widehat{f}(\xi + \mu_\xi)|^2 d\xi = 0,$$

¹²⁶Ob das nun die Variation oder die Standardabweichung ist, das ist eine Unterscheidung, die ich in ihrer Subtilität und Bedeutungsschwere gerne den Kollegen aus der Statistik überlasse. Hier ist es egal!

¹²⁷Werner Karl Heisenberg, 1901–1976, “a rather stiff, tightly controlled, authoritarian figure”, Vater der Quantenphysik. Sagte über sich selbst: *I learned optimism from Sommerfeld, mathematics at Göttingen, and physics from Bohr* – ob er das allerdings in Englisch tat, weiß ich auch nicht.

und wir können als Fazit auch ohne weiteres annehmen, daß $\mu_t = \mu_\xi = 0$ ist. Dann gilt mit ein bisschen Manipulationen an den Fouriertransformierten und der Schwarzschen Ungleichung, daß¹²⁸

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^2(f) \sigma_\xi^2(f) &= \frac{1}{2\pi \|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|\xi \widehat{f}(\xi)|^2}_{=|i\xi \widehat{f}(\xi)|^2} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi \|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |(f')^\wedge(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{\|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \\
 &\geq \frac{1}{\|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} |t f(t) f'(t)| dt \right)^2 \geq \frac{1}{\|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{2} (f^2(t))' dt \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4 \|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} t (f^2(t))' dt \right)^2 = \frac{1}{4 \|f\|_2^4} \left([t f^2(t)]_{t=0}^\infty - \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4 \|f\|_2^4} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2 = \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

ganz wie in (5.8) behauptet. □

Bemerkung 5.5 (Beweis der Heisenbergschen Unschärferelation)

1. Im Beweis von Satz 5.4 haben wir gesehen (und benutzt), daß

$$\sigma_t^2(f) \sigma_\xi^2(f) = \frac{1}{\|f\|_2^4} \int_{\mathbb{R}} |t f(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt$$

ebenfalls nicht Null werden kann. Das ist die andere physikalische Interpretation der Heisenbergschen Unschärferelation, nämlich daß Ort (μ_t) und Impuls (das Integral über f') nicht gleichzeitig beliebig genau lokalisiert werden können.

2. Die einzige verwendete **Ungleichung** war die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, und bei der weiß man ziemlich genau, wann sie zur Gleichheit wird. Verwendet man diese Information, so ergibt sich Gleichheit in der Heisenbergschen Unschärferelation (5.8) genau dann, wenn f von der Form

$$f(t) = a e^{i\omega t - b(t-u)^2}, \quad u, \omega \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{C}, \quad (5.9)$$

ist. Derartige Funktionen besitzen dann also optimale Zeit-/Frequenzauflösung.

¹²⁸Wir nehmen hier stillschweigend an, daß f reell ist, dann sparen wir uns in den Rechnungen einiges an komplexer Konjugation.

Lokalisierung und Variation derselben sind also ganz entscheidende Parameter für die Qualität einer beliebigen Funktion zur Bestimmung von zeitabhängigen Frequenzkomponenten von f . Daher machen wir die folgende Funktion.

Definition 5.6 Zu einem System Φ von Zeit–Frequenz–Atomen definiert man die Heisenberg–Boxen bzw. Heisenberg–Rechtecke als die Rechtecke

$$H(\gamma) = [\mu_{t,\gamma} - \sigma_{t,\gamma}, \mu_{t,\gamma} + \sigma_{t,\gamma}] \times [\mu_{\xi,\gamma} - \sigma_{\xi,\gamma}, \mu_{\xi,\gamma} + \sigma_{\xi,\gamma}],$$

wobei $\mu_{t,\gamma} = \mu_t(\phi_\gamma)$ bezeichnet und analog auch die anderen Abkürzungen definiert sind.

Den \mathbb{R}^2 mit Paaren (t, ξ) bezeichnet man dabei als die Zeit–Frequenz–Ebene.

5.3 Die Gabor–Transformation

Die Gabor¹²⁹–Transformation wurde 1946 von D. Gabor in¹³⁰ [13] als ein Verfahren zur Analyse von Sound-Daten eingeführt. Die Gabor–Transformation basiert auf einer reellen, um den Ursprung symmetrischen und normierten Fensterfunktion g , d.h. $g(t) = g(-t)$ sowie $\|g\|_2 = 1$, und den Atomen

$$\phi_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (u, \xi) \in \Gamma = \mathbb{R}^2, \quad (5.10)$$

so daß sich nach (5.3) die Gabor–Transformation

$$Gf(u, \xi) = T_\Phi f(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_{u,\xi}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} g(t - u) dt, \quad (u, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.11)$$

ergibt, die eigentlich nichts anderes als eine gefensterte Fouriertransformation mit verschobenem Fenster g ist, weswegen man sie gerne auch als *Kurzzeit–Fouriertransformation* bezeichnet. Eine erste schöne¹³¹ Eigenschaft der Gabor–Transformation ist, daß sie gleichmäßige Heisenberg–Rechtecke¹³² hat

Lemma 5.7 Die Heisenberg–Rechtecke $H(u, \xi)$ zur Gabor–Transformation sind zentriert um (u, ξ) und haben die Seitenlängen $\sigma_t(g)$ und $\sigma_\xi(g)$, unabhängig von u und ξ .

¹²⁹Dennis Gábor, 1900–1979, ungarischstämmiger Ingenieur, später Professor für angewandte Elektro-physik am Imperial College in London.

¹³⁰Die Information stammt aus [30].

¹³¹Oder eben auch nicht schöne, die Wavelet–Transformation ist da “besser”.

¹³²Tut mir leid, aber alle anderen Eindeutschungen wie “Heisenbergschachteln” oder “Heisenbergkisten” klingen noch dämlicher.

Die numerische Bedeutung von Lemma 5.7 sollte klar sein: Will man ein Signal mittels der Gabor–Transformation analysieren, dann kann man die Transformation natürlich nur an endlich vielen Stellen berechnen und dann sollten die zugehörigen Heisenberg–Rechtecke schon den gesamten “interessanten” Bereich der Zeit–Frequenz–Ebene überdecken.

Beweis: Da $\|\phi_{u,\xi}\|_2 = 1$ vereinfachen sich die Rechnungen zu

$$\begin{aligned}\mu_t(\phi_{u,\xi}) &= \int_{\mathbb{R}} t |e^{-i\xi t} g(t-u)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} (t+u) |g(t)|^2 dt \\ &= u + \underbrace{\int_0^\infty t (|g(t)|^2 - |g(-t)|^2) dt}_{=\mu_t(g)=0} = u\end{aligned}$$

und entsprechend für μ_ξ . Die Varianz ist dann

$$\begin{aligned}\sigma_t^2(\phi_{u,\xi}) &= \int_{\mathbb{R}} (t-u)^2 |e^{i\xi t} g(t-u)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt \\ &= \sigma_t^2(g),\end{aligned}$$

und wieder ganz analog für σ_ξ . □

Übung 5.1 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 5.7. ◇

So weit erscheint die Gabor–Transformation noch ziemlich unauffällig; sie liefert einem ein *Spektrogramm* $|Gf| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, das uns sagt, wieviel Energie sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer bestimmten Frequenz konzentriert, aber sie kann mehr: Aus der Gabor–Transformation lässt sich die Ausgangsfunktion wieder rekonstruieren!

Satz 5.8 Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Gf(u, \xi) e^{i\xi t} g(t-u) d\xi du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} Gf(\gamma) \phi_\gamma(t) d\gamma \quad (5.12)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Gf(u, \xi)|^2 d\xi du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |Sf(\gamma)|^2 d\gamma \quad (5.13)$$

Bemerkung 5.9 Gleichung (5.12) definiert eine inverse Gabor–Transformation, und das auch noch auf die denkbar einfachste Art und Weise, während (5.13) eine Plancherel–Variation ist, also eine Analogie zu (2.16). Die Gabor–Transformation ist auf $L_2(\mathbb{R})$ im wesentlichen eine Isometrie.

Allerdings gibt es auch ein Warnung: Die Formeln gelten “nur” im L_2 –Sinn, müssen also **nicht** punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt sein!

Beweis: Wir fixieren einmal $\xi \in \mathbb{R}$ und betrachten die Funktionen $g_\xi = e^{i\xi \cdot} g$ sowie $f_\xi = Gf(\cdot, \xi)$. Nach Definition der Gabor-Transformation und wegen der Symmetrie von g ist

$$\begin{aligned} f_\xi(u) &= Gf(u, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} \underbrace{g(t-u)}_{=g(u-t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\xi u} e^{i\xi(u-t)} g(u-t) dt = e^{i\xi u} \int_{\mathbb{R}} f(t) g_\xi(u-t) dt, \end{aligned}$$

also

$$f_\xi(u) = e^{i\xi u} (f * g_\xi)(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (5.14)$$

und damit auch

$$(Gf(\cdot, \xi))^\wedge(\omega) = \widehat{f}_\xi(\omega) = \widehat{f}(\omega + \xi) \widehat{g}_\xi(\omega + \xi) = \widehat{f}(\omega + \xi) \widehat{g}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Nun wenden wir die Plancherel-Identität (2.15) auf (5.12) an und erhalten durch Einsetzen von (5.15), daß¹³³

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Gf(u, \xi) e^{i\xi t} g(t-u) d\xi du \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \int_{\mathbb{R}} (Gf(\cdot, \xi))^\wedge(\omega) \overbrace{(g(t-\cdot))^\wedge(\omega)}_{=g(\cdot-t)} d\omega d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega + \xi) \widehat{g}(\omega) \overline{e^{-it\omega} \widehat{g}(\omega)} d\omega d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega + \xi) |\widehat{g}(\omega)|^2 e^{it(\xi+\omega)} d\omega d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\omega)|^2 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega + \xi) e^{it(\omega+\xi)} d\xi}_{(\widehat{f})^\vee(t)=f(t)} d\omega \\ &= f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega = f(t) \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt = f(t) \|g\|_2^2 = f(t), \end{aligned}$$

was dann auch schon (5.12) beweist. Für (5.13) verwenden wir ebenfalls wieder (5.15), um

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |Gf(u, \xi)|^2 d\xi du$$

¹³³Für die Vertauschung der Integration bräuchten wir eigentlich $f \in L_1(\mathbb{R})$, aber da $L_1 \cap L_2$ ja dicht in L_1 liegt, können wir dieses "Problem" mit gutem Gewissen vernachlässigen.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(Gf(\cdot, \xi))^\wedge(\omega)|^2 d\xi d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\omega)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega + \xi)|^2 d\xi d\omega = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 = \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

zu erhalten – nichts anderes als (5.13). \square

Bemerkung 5.10 Die Formel (5.15) für die Fouriertransformierte¹³⁴ von Gf bezüglich u ist nicht nur ein nützliches Hilfsmittel zum Beweis von Satz 5.8, sondern vor allem auch der Schlüssel zu einer effizienten Implementierung. Nehmen wir nämlich die inverse Fouriertransformierte von (5.15), dann erhalten wir, daß

$$Gf(u, \xi) = \left(\widehat{f}(\cdot + \xi) \widehat{g} \right)^\vee(u) \quad (5.16)$$

und bei diskreter Abtastung¹³⁵ von f und g kann man die Fouriertransformierten schnell und effizient mit der schnellen Fouriertransformation, besser bekannt als FFT, bestimmen und dann das komponentenweise Produkt ebenso schnell rücktransformieren, siehe z.B. [10, 37]. Generell lassen sich ganz allgemein Faltungsstrukturen auf diese Art und Weise schnell berechnen [44], vom Produkt ganzer Zahlen [15, 39] über digitale Filter [17, 18] bis hin zu geeignet strukturierten Matrizen und vielen anderen schönen Dingen mehr – eben auch Gabor- und, wie wir später sehen werden, Wavelet-Transformationen.

Da uns die Sache mit der schnellen Fouriertransformation auch bei den Wavelets nachgehen wird, ist es sinnvoll, sich mal kurz anzusehen, was da eigentlich passiert. Die diskrete Fouriertransformation, kurz DFT berechnet zu einem Vektor

$$\mathbf{f} = [f_j : j = 0, \dots, n-1] \quad \text{bzw.} \quad p_f = \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{ij},$$

dem zugehörigen trigonometrischen Polynom, einen Vektor

$$\widehat{\mathbf{f}} = \left[p_f \left(\frac{2\pi k}{n} \right) : k = 0, \dots, n-1 \right] = \left[\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i jk/n} : k = 0, \dots, n-1 \right],$$

gleicher Länge, den man als die *diskrete Fouriertransformation* von \mathbf{f} bezeichnet. Nun hat sowas natürlich nicht direkt etwas mit einer Funktion f zu tun, noch nicht einmal, wenn

$$f_j = f(t_0 + hj), \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad h > 0,$$

¹³⁴Erinnert ein wenig an das, was wir auch bei der Radontransformation gemacht haben.

¹³⁵Letztere kann man dann sogar in einer Tabelle speichern, denn das Fenster wird ja normalerweise irgendwann mal fest gewählt.

ist, also wenn \mathbf{f} durch endliche Abtastung einer Funktion f erhalten wurde. Allerdings können wir, wie in [40] aus den Daten f_j ja wie in (3.10) wieder vermittels eines Quasiinterpolanten eine Funktion basteln, und zwar die Näherung

$$f_* = \mathbf{f} * \phi = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \phi(\cdot/h - j), \quad (5.17)$$

wobei wir ϕ auch gleich passend zur Abtastgenauigkeit h skaliert haben – bei den Rekonstruktion bandbeschränkter Funktionen im Shannonschen Abtastsatz 3.16 haben wir es ja auch nicht anders gemacht. Gute Kandidaten für ϕ wären

$$\begin{aligned} \phi &= \chi_{[0,1]} \\ \phi &= \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(\cdot + 1) = \chi_{[-1/2,1/2]} * \chi_{[-1/2,1/2]}, \end{aligned}$$

was zur einer stückweise konstanten bzw. stückweise linearen Rekonstruktion führen würde. Mit der Definition aus (5.17) erhalten wir dann, daß

$$\begin{aligned} \widehat{f}_*(\xi) &= \sum_{j=0}^{n-1} f_j (\phi(\cdot/h - j))^\wedge(\xi) = h \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-ih\xi j} \widehat{\phi}(h\xi) = h \widehat{\phi}(h\xi) \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-ih\xi j} \\ &= h \widehat{\phi}(h\xi) p_f(-h\xi) = h \widehat{\phi}(h\xi) \overline{p_f(h\xi)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\widehat{f}_*(\xi/h) = h \widehat{\phi}(\xi) \overline{p_f(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die DFT liefert und nun eine Abtastung an den Punkten $2\pi k/n$ und damit, mit $\xi_k = \frac{2k\pi}{nh}$

$$\widehat{f}_*(\xi_k) = \widehat{f}_*\left(\frac{2\pi k}{nh}\right) = h \widehat{\phi}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \overline{\widehat{f}_k}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (5.18)$$

Und das ist nun Information über die punktweise Fouriertransformierte einer Funktion, nämlich $f_* \sim f$, an diskreten Stellen über die FFT.

Bemerkung 5.11 (Numerische Berechnung der Fouriertransformierten)

1. Man sieht in (5.18) sehr schön, daß die Bandbreite, in der \widehat{g} berechnet wird, von der Abtastgenauigkeit h abhängt, die Frequenzauflösung hingegen von der Anzahl n der Abtastpunkte. Ein bisschen ist das ja auch genau das, was man so erwarten würde.
2. Die Werte $\widehat{\phi}\left(-\frac{2k\pi}{n}\right)$ zur Filterung der Koeffizienten müssen nur ein einziges Mal (vor)berechnet werden. Im einfachsten Fall der stückweise konstanten Rekonstruktion ist das nichts anderes als $\widehat{\phi} = \text{sinc}$, was ja auch explizit vorliegt.
3. Ist $\|f_* - f\|_\infty$ klein, was auch wieder ein Frage der Abtastung ist, dann ist (5.18) auch eine sehr gute Berechnung der Fouriertransformierten von f an den diskreten Stellen.

5.4 Wavelets – Definition und fundamentale Eigenschaften

Wir haben die Wavelettransformation ja schon prinzipiell in (5.1) kennengelernt, aber um wie bei der Gabortransformation auch wirklich Invertierbarkeit zu erhalten, brauchen wir zuerst einmal eine grundsätzliche Eigenschaft, um überhaupt von einem *Wavelet* sprechen zu können. Man muss bei Wavelets wieder einmal ein bisschen aufpassen, da sie überall in der “Standardliteratur”, beispielsweise [6, 22, 29, 30], ein wenig anders eingeführt und behandelt werden. Apropos Literatur: Einen sehr fouilletonistischen bzw. journalistischen, aber durchaus korrekten und definitiv sehr lesbaren und lesenswerten Einstieg in die Materie gibt [23].

Definition 5.12 (Wavelets und Zulässigkeit) *Eine möglicherweise komplexwertige Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ heisst Wavelet¹³⁶, wenn sie mittelwertfrei ist, d.h., wenn*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (5.19)$$

gilt. Ein Wavelet heisst normalisiert, wenn $\|\psi\|_2 = 1$ und zulässig, wenn

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (5.20)$$

ist.

Der Name “Wavelet” für eine mittelwertfreie Funktion begründet sich dadurch, daß diese Funktion Anteile oberhalb und unterhalb der x -Achse haben muss und daher zumindest eine “wellenähnliche” Struktur hat.

Die Zulässigkeitsbedingung (5.20) verlangt insbesondere, daß

$$0 = \widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt$$

ist, jede zulässige Funktion ist also automatisch ein Wavelet, weswegen es sinnvoll ist, überhaupt nur von zulässigen Wavelets und nicht von zulässigen Funktionen zu sprechen. Ist außerdem ψ ein *relles Wavelet*, als $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist ja

$$\widehat{\psi}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{i\xi t} dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(t) e^{-i\xi t}} dt = \overline{\widehat{\psi}(\xi)}$$

und (5.20) vereinfacht sich ein wenig zu

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi + \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(-\xi)|^2}{|-\xi|} d\xi \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi, \end{aligned}$$

¹³⁶Ursprünglich “Ondelette”, was auch nichts anderes als “Wellchen” bedeutet.

also zu

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty. \quad (5.21)$$

Definition 5.13 Zu einem normalisierten Wavelet¹³⁷ ψ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist die Wavelettransformation als

$$W_\psi f(u, s) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt, \quad (u, s) \in \Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (5.22)$$

definiert.

Der etwas sperrige Term $1/\sqrt{|s|}$ sorgt dafür, daß auch das skalierte Wavelet

$$\psi_s := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi(s^{-1}\cdot), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.23)$$

normiert ist:

$$\|\psi_s\|_2 = \frac{1}{|s|} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t/s)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = \|\psi\|_2 = 1.$$

Schauen wir uns nun zuerst einmal die “klassischen” Beispiele für Wavelets an.

Beispiel 5.14 (Wavelets)

1. Das Haar–Wavelet ist die unstetige Funktion

$$\psi := \chi(\cdot + 1) - \chi = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0), \\ -1, & x \in (0, 1], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wieder $\chi = \chi_{[0,1]}$ ist. Das Haar–Wavelet ist das einzige unter den “klassischen” Wavelets, das kompakten Träger hat.

2. Das Mexican–Hat¹³⁸–Wavelet ist als

$$\psi(t) := (1 - t^2) e^{-t^2/2} = -\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

¹³⁷Die Definition eines Wavelets beinhaltet automatisch $\psi \in L_2(\mathbb{R})$.

¹³⁸Ins Deutsche auch gerne als “Mexikanischer Hut” übersetzt, obwohl im Deutschen eigentlich dann der spanisch/mexikanische Begriff *Sombrero* angemessener wäre. Das kommt davon, wenn man weder Englisch noch seine eigene Sprache so richtig spricht.

definiert. Es hat keinen kompakten Träger mehr, klingt aber für $x \rightarrow \infty$ exponentiell ab und verfügt daher immer noch über gute Zeitlokalisierung. Die zugehörige Fouriertransformation ist

$$\widehat{\psi}(\xi) = \sqrt{2\pi} \xi^2 e^{-\xi^2/2}$$

und stimmt damit im wesentlichen mit dem Wavelet selbst überein.

3. Das Morlet–Wavelet bzw. “Morlet’s Gaussian wavelet”, siehe [22], ist der komplexe Bruder des Mexican Hat und kombiniert dessen Abklingrate mit einer Phasenmodulation:

$$\psi(t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Die Oszillationsfrequenz ω ist ein Parameter, den man frei wählen kann. Genau genommen ist das Morlet–Wavelet, so wie es hier steht gar kein Wavelet, da $\int \psi \neq 0$ ist¹³⁹, aber das lässt sich relativ einfach durch einen passenden Korrekturterm beheben.

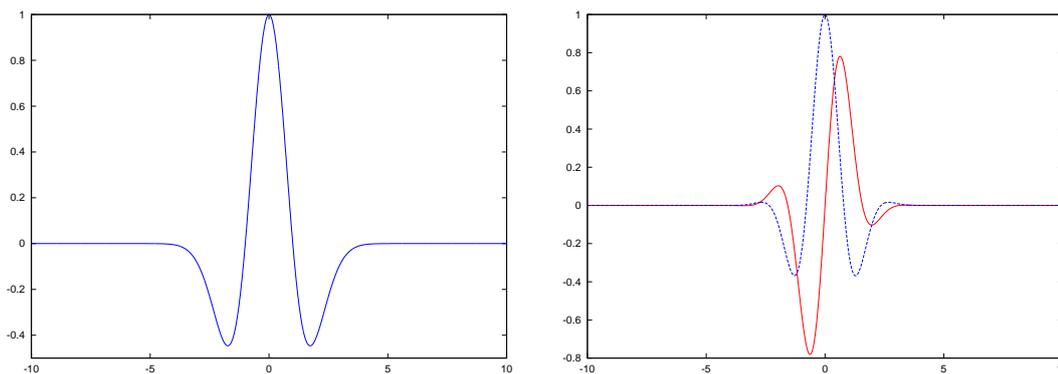


Abbildung 5.1: Der Mexican Hat (links) und das Morlet–Wavelet (rechts), wobei Real- und Imaginärteil separat geplottet sind.

Bemerkung 5.15 Die “Grundfunktion” $e^{-(\cdot)^2/2}$ beim Mexican Hat und dem Morlet–Wavelet ist natürlich kein Zufall. Wenn wir uns am Bemerkung 5.5 erinnern, hat diese Funktion gerade die dort angegebene Form (5.9) und besitzt somit die optimale Zeit-/Frequenz–Auflösung. Damit ist sie natürlich der Ideale Kandidat, um in der Wavelet–Ursuppe zu schwimmen.

¹³⁹Genauer gesagt: Es ist kein zulässiges Wavelet, aber da sind wir schon wieder in der Welt der Sprechweisen, denn in [22] heißt es, es wäre kein “progressives Wavelet”.

Übung 5.2 Bestimmen Sie die Fouriertransformierte des Haar–Wavelets und des Mexican Hat. \diamond

Für zulässige Funktionen ist auch diese Transformation wieder invertierbar, nur mit einem etwas anderen Integral.

Satz 5.16 Für ein normalisiertes, zulässiges Wavelet ψ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (5.24)$$

Beweis: Zuerst bemerken wir noch schnell¹⁴⁰, daß die Konjugation einer komplexwertigen Funktion f die Fouriertransformation

$$(\overline{f})^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{-i\xi t} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\xi t} dt} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$$

hat.

Im ersten “richtigen” Schritt unseres Beweises bestimmen wir wieder wie im Beweis von Satz 5.8 eine Fouriertransformierte der Wavelettransformation, nämlich

$$\begin{aligned} (W_\psi f(\cdot, s))^\wedge(\xi) &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_s(t-\cdot)} dt \right)^\wedge(\xi) \\ &= \left(f * \overline{\psi_s(-\cdot)} \right)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi_s}(\xi) \end{aligned}$$

also

$$(W_\psi f(\cdot, s))^\wedge(\xi) = \sqrt{s} \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}(s\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.25)$$

und somit, für $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f(\cdot, s))^\wedge(\xi) (\psi_s(t-\cdot))^\wedge(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |s| \widehat{f}(\xi) \widehat{\psi}(s\xi) e^{i\xi t} \overline{\widehat{\psi}(s\xi)} d\xi = \frac{|s|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \widehat{f}(\xi) \left| \widehat{\psi}(s\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Mit einer Integrationsvertauschung und der Variablentransformation $\omega = s\xi$ bekommen wir so für das volle Integral

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}$$

¹⁴⁰Da wir im “Fourierkapitel” ja immer nur reellwertige Funktionen betrachtet haben, müssen wir halt jetzt schnell in den saueren Apfel beißen.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(s\xi)|^2}{|s|} ds d\xi = \frac{1}{2\pi C_\psi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi}_{=(\widehat{f})^\vee(t)=f(t)} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega}_{=C_\psi} \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

genau wie behauptet. □

Mit genau denselben Methoden und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für reelle ψ die Beziehung $|\widehat{\psi}(-\xi)|^2 = |\widehat{\psi}(\xi)|^2$ gilt, erhält man für *reelle* Wavelets eine etwas einfachere Invertierungsformel, siehe [30].

Korollar 5.17 Für ein reelles Wavelet ψ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}, \quad C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi. \quad (5.26)$$

Bemerkung 5.18 (Wavelettransformation & Umkehrformel)

1. Die Identität (5.25) ist wie schon bei der Gabortransformation **das** Hilfsmittel zur schnellen Realisierung der Wavelettransformation über einen FFT-basierten Ansatz. In der Tat werden Wavelets zur besseren Implementierung gleich im Fouriertransformierten Bereich “designed”, oder man verwendet zumindest Wavelets, deren Fouriertransformierte explizit berechenbar ist – die muss man dann nur noch abtasten.
2. Natürlich gilt auch die Umkehrformel für die Wavelettransformation nur im L_2 -Sinn, also eigentlich nicht punktweise. Außerdem haben wir im Beweis ziemlich sorglos Integrationsgrenzen vertauscht, beinahe durch Null dividiert und so weiter. “Genauere” Versionen der Umkehrformel mit Beweisen finden sich beispielsweise in [6] oder [29].
3. Aus (5.25) kann man auch sehr schön die Redundanz der Wavelettransformation sehen, denn für $s, s' \in \mathbb{R}_+$ und $\xi \in \mathbb{R}$ ist

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{(W_\psi f(\cdot, s))^\wedge(\xi)}{\sqrt{s} \widehat{\psi}(s\xi)} = \frac{(W_\psi f(\cdot, s'))^\wedge(\xi)}{\sqrt{s'} \widehat{\psi}(s'\xi)},$$

also

$$(W_\psi f(\cdot, s))^\wedge(\xi) = \sqrt{\frac{s}{s'}} \frac{\widehat{\psi}(s\xi)}{\widehat{\psi}(s'\xi)} (W_\psi f(\cdot, s'))^\wedge(\xi). \quad (5.27)$$

Mit anderen Worten: Kennt man die Wavelettransformierte für ein s , dann kennt man sie eigentlich schon für alle s .

Als nächstes wollen wir uns, um endlich einmal einen Unterschied zur Gabortransformation zu sehen, die Heisenberg–Rechtecke der Atome bei der Wavelettransformation ansehen, was ja die Funktionen

$$\psi_{u,s} = \psi_s(\cdot - u) = \psi\left(\frac{\cdot - u}{s}\right), \quad (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

sind. Da für beliebiges $f \in L_2(\mathbb{R})$ und $u \in \mathbb{R}$

$$\mu_t(f(\cdot - u)) = \int_{\mathbb{R}} t |f(t - u)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} (t + u) |f(t)|^2 dt = \mu_t(f) + u$$

ist, können wir durch eine geeignete Verschiebung immer annehmen, daß das Wavelet ψ zentriert ist, daß also $\mu_t(\psi) = 0$ gilt. Die Frequenzlokalisierung $\mu_\xi(\psi)$ ist hingegen eine Konstante, die uns die “Grundoszillation” des Wavelets angibt.

Proposition 5.19 *Das Heisenberg–Rechteck $H(\psi_{u,s})$ zu einem zentrierten Wavelet ψ hat den Mittelpunkt $(u, s^{-1}\mu_\xi(\psi))$ sowie die Seitenlängen $s\sigma_t(\psi)$ und $\sigma_\xi(\psi)/s$.*

Beweis: Dann rechnen wir halt:

$$\begin{aligned} \mu_t(\psi_{u,s}) &= \int_{\mathbb{R}} t \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} (t+u) \left| \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} st |\psi(t)|^2 dt + u \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt = s\mu_t(\psi) + u = u, \end{aligned}$$

sowie für $s > 0$ ¹⁴¹

$$\begin{aligned} \mu_\xi(\psi_{u,s}) &= \int_{\mathbb{R}} \xi \left| \widehat{\psi}_{u,s} \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi \left| e^{i\xi u} \widehat{\psi}_s \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi \left| \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} s\xi \left| \widehat{\psi}(s\xi) \right|^2 d\xi = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} \xi \left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 d\xi = \frac{\mu_\xi(\psi)}{s}. \end{aligned}$$

Für die Varianzen erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(\psi_{u,s}) &= \int_{\mathbb{R}} (t - \mu_t)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (t-u)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right|^2 dt = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} t^2 \left| \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (st)^2 |\psi(t)|^2 dt = s^2 \sigma_t^2(\psi) \end{aligned}$$

¹⁴¹Für den ohnehin nicht so interessanten und leicht kontraintuitiven Fall $s < 0$ muss man ein paar Betragsstriche geeignet setzen.

und

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi}^2(\psi_{u,v}) &= \int_{\mathbb{R}} (\xi - s^{-1}\mu_{\xi})^2 \left| \widehat{\psi}_{u,s}(\xi) \right|^2 d\xi = s \int_{\mathbb{R}} (\xi - s^{-1}\mu_{\xi})^2 \left| \widehat{\psi}(s\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\xi - \mu_{\xi}}{s} \right)^2 \left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 d\xi = \frac{1}{s^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \mu_{\xi})^2 \left| \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 d\xi = \frac{\sigma_{\xi}^2(\psi)}{s^2}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.20 Proposition 5.19 zeigt sehr schön den fundamentalen Unterschied zwischen der Gabortransformation und der Wavelettransformation: Während die Gabortransformation mit **konstanter** Zeit- und Frequenzauflösung arbeitet, verwendet die Wavelettransformation eine **relative** Zeit- und Frequenzauflösung. In Bereichen hoher Frequenz, also kleiner Werte des Skalierungsparameters s ist die Zeitauflösung schärfer, dafür aber die absolute Frequenzauflösung geringer während die relative Frequenzauflösung konstant bleibt. In Bereichen niedriger Frequenz ist es genau umgekehrt, hier wird die Zeit unschärfer aufgelöst¹⁴² während die Frequenzen genauer lokalisiert werden.

5.5 Verschwindende Momente

Als Vorbereitung für die Regularitätsanalyse mittels Wavelets und damit auch die Interpretation von Wavelet-Spektrogrammen, wollen wir uns erst mit der Frage nach den verschwindenden Momenten eines Wavelets befassen.

Definition 5.21 Sei ψ ein zulässiges Wavelet. Die Momente von ψ sind die Werte

$$\mu_n := \int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Das Wavelet ψ hat n verschwindende Momente, wenn

$$\mu_k = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

erfüllt ist.

Nach der Definition (5.19) hat jedes Wavelet mindesten ein verschwindendes Moment, für “brave” Wavelets¹⁴³ kann man die Eigenschaft, verschwindende Momente zu haben, recht schön charakterisieren. Dazu noch eine Definition, die ziemlich an die Schwarz-Klasse aus Definition 2.15 erinnert.

¹⁴²Was unserer Philosophie entspricht: Ein Ton niedriger Frequenz braucht einfach ein klein wenig länger, um wenigstens eine Schwingung hinzubekommen.

¹⁴³Und dazu gehören alle unsere Beispiele.

Definition 5.22 Eine Funktion f heißt schnell abklingend, wenn

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^n f(t)| < \infty, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.28)$$

oder, äquivalent, wenn es Konstanten C_n , $n \in \mathbb{N}_0$, gibt, so daß

$$|f(t)| \leq \frac{C_n}{1 + |t|^n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.29)$$

gilt.

Satz 5.23 Ein schnell abklingendes Wavelet ψ hat genau dann n verschwindende Momente, wenn es eine schnell abklingende Funktion ϕ gibt, so daß

$$\psi = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \phi \quad (5.30)$$

ist.

Beweis: Nehmen wir an, ψ habe n verschwindende Momente. Nach (2.11) ist für $k < n$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = ((\cdot)^k \psi)^\wedge(0) = (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \widehat{\psi}(0),$$

also ist $\widehat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ für $k < n$ und damit können wir die immer noch beschränkte¹⁴⁴ Funktion

$$\widehat{\phi}(\xi) := \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{(-i\xi)^n}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

eingeführen, für die, wieder wegen (2.11), $\psi = \phi^{(n)}$ gilt, wie in (5.30) gefordert. Bleibt zu zeigen, daß ϕ schnell abklingt. Für $n = 1$ ist

$$\phi(t) = - \int_{-\infty}^t \psi(u) du = - \int_t^{\infty} \psi(u) du.$$

Also ist für $t > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$t^k |\phi(t)| \leq t^k \int_t^{\infty} |\psi(u)| du \leq \int_t^{\infty} u^k |\psi(u)| du \leq C_{k+2} \int_0^{\infty} \frac{u^k}{1 + u^{k+2}} du < \infty,$$

da sich für u hinreichend groß der Integrand wie u^{-2} verhält. Für $n \geq 1$ betrachten wir eine Folge $\phi_0 = \phi$, $\phi_k = -\phi'_{k-1}$, $\phi_n = \psi$, und wenden das obige Argument sukzessive auf ϕ_k , $k = n, \dots, 1$, an, um das schnelle Abklingen von ϕ_{k-1} zu erhalten.

Ist umgekehrt ϕ eine schnell abklingende Funktion, dann können wir partiell integrieren ohne Ränder berücksichtigen zu müssen und erhalten sofort, daß für $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = (-1) \int_{\mathbb{R}} t^k \phi^{(n)}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{d^n}{dt^n} (t^k)}_{=0} \phi(t) dt = 0$$

sein muss. □

¹⁴⁴Das ist L'Hospital!

5.6 Lipschitz meets Fourier

Die große Stärke der Wavelets besteht aber sicherlich darin, eine *lokale* Regularitätsanalyse zu ermöglichen, bei der man über die Abfallrate der Waveletkoeffizienten entlang der Skala auf lokale Glattheit der Funktion schließen kann – also ein Gegenstück zu (2.35), nur jetzt eben “an einer Stelle”. Dazu brauchen wir einen “kontinuierlichen” Stetigkeitsbegriff, der eine kontrollierte Form der Stetigkeit ermöglicht.

Definition 5.24 (Lipschitz–Stetigkeit)

1. Für $0 < \alpha < 1$ heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz–stetig von der Ordnung α mit Lipschitz–Konstante K_f an der Stelle $u \in \mathbb{R}$ wenn

$$|f(t) - f(u)| \leq K_f |t - u|^\alpha, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.31)$$

Offensichtlich ist jede Lipschitz–stetige Funktion auch stetig an u .

2. Eine Funktion heißt Lipschitz–stetig, wenn es eine Lipschitz–Konstante K_f gibt, so daß (5.31) für alle $u \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
3. Eine Funktion heißt Lipschitz–stetig von der Ordnung $n + \alpha$, $n \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha < 1$, wenn es K_f und ein Polynom $p \in \Pi_n$ gibt, so daß

$$|f(t) - p_u(t)| \leq K_f |t - u|^{n+\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.32)$$

gilt, wobei normalerweise¹⁴⁵

$$p_u = T_{n,u}f = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}}{j!} (\cdot - u)^j$$

das Taylorpolynom der Ordnung n ist.

4. Die Klasse der Lipschitz–stetigen Funktionen der Ordnung $n + \alpha$ bezeichnen wir mit $\text{Lip}_{n+\alpha}$.

Die obige Definition der Lipschitz–Stetigkeit ist aus [30] – im Kontext der Approximations Theorie sieht die Definition über Differenzoperatoren etwas anders aus [8, 28], liefert aber im Endeffekt dasselbe. Der Bezug ist die Tatsache¹⁴⁶, daß

$$f \in \text{Lip}_{n+\alpha}(\mathbb{R}) \quad \iff \quad f \in C^n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad f^{(n)} \in \text{Lip}_\alpha(\mathbb{R}). \quad (5.33)$$

¹⁴⁵Nämlich wenn $f \in C^n(\mathbb{R})$ ist.

¹⁴⁶Findet man in [30] dann mal so zwischen den Zeilen in einem Beweis und bedeutet, daß man das “magische” p_u in (5.32) wirklich als $T_{n,u}f$ wählen kann.

Im Übrigen ist (5.32) schon eine *lokale* Eigenschaft, zumindest solange f beschränkt ist, denn p_u steigt ja maximal wie $|t - u|^n$.

Und Achtung: Lipschitz–Stetigkeit für ganzzahlige Exponenten funktioniert nicht richtig, siehe [28, 36]. **Globale** Lipschitz–Stetigkeit kann man über die Fouriertransformation beschreiben.

Satz 5.25 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und gleichmäßig Lipschitz–stetig von der Ordnung α falls*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha) d\xi < \infty \quad (5.34)$$

gilt.

Beweis: Beschränktheit ist einfach: Mit der inversen Fouriertransformation ist für $t \in \mathbb{R}$

$$2\pi |f(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \underbrace{|e^{i\xi t}|}_{=1} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha) d\xi$$

und das Integral ganz rechts ist von t unabhängig und endlich.

Bei der Lipschitz–Stetigkeit beginnen wir mit dem Fall $0 < \alpha < 1$, wo wir für die Existenz einer Konstanten K_f nachweisen müssen, so daß für alle $x, u \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{|f(t) - f(u)|}{|t - u|^\alpha} \leq K_f$$

erfüllt ist. Wieder mit der inversen Fouriertransformation ist

$$\begin{aligned} & \frac{|f(t) - f(u)|}{|t - u|^\alpha} \\ &= \frac{1}{2\pi |t - u|^\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) (e^{i\xi t} - e^{i\xi u}) d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \frac{|e^{i\xi t} - e^{i\xi u}|}{|t - u|^\alpha} d\xi \end{aligned}$$

Nun ist, mit $v \in [0, t - u]$,

$$|e^{i\xi t} - e^{i\xi u}| = \underbrace{|e^{i\xi u}|}_{=1} |e^{i\xi(t-u)} - 1| \leq \begin{cases} 2 \\ |\xi| |t - u| |e^{i\xi v}| = |\xi| |t - u| \end{cases}$$

Die erste Abschätzung verwenden wir für den Fall, daß $|\xi| |t - u| \geq 1$, also $|\xi| \geq |t - u|^{-1}$ und erhalten, daß

$$\frac{|e^{i\xi t} - e^{i\xi u}|}{|t - u|^\alpha} \leq \frac{2}{|t - u|^\alpha} \leq 2 |\xi|^\alpha \leq 2 (1 + |\xi|^\alpha)$$

wohingegen wir für $|\xi| \leq |t - u|^{-1}$ die zweite Abschätzung ausnutzen und ebenfalls

$$\frac{|e^{i\xi t} - e^{i\xi u}|}{|t - u|^\alpha} \leq \frac{|\xi| |t - u|}{|t - u|^\alpha} = |\xi| |t - u|^{1-\alpha} \leq |\xi| |\xi|^{\alpha-1} \leq 2(1 + |\xi|^\alpha)$$

bekommen. Also ist

$$\frac{|f(t) - f(u)|}{|t - u|^\alpha} \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^\alpha) d\xi =: K_f.$$

Der allgemeine Fall ist nun dank (5.33) sehr einfach, weil wir wieder nur den Fall $0 < \alpha < 1$ untersuchen müssen, jetzt aber für die Funktion $f^{(n)}$, deren Fouriertransformierte bekanntlich $(-i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$ ist. \square

5.7 Wavelets und lokale Glattheit

So, jetzt wird es aber Zeit, daß wir uns schön langsam an die Beschreibung der *lokalen* Lipschitz–Stetigkeit über das Abklingverhalten der Wavelettransformierten machen. Aus Satz 5.25 wissen wir ja nun schon, daß ein schnelles Abklingen der Fouriertransformation für $\xi \rightarrow \pm\infty$ auch für Lipschitz–Stetigkeit sorgt, und zwar für globale. Das lokale Resultat verwendet Wavelets und ist wesentlich genauer – allerdings muss das Wavelet auch zur Glattheit der Funktion passen.

Satz 5.26 *Sei ψ ein Wavelet mit n verschwindenden Momenten und schnell abklingenden Ableitungen der Ordnung $\leq n$.*

1. *Ist $f \in L_2(\mathbb{R})$ Lipschitz–stetig von der Ordnung $\alpha < n$ an $x \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Konstante C , so daß*

$$|W_\psi f(u, s)| \leq C s^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u-x}{s} \right|^\alpha \right), \quad (u, s) \in \Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad (5.35)$$

2. *Ist umgekehrt $\alpha \notin \mathbb{N}$ und existieren C sowie $\alpha' < \alpha$, so daß*

$$|W_\psi f(u, s)| \leq C s^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{u-x}{s} \right|^{\alpha'} \right), \quad (u, s) \in \Gamma, \quad (5.36)$$

dann ist f Lipschitz–stetig von der Ordnung α an x .

Bemerkung 5.27

1. *Satz 5.26 sagt uns also, daß die lokale Lipschitz–Stetigkeit einer Funktion durch die Abklingrate der Wavelettransformation bezüglich des Skalierungsparameters s für $s \rightarrow 0$ vollständig charakterisiert wird. Der Zusatzterm $(1 + \dots)$ in (5.35) und (5.36) dient lediglich der Lokalisierung.*

2. Das obige Resultat ist fast eine Charakterisierung, wäre da nicht das $\alpha' < \alpha$ in (5.36).

Beweis von Satz 5.26: Beginnen wir mit dem Beweis von (5.35). Dazu nehmen wir das “magische” p_x aus (5.32) und berücksichtigen, daß das Wavelet n verschwindende Momente hat, um zusammen mit (5.43) auf

$$\begin{aligned}
|W_\psi f(u, s)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - p_x(t)) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f(t) - p_x(t)|}_{\leq K_f |t-x|^\alpha} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} \right| dt \leq K_f \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} |st + u - x|^\alpha |\psi(t)| dt \\
&\leq 2^\alpha K_f \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} (|st|^\alpha + |u - x|^\alpha) |\psi(t)| dt \\
&\leq 2^\alpha K_f \sqrt{s} \left(s^\alpha \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^\alpha) |\psi(t)| dt + |u - x|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt \right) \\
&= 2^\alpha K_f C s^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{|u - x|^\alpha}{s^\alpha} \right), \quad C := \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^\alpha) |\psi(t)| dt}_{< \infty} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt}_{< \infty}
\end{aligned}$$

zu kommen, was genau (5.35) ist.

Die Umkehrung, also der Beweis der Lipschitz–Stetigkeit von f , ist etwas aufwendiger. Indem wir die Umkehrformel (5.24) in Stücke hacken, erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \\
&= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon[2^j, 2^{j+1}]} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \frac{ds}{s^2} du \\
&= \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{\epsilon, j}(t) \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Der Gag bei einer solchen *Littlewood–Summe*¹⁴⁷ besteht darin, daß die Integrationsintervalle um den Ursprung herum immer dichter werden, für $t \rightarrow \infty$ hingegen immer größer – das ist wie bei den Heisenberg–Rechtecken der Wavelets wieder ein Konzept

¹⁴⁷Solche Zerlegungen gabe es schon lange vor den Wavelets, die Technik wurde also nicht erst mit den Wavelets erfunden.

von *relativer Genauigkeit*. Aber zurück zum Beweis: Unter Verwendung der Voraussetzungen (5.36) und (5.29) ist¹⁴⁸ für $j > 0$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& |f_{\epsilon,j}(t)| \\
& \leq \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon[2^j \cdot 2^{j+1}]} \underbrace{|W_\psi f(u, s)|}_{\leq C |s|^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(1 + \left|\frac{u-x}{s}\right|^{\alpha'}\right)} \frac{1}{\sqrt{|s|}} \underbrace{\left|\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)\right|}_{\leq C_m (1+|s^{-1}(t-u)|^m)^{-1}} \frac{ds}{s^2} du \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon[2^j \cdot 2^{j+1}]} \underbrace{|s|^\alpha}_{\leq 2^{(j+1)\alpha}} \underbrace{\left(1 + \left|\frac{u-x}{s}\right|^{\alpha'}\right)}_{\leq 1 + \left|\frac{u-x}{2^j}\right|^{\alpha'}} \underbrace{\left(1 + \left|\frac{t-u}{s}\right|^m\right)^{-1}}_{\leq (1 + \left|\frac{t-u}{2^{j+1}}\right|^n)^{-1}} \underbrace{s^{-2}}_{\leq 2^{-2j}} ds du \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}} 2^{\alpha j} \left(1 + \left|\frac{u-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right) \left(1 + \left|\frac{t-u}{2^j}\right|^m\right)^{-1} \frac{du}{2^j},
\end{aligned}$$

und nachdem sich alle Entscheidungen $j > 0$ bzw. $j < 0$ und die daraus resultierende Wahl von 2^j oder 2^{j+1} in die Konstante schieben lässt, gilt die Abschätzung für $\epsilon \in \{\pm 1\}$ und $j \in \mathbb{Z}$. Nochmal mit¹⁴⁹ (5.43) ist

$$|u-x|^{\alpha'} = |(u-t) + (t-x)|^{\alpha'} \leq 2^{\alpha'} \left(|u-t|^{\alpha'} + |t-x|^{\alpha'}\right).$$

Also¹⁵⁰:

$$\begin{aligned}
|f_{\epsilon,j}(t)| & \leq C \int_{\mathbb{R}} 2^{\alpha j} \left(1 + 2^{\alpha'} \left|\frac{u-t}{2^j}\right|^{\alpha'} + 2^{\alpha'} \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right) \left(1 + \left|\frac{u-t}{2^j}\right|^m\right)^{-1} \frac{du}{2^j} \\
& = C 2^{\alpha j} 2^{\alpha'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |u|^{\alpha'} + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}}{1 + |u|^m} du \\
& = C 2^{\alpha j} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |u|^{\alpha'}}{1 + |u|^m} du + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |u|^m} du\right) \\
& \leq C 2^{\alpha j} \left(1 + \left|\frac{t-x}{2^j}\right|^{\alpha'}\right),
\end{aligned}$$

¹⁴⁸Wir folgen nun der schönen Tradition, daß "C" für eine Konstante steht, die sich in jedem Schritt der Abschätzung ändern darf.

¹⁴⁹Was einmal klappt, klappt garantiert auch ein zweites Mal.

¹⁵⁰Unter Verwendung einer Variablentransformation $u \mapsto 2^j u + t$.

mit einer letztlich von n abhängigen Konstante C , die aber endlich bleibt, solange wir nur $m > \alpha' + 2$ wählen. Mit analogen Methoden¹⁵¹ erhalten wir, daß

$$\left| f_{\epsilon,j}^{(k)}(t) \right| \leq C_k 2^{(\alpha-k)j} \left(1 + \left| \frac{t-x}{2^j} \right|^{\alpha'} \right), \quad 0 \leq k < \alpha, \quad (5.38)$$

und insbesondere

$$\left| f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \right| \leq C_k 2^{(\alpha-k)j}, \quad 0 \leq k < \alpha, \quad (5.39)$$

Damit haben wir schnelle Konvergenz dieser Ausdrücke für $j \rightarrow -\infty$, da ja α eben keine ganze Zahl ist. Für $j \rightarrow +\infty$ verwenden wir zuerst die einfache Abschätzung $|W_\psi f(u, s)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2 = \|f\|_2$, $(u, s) \in \Gamma$, die direkt aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung folgt, und dann die alternative Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| f_{\epsilon,j}^{(k)}(t) \right| &\leq \frac{\|f\|_2}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\epsilon[2^j, 2^{j+1}]} \frac{1}{|s|^{k+\frac{1}{2}}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right| \frac{ds}{s^2} du \\ &= \frac{\|f\|_2}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^k}{dx^k} \psi(u) \right| du \int_{\epsilon[2^j, 2^{j+1}]} |s|^{-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

also auch

$$\left| f_{\epsilon,j}^{(k)}(t) \right| \leq C 2^{-j(k+\frac{1}{2})}, \quad 0 \leq k < \alpha. \quad (5.40)$$

Wegen (5.39) und (5.40) konvergieren die Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \quad \text{und} \quad \sum_{j=-\infty}^0 f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \quad \text{also auch} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x)$$

absolut und damit ist das (Taylor–)Polynom

$$p_x(t) := \sum_{k=0}^{[\alpha]} \left(\sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \right) \frac{(t-x)^k}{k!} \quad (5.41)$$

wohldefiniert, das nun genau die in der Definition (5.32) vorgesehene Rolle spielen wird.

Unter Verwendung von (5.37) ist somit

$$|f(t) - p_x(t)| = \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \left(f_{\epsilon,j}(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \frac{(t-x)^k}{k!} \right) \right|.$$

¹⁵¹In [30]: “The same derivations applied to the derivatives ...”.

Nun suchen wir uns dasjenige $j^* \in \mathbb{Z}$, so daß $2^{j^*} \geq |t-x| \geq 2^{j^*-1}$ und spalten die Summe über j genau an dieser Stelle in zwei Teile. Für den ersten Teil erhalten wir unter Verwendung des Taylor–Restglieds, daß es $x_{\epsilon,j} \in [t,x]$, also mit $|x_{\epsilon,j} - t| \leq 2^{j^*}$, gibt, was zusammen mit (5.38)

$$\begin{aligned}
& \sum_{\epsilon=\pm 1} \left| \sum_{j=j^*}^{\infty} \left(f_{\epsilon,j}(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \frac{(t-x)^k}{k!} \right) \right| \\
& \leq \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=j^*}^{\infty} \left| f_{\epsilon,j}^{[\alpha]+1}(x_{j,\epsilon}) \frac{(t-x)^{[\alpha]+1}}{([\alpha]+1)!} \right| \\
& \leq \frac{C_k}{([\alpha]+1)!} \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=j^*}^{\infty} 2^{(\alpha-[\alpha]-1)j} \left(1 + \left| \frac{x_{\epsilon,j} - t}{2^j} \right|^{\alpha'} \right) |t-x|^{[\alpha]+1} \\
& \leq C |t-x|^{[\alpha]+1} \sum_{j=j^*}^{\infty} 2^{-j([\alpha]+1-\alpha)} \underbrace{\left(1 + 2^{(j^*-j)\alpha'} \right)}_{\leq 2} \\
& \leq C |t-x|^\alpha \underbrace{|t-x|^{[\alpha]+1-\alpha}}_{\leq 2^{j^*([\alpha]+1-\alpha)}} 2^{-j^*([\alpha]+1-\alpha)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j([\alpha]+1-\alpha)} \\
& \leq K_+ |t-x|^\alpha
\end{aligned}$$

ergibt. Für die andere Hälfte der Summe verwenden wir demokratisch einmal (5.38) und einmal (5.39) und landen damit bei

$$\begin{aligned}
& \sum_{\epsilon=\pm 1} \left| \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(f_{\epsilon,j}(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} f_{\epsilon,j}^{(k)}(x) \frac{(t-x)^k}{k!} \right) \right| \\
& \leq C \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(2^{\alpha j} \left(1 + \left| \frac{t-x}{2^j} \right|^{\alpha'} \right) + \sum_{k=0}^{[\alpha]} 2^{(\alpha-k)j} \frac{|t-x|^k}{k!} \right) \\
& \leq C \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(\underbrace{2^{(j^*-1)\alpha}}_{\leq |t-x|^\alpha} + \underbrace{2^{(j^*-1)(\alpha-\alpha')}}_{\leq |t-x|^{\alpha-\alpha'}} |t-x|^{\alpha'} + \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{|t-x|^k}{k!} \underbrace{2^{(\alpha-k)(j^*-1)}}_{\leq |x-t|^{\alpha-k}} \right) \\
& \leq C |t-x|^\alpha \sum_{j=-\infty}^{j^*-1} \left(2 + \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{1}{k!} \right) =: K_- |t-x|^\alpha.
\end{aligned}$$

Ingesamt ist somit

$$|f(t) - p_x(t)| \leq \underbrace{(K_+ + K_-)}_{=: K_f} |t-x|^\alpha \quad (5.42)$$

was gerade die gewünschte Lipschitzstetigkeit von f ist. \square

Übung 5.3 Beweisen Sie die Identität

$$|a + b|^\alpha \leq 2^\alpha (|a|^\alpha + |b|^\alpha), \quad (5.43)$$

die im ersten Teil des Beweises von Satz 5.26 verwendet wurde.

Hinweis: Höldersche Ungleichung! \diamond

*Uns ist in alten mæren
wunders viel geseit
von Helden lobebæren
von grôzer arebeit*

Das Nibelungenlied

Literatur

5

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions*, Dover, 1972, 10th printing.
- [2] N. I. Akhieser, *Lectures on integral transforms*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 70, AMS, 1988.
- [3] Antares, *Auto-Tune*, <http://www.antarestech.com>, 2009.
- [4] D. J. Benson, *Music. A mathematical offering*, Cambridge University Press, 2007.
- [5] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik I*, Berlin, 1931.
- [6] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, SIAM, 1992.
- [7] J. M. DeVilliers, C. A. Micchelli, and T. Sauer, *Building refinable functions from their values at integers*, *Calcolo* **37** (2000), no. 3, 139–158.
- [8] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 303, Springer, 1993.
- [9] E. Doblhofer, *Zeichen und wunder. geschichte und entzifferung verschollener schriften und sprachen*, Paul Neff Verlag, Wien. Lizenzausgabe Weltbild Verlag, 1990.
- [10] FFTW, *FFTW – the Fastest Fourier Transform in the West*, <http://www.fftw.org>, 2003.
- [11] O. Föllinger, *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüthig, 2000.

- [12] O. Forster, *Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*, 3. ed., Vieweg, 1984.
- [13] D. Gabor, *Theory of communication*, J. IEEE **93** (1946), 429–457.
- [14] C. Gasquet and P. Witomski, *Fourier analysis and applications. Filtering, numerical computation, wavelets*, Texts in Applied Mathematics, vol. 30, Springer, 1998.
- [15] J. von zur Gathen and J. Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, 1999.
- [16] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics*, 2nd ed., Addison–Wesley, 1998.
- [17] D. Ch. von Grünigen, *Digitale Signalverarbeitung*, VDE Verlag, AT Verlag, 1993.
- [18] R. W. Hamming, *Digital filters*, Prentice–Hall, 1989, Republished by Dover Publications, 1998.
- [19] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis. volume 2*, Wiley, 1977.
- [20] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil I*, 3. ed., B. G. Teubner, 1984.
- [21] E. Hille, *Analytic function theory*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, 1982.
- [22] M. Holschneider, *Wavelets: an analysis tool*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [23] B. B Hubbard, *The world according to wavelets*, A.K. Peters, 1996.
- [24] D. Jackson, *Fourier series and orthogonal polynomials*, The Carus Mathematical Monographs, no. 6, Mathematical Association of America, 1941, Dover reprint 2004.
- [25] K. D. Kammeyer and K. Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung*, Teubner Studienbücher Elektrotechnik, B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [26] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, 2. ed., Dover Books on advanced Mathematics, Dover Publications, 1976.
- [27] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [28] G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, Chelsea Publishing Company, 1966.
- [29] A. K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder, *Wavelets*, 2. ed., B. G. Teubner, 1998.

- [30] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, 2. ed., Academic Press, 1999.
- [31] F. Natterer and F. Wübbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*, SIAM, 2001.
- [32] G. Olafsson and E. T. Quinto (eds.), *The radon transform, inverse problems, and tomography*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 65, AMS, 2006.
- [33] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar, New York, 1955, Dover reprint 1990.
- [34] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw–Hill Book Company, 1993.
- [35] T. Sauer, *Computeralgebra*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, 2001, <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- [36] ———, *Approximationstheorie*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, 2002, <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- [37] ———, *Digitale Signalverarbeitung*, Vorlesungsskript, Justus–Liebig–Universität Gießen, 2003, <http://www.math.uni-giessen.de/tomas.sauer>.
- [38] I. J. Schoenberg, *Cardinal spline interpolation*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 12, SIAM, 1973.
- [39] A. Schönhage and V. Strassen, *Schnelle Multiplikation großer Zahlen*, Computing **7** (1971), 281–292.
- [40] H. W. Schübler, *Digitale Signalverarbeitung*, 3. ed., Springer, 1992.
- [41] C. E. Shannon, *Communications in the presence of noise*, Proc. of the IRE **37** (1949), 10–21.
- [42] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 5th ed., AMS, 1939.
- [43] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to functional analysis*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1980.
- [44] C. van Loan, *Computational frameworks for the Fast Fourier Transform*, SIAM, 1992.
- [45] J. Whittaker, *Interpolatory function theory*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, vol. 33, 1935.

- [46] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, 1946.
- [47] K. Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1965.

- Abschluss, 22
- Abtastatz, 37
- Abtastung, 36
- Aliasing, 40
- Asymptotik, 52
- Auflösung
 - Frequenz-, 54
- Bézout-Identität, 65
- bandbeschränkt, 35
- BESSEL, F. W., 47
- BONAPARTE, N., 8
- Box
 - Heisenberg, 81
- Bruch
 - Partial-, 65
- CHAMPOLLION, J. F., 8
- Charakter
 - dualer, 18
- DFT, 84
- Differentialgleichung, 57
- Differentialoperator
 - partieller, 33
- Differenzgleichung, 57
- Dilatation, 9
- Diskriminante, 68
- Distribution, 22
 - Dirac-, 32
 - reguläre, 22
 - temperierte, 9
- Einheitskugel, 27
- Faltung, 10, 43, 76
- Fan Beam, 56
- Fejér-Typ, 19
- FFT, 84
- Filter, 32
 - Bandpass-, 34
 - Hochpass-, 34
 - Ram-Lak, 45
 - Tiefpass-, 34
 - idealer, 44
- FOURIER, J. B., 8
- Fourierreihe, 3, 17, 18
- Fouriertransformation
 - inverse, 11
 - Siehe Transformation, Fourier-, 7
- Fouriertransformierte, 10, 15
 - Normalisierung, 9, 37
- Frequenz
 - Abtast-, 37
 - Nyquist-, 37
- Funktion
 - gerade, 49
- Funktion
 - Übertragungs-, 64
 - bandbeschränkte, 37
 - bandbeschränkte, *siehe* bandbeschränkt 35
 - Bessel-, 47
 - Asymptotik, 52
 - gerade, 41
 - Heaviside, 58
 - mittelwertfreie, *siehe* Wavelet 86
 - periodische, 3, 16
 - radiale, 44
 - Rampen-, 59
 - Rekonstruktions-, 41

- Schalt-, 57
- schnell abfallende, 23
- schnell abklingende, 93
- sinc-, *siehe* sinc 34
- Sprung-, 58
- Test-, 22
- Transfer-, 33
- ungerade, 42
- vollständig monotone, 69
- zentrierte, 91
- Funktional
 - positives, 71
- GABOR, D., 81
- GAUSS, C. F., 47
- Gruppe
 - duale, 9
- HEISENBERG, W., 79
- Hyperebene, 28, 41
- Impulsantwort, 32
- Integral
 - Linien, 6
 - Linien-, 5
 - Riemann–Stieltjes, *siehe* Integral, Stieltjes-
70
 - Stieltjes-, 70
- Integraltransformation, 2
- Interpolation, 65
- Isometrie, 15
- Kern, 2, 19
 - Fejér-, 12
 - Poisson-, 21
 - Weierstrass, 19
- Klangfarbe, 3
- Konstante
 - Lipschitz-, 94
- Koordinaten
 - Polar-, 26
- Liftig scheme, 66
- Linienintegral, *siehe* Integral, Linien- 5
- Lipschitz–Konstante, 94
- Lokalisierung
 - Frequenz-, 78
 - perfekte, 78, 79
 - Zeit-, 78
 - perfekte, 79
- Matrix
 - orthogonale, 28
- Maß
 - diskretes, 3
 - Haar-, 9
- Mittelung, 19
- Momente, 92
 - verschwindende, 92
- Monotonie
 - vollständige, 69
- Multiplikator, 43
 - Fourier, 21
- Oberton, 3
- Ondelette, *siehe* Wavelet 86
- Operator, 2
 - Abtast-, 36, 37
 - adjungierter, 30
 - Pseudodifferential-, 43
 - Sampling-, 36
- Oszillator, 68
- Oversampling, 38
- Partialbruchzerlegung, 66
- Partialton, 3, 4
- Periodisierung, 16, 40
- Phase, 8
- Phasenverschiebung, 11
- Plancherel, 15
- POISSON, S., 18
- Polarkoordinaten, 26
- Polynom, 57
 - Laguerre, 73
 - Laurent-, 65

- orthogonales, 73
- Potential
 - Riesz, 43
 - Riesz-, 24
- Problem
 - inverses, 2
- Pseudodifferentialoperator, 43
- Puls
 - Rechtecks-, 59
- Punkt
 - Lebesgue, 19
- Quadraturformel, 55
- Quasiinterpolant, 37, 85
- Quadraturformel, 5
- Radontransformation, *siehe* Transformation, Radon- 4
- Rechteck
 - Heisenberg, 81
- Rechtecksregel, 55
- Reihe
 - Fourier, 17
 - Fourier-, 3, 3
- Rückprojektion, 29
 - gefilterte, 30, 54
- Sampling, 36
- Satz
 - Bernstein, 71
 - Einbettungs-, 25
 - Paley–Wiener, 36
- Scanning
 - parallel, 54
- Schwarz–Klasse, 23
- Schwingung
 - harmonische, 4
- SHANNON, C., 36
- Signal, 32
- sinc, 34, 35, 37
- Sinus Cardinalis, *siehe* sinc 34
- Slice
 - Fourier, 29
 - Projection, 28
- Sobolev
 - Einbettungssatz, 25
- Sombrero, 87
- Spektrogramm, 82
- Sphäre, 27
- Spiral–CT, 56
- Stetigkeit
 - Lipschitz-, 94
- Summe
 - Littlewood, 97
- Summenformel
 - Poisson-, 18
- System
 - lineares, 33
- Testfunktion, 22
- Tomographie
 - Computer-, 4
- Torus, 16
- Träger
 - kompakter, 87
- Transformation
 - Bessel-
 - diskrete, 52
 - Fourier
 - gefensterte, 77
 - Fourier-, 7
 - diskrete, 84
 - Kurzzeit, 81
 - schnelle, 84
 - Gabor-, 81
 - Integral-, 2
 - Laplace-, 57, 58
 - Radon-, 4, 6, 27, 27
 - duale, 29
 - inverse, 29
 - Wavelet, 87
 - Wavelet-, 76
 - Zeit–Frequenz, 77

Translation, 9

Träger, 22

Ungleichung

Cauchy–Schwarz, 80

Unschärferelation

Heisenbergersche, 79

Variation

beschränkte, 70

totale, 70

Wavelet, 76

Haar-, 87

Mexican Hat, 87

Morlet-, 88

normalisiertes, 86

progressives, 88

reelles, 86, 90

skaliertes, 87

verschwindende Momente, 92

zentriertes, 91

zulassiges, 86

zeitinvariant, 32

Zerlegung, 69

Partialbruch-, 65