

Bachelorarbeit
an der Universität Passau
Fachschaft für Informatik und Mathematik
zum Thema

**Spieltheoretische Betrachtungen der
Kartenspiele
Blackjack und Poker**



vorgelegt von

Kathrin Schiermeier

Matrikelnummer 70729

Studiengang Mathematik

Hütten 2, 94121 Salzweg

kathrin-schiermeier@t-online.de

Betreuer

Prof. Dr. Tomas Sauer

Lehrstuhl für Mathematik mit
Schwerpunkt

Digitale Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1	Poker und Blackjack in der Popkultur	3
2	Spieltheoretische Betrachtung der Kartenspiele Blackjack und Poker	4
2.1	Spiele, Strategien und das Minimax-Theorem	4
2.1.1	Reine Strategien	4
2.1.2	Auszahlung und Normalform	6
2.1.3	Auswahl einer Strategie	7
2.1.4	Gemischte Strategien	12
2.1.5	Lösungen im Sinne der gemischten Strategien und das Minimax-Theorem	16
2.1.6	Symmetrische Spiele	23
2.2	Blackjack	24
2.3	Das Poker-Modell nach John von Neumann	29
2.3.1	Die Spielregeln des vereinfachten Poker-Modells	30
2.3.2	Die Auszahlungsmatrix des Pokerspiels	31
2.3.3	Gemischte Strategien für das Pokerspiel	33
2.3.4	Die beste Strategie	35
2.3.5	Anschauliche Interpretation der Lösung	46
2.3.6	Verallgemeinerung der Regeln und ihre Auswirkungen auf die optimale Strategie	48
2.3.7	Das Poker-Modell nach Borel - Ein kurzer Vergleich	55
3	Mathematik und Psychologie	58
	Literatur	60
	Abbildungsverzeichnis	61
	Medienverzeichnis	61
	Anhang	62
	Eidesstattliche Erklärung	67

1 Poker und Blackjack in der Popkultur

Nach einem kurzen Blick auf seine Karten setzt er 500.000 und beobachtet sein Gegenüber genau. Dieses spielt mit den Chips in seiner Hand und scheint sich seinen nächsten Zug genau zu überlegen, wobei es Zeige- und Mittelfinger an die Schläfe führt. Bond weiß, dass genau diese subtile Bewegung darauf hindeutet, dass sein Gegner Le Chiffre blufft. Als Le Chiffre den Einsatz auf eine Million erhöht, verdoppelt Bond diesen Betrag siegessicher. Die Kontrahenten tauschen kurz Blicke aus und Le Chiffre, der mit dem Geld von Terroristen spekuliert und dabei kürzlich eine hohe Summe verloren hat, die es zurückzugewinnen gilt, setzt alles und Bond geht mit. [Cas06, 01:23:00 bis 01:25:40] Die geschilderte Szene stammt aus dem Bond-Film *Casino Royale* von 2006, in dem das Kartenspiel Poker neben einem gewaltigen Geldbetrag eine zentrale Rolle spielt. Auch im Film *21* vom Regisseur Robert Luketic aus dem Jahre 2008 geht es darum, Geld zu gewinnen, jedoch mit der unschuldigeren Absicht, ein Studium zu finanzieren. Mittel zum Zweck ist hier Blackjack [21Trai12, 00:00:00 bis 00:02:07]. Diese beiden Filme sind nur zwei Beispiele dafür, dass Spiele, beziehungsweise speziell Kartenspiele in den Unterhaltungsmedien unserer Zeit nicht selten einen wesentlichen Teil der Handlung einnehmen. Archäologische Funde belegen, dass Menschen in allen Zeitaltern der Geschichte ihre Spiele in ihrer Kunst und Literatur aufgegriffen und verewigt haben, was auf den Stellenwert von Spielen für den Menschen hinweist. Daher ist es auch nicht verwunderlich, dass sich früher oder später auch Mathematiker mit Spielen beschäftigen [Bea89, S. 1]. Genau das ist das Thema dieser Arbeit: Die bereits genannten Spiele Blackjack und Poker sollen aus einer spieltheoretischen Perspektive betrachtet werden. Der erste Teil der Arbeit erläutert dabei zunächst die begrifflichen Grundlagen aus der Spieltheorie, die dem Leser vertraut sein müssen. Danach wird auf Blackjack eingegangen. Die Ausführungen dazu orientieren sich an denen von Karlin, werden aber um solche ergänzt, die analog zu denen von John von Neumann verlaufen, wie er sie für sein Poker-Modell anstellt, um den Einstieg in eben dieses zu erleichtern, weil es im Anschluss durchgegangen wird. Nach einer kurzen Vorstellung der Ergebnisse, die Borel im Rahmen seiner Überlegungen zum Pokerspiel erzielt hat, und einem kleinen Vergleich dieser mit denen von John von Neumann folgt zum Abschluss ein kurzes Fazit über die Anwendbarkeit der spieltheoretischen Erkenntnisse in der Realität.

2 Spieltheoretische Betrachtung der Kartenspiele Blackjack und Poker

2.1 Spiele, Strategien und das Minimax-Theorem

Bevor sich die Arbeit den beiden Kartenspielen zuwendet, muss auf einige Grundlagen eingegangen werden, die wesentlich für das Verständnis der späteren Ausführungen sein werden. Bei beiden Spielen handelt es sich um sogenannte Zwei-Personen-Nullsummenspiele, beziehungsweise sollen sie auf ein solches reduziert werden. Die Bedeutung dieses Begriffs ist in Teilen intuitiv erschließbar. Es handelt sich dabei nach Thomas zunächst einfach um Spiele, die von zwei Personen gespielt werden [Tho12, S. 39]. Da weder bei Poker, noch bei Blackjack die Anzahl der Spieler auf zwei beschränkt ist, handelt es sich hierbei um einen Punkt, bei dem eine Vereinfachung vorgenommen wird. Das heißt, die Arbeit wird immer von einem Spiel mit nur zwei Kontrahenten ausgehen, und orientiert sich mit dieser Entscheidung an John von Neumanns Poker-Modell und anderen Arbeiten zu diesem Thema. Nach Karlin handelt es sich dabei jedoch nicht um eine wesentliche Einschränkung der Realität, da man ein Spiel mit beliebig vielen Spielern immer als ein Spiel mit nur zwei Parteien auffassen kann: Einer gegen den Rest [Kar59, S. 238]. Auf eine formale Definition des Zwei-Personen-Spiels soll an dieser Stelle verzichtet werden, einerseits eben wegen der intuitiven Verständlichkeit des Begriffs, andererseits aber auch deswegen, weil in der Literatur keine solche gegeben wird. Der Begriff des Nullsummenspiels erschließt sich nicht ganz so einfach von selbst, ist aber ebenso leicht verständlich. In einem Spiel dieser Art ist nach Owen die Summe, die der eine Spieler gewinnt, gleichzeitig diejenige, die der andere Spieler verliert. Das heißt, wenn man die Gewinne aller Teilnehmer aufsummiert¹, erhält man 0 und die Erklärung für die genannte Bezeichnung [Owe71, S. 11]. Somit ist die Grundannahme, die hier getroffen werden soll, erläutert.

2.1.1 Reine Strategien

Für die mathematische Beschreibung von Spielen sind Strategien von großer Bedeutung. Allgemein² wird eine Strategie als ein Plan verstanden, der für jede mögliche Situation, die auftreten kann, eine Handlungsanweisung gibt. Meistens soll damit ein bestimmtes Ziel erreicht werden. Dieses Verständnis einer Strategie deckt sich mit der Definition, die Holler und Illing dafür im Bereich der Spiel-

¹Das können im Allgemeinen beliebig viele Spieler sein, im vorangegangenen Satz wurde jedoch schon gemäß der erläuterten Vereinfachung von nur zwei Spielern ausgegangen.

²d.h. im Leben außerhalb der Mathematik

theorie geben [MJH96, S. 33]. Karlin definiert Strategien auf die gleiche Weise [Kar59, S. 15].

Definition 1. (Reine Strategie)

Eine Strategie ist die Planung einer Folge von Handlungen, bzw. Spielzügen. Es wird exakt bestimmt, welche Handlung bei welcher Eventualität ausgeführt wird. Diese Eventualitäten können von eigenen, vorangegangenen Handlungen oder von denen des Mitspielers abhängen.

Entscheidet sich der Spieler für genau eine Strategie, die er strikt befolgt, spricht man von einer reinen Strategie.

Wichtig ist dabei, dass sich die reinen Strategien durch das Betrachten eines einzelnen Spieldurchlaufs ergeben. Nach Owen wird bei der mathematischen Auseinandersetzung mit Strategien stets folgende Vereinfachung vorgenommen: In der Realität planen Spieler in der Regel nur wenige Schritte voraus, während in spieltheoretischen Ausführungen davon ausgegangen wird, dass sich der Spieler vor Spielbeginn oder zum Zeitpunkt des Spielstarts bereits bis ins Detail auf eine Strategie festgelegt hat, die das gesamte Spiel umfasst [Owe71, S. 4]. In den meisten Spielen haben die Teilnehmer mehrere Auswahlmöglichkeiten für ihre Strategie. Dieser Gedanke motiviert eine weitere wichtige Definition, welche durch Owen gegeben wird [Owe71, S. 4].

Definition 2. (Strategiemenge)

Mit Σ_j bezeichnet man die Menge aller reinen Strategien des Spielers S_j .

Da in dieser Arbeit Spiele mit zwei Spielern betrachtet werden, soll Spieler 1 mit S_1 , Spieler 2 mit S_2 und die zugehörigen Strategiemengen mit $\Sigma_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $\Sigma_2 = \{y_1, \dots, y_m\}$ bezeichnet werden. $x_j, j \in \{1, \dots, m\}$ und $y_k, k \in \{1, \dots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ sind also die reinen Strategien, die S_1 und S_2 zu Verfügung haben. S_1 hat die Wahl zwischen m verschiedenen reinen Strategien, S_2 kann zwischen n verschiedenen reinen Strategien wählen.

Um die Begriffe zu veranschaulichen, soll folgendes Beispiel betrachtet werden, welches auch Karlin anführt [Kar59, S. 19].

Beispiel 1. (Matching Pennies)

Bei dem Spiel Matching Pennies legen Spieler 1 und Spieler 2 gleichzeitig jeweils eine Münze auf den Tisch. Sie können dabei wählen, ob sie die Münze so hinlegen, dass Zahl nach oben zeigt, oder so, dass Kopf oben liegt. Zeigen beide Münzen Kopf/Zahl, gewinnt Spieler 1 und erhält eine Münze von Spieler 2. Zeigen die Münzen unterschiedliche Seiten, gewinnt Spieler 2 und dieser bekommt eine Münze von Spieler 1.

Beide Spieler haben in diesem Fall die gleichen Strategien zur Verfügung. Die erste entspricht dem Zeigen von Kopf, die zweite entspricht dem Zeigen von Zahl. Kürzt man die beiden Seiten der Münze mit K und Z ab, erhält man mit $x_1 = y_1 = K$ und $x_2 = y_2 = Z$ also $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{K, Z\}$.³ Eine Strategie kann auch aus mehreren Komponenten bestehen, wie sich anhand eines anderen Beispiels von Karlin zeigt [Kar59, S. 20].

Beispiel 2. (Zwei-Finger-Morra)

Bei diesem Spiel zeigen sich die beiden Gegner gleichzeitig einen oder zwei Finger. Simultan raten beide, wie viele Finger ihr Gegner zeigt. Raten beide richtig oder falsch, endet das Spiel unentschieden. Derjenige, der die Anzahl der gezeigten Finger des Gegners richtig errät, gewinnt einen Betrag in der Höhe, die der Anzahl aller gezeigten Finger beider Spieler entspricht.

Hier bestehen die Strategien aus zwei Teilen. Zum einen muss sich jeder Spieler entscheiden, wie viele Finger er zeigen will. Zum anderen muss er sich auch überlegen, was seine Voraussage für die Entscheidung des Gegners ist. Die Strategien können hier als Paare ausgedrückt werden und man erhält mit $x_1 = y_1 = (1,1)$, $x_2 = y_2 = (1,2)$, $x_3 = y_3 = (2,1)$, $x_4 = y_4 = (2,2)$ die Strategiemengen $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Dabei entspricht die erste Komponente jeweils der Anzahl der Finger, die der Spieler zeigt, und die zweite gibt an, welche Vermutung er über das Verhalten des Gegners anstellt.

2.1.2 Auszahlung und Normalform

Das Element, das nun noch zur vollständigen, mathematischen Beschreibung eines Spieles fehlt, ist dasjenige, das oftmals den Reiz am Spielen ausmacht: Der Gewinn für die Spieler. Dieser hängt von den Regeln des Spiels ab und sieht unterschiedlich aus, je nachdem, welche beiden Strategien der Spieler denn im konkreten Fall aufeinandertreffen. Wählt S_1 also seine Strategie x_j und S_2 seine Strategie y_k , können wir den Gewinn als ein Tupel der Form $(a_{jk}, -a_{jk})$ ausdrücken, wobei die erste Komponente dem Betrag entspricht, den S_1 erhält, die zweite Komponente dem, was S_2 bekommt. Die beiden Komponenten des Tupels sind deshalb das Negative des jeweils anderen, weil - wie bereits erwähnt - Nullsummenspiele betrachtet werden sollen. Daher reicht es auch, lediglich den Gewinn für S_1 mit a_{jk} zu notieren. Ordnet man diese Gewinne für jede Kombination von aufeinander treffenden Strategien nun in einer Matrix an, erhält man

³Die Zuordnung ist beliebig. Man könnte auch das Zeigen von Zahl als die erste Strategie nehmen.

eine $m \times n$ -Matrix, die Auszahlungsmatrix des Spiels, welche nach Thomas die Normalform des Spiels darstellt [Tho12, S. 47]. Spiele, die sich auf diese Weise als eine Matrix darstellen lassen, werden auch Matrix-Spiele genannt [Pet15, S. 25].

Definition 3. (Normalform)

Die Normalform eines Spiels reduziert sich auf eine $m \times n$ -Matrix A , bei der jede Zeile für eine Strategie von S_1 , jede Spalte für eine Strategie von S_2 steht und m und n den Kardinalitäten von Σ_1 und Σ_2 entsprechen.

Zur Veranschaulichung soll nochmals Beispiel 1, das Spiel Matching Pennies, betrachtet werden. x_1 bekommt die erste Zeile der Auszahlungsmatrix A , x_2 die zweite Zeile. y_1 bekommt die erste Spalte, y_2 die zweite. Treffen x_1 und y_1 aufeinander, zeigen beide Spieler Kopf und S_1 gewinnt eine Münze. Das heißt $a_{11} = 1$. Würde S_2 stattdessen y_2 wählen, also Zahl zeigen, würde er gewinnen, also ist $a_{12} = -1$. Spielen beide Spieler ihre zweite Strategie, gewinnt S_1 , folglich ist $a_{22} = 1$. Entscheidet sich S_1 für x_2 und S_2 für y_1 , gewinnt S_2 und $a_{21} = -1$. Damit ergibt sich folgende Matrix:

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2.1.3 Auswahl einer Strategie

Sobald die Aussicht auf einen Gewinn und die Furcht vor Verlust ins Spiel kommen, stellt sich natürlich auch die Frage, welche Strategie ein Spieler wählen muss, damit er seinen Gewinn maximiert. In einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel geschieht diese Überlegung nach Thomas auch immer im Zusammenhang mit der Absicht, den Verlust des Gegners möglichst hoch bringen zu wollen, da dieser ja dem negativen des eigenen Gewinns entspricht [Tho12, S. 50]. Um eine Verwirrung bezüglich hoher und niedriger Gewinne, beziehungsweise hoher und niedriger Verluste, zu vermeiden, sollen diese Größen im Rest der Arbeit als Auszahlungen bezeichnet werden, die positiv oder negativ sein können. Die Auszahlung für S_1 ist also das negative der Auszahlung für S_2 . Thomas folgert, dass die Spieler in einem Nullsummenspiel bei der Auswahl ihrer Strategien grundsätzlich eine eher pessimistische Haltung einnehmen sollten. Um eine passende Strategie zu finden, sieht sich S_1 für jede Zeile der Matrix an, welche Auszahlung er mindestens bekommt, d.h. das Minimum jeder Zeile. S_1 vergleicht nun die Mindestauszahlungen jeder Zeile der Auszahlungsmatrix, wählt die größte der Mindestauszahlungen aus und entscheidet sich für die entsprechende Strategie. Er garantiert sich damit also

einen Mindestbetrag, der nur gleich bleiben oder größer werden kann, je nachdem welche seiner Strategien S_2 wählt [Tho12, S. 50]. Die Überlegung von S_2 läuft genau so ab, nur wird die Perspektive dafür umgedreht, weil aufgrund der Situation eines Nullsummenspiels nur die Auszahlungen für S_1 in der Auszahlungsmatrix dargestellt werden. Das heißt, S_2 betrachtet für jede seiner Strategien, welche Höchstauszahlung S_1 bekommt und will diese durch die Wahl seiner Strategie minimal halten [Tho12, S. 51]. Zur näheren Verdeutlichung soll dieser Vorgang anhand eines Beispiels erklärt werden.

Beispiel 3. *Gegeben sei ein Spiel mit der Auszahlungsmatrix*

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

S_1 kann im durch die Matrix beschriebenen Spiel zwischen drei Strategien auswählen, x_1 , x_2 und x_3 . Wie genau die Regeln des Spiels lauten und wie die Strategien konkret aussehen, ist an dieser Stelle nicht relevant, es reicht, die Auszahlungsmatrix zu kennen. S_1 betrachtet also, um sich für eine Strategie entscheiden zu können, das kleinste Element jeder Zeile. Somit erhält er für jede seine Strategien die Mindestauszahlung, die er unabhängig von der Entscheidung von S_2 erhält. Wählt er zum Beispiel Strategie x_3 garantiert er sich mindestens eine Auszahlung von -3. Wie bereits erläutert, besteht sein Interesse nun darin, diese Mindestauszahlung möglichst hoch zu bekommen, er wählt also die Strategie, bei der er sich die größtmögliche Mindestauszahlung garantiert. Er wird sich somit für x_2 entscheiden. Auch S_2 überlegt, welche Strategie für ihn die beste ist. Er betrachtet für jede seiner Möglichkeiten, was dabei die höchste Auszahlung für S_1 ist. Würde er sich für y_3 entscheiden, könnte S_1 im besten Fall eine Auszahlung von 5 erhalten. S_2 will natürlich, dass die Auszahlung für S_1 möglichst gering bleibt und entscheidet sich daher für die Strategie, mit der er dies erreichen kann. Auch er wird sich deshalb für seine zweite Strategie y_2 entscheiden und die Höchstauszahlung für S_1 somit auf 2 beschränken.⁴

Auf diese Weise wurde also ein Element in der Auszahlungsmatrix gefunden, welches das größte seiner Spalte und gleichzeitig das kleinste seiner Zeile ist. Für ebensolche Matrixelemente gibt es eine eigene Bezeichnung, welche in der folgenden Definition, wie sie von Peters entnommen wurde, gegeben wird [Pet15,

⁴Man könnte, um die Überlegung für S_2 zu veranschaulichen, auch jedes Element der Auszahlungsmatrix mit -1 multiplizieren und die Überlegung analog zu der von S_1 anstellen.

S. 27].

Definition 4. (Sattelpunkt)

Ein Element a_{jk} der Matrix A heißt Sattelpunkt, wenn

$$a_{jk} \geq a_{ck}, c \in \{1, \dots, m\} \text{ und } a_{jk} \leq a_{jd}, d \in \{1, \dots, n\}$$

Drückt man den Gedankengang beim Finden einer guten Strategie formal aus, erhält man nach Wang: S_1 bekommt mit der Auszahlungsmatrix A bei der Wahl der Strategie x_{j^*} sicher mindestens die Auszahlung

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{j^*k}$$

Durch die Wahl seiner Strategie maximiert er diesen Betrag, also:

$$\max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk}$$

Mit umgekehrter Perspektive erhält man für S_2 analog

$$\min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk}$$

[Wan88, S. 3f]. Allgemein lässt sich dabei folgendes Resultat festhalten [Wan88, S. 4].

Satz 1. Sei A die Auszahlungsmatrix eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels, bei dem S_1 die reinen Strategien x_1, \dots, x_m und S_2 die reinen Strategien y_1, \dots, y_n zur Verfügung hat. Dann gilt:

$$\max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk} \leq \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk} \quad (1)$$

Für den Beweis dieses Satzes wurde ein Beweis aus Karlin, der ein ähnliches Resultat beweist, modifiziert [Kar59, S. 22].

Beweis. Es ist klar, dass

$$\max_{1 \leq j \leq m} a_{jk} \geq a_{jk} \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\} \text{ und für alle } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten das Minimum bezüglich der Strategie, die S_2 wählt, ändert dies nichts an der Richtigkeit der Ungleichung und man erhält

$$\min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk} \geq \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk}.$$

Da dies für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, gilt es auch für dasjenige j , für das die rechte Seite der Ungleichung am größten wird und man erhält

$$\min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk} \geq \max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk}.$$

Umdrehen der Ungleichung liefert das gewünschte Ergebnis und die Aussage ist bewiesen. \square

Bei dieser Gelegenheit sollen für die beiden Werte, die in diesem Satz eben verglichen wurden, eigene Bezeichnungen eingeführt werden, wie sie Karlin verwendet [Kar59, S. 21].

Definition 5. (Oberer und unterer Wert)

Sei A die Auszahlungsmatrix eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels, bei dem S_1 die reinen Strategien x_1, \dots, x_m und S_2 die reinen Strategien y_1, \dots, y_n zur Verfügung hat. Man bezeichnet

$$\max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk} =: v_1$$

als den unteren Wert des Spiels und

$$\min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk} =: v_2$$

als den oberen Wert des Spiels.

Anhand des ausführlich durchgegangenen Beispiels 3 wurde ersichtlich, dass es wohl Spiele gibt, bei denen bezüglich dieser beiden Werte wirklich Gleichheit gilt. Dies führt zu folgender Definition [Wan88, S. 4].

Definition 6. (Wert des Spiels)

Sei A die Auszahlungsmatrix eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels, bei dem S_1 die reinen Strategien x_1, \dots, x_m und S_2 die reinen Strategien y_1, \dots, y_n zur Verfügung hat. Falls gilt, dass

$$\max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk} = \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk}, \quad (2)$$

dann heißt

$$v := \max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk} = \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk}$$

der Wert des Spiels.

Karlin hält formal fest, wann es sich für einen Spieler lohnt, eine Strategie zu wählen [Kar59, S. 22].

Definition 7. (Optimale Strategien)

Alle Strategien x_{j^*} , für die gilt, dass $a_{j^*k} \geq v$, sind optimale Strategien für S_1 . Genauso sind alle Strategien y_{k^*} für die gilt, dass $a_{jk^*} \leq v$ optimale Strategien für S_2 .

Betrachtet man nun ein Spiel, bei dem (2) gilt, so überlegt Wang, muss es einen Index j^* geben, sodass

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{j^*k} = \max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk} = v, \quad (3)$$

das heißt, j^* ist genau das $j \in \{1, \dots, m\}$, für das $\max_{1 \leq j \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{jk}$ eben sein Maximum erreicht. Genauso muss es ein k^* geben, sodass

$$\max_{1 \leq j \leq m} a_{jk^*} = \min_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk} = v. \quad (4)$$

Es folgt also

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{j^*k} = \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk^*}.$$

Nach Satz 1 aber haben wir aber wegen (3) und (4), dass

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{j^*k} \leq \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk^*}$$

und zusammen mit

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{j^*k} \leq a_{j^*k^*} \leq \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk^*}$$

folgt, dass

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{j^*k} = a_{j^*k^*} = \max_{1 \leq j \leq m} a_{jk^*}$$

[Wan88, S. 5]. Nach Wang erhalten diese speziellen Strategienpaare eine besondere Bezeichnung. [Wan88, S. 6]

Definition 8. (Lösung des Spiels)

Bei einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit Auszahlungsmatrix A , welches den Wert v hat, den reinen Strategien x_j , $j \in \{1, \dots, m\}$ für S_1 und den reinen Strategien y_k , $k \in \{1, \dots, n\}$ heißt das Strategienpaar (x_{j^*}, y_{k^*}) Lösung des Spiels. $a_{j^*k^*}$ ist ein Sattelpunkt der Auszahlungsmatrix A .

2.1.4 Gemischte Strategien

Zusammenfassend kann man also an dieser Stelle festhalten, dass es einen Weg gibt, bei Zwei-Personen-Nullsummenspielen für jeden Spieler eine optimale Strategie zu finden. Doch nicht für alle Spiele kann man ein Paar von Strategien finden, welches den Anforderungen einer Lösung gerecht wird, wie ein Blick auf Beispiel 1, das Spiel Matching Pennies, zeigt. Die Auszahlungsmatrix zu diesem Spiel war gegeben durch

$$\begin{array}{c} y_1 \quad y_2 \\ x_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 \end{array}$$

Geht S_1 so vor, wie eben beschrieben, stellt er fest, dass seine Mindestauszahlung in jedem Fall -1 ist und ist unschlüssig darüber, welche Strategie er wählen soll, auch deswegen, weil er nicht voraussagen kann, wie S_2 denkt. Denn auch bei seinen Strategien gibt es keine, die unabhängig von der Wahl von S_1 einen Vorteil bringt. Satz 1 gilt, doch es gilt keine Gleichheit von v_1 und v_2 , die Auszahlungsmatrix hat keinen Sattelpunkt. Bei der Suche nach der optimalen Strategie wie in Beispiel 3 wurde stets davon ausgegangen, dass der Gegner so logisch denkt wie man selbst und die Auszahlung an die Spieler war letztendlich der Sattelpunkt der Matrix. Und hier liegt das Problem: Die Auszahlungsmatrix zu Matching Pennies hat keinen Sattelpunkt und das Spiel hat keinen Wert v , wovon aber beim Herleiten der Lösung oben ausgegangen wurde. Spiele ohne Sattelpunkt in der Auszahlungsmatrix A haben also bezüglich der reinen Strategien keine Lösung. Um hier eine Lösung zu finden, ist ein anderes Konzept von Strategien nötig. Natürlich wird es bei Matching Pennies, wie bei vielen anderen kurzen und einfachen Spielen, nicht nur bei einer Spielrunde bleiben. Die beiden Gegner werden so lange Münzen vor sich legen, bis einer der beiden eine im Vorhinein vereinbarte Anzahl an Spielen gewonnen hat, oder bis beide schlichtweg keine Lust mehr haben. In diesem Fall wäre es nun wenig ratsam, sich für eine Strategie in dem Sinn zu entscheiden, wie er bisher betrachtet wurde. Denn würde man sich dazu entschließen, als reine Strategie das Legen von Kopf zu wählen, und würde dies in jeder Runde wiederholen, wäre man von seinem Gegenüber schnell durchschaut, und dieses würde das zu seinem Vorteil nutzen. Jeder Spieler mit ein bisschen Kampfgeist wird dies vermeiden wollen. In einem realitätsnahen Szenario wechseln die Spieler ihre Strategien ab, das heißt, sie legen mal Kopf, mal Zahl, das eine vielleicht öfter, das andere vielleicht weniger oft, auf jeden Fall aber beides mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Es wäre konkret bei Matching Pennies zum Beispiel sinnvoll, beide Strategien mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 zu

spielen. Man spricht hier von gemischten Strategien, die Owen folgendermaßen definiert [Owe71, S. 14].

Definition 9. (Gemischte Strategie)

In einem Spiel mit den reinen Strategien x_1, \dots, x_m für S_1 ist eine gemischte Strategie ein Vektor⁵

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$$

mit

$$\xi_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m \xi_j = 1$$

Der Vektoreintrag ξ_j , $j \in \{1, \dots, m\}$ entspricht genau der Wahrscheinlichkeit, mit der S_1 die reine Strategie x_j wählen wird. Genauso seien für S_2 , der zwischen den reinen Strategien y_1, \dots, y_n wählen kann,

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

mit

$$\eta_k \geq 0, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^m \eta_k = 1$$

seine gemischten Strategien.

Nach Thomas impliziert das Konzept der gemischten Strategien, dass Spiele mehr als nur eine Runde lang gespielt werden. Bleibt es bei nur einer Spielrunde, könnte man ja auch gar nicht unterscheiden, ob ein Spieler eine reine oder eine gemischte Strategie gewählt hat [Tho12, S. 54]. Er erklärt gemischte Strategien zum näheren Verständnis als solche, bei denen der Spieler jedes Mal, wenn er sich für eine Strategie entscheiden muss, ein Zufallsexperiment durchführt und sich dementsprechend entscheidet. Bei der Auswahl einer reinen Strategie ist kein Zufall im Spiel [Tho12, S. 52]. Die Lösung dafür, wie sich beide Konzepte von Strategien vereinen lassen, liefert Karlin. Er führt Strategien von vornherein über das Konzept, beziehungsweise über die Notation der gemischten Strategien ein und bezeichnet die reinen Strategien dann als solche, bei denen in einer Komponente die 1 vorkommt und die restlichen Einträge des Vektors 0 sind. Strategien, bei denen keine Komponente 1 ist, sind dann gemischte Strategien [Kar59, S. 17].

Bemerkung 1. Betrachtet man gemischte Strategien als Punkt, entspricht die

⁵Man ist sich in der Literatur zu dem Thema nicht darüber einig, ob gemischte Strategien als Vektor, als Punkt (Karlin) oder als Tupel (Thomas) betrachtet werden sollen. Die Wahl diesbezüglich fiel für diese Definition auf den Vektor, weil später noch wie mit einem Vektor mit den gemischten Strategien gerechnet werden wird.

Menge aller gemischten Strategien, die sich aus $m \in \mathbb{N}$ reinen Strategien ergeben, genau dem m -dimensionalen Simplex

$$S^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m x_j = 1 \text{ und } x_j \geq 0, j = 1, \dots, m\}.$$

Die reinen Strategien selbst entsprechen genau den Ecken des Simplex. Die gemischten Strategien sollen also in Zusammenhang mit Mengenzuordnung wie bei Karlin als Punkte aufgefasst werden.

Da sich Spieler mit gemischten Strategien nun ja nicht mehr vollkommen sicher sein können, was sie im nächsten Spieldurchlauf machen werden, wenn man davon ausgeht, dass sie wirklich ein Zufallsexperiment für sich entscheiden lassen, können sie natürlich auch nicht mehr von einer gewissen Mindestauszahlung ausgehen. Man definiert also nach Karlin [Kar59, S. 17]:

Definition 10. (Erwartete Auszahlung)

In einem Spiel mit der Auszahlungsmatrix A , in dem S_1 die reinen Strategien x_1, \dots, x_m und S_2 die reinen Strategien y_1, \dots, y_n wählen kann und somit die gemischten Strategien $\vec{\xi} \in S^m$, bzw. $\vec{\eta} \in S^n$ erhält, wird die erwartete Auszahlung für S_1 berechnet durch

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \xi_j a_{jk} \eta_k.$$

$\xi_j \eta_k$ für $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die reinen Strategien x_j und y_k aufeinander treffen und die Auszahlung entsprechend des Matrixelements der Auszahlungsmatrix a_{jk} liefern.

Wie verhält es sich nun mit dem Ergebnis, das in Satz 1 festgehalten wurde? Tatsächlich lässt sich dieser Satz - zusammen mit den Bezeichnungen des oberen und unteren Werts, des Werts des Spiels und der Charakterisierung der optimalen Strategien - exakt auf das Konzept der gemischten Strategien übertragen, wie die Erläuterungen Wangs zeigen: S_1 hat immer noch eine eher pessimistische Haltung, weil immer noch Nullsummenspiele betrachtet werden. Er sieht sich also, genau wie bei den reinen Strategien zuvor erläutert, die Mindestauszahlung an, die er abhängig vom Handeln von S_2 erhält, also

$$\min_{\vec{\eta} \in S^n} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Durch die eigene Wahl einer Strategie will er diesen Wert so hoch wie möglich

bekommen:

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Umgekehrt gilt auch für S_2 noch immer das gleiche. Er will die Höchstausszahlung für S_1 so gering wie möglich halten, also

$$\min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{\vec{\xi} \in S^m} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Satz 1 gilt auch auf das Konzept der gemischten Strategien übertragen.

Satz 2. Sei A die Auszahlungsmatrix eines Zwei-Personen-Nullsummenspiels in dem S_1 seine Strategie $\vec{\xi} \in S^m$ wählt und S_2 $\vec{\eta} \in S^n$. Dann gilt

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \leq \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{\vec{\xi} \in S^m} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Der Beweis für dieses Resultat ist genau wie die vorangegangenen Ausführungen dazu aus Wang entnommen [Wan88, S. 9]. Dabei wird analog vorgegangen wie bei dem Beweis von Satz 1.

Beweis. Für alle $\vec{\xi} \in S^m$ und alle $\vec{\eta} \in S^n$ gilt ganz klar, dass

$$\min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k \leq \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k.$$

Nimmt man auf beiden Seiten das Maximum bezüglich $\vec{\xi}$, so liefert dies

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k \leq \max_{\vec{\xi} \in S^m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k.$$

Da dies für alle $\vec{\eta} \in S^n$ gilt, gilt es wiederum auch für dasjenige, für das $\max_{\vec{\xi} \in S^m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k$ am kleinsten wird, und somit folgt

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k \leq \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{\vec{\xi} \in S^m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k.$$

Setzt man die Definition für die erwartete Auszahlung ein, folgt die Behauptung

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \leq \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{\vec{\xi} \in S^m} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

□

2.1.5 Lösungen im Sinne der gemischten Strategien und das Minimax-Theorem

Soviel zum Begriff der gemischten Strategie. Doch wie hilft dieses Konzept, bei Spielen, deren Auszahlungsmatrix keinen Sattelpunkt hat, ein Paar von Strategien zu finden, welches eine Lösung ist? Man kann den Sattelpunkt auch im Sinne der gemischten Strategien definieren, allerdings bezogen auf die Auszahlungsfunktion $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, wie es zum Beispiel von Neumann macht [vNM07, S. 95].⁶

Definition 11. (Sattelpunkt der Auszahlungsfunktion)

$(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*)$ ist ein Sattelpunkt von $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, wenn $K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*)$ für $\vec{\xi} = \vec{\xi}^*$ ihr Maximum annimmt und $K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta})$ für $\vec{\eta} = \vec{\eta}^*$ ihr Minimum.

Die Frage ist nun, ob es denn für jedes Spiel so einen Sattelpunkt gibt. Um dies herauszufinden, benötigen wir zunächst einen Satz, den von Neumann festhält und beweist [vNM07, 95f].

Satz 3. Für $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ gilt

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

\Leftrightarrow

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \text{ hat einen Sattelpunkt } (\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*).$$

Beweis. \Rightarrow : Angenommen, es gilt

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

Sei A die Menge aller $\vec{\xi}^*$ für die gilt, dass

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta})$$

und B die Menge aller $\vec{\eta}^*$ für die gilt, dass

$$\min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*).$$

⁶Von Neumann definiert den Sattelpunkt an dieser Stelle allgemeiner für jede Funktion, die zwei Variablen hat. Da die Auszahlungsfunktion, die wir hier betrachten, aber genau so eine Funktion ist, soll die Definition hier gleich auf diese gemünzt werden.

Wähle nun ein $\vec{\xi}^* \in A$ und ein $\vec{\eta}^* \in B$. Dann gilt

$$\max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}).$$

Das heißt, für alle anderen $\vec{\xi}$ folgt

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*) \leq \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*) = \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}) \leq K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*).$$

Währenddessen gilt für alle anderen $\vec{\eta}$, dass

$$K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}) \geq \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*) \geq K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*).$$

Daraus folgt, dass $(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*)$ ein Sattelpunkt von K ist.

\Leftarrow : Sei $(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*)$ ein Sattelpunkt von K . Dann gilt:

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \geq \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}) = K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*)$$

und

$$\min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \leq \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}^*) = K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*).$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \geq K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*) \geq \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

und mit Satz 2 folgt dass

$$\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}).$$

□

Dies bringt uns letztendlich zu dem Satz, der nach Wang als der Fundamentalsatz der Spieltheorie betrachtet wird: Dem Minimax-Theorem [Wan88, S. 9]. Der von John von Neumann formulierte und bewiesene Satz gilt für jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel [Bew07, S. 250] und garantiert für solche Spiele die Existenz von Lösungen [Owe71, S. 26].

Satz 4. (Minimax-Theorem)

In jedem Zwei-Personen-Nullsummenspiel mit Auszahlungsmatrix A , bei dem S_1 und S_2 die gemischten Strategien $\vec{\xi} \in S^m$, beziehungsweise $\vec{\eta} \in S^n$ benutzen,

gilt:

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k = \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{\vec{\xi} \in S^m} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_j \eta_k$$

oder alternativ ausgedrückt

$$v_1 = v_2 = v$$

Während bei den vorher betrachteten reinen Strategien oberer und unterer Wert des Spiels nicht zwingend übereinstimmen müssen, liefert dieser Satz nun, dass im Sinne der gemischten Strategien dies bei Zwei-Personen-Nullsummenspielen immer der Fall ist. Mit Satz 3 folgt, dass solche Spiele auch immer einen Sattelpunkt und deswegen immer eine Lösung haben. Der Satz wurde auf viele unterschiedliche Weisen bewiesen, natürlich auch von John von Neumann selbst, der seinen Satz mit Hilfe des Trennungssatz für Hyperebenen beweist [Owe71, S. 17ff]. Dieser selbst jedoch stellt laut Loomis bei einem Vortrag an Harvard diesbezüglich fest, dass ein Beweis gefunden werden muss, der elementarer ist [Loo46, S. 213]. Loomis bewies den Satz also mit Induktion [Loo46, S. 214] und auch Wang führt diese Art des Beweises [Wan88, S.15ff]. Der folgende Beweis erfolgt nach Wang, der ursprüngliche Beweis von John von Neumann wurde in den Anhang ausgelagert.

Beweis. Bevor der tatsächliche Beweis beginnt, ist eine Vorüberlegung nötig, bei der eine Beziehung zwischen dem Minimum über gemischte Strategien und dem Minimum der reinen Strategien für eine Reihe von Zahlen hergestellt werden soll. Seien also c_1, \dots, c_n beliebige Zahlen und $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ eine beliebige gemischte Strategie. Setze nun

$$\min_{1 \leq k \leq n} c_k = c_l.$$

Dann gilt natürlich

$$c_k \geq c_l, \quad k = 1, \dots, n$$

und somit auch

$$c_k \eta_k \geq c_l \eta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Für jede gemischte Strategie $\vec{\eta} \in S^n$ folgt also

$$\sum_{k=1}^n c_k \eta_k \geq \sum_{k=1}^n c_l \eta_k = c_l,$$

da η_k als Komponenten einer gemischten Strategie ja

$$\sum_{k=1}^n \eta_k = 1$$

erfüllen. Nachdem dies für jede gemischte Strategie $\vec{\eta} \in S^n$ gilt, gilt es auch für die, für die die Summe am kleinsten wird. Also

$$\min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{k=1}^n c_k \eta_k \geq c_l. \quad (5)$$

Betrachtet man nun die konkrete gemischte Strategie $\vec{\eta}^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 in der l-ten Komponente, erhält man

$$c_l = c_1 \cdot 0 + \dots + c_l \cdot 1 + \dots + c_n \cdot 0 = \sum_{k=1}^n c_k \eta_k^* \geq \min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{k=1}^n c_k \eta_k. \quad (6)$$

Also folgt mit (5) und (6), dass

$$c_l = \min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{k=1}^n c_k \eta_k = \min_{1 \leq k \leq n} c_k. \quad (7)$$

Analog erhält man

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \sum_{j=1}^m d_j \xi_j = \max_{1 \leq j \leq m} d_j, \quad (8)$$

wobei hier aber genau wie bei Wang auf eine genau Herleitung verzichtet werden soll, da diese genau analog zu der von eben erfolgt. Letztendlich kann man mit (7) und (8) also den oberen und den unteren Wert des Spiels schreiben als

$$v_1 = \max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{\vec{\eta} \in S^n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j \right) \eta_k = \max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j$$

und

$$v_2 = \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{\vec{x} \in S^m} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k \right) \xi_j = \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k.$$

Was letztendlich also zu beweisen ist, ist folgendes Resultat:

$$\max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j = \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k. \quad (9)$$

Induktionsanfang: Der Fall $m = n = 1$ ist klar, denn mit insgesamt einem Matrix-

element, das man betrachten kann, ist dieses natürlich gleichzeitig das Minimum und das Maximum bezüglich der Zeilen, als auch der Spalten.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass (9) für alle Paare (\tilde{m}, n) gilt, wobei $\tilde{m} < m$.

Induktionsschritt: Es muss also gezeigt werden, dass (9) für alle Paare (m, n) gilt.

Wir schreiben:

$$v_1^{(m,n)} = \max_{\xi \in S^m} \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j \quad (10)$$

und

$$v_2^{(m,n)} = \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k. \quad (11)$$

Wähle $\vec{\eta}^* = (\eta_1^*, \dots, \eta_n^*) \in S^n$ so, dass

$$v_2^{(m,n)} = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k^*, \quad (12)$$

dann gilt

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k^* \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k^* = v_2^{(m,n)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Analog erhält man für v_1 die Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j^* \geq \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j^* = v_1^{(m,n)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Es gibt also Fälle, in denen in beiden Ungleichungen wirklich Gleichheit gilt, und wenn dies der Fall ist, lässt sich der Satz leicht beweisen. Wir nehmen also o.B.d.A an, dass

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k^* = v_2^{(m,n)}, \quad j = 1, \dots, \tilde{m} \quad (15)$$

und

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k^* < v_2^{(m,n)}, \quad j = \tilde{m} + 1, \dots, m. \quad (16)$$

Betrachte nun das reduzierte Matrixspiel, bei dem man die Zeilen nach der \tilde{m} -ten abgeschnitten hat:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\tilde{m}1} & \dots & a_{\tilde{m}n} \end{pmatrix}$$

Was zu zeigen ist, ist folgende Reihe an Ungleichungen:

$$v_2^{(\tilde{m},n)} \stackrel{(a)}{=} v_1^{(\tilde{m},n)} \stackrel{(b)}{\leq} v_1^{(m,n)} \stackrel{(c)}{\leq} v_2^{(m,n)} \stackrel{(d)}{\leq} v_2^{(\tilde{m},n)} \quad (17)$$

(a) gilt, denn genau das war die Induktionsannahme. (c) gilt nach Satz 2. Zu beweisen bleiben also (b) und (d).⁷ Beginnen wir mit (b). Betrachte dazu die gemischten Strategien des reduzierten Spiels für S_1 aus $S^{\tilde{m}}$, sowie die Menge

$$S_0^{\tilde{m}} = \{ \vec{\xi} \in S^m : \xi_j = 0 \text{ für alle } j > \tilde{m} \} \subset S^m.$$

Dann gilt:

$$v_1^{(\tilde{m},n)} = \max_{\vec{\xi} \in S_0^{\tilde{m}}} \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} a_{jk} \xi_k$$

Wir wählen wieder ein $\vec{\xi}^+ \in S_0^{\tilde{m}}$, sodass

$$v_1^{(\tilde{m},n)} = \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} a_{jk} \xi_j^+$$

Wir erweitern $\vec{\xi}^+$ zu $\vec{\xi}^* = (\xi_1^+, \dots, \xi_{\tilde{m}}^+, 0, \dots, 0) \in S_0^{\tilde{m}}$ und erhalten

$$\min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} a_{jk} \xi_j^+ = \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j^+ \leq \max_{\vec{\xi} \in S^m} \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j = v_1^{(m,n)},$$

wodurch die Ungleichung (b) bewiesen ist. Bleibt noch Ungleichung (d). Wir wählen dazu $\vec{\eta}' \in S^n$, sodass

$$v_2^{(\tilde{m},n)} = \max_{1 \leq j \leq \tilde{m}} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k'. \quad (18)$$

Weil S^n eine konvexe Menge ist, können ein $\vec{\eta}'' \in S^n$ betrachten mit

$$\vec{\eta}'' = \alpha \vec{\eta}' + (1 - \alpha) \vec{\eta}^*, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (19)$$

⁷Versucht man, sich diese Ungleichungen anschaulich anhand einer Matrix klar zu machen, werden sie schnell einleuchtend. (b) heißt eigentlich nur: Wenn man eine Matrix hat, bei der man von jeder Zeile das Minimum betrachtet und sich davon das größte merkt, dann kann diese Zahl nur größer werden oder gleich bleiben, wenn man neue Zeilen an die Matrix anhängt. Bei (d) ist es anders herum: Schaut man sich bei einer Matrix von jeder Zeile nur das größte Element an und merkt sich davon das kleinste, dann könnte es passieren, dass genau dieses Element wegfällt, wenn von den Zeilen welche abgeschnitten werden. Das neue zu merkende Element ist dann eins von den übrigen und das ist logischerweise gleich dem alten oder größer, sonst wäre es ja vorher schon das relevante Element der Matrix gewesen.

Es ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k'' = \alpha \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k' + (1 - \alpha) \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k^*, \quad j = 1, \dots, \tilde{m}. \quad (20)$$

Nimmt man von beiden Seiten das Maximum bezüglich $j = 1, \dots, \tilde{m}$ und setzt (18) und (15) ein, erhält man

$$\max_{1 \leq j \leq \tilde{m}} \sum_{k=1}^n a_{jk} \vec{\eta}'' \leq \alpha v_2^{(\tilde{m}, n)} + (1 - \alpha) v_2^{(m, n)}. \quad (21)$$

Ist α nun sehr klein, folgt aus der Konstruktion von $\vec{\eta}''$ und (16), dass

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k'' < v_2^{(m, n)}, \quad j = \tilde{m} + 1, \dots, m.$$

Aber mit der Definition von $v_2^{(m, n)}$ folgt

$$\max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k'' \geq \min_{\vec{\eta} \in S^n} \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k = v_2^{(m, n)}$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt

$$\max_{1 \leq j \leq \tilde{m}} \sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k'' \geq v_2^{(m, n)}$$

Fügt man dies in (21) ein und stellt die Ungleichung um, erhält man

$$\alpha v_2^{(\tilde{m}, n)} \geq v_2^{(m, n)} - (1 - \alpha) v_2^{(m, n)} = \alpha v_2^{(m, n)}.$$

Teilen durch α bringt

$$v_2^{(m, n)} \leq v_2^{(\tilde{m}, n)}.$$

Damit ist die letzte Ungleichung bewiesen und es folgt

$$v_1^{(m, n)} = v_2^{(m, n)}.$$

□

2.1.6 Symmetrische Spiele

Eine weitere wichtige Eigenschaft von den Spielen, die betrachtet werden sollen, ist - zumindest bei Poker - die Symmetrie. Eine Definition für diese Eigenschaft gibt Owen [Owe71, S. 26].

Definition 12. (Symmetrische Spiele)

Eine quadratische Matrix A heißt schiefsymmetrisch, falls für alle ihre Elemente

$$a_{jk} = -a_{kj}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n$$

gilt. Ein Matrixspiel ist symmetrisch, wenn die zugehörige Auszahlungsmatrix schiefsymmetrisch ist.

In einem symmetrischen Spiel haben also, wie von Neumann beschreibt, beide Spieler die gleichen Rollen, das heißt, sie haben die gleichen Strategien und es macht keinen Unterschied, wessen Perspektive man einnimmt [vNM07, S. 165f]. Für Spiele mit dieser Eigenschaft ergibt sich folgendes relevantes Resultat, das später auch verwendet werden wird. Dieses wurde von Owen entnommen und auch der angeführte Beweis stammt von ihm [Owe71, S. 33f].

Satz 5. (Wert von symmetrischen Spielen)

Der Wert eines symmetrischen Spiels ist 0. S_1 und S_2 haben die gleiche optimale Strategie.

Beweis. Sei A die schiefsymmetrische Auszahlungsmatrix zu einem symmetrischen Spiel. Da A schiefsymmetrisch ist, gilt

$$A = -A^T.$$

Man kann die Auszahlung auch schreiben als

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \vec{\xi} A \vec{\eta}^T.$$

Sei $\vec{\xi}$ eine beliebige Strategie von S_1 . Dann gilt

$$\vec{\xi} A \vec{\xi}^T = \vec{\xi} (-A^T) \vec{\xi}^T = -\vec{\xi} A^T \vec{\xi}^T = -(\vec{\xi} A \vec{\xi}^T)^T = -\vec{\xi} A \vec{\xi}^T$$

und daraus folgt

$$\vec{\xi} A \vec{\xi}^T = 0$$

für beliebiges $\vec{\xi}$. Es gilt also für beliebiges $\vec{\xi}$, dass

$$\min_{\vec{\eta} \in S^n} \vec{\xi} A \vec{\eta}^T \leq 0$$

und das bedeutet, dass der Wert des Spiels nicht positiv werden kann. Analog erhält man

$$\max_{\vec{\eta} \in S^n} \vec{\eta} A \vec{\xi}^T \geq 0$$

und aus dieser Ungleichung folgt wiederum, dass der Wert des Spiels nicht negativ werden kann. Insgesamt folgt somit, dass der Wert des Spiels 0 ist.

Sei $\vec{\xi}$ eine optimale Strategie für S_1 . Dann folgt, dass

$$\vec{\xi} A \geq 0.$$

Mit der Schiefsymmetrie von A erhält man

$$\vec{\xi} (-A)^T \geq 0$$

und dies ergibt

$$\vec{\xi} A^T \leq 0$$

oder anders ausgedrückt

$$A \vec{\xi}^T \leq 0.$$

Daraus folgt, dass $\vec{\xi}$ auch für S_2 eine optimale Strategie ist. \square

2.2 Blackjack

Bevor sich die Arbeit ihrem Hauptaspekt, dem Poker-Modell von John von Neumann zuwendet, soll ein simpleres Beispiel durchgegangen werden, welches das Verständnis des Pokerspiels erleichtern wird. Dabei handelt es sich um eine sehr einfache Form von Blackjack, die auch Karlin als Einstieg für seine nachfolgenden Erläuterungen zu Poker benutzt [Kar59, S. 241f]. Dabei lehnt er sich an das idealisierte Blackjack-Modell von Bellman an [Kar59, S. 277]. Im folgenden Abschnitt soll diese vereinfachte Form von Blackjack erläutert werden, wobei jedoch bei der Herleitung der Formel für die erwartete Auszahlung für den Spieler wie beim Poker-Modell von von Neumann später vorgegangen wird. Dies geschieht einerseits deswegen, weil Karlin nicht auf die Herleitung eingeht und andererseits, um auf das folgende Kapitel über Poker vorzubereiten.

Die einfache Form von Blackjack, welche Karlin beschreibt, wird von nur einem

Spieler gespielt, der allein einem Dealer gegenüber steht. Zu Beginn des Spiels erhalten beide eine von K Karten, welche mit k_S und k_D bezeichnet werden sollen. Bevor die Karten von ihrem jeweiligen Besitzer angesehen werden dürfen, müssen beide eine Geldeinheit setzen. Erst dann dürfen die Karten angesehen werden und der Spieler S kann sich entscheiden, ob er eine weitere Geldeinheit setzen will, ob er $M > 1$ weitere Geldeinheiten setzen will oder ob er aufgibt und somit seinen Starteinsatz verliert. Der Dealer D hat keine Entscheidungsmöglichkeiten, er muss den selben Betrag wie S setzen. Deswegen wollen wir ihn nicht als wirklichen Spieler betrachten und diese Form von Blackjack als Spiel mit nur einem Spieler. Hat S einen Einsatz gegeben, werden die Karten verglichen. Hat S die stärkere Hand, gewinnt er einen Betrag in der Höhe seines Einsatzes inklusive des Einstiegseinsatzes, hat er die schwächere Hand, verliert er eben diesen Betrag. Hat S aufgegeben, verliert er seinen Starteinsatz von einer Geldeinheit [Kar59, S. 241]. An dieser Stelle kürzt Karlin sehr ab, was die Ausführung des Modells betrifft, daher soll nun analog wie bei von Neumann vorgegangen werden. Die Karten $k_S, k_D \in \{1, \dots, K\}$, welche am Anfang des Spiels an S und D verteilt werden, werden alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{K}$ gezogen. Zur Vereinfachung soll angenommen werden, dass die beiden Karten aus zwei unterschiedlichen Decks gezogen werden, sodass für S und D die gleichen Bedingungen herrschen. Außerdem sind die Karten nach ihrer Stärke geordnet, $k = 1$ ist die schwächste, $k = K$ ist die stärkste Karte. Karlin hält sich bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes allgemeiner. Bei ihm wird k_S mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß von $F(k_S)$ und k_D mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß von $G(k_D)$ gezogen. Er geht davon aus, dass F und G stetig und monoton wachsend sind, wird aber nicht konkreter [Kar59, S. 241]. Da es sich anbietet, hier die Gleichverteilung zu wählen, wird hier von Anfang an von dieser ausgegangen. S hat also nachdem er seine Karte angesehen hat, drei verschiedene Möglichkeiten, welche folgendermaßen kodiert werden sollen:

- 1 $\hat{=}$ Einsatz von +1 Geldeinheit
- 2 $\hat{=}$ Einsatz von +M Geldeinheiten
- 3 $\hat{=}$ Aufgabe und Verlust des Eingangseinsatzes

Eine reine Strategie ist nun eine Folge von Zahlen x_1, \dots, x_K , mit $x_j \in \{1, 2, 3\}$, $j = 1, \dots, K$, die für jede Karte festlegt, was S macht, falls er diese bekommt. Eine reine Strategie für S soll mit $\Sigma(x_1, \dots, x_K)$ notiert werden. Welche Auszahlung S erhält, hängt neben seiner Entscheidung auch davon ab, ob seine Karte besser ist als die des Dealers. Daher soll die Funktion $L_{sgn(k_S - k_D)}(x_{k_S})$ betrachtet werden, welche durch diese Tabellen gegeben ist:

x	1	2	3
Auszahlung	2	M+1	-1

Tabelle 1: L_+

x	1	2	3
Auszahlung	0	0	-1

Tabelle 2: L_0

x	1	2	3
Auszahlung	-2	-(M+1)	-1

Tabelle 3: L_-

In Tabelle 1 hat S die bessere Karte als D, da $k_S - k_D > 0$. S gewinnt also, falls er setzt, das heißt, falls er Option 1 oder 2 wählt, seinen Einsatz inklusive des Starteinsatzes. Nur, wenn er aufgibt, also Option 3 wählt, verliert er seinen Eingangseinsatz. Die anderen zwei Tabellen ergeben sich analog mit den Spielregeln. Die Auszahlungsmatrix des Spiels wird nun mit Erwartungswerten gefüllt, da mit dem Austeilen der Karten Zufall im Spiel ist [Tho12, S. 46]. Die Auszahlungsmatrix ist in diesem Fall eine $3^K \times 1$ -Matrix, da S die Wahl zwischen 3^K reinen Strategien hat und mehr oder weniger alleine spielt. Die Matrixelemente ergeben sich also durch

$$A(x_1, \dots, x_K | 1) = \frac{1}{K^2} \sum_{k_S, k_D} L_{sgn(k_S - k_D)}(x_{k_S}).$$

Eine gemischte Strategie für S wird beschrieben durch einen 3^K -dimensionalen Vektor $\vec{\xi}$. Jede seiner Komponenten gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die reine Strategie, für die diese Komponente steht, vom Spieler gewählt wird. ξ_{x_1, \dots, x_K} ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Wahl auf die reine Strategie $\Sigma(x_1, \dots, x_K)$ fällt. Für die erwartete Auszahlung für S ergibt sich also

$$K(\vec{\xi}) = \sum_{x_1, \dots, x_K} \frac{1}{K^2} \sum_{k_S, k_D} L_{sgn(k_S - k_D)}(x_{k_S}) \xi_{x_1, \dots, x_K}.$$

Da es von den Vektorkomponenten ξ_{x_1, \dots, x_K} ziemlich viele gibt und es sehr anstrengend ist, sich die Bedeutung dieser immer wieder klar zu machen in Zusammenhang mit den unzähligen reinen Strategien $\Sigma(x_1, \dots, x_K)$, sollen folgende Größen definiert werden, welchen eine einfachere Intuition zu Grunde liegt:

$$\rho_x^{k_S} = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_K \\ \text{ohne } x_{k_S} \\ x_{k_S} = x}} \xi_{x_1, \dots, x_K}$$

In Worte gefasst ist dies die Wahrscheinlichkeit, das S, welcher die konkrete Karte k_S bekommen hat, die Option x wählt, wenn er die gemischte Strategie $\vec{\xi}$ spielt. Statt des 3^K -dimensionalen Vektors soll also nun der 3-dimensionale Vektor

$$\vec{\rho}^{k_S} = \{\rho_1^{k_S}, \rho_2^{k_S}, \rho_3^{k_S}\}$$

verwendet werden. Dieser hat die Eigenschaften, dass

$$\sum_x \rho_x^{k_S} = 1 \text{ und } \rho_x^{k_S} \geq 0, \quad x = 1, 2, 3.$$

Setzt man $\rho_x^{k_S}$ in die Formel für die erwartete Auszahlung ein, hängt diese nur noch von den neuen Vektorkomponenten ab, wodurch die Auszahlung auch als

$$K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^K) = \frac{1}{K^2} \sum_{k_S, k_D} \sum_x L_{sgn(k_S - k_D)}(x) \rho_x^{k_S} =: K$$

geschrieben werden kann. Anstatt die Karten nach ihrer Stärke durczunummern, ist es auch möglich, sie immer noch nach Stärke geordnet in das Intervall $[0,1]$ zu legen. Die neue Position der Karten ergibt sich durch $h = \frac{k-1}{K-1}$. Die schwächste Karte $k = 1$ liegt auf der neuen Skala also nun bei $h = \frac{1-1}{K-1} = 0$ und die stärkste Karte K liegt bei $\frac{K-1}{K-1} = 1$. Diese neuen Werte für die Karten liegen diskret im Intervall $[0,1]$, zur Vereinfachung soll nun jedoch angenommen werden, dass bei der Verteilung der Karten am Anfang des Spiels wirklich jeder Wert aus $[0,1]$ an S und D verteilt werden kann. Für K bedeutet das, dass die Summen durch Integrale ersetzt werden müssen und statt $\vec{\rho}^k$ soll $\vec{\rho}^h$ geschrieben werden:

$$K = \sum_x \int_0^1 \int_0^1 L_{sgn(h_S - h_D)}(x) \rho_x^{h_S} dh_D dh_S.$$

Mit den Tabellen 1,2 und 3 ergibt sich

$$\begin{aligned} K &= 2 \int_0^1 \int_0^1 sgn(h_S - h_D) \rho_1^{h_S} dh_D dh_S + \\ &\quad (M+1) \int_0^1 \int_0^1 sgn(k_S - k_D) \rho_2^{h_S} dh_D dh_S + (-1) \int_0^1 \int_0^1 \rho_3^{h_S} dh_D dh_S = \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 sgn(h_S - h_D) \rho_1^{h_S} dh_D dh_S + \\ &\quad (M+1) \int_0^1 \int_0^1 sgn(k_S - k_D) \rho_2^{h_S} dh_D dh_S + (-1) \int_0^1 \rho_3^{h_S} \underbrace{\int_0^1 dh_D}_{=1} dh_S = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sgn}(h_S - h_D) \rho_1^{h_S} dh_D dh_S + (M+1) \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sgn}(k_S - k_D) \rho_2^{h_S} dh_D dh_S + \\
&\quad (-1) \int_0^1 1 - \rho_1^{h_S} - \rho_2^{h_S} dh_S
\end{aligned}$$

Während Karlin diese Formel direkt aufstellt [Kar59, S. 241], wurde hier dazu ein ausführlicherer Weg gewählt, der analog zu dem von von Neumann bezüglich des Poker-Modells erfolgt [vNM07, S. 192ff]. Die folgenden Überlegungen richten sich wieder nach Karlin. Da gilt, dass

$$\int_0^1 \operatorname{sgn}(h_S - h_D) dh_D = h_S \cdot 1 + (1 - h_S)(-1) = h_S - 1 + h_S = 2h_S - 1$$

kann man auch schreiben

$$\begin{aligned}
K &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sgn}(h_S - h_D) \rho_1^{h_S} dh_D dh_S + (M+1) \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sgn}(k_S - k_D) \rho_2^{h_S} dh_D dh_S + \\
&\quad (-1) \int_0^1 1 - \rho_1^{h_S} - \rho_2^{h_S} dh_S = \\
&= 2 \int_0^1 (2h_S - 1) \rho_1^{h_S} dh_S + (M+1) \int_0^1 (2h_S - 1) \rho_2^{h_S} dh_S + \\
&\quad (-1) \int_0^1 1 - \rho_1^{h_S} - \rho_2^{h_S} dh_S = \\
&= \int_0^1 4h_S \rho_1^{h_S} - 2\rho_1^{h_S} dh_S + \int_0^1 (M+1)2h_S \rho_2^{h_S} - (M+1)\rho_2^{h_S} dh_S + \\
&\quad \int_0^1 -1 dh_S + \int_0^1 \rho_1^{h_S} dh_S + \int_0^1 \rho_2^{h_S} dh_S = \\
&= \int_0^1 4h_S \rho_1^{h_S} - 2\rho_1^{h_S} + \rho_1^{h_S} dh_S + \int_0^1 (M+1)2h_S \rho_2^{h_S} - (M+1)\rho_2^{h_S} + \rho_2^{h_S} dh_S - 1 = \\
&= \int_0^1 \rho_1^{h_S} (4h_S - 1) dh_S + \int_0^1 \rho_2^{h_S} (1 + (M+1)(2h_S - 1)) dh_S - 1
\end{aligned}$$

S möchte natürlich erreichen, dass K so groß wie möglich wird und kann darauf Einfluss nehmen, indem er $\rho_1^{h_S}$ und $\rho_2^{h_S}$ dementsprechend wählt, denn dies liegt ja in seiner Macht. Er sollte also $\rho_x^{h_S} = 1$ für dasjenige $\rho_x^{h_S}$ wählen, für das der Koeffizient am größten und positiv ist, damit der ganze Term K größtmöglich wird. Wir haben als Koeffizienten:

$$\gamma_1^{h_S} = 4h_S - 1 \text{ und } \gamma_2^{h_S} = 1 + (M+1)(2h_S - 1).$$

Es gilt

$$4h_S - 1 = 1 + (M+1)(2h_S - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(2h_S - 1) = \underbrace{(M + 1)}_{>2}(2h_S - 1)$$

Da $M + 1 > 2$, kann die Gleichheit nur gelten, wenn $2h_S - 1 = 0$, also wenn gilt $h_S = \frac{1}{2}$. Welcher der beiden Koeffizienten ist für $h > \frac{1}{2}$ größer?

$$1 + (M + 1)(2h - 1) = 1 + 2Mh + 2h - M - 1 = 2Mh + 2h - M = \underbrace{M}_{>1} \underbrace{(2h - 1)}_{>0} + 2h > (2h - 1) + 2h = 4h - 1$$

Somit ist $\gamma_2^{h_S} > \gamma_1^{h_S}$ für $h > \frac{1}{2}$. Für eine Karte h , die auf der Stärkeskala über $\frac{1}{2}$ liegt, sollte S also $\rho_2^h = 1$ wählen. $\gamma_1^{h_S}$ hat eine Nullstelle bei $\frac{1}{4}$. Als nächstes ist zu prüfen, welcher der Koeffizienten für $h \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ größer ist. Es gilt:

$$4h - 1 = 1 + 4h - 2 = 1 + 2 \underbrace{(2h - 1)}_{<0} > 1 + \underbrace{(M + 1)}_{>2}(2h - 1).$$

Somit ist $\gamma_1^{h_S} > \gamma_2^{h_S}$ für $h \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ und S sollte, wenn er eine Karte aus diesem Bereich erhält, $\rho_1^h = 1$ wählen. Für alle h , die kleiner als $\frac{1}{4}$ sind, ist γ_1^h negativ und somit wegen der eben gezeigten Größenverhältnisse für $h < \frac{1}{2}$ und der Tatsache, dass es sich bei den beiden Koeffizienten um lineare Funktionen handelt, auch γ_2^h . Um den Verlust also möglichst gering zu halten, sollte S bei solchen Karten aufgeben [Kar59, S. 242].

Die optimale Strategie für den Spieler ist also, für alle Karten, die besser sind als $\frac{1}{2}$, M Geldeinheiten setzen. Hat S ein Blatt, das stärkemäßig zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegt, sollte er seinen Einsatz nur um eine weitere Geldeinheit erhöhen. Für alle schwächeren Blätter sollte er aufgeben.

2.3 Das Poker-Modell nach John von Neumann

Setzt man sich mit Spieltheorie auseinander, wird man früher oder später auf einen bestimmten Namen stoßen: John von Neumann, welcher sich in den 1920er Jahren mit den mathematischen Eigenschaften von Spielen befasst hat [Bew07, S. 249]. Seine Motivation dafür entsprang seiner Auffassung, dass beliebige Ereignisse aller Art, welche von bestimmten äußeren Bedingungen abhängen und handelnde Personen beinhalten, als Spiel aufgefasst werden können [vN28, S. 295]. Er sah also - wie Bewersdorff diesen Gedanken zusammenfasst - Spiele als ein universelles Modell für Entscheidungsprozesse an [Bew07, S. 249]. Obwohl von Neumann bereits 1928 einen spieltheoretischen Artikel veröffentlichte, bekam das Thema allgemein zunächst wenig Aufmerksamkeit. Erst 1944, als er zusammen

mit dem Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern⁸ eine Monographie mit dem Titel *Theory of games and economic behavior*, in dem von Neumann auch sein Poker-Modell vorstellt, publizierte, erregte er das Interesse der Öffentlichkeit und die Spieltheorie war geboren [Bew07, S. 250]. Eben diesem Modell des Pokerspiels, mit welchem sich von Neumann beschäftigt, soll das folgende Kapitel gelten.

2.3.1 Die Spielregeln des vereinfachten Poker-Modells

Poker ist mit all seinen Regeln und Varianten, in denen es gespielt wird, sehr kompliziert. Daher nimmt von Neumann für seine spieltheoretische Betrachtung einige Vereinfachungen der Regeln vor. Die Ergebnisse, die daraus resultieren werden, werden trotzdem grundlegende Erkenntnisse über das Spiel liefern. In der Version von Poker, die von Neumann analysiert, besteht das Deck aus 52 Karten, von denen jeder Spieler, das heißt S_1 und S_2 , jeweils 5 Karten bekommt. Dieses Blatt können die Spieler nach dem Austeilen nicht mehr verändern, wie es in manchen Versionen von Poker möglich ist. Es lässt sich einfach berechnen, dass

$$B = \binom{52}{5} = 2589960$$

die Anzahl aller möglichen Kartenkombinationen aus 5 Karten ist und somit die Anzahl aller möglichen Blätter, die man auf der Hand haben kann [vNM07, S. 187]. Von Neumann nummeriert nun alle Blätter vom schlechtesten zum besten durch.

$$b = 1, \dots, B.$$

1 entspricht somit dem schwächsten Blatt und B dem besten. Wenn die Karten an die Spieler verteilt werden, kann man dies als ein zufälliges Ziehen eines Blattes aus einem Topf mit B Blättern sehen, wobei jedes Blatt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{B}$ gezogen wird. Dass der Spieler, der sein Blatt als Zweiter erhält, aus einem anderen Topf zieht als der erste Spieler, ignoriert von Neumann hinsichtlich der Tatsache, dass die Anzahl der möglichen Blätter so groß ist und um die Komplexität der Betrachtungen gering zu halten. Das Blatt der Spieler soll für S_1 festgehalten werden als b_1 und für S_2 als b_2 [vNM07, S. 188].

Von Neumann beschreibt den vereinfachten Spielablauf so, dass sich nach dem zufälligen Ziehen der Blätter b_1 und b_2 beide Spieler für ihren Einsatz entscheiden. Dabei gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder man setzt niedrig, oder man

⁸Laut Bewersdorff angeblich ein unehelicher Enkel des 99-Tage-Kaisers Friedrich III [Bew07, S. 244].

setzt hoch und es wird angenommen, dass diese beiden Beträge von Anfang an festgelegt sind mit

$$\alpha > \beta > 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Jeder Spieler trifft seine Wahl nur in Kenntnis seines eigenen Blattes, er weiß nicht, was der Gegner auf der Hand hat. Dann werden die Einsätze der Spieler offenbart. Haben beide hoch oder niedrig gesetzt, werden die Blätter verglichen und der mit dem stärkeren erhält α , beziehungsweise β vom Verlierer. Bei gleich starken Blättern gewinnt oder verliert niemand etwas. Bietet ein Spieler hoch und einer niedrig, hat derjenige, der niedrig geboten hat die Wahl, ob er aufgeben oder vergleichen will. Gibt er auf, zahlt er ohne Widerstand sein niedriges Gebot an den Gegner. Will er vergleichen, wird sein Einsatz auf α erhöht, die Blätter der beiden Spieler werden verglichen und der Gewinner kassiert. Übersichtlich zusammengefasst bedeutet das: Wenn beide Spieler hoch setzen, oder wenn der niedrig bietende im Anschluss die Blätter vergleichen will, erhält bei $b_1 \stackrel{\geq}{<} b_2$ S_1 von S_2 die Auszahlung $\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{smallmatrix}$. Setzen beide Spieler niedrig, bekommt S_1 bei $b_1 \stackrel{\geq}{<} b_2$ von S_2 die Auszahlung $\begin{smallmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{smallmatrix}$. Wählt ein Spieler $\frac{1}{2}$ den hohen Einsatz, der andere den niedrigen und der niedrig bietende Spieler will aufgeben, so erhält S_1 von S_2 die Auszahlung $\begin{smallmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{smallmatrix}$ [vNM07, S. 188ff].

2.3.2 Die Auszahlungsmatrix des Pokerspiels

Um ein Spiel zu analysieren wirft man nach Karlin normalerweise zunächst einen Blick auf die reinen Strategien und auf die Auszahlungsmatrix [Kar59, S. 18]. Auch von Neumann führt zunächst diesen Schritt aus. Für eine reine Strategie bei seinem Pokerspiel legt man für jedes mögliche Blatt $b = 1, \dots, B$ fest, was man tun will, falls man dieses am Anfang zieht. Und man hat dafür drei Möglichkeiten, die von Neumann folgendermaßen kodiert:

- 1 $\hat{=}$ hoher Einsatz
- 2 $\hat{=}$ niedriger Einsatz und anschließender Vergleich der Blätter
- 3 $\hat{=}$ niedriger Einsatz und anschließend Aufgeben.

Konkret ist also eine reine Strategie eine Folge x_1, \dots, x_B , mit $x_j = 1, 2, 3$ für $j = 1, \dots, B$. Dabei hat jeder der beiden Spieler gleich viele Strategien, und das sind ziemlich viele, nämlich 3^B . Von Neumann notiert die Strategien für S_1 und S_2 mit $\Sigma_1(x_1, \dots, x_B)$ und $\Sigma_2(y_1, \dots, y_B)$ und das zugehörige Auszahlungselement mit $A(x_1, \dots, x_B | y_1, \dots, y_B)$ [vNM07, S. 191f]. Die Bestimmung der Elemente der Auszahlungsmatrix gestaltet sich nun ein bisschen komplizierter als bei den Beispielen, die im ersten Teil der Arbeit betrachtet wurden, weil die Auszahlungen

ja auch von den Blättern der Spieler abhängen und die wiederum vom Zufall. Nach Thomas wird die Auszahlungsmatrix in so einer Situation mit Erwartungswerten gefüllt [Tho12, S. 46]. Um diese zu bestimmen geht von Neumann zunächst davon aus, dass S_1 konkret das Blatt b_1 und S_2 konkret das Blatt b_2 hat. Wie die Auszahlung aussieht, hängt nun nicht nur von den Entscheidungen der Spieler ab, sondern auch davon, welcher der beiden das stärkere Blatt auf der Hand hat. Gilt $b_1 > b_2$ und damit $b_1 - b_2 > 0$, ist S_1 besser und gilt $b_1 < b_2$ und somit $b_1 - b_2 < 0$, ist S_2 besser. Von Neumann drückt die Auszahlungen mit der Funktion $L_{sgn(b_1-b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2})$. Daraus ergeben sich die folgenden Tabellen [vNM07, S. 192].

$x_{b_1} \backslash y_{b_2}$	1	2	3
1	α	α	β
2	α	β	β
3	$-\beta$	β	β

Tabelle 4: L_+

$x_{b_1} \backslash y_{b_2}$	1	2	3
1	0	0	β
2	0	0	0
3	$-\beta$	0	0

Tabelle 5: L_0

$x_{b_1} \backslash y_{b_2}$	1	2	3
1	$-\alpha$	$-\alpha$	β
2	$-\alpha$	$-\beta$	$-\beta$
3	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$

Tabelle 6: L_-

Die Tabellen entstehen einfach aus den Spielregeln. Die Zeilen entsprechen wie bei den Auszahlungsmatrizen den Strategien von S_1 und die Spalten denen von S_2 . In Tabelle 4 zum Beispiel hat S_1 das stärkere Blatt. Daher wird er α erhalten, wenn beide Spieler hoch setzen ($\hat{=}$ 1), oder wenn S_2 zunächst niedrig setzt, aber dann Vergleichen will ($\hat{=}$ 2). Wie man aber sieht, gibt es eine Möglichkeit, wie S_1 trotz des stärkeren Blattes verliert: Wenn S_2 hoch setzt und S_1 aufgibt, vielleicht weil er denkt, dass S_2 aufgrund seines hohen Einsatzes ein besseres Blatt hat. Umgekehrt hat auch S_1 eine Chance zu gewinnen, auch wenn er ein schlechteres Blatt hat als S_2 . Ein Blick auf Tabelle 6 zeigt, dass S_1 dazu einen hohen Einsatz bringen muss und S_2 aufgeben. S_2 wird sich, wenn er ein gutes Blatt hat nur zum Aufgeben entscheiden, wenn er denkt, dass S_1 ein noch besseres hat und diesen Eindruck macht S_1 durch einen hohen Einsatz. In Wirklichkeit jedoch hat in der Situation der Tabelle 3 S_2 die besseren Karten. Trotzdem wird er verlieren. Dieses Phänomen ist allgemein bekannt als Bluffen, und auch darauf soll später noch eingegangen werden.

Die Elemente der Auszahlungsmatrix entstehen nun, wie bereits erwähnt, durch Erwartungswerte. Man nimmt die Werte der Tabelle oben für jede mögliche Kombination von Blättern, die aufeinandertreffen können, und multipliziert dies mit der Wahrscheinlichkeit, dass eben die beiden Spieler genau diese beiden Blätter haben. Für die konkreten Strategien $\Sigma_1(x_1, \dots, x_B)$ und $\Sigma_2(y_1, \dots, y_B)$ ergibt sich

nach Neumann somit

$$A(x_1, \dots, x_B | y_1, \dots, y_B) = \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2=1}^B L_{\text{sgn}(b_1-b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2})$$

[vNM07, S. 192].

2.3.3 Gemischte Strategien für das Pokerspiel

Auch beim Poker wird ein Spieler wohl nicht nur bei einer Strategie bleiben und eine gemischte Strategie benutzen. Mit den 3^B reinen Strategien sind die gemischten Strategien $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ für S_1 und S_2 nun Elemente des S^{3^B} . Die einzelnen Komponenten der gemischten Strategien bezeichnet von Neumann mit ξ_{x_1, \dots, x_B} , beziehungsweise η_{y_1, \dots, y_B} . ξ_{x_1, \dots, x_B} ist die Wahrscheinlichkeit, dass S_1 die reine Strategie $\Sigma_1(x_1, \dots, x_B)$ wählt.⁹ Von Neumann reduziert die Komplexität der gemischten Strategien. Dazu betrachtet er zunächst die erwartete Auszahlung, welche für dieses Spiel mit der Auszahlungsmatrix gegeben ist durch

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{x_1, \dots, x_B, y_1, \dots, y_B} A(x_1, \dots, x_B | y_1, \dots, y_B) \xi_{x_1, \dots, x_B} \eta_{y_1, \dots, y_B}.$$

Nun führt von Neumann neue Größen ein:

$$\rho_x^{b_1} = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_B \\ \text{ohne } x_{b_1} \\ x_{b_1}=x}} \xi_{x_1, \dots, x_B}, \quad x \in \{1, 2, 3\}.$$

Man summiert für eine gemischte Strategie $\vec{\xi}$ die Komponenten aller reinen Strategien auf, bei denen die Wahl bei dem konkreten Blatt b_1 auf $x = 1, 2, 3$ fallen würde. Also ist dieser neue Wert die Wahrscheinlichkeit, dass S_1 mit dem Blatt b_1 und der gemischten Strategie $\vec{\xi}$ die Wahl $x \in \{1, 2, 3\}$ treffen wird. Genau so wird für S_2

$$\sigma_y^{b_2} = \sum_{\substack{y_1, \dots, y_B \\ \text{ohne } y_{b_2} \\ y_{b_2}=y}} \eta_{y_1, \dots, y_B}, \quad y \in \{1, 2, 3\}$$

⁹Würde man hier anfangen, die Komponenten von $\vec{\xi}$ mit Zahlen von 1 bis S^{3^B} durchnummerieren, würde man wahrscheinlich nicht glücklich werden. Daher ist die konkrete, zugehörige reine Strategie im Index der entsprechenden Komponente von $\vec{\xi}$ sinnvoll, da man sofort weiß, was gemeint ist und nicht erst noch nachsehen muss, welche reine Strategie welche Nummer hat.

definiert. Auch in Hinblick auf ihre Bedeutung ist klar, dass

$$\rho_x^{b_1} \geq 0 \text{ und } \sum_{x=1}^3 \rho_x^{b_1} = 1$$

und

$$\sigma_y^{b_2} \geq 0 \text{ und } \sum_{y_1}^3 \rho_y^{b_2} = 1.$$

Von Neumann definiert daraus die dreidimensionalen Vektoren

$$\vec{\rho}^{b_1} = \{\rho_1^{b_1}, \rho_2^{b_1}, \rho_3^{b_1}\} \text{ und } \vec{\sigma}^{b_2} = \{\sigma_1^{b_2}, \sigma_2^{b_2}, \sigma_3^{b_2}\}.$$

Intuitiv ist nach von Neumann logisch, dass die erwartete Auszahlung nur von diesen beiden Vektoren abhängt, und folgende Rechnung, die von Neumann nicht so ausführlich durchführt, belegt diese These.

$$\begin{aligned} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) &= \sum_{x_1, \dots, x_B, y_1, \dots, y_B} A(x_1, \dots, x_B | y_1, \dots, y_B) \xi_{x_1, \dots, x_B} \eta_{y_1, \dots, y_B} = \\ &= \frac{1}{B^2} \sum_{x_1, \dots, x_B, y_1, \dots, y_B} \sum_{b_1, b_2} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2}) \xi_{x_1, \dots, x_B} \eta_{y_1, \dots, y_B} = \\ &= \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2} \sum_{x_1, \dots, x_B, y_1, \dots, y_B} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2}) \xi_{x_1, \dots, x_B} \eta_{y_1, \dots, y_B} = \\ &= \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 \sum_{\substack{x_1, \dots, x_B \\ \text{ohne } x_{b_1} \\ x_{b_1} = x}} \sum_{\substack{y_1, \dots, y_B \\ \text{ohne } y_{b_2} \\ y_{b_2} = y}} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2}) \xi_{x_1, \dots, x_B} \eta_{y_1, \dots, y_B} = \\ &= \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 L_{sgn(b_1 - b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2}) \sum_{\substack{x_1, \dots, x_B \\ \text{ohne } x_{b_1} \\ x_{b_1} = x}} \xi_{x_1, \dots, x_B} \sum_{\substack{y_1, \dots, y_B \\ \text{ohne } y_{b_2} \\ y_{b_2} = y}} \eta_{y_1, \dots, y_B} = \\ &= \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2} \sum_{x, y} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x, y) \rho_x^{b_1} \sigma_y^{b_2} \end{aligned}$$

Daher soll die erwartete Auszahlung nun auch mit

$$K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B)$$

bezeichnet werden. Mit den Eigenschaften der Vektoren $\vec{\rho}^{b_1}$ und $\vec{\sigma}^{b_2}$ erhält man, dass diese Elemente des S^3 sind, welche 2 Konstanten enthalten, da $\rho_3^{b_1} = 1 - \rho_2^{b_1} - \rho_1^{b_1}$. Genauso ist es bei $\vec{\sigma}^{b_2}$. Da man diese 3-dimensionalen Vektoren für jedes $b = 1, \dots, B$ festlegen muss, hat man bei dieser Anschauungsweise $2B$ Kon-

stanten, mit denen man umgehen muss. Bei den gemischten Strategien als 3^B -dimensionale Vektoren, wie sie zuerst eingeführt wurden, braucht es wegen der Eigenschaft, dass die Komponenten aufsummiert 1 ergeben, $3^B - 1$ Konstanten. Und das sind wesentlich mehr als $2B$. Somit bringt die Einführung der neuen Vektoren eine Vereinfachung, sowohl in dieser Hinsicht, als auch für die Vorstellung des Sachverhaltes [vNM07, S. 193f].

2.3.4 Die beste Strategie

Um herauszufinden, wie die besten Strategien für die Spieler konkret aussehen, geht von Neumann davon aus, dass beide Spieler die für sie optimalen Strategien $\vec{\xi}^*$ und $\vec{\eta}^*$ spielen. Das bedeutet $(\vec{\xi}^*, \vec{\eta}^*)$ ist ein Sattelpunkt von $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$. Da es sich bei dem Pokerspiel, wie von Neumann es beschreibt, um ein symmetrisches Spiel handelt, haben beide Spieler die gleichen optimalen Strategien, das heißt unter der Annahme, dass beide gut spielen, sind ihre Strategien die gleichen und $\vec{\xi}^*$ ist optimal gegen sich selbst. $(\vec{\xi}^*, \vec{\xi}^*)$ ist folglich ein Sattelpunkt von $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ und es gilt, dass

$$\max_{\vec{\xi} \in S^{3^B}} \min_{\vec{\eta} \in S^{3^B}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta} \in S^{3^B}} K(\vec{\xi}^*, \vec{\eta})$$

angenommen wird für $\vec{\eta} = \vec{\xi}^*$.

Nach dem vorangegangenen Abschnitt ist bekannt, dass

$$K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B) = \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, x} \sum_{b_2, y} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x, y) \rho_x^{b_1} \sigma_y^{b_2}.$$

Die Vektoren $\vec{\rho}^1 \dots \vec{\rho}^B$ bilden eine gute Strategie, wenn

$$\min_{\vec{\sigma}^1} \dots \min_{\vec{\sigma}^B} K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B)$$

angenommen wird für $\vec{\rho}^1 = \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\rho}^B = \vec{\sigma}^B$. Von Neumann fixiert ein Blatt b_2 für S_2 und setzt seine Überlegung für dieses eine Blatt fort. $K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B)$ ist ein linearer Ausdruck bezüglich aller drei Komponenten von $\vec{\sigma}^{b_2}$. Also nimmt $K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B)$ sein Minimum bezüglich $\vec{\sigma}^{b_2}$ an, wenn alle Komponenten davon, deren Koeffizient nicht kleinstmöglich ist, 0 werden. Aus der Formel, die für $K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B)$ hergeleitet wurde, ergibt sich, dass

die Koeffizienten, von denen eben die Rede war, für $\sigma_y^{b_2}$ von der Form

$$\frac{1}{B^2} \sum_{b_1, x} L_{sgn(b_1-b_2)}(x, y) \rho_x^{b_1}$$

sind. Dies kürzt von Neumann mit

$$\frac{1}{B} \gamma_y^{b_2} := \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, x} L_{sgn(b_1-b_2)}(x, y) \rho_x^{b_1} \quad (22)$$

ab. Setzt man dies in die Formel für $K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B)$ ein, erhält man

$$K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B) = \frac{1}{B} \sum_{b_2, y} \gamma_y^{b_2} \sigma_y^{b_2}.$$

Damit folgt, dass $\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B$ eine gute Strategie bilden, genau dann, wenn für jedes Paar b_2, y , für das $\gamma_y^{b_2}$ nicht sein Minimum bezüglich y annimmt, gilt, dass $\rho_y^{s_2} = 0$. Schließlich gibt von Neumann die konkreten Ausdrücke für die Koeffizienten an:

$$\gamma_1^{b_2} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1=1}^{b_2-1} (-\alpha \rho_1^{b_1} - \alpha \rho_2^{b_1} - \beta \rho_3^{b_1}) - \beta \rho_3^{b_2} + \sum_{b_1=b_2+1}^B (\alpha \rho_1^{b_1} + \alpha \rho_2^{b_1} - \beta \rho_3^{b_1}) \right\} \quad (23)$$

$$\gamma_2^{b_2} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1=1}^{b_2-1} (-\alpha \rho_1^{b_1} - \beta \rho_2^{b_1} - \beta \rho_3^{b_1}) + \sum_{b_1=b_2+1}^B (\alpha \rho_1^{b_1} + \beta \rho_2^{b_1} + \beta \rho_3^{b_1}) \right\} \quad (24)$$

$$\gamma_3^{b_2} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1=1}^{b_2-1} (\beta \rho_1^{b_1} - \beta \rho_2^{b_1} - \beta \rho_3^{b_1}) + \beta \rho_1^{b_2} + \sum_{b_1=b_2+1}^B (\beta \rho_1^{b_1} + \beta \rho_2^{b_1} + \beta \rho_3^{b_1}) \right\} \quad (25)$$

[vNM07, S.195f].

Obwohl von Neumann darauf verzichtet, soll an dieser Stelle anhand des ersten Koeffizienten erklärt werden, wie diese Ausdrücke zustande kommen. In $\gamma_1^{b_2}$ steht fest, was S_2 mit dem Blatt b_2 machen wird: Er wird Option 1 wählen, also einen hohen Einsatz bringen. Mit (22) haben wir also

$$\gamma_1^{b_2} = \frac{1}{B} \sum_{b_1, x} L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1) \rho_x^{b_1} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1} \sum_x L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1) \rho_x^{b_1} \right\}.$$

Die Werte für $L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1)$ können von den Tabellen 4, 5 und 6 abgelesen werden, dazu ist es aber nötig, die Summe aufzuspalten in den ersten Teil, in dem b_1 kleiner ist als b_2 und S_1 somit schlechter, den Teil, in dem die beiden Blätter gleich gut sind, und den letzten Teil, in dem $b_1 > b_2$. Man erhält also

$$\begin{aligned} \gamma_1^{b_2} = & \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1=1}^{b_2-1} \sum_x L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1) \rho_x^{b_1} + \sum_{b_1=b_2}^{b_2} \sum_x L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1) \rho_x^{b_1} \right. \\ & \left. + \sum_{b_1=b_2+1}^B \sum_x L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1) \rho_x^{b_1} \right\}. \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir den ersten Teil der Summe, also

$$\sum_{b_1=1}^{b_2-1} \sum_x L_{sgn(b_1-b_2)}(x, 1) \rho_x^{b_1}.$$

In dieser Situation hat S_1 die schlechteren Karten, Tabelle 6 sagt uns also, welche Auszahlung es je nachdem, was S_1 macht, geben wird. Schreibt man die Summe über die Handlungsmöglichkeiten von S_1 also aus, erhält man in Kombination mit Tabelle 6

$$\sum_{b_1=1}^{b_2-1} (-\alpha \rho_x^{b_1} - \alpha \rho_x^{b_1} - \beta \rho_x^{b_1}).$$

Analog verfährt man mit den anderen zwei Teilen der Summe mit Tabelle 5 und Tabelle 4 und man erhält genau den Ausdruck, den von Neumann für den Koeffizienten angegeben hat.

Nach von Neumann lassen sich nun mit dem hergeleiteten Kriterium, das eine gute Strategie erfüllen muss, den Formeln für die Koeffizienten $\gamma_y^{b_2}$ und der erwarteten Auszahlung K in Abhängigkeit der Vektoren $\vec{\rho}^{b_1}$ und $\vec{\sigma}^{b_2}$ optimale Strategien festlegen. Um dies zu bewerkstelligen, geht von Neumann zu einer stetigen Problemstellung über, anstatt die diskrete zu betrachten. Er begründet dies damit, dass sich die Ergebnisse bis auf unwesentliche Details nicht unterscheiden werden und die Berechnungen für die diskrete Betrachtung sehr ermüdend sind. Es wird also jedem $b = 1, \dots, B$, welche ja aufsteigend nach Stärke geordnet sind, sein „Stärkewert“ z auf der Skala von 0 bis 1 zugeordnet. Jedes Blatt bekommt den Stärkewert $\frac{b-1}{B-1}$. Setzt man zum Beispiel $b = B$, also nimmt man das stärkste Blatt, bekommt man $\frac{b-1}{B-1} = \frac{B-1}{B-1} = 1$ und somit auch auf der neuen Skala den höchsten Wert. Man kann somit dazu übergehen, anstatt eines Blattes $b \in \{1, \dots, B\}$ ein $z \in [0, 1]$ zu wählen. Diese z liegen wegen der hohen Anzahl der möglichen Blätter sehr dicht im Intervall $[0, 1]$, es handelt sich jedoch immer

noch um einzelne Punkte darin. Da es aber eben sehr viele Blätter b gibt und somit auch viele z in $[0,1]$, kann man vereinfachend annehmen, dass alle Zahlen in $[0,1]$ als z möglich sind. Von nun an soll also das Verteilen der Karten an die Spieler betrachtet werden als ein zufälliges Ziehen aus dem Intervall $[0,1]$, wobei jedes Blatt mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird. S_1 spielt demnach mit Blatt z_1 und S_2 spielt mit Blatt z_2 . Überall, wo b_1 oder b_2 im Index auftauchen, wird künftig stattdessen z_1 , beziehungsweise z_2 geschrieben. Diese Veränderung führt auch dazu, dass in allen Formeln, die bisher benutzt wurden, Summen über die Blätter durch Integrale ausgetauscht werden müssen. Man erhält also

$$K = \sum_y \int_0^1 \gamma_y^{z_2} \sigma_y^{z_2} dz_2 \quad (26)$$

und für die Koeffizienten¹⁰

$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-\alpha\rho_1^{z_1} - \alpha\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1}) dz_1 + \int_{z_2}^1 (\alpha\rho_1^{z_1} + \alpha\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1}) dz_1, \quad (27)$$

$$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (-\alpha\rho_1^{z_1} - \beta\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1}) dz_1 + \int_{z_2}^1 (\alpha\rho_1^{z_1} + \beta\rho_2^{z_1} + \beta\rho_3^{z_1}) dz_1, \quad (28)$$

$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^{z_2} (\beta\rho_1^{z_1} - \beta\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1}) dz_1 + \int_{z_2}^1 (\beta\rho_1^{z_1} + \beta\rho_2^{z_1} + \beta\rho_3^{z_1}) dz_1. \quad (29)$$

Auch das Kriterium für eine gute Strategie soll an dieser Stelle nochmal festgehalten werden.

Kriterium für die gute Strategie

$\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B$ bilden eine gute Strategie, genau dann, wenn für jedes Paar b_2, y , für welches $\gamma_y^{b_2}$ nicht sein Minimum bezüglich y annimmt, gilt, dass $\rho_y^{b_2} = 0$ [vNM07, S. 196ff].

Damit lässt sich nun leichter eine gute Strategie $\vec{\rho}^z$ berechnen. Von Neumann geht dafür zunächst davon aus, dass $\rho_2^z > 0$ für irgendeine gute Strategie. Das heißt, es gibt für ein Blatt z eine gute Strategie, bei der man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit niedrig setzt und anschließend die Blätter vergleichen will. In diesem Fall muss nach dem Kriterium für gute Strategien gelten, dass

$$\min_y \gamma_y^z = \gamma_2^z.$$

¹⁰Die isolierten Terme in $\gamma_1^{b_2}$ und $\gamma_3^{b_2}$ können nun übergangen werden, da das Integral über ein Intervall mit nur einem Punkt immer 0 ergibt.

Dies bedeutet, dass $\gamma_1^z \geq \gamma_2^z$ und somit gilt

$$\gamma_2^z - \gamma_1^z \leq 0$$

[vNM07, S. 199]. Von Neumann setzt nun die Formeln für die jeweiligen Koeffizienten ein, präsentiert aber nur die letzte Zeile der folgenden Rechnung.

$$\begin{aligned} \gamma_2^z - \gamma_1^z &= \\ &= \int_0^z (-\alpha\rho_1^{z_1} - \beta\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1})dz_1 + \int_z^1 (\alpha\rho_1^{z_1} + \beta\rho_2^{z_1} + \beta\rho_3^{z_1})dz_1 - \\ &\quad \int_0^z (-\alpha\rho_1^{z_1} - \alpha\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1})dz_1 - \int_z^1 (\alpha\rho_1^{z_1} + \alpha\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1})dz_1 = \\ &= \int_0^z -\beta\rho_2^{z_1} + \alpha\rho_2^{z_1}dz_1 + \int_z^1 \beta\rho_2^{z_1} - \alpha\rho_2^{z_1} + 2\beta\rho_2^{z_1}dz_1 = \\ &= (\alpha - \beta)\left(\int_0^z \rho_2^{z_1}dz_1 - \int_z^1 \rho_2^{z_1}dz_1\right) + 2\beta \int_z^1 \rho_3^{z_1}dz_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Als nächstes betrachtet von Neumann das größte Blatt $z = z^0$, für das $\rho_2^z \neq 0$ gilt. Das heißt, (30) gilt auch für dieses z^0 .

$$(\alpha - \beta)\left(\int_0^{z^0} \rho_2^{z_1}dz_1 - \underbrace{\int_{z^0}^1 \rho_2^{z_1}dz_1}_{(a)}\right) + 2\beta \int_{z^0}^1 \rho_3^{z_1}dz_1 \leq 0$$

Da nach Voraussetzung für alle $z_1 > z^0$ gilt, dass $\rho_2^{z_1} = 0$, nimmt Term (a) den Wert 0 an. Und weil es für das Ergebnis einer Rechnung egal ist, ob man 0 addiert, oder subtrahiert, kann der Term genauso gut addiert werden und man erhält

$$\underbrace{(\alpha - \beta) \int_0^{z^0} \rho_2^{z_1}dz_1}_{(b)} + \underbrace{2\beta \int_{z^0}^1 \rho_3^{z_1}dz_1}_{(c)} \leq 0.$$

Teil (b) des Ausdrucks ist positiv, da nach Konstruktion des Spiels $\alpha > \beta$ und wegen der Annahme, dass $\rho_2^{z_1} \geq 0$ ist und für manche z_1 sogar > 0 . Teil (c) ist wegen den Eigenschaften von $\vec{\rho}^{z_1}$ ebenfalls ≥ 0 . Somit ergibt sich ein Widerspruch dazu, dass der Term ≤ 0 ist. Unsere Annahme, dass $\rho_2^z > 0$ für irgendein $z \in [0, 1]$ ist also falsch und es folgt

$$\rho_2^z \equiv 0 \quad (31)$$

[vNM07, S. 199].

Nachdem nun also ausgeschlossen wurde, dass eine gute Strategie die Option beinhaltet, niedrig zu setzen und anschließend die Karten vergleichen zu wollen, stellt von Neumann als nächstes die Frage, wie sich ρ_1^z und ρ_3^z verhalten. Nachdem $\rho_2^z = 0$ gilt, und die Summe der drei Komponenten von $\vec{\rho}^z$ 1 ergibt, folgt

$$\rho_3^z = 1 - \rho_1^z \quad (32)$$

und

$$0 \leq \rho_1^z \leq 1. \quad (33)$$

In dem Intervall $0 \leq z \leq 1$ gibt es, so überlegt von Neumann weiter, bestimmt Unterintervalle, in denen $\rho_1^z \equiv 0$ oder $\rho_1^z \equiv 1$ gilt, das heißt, es gibt Blätter, bei denen die gute Strategie vorschreibt, immer oder auf keinen Fall hoch zu setzen. Ein z , das in keinem solchen Unterintervall liegt, soll als zwischenliegend bezeichnet werden. Für ein zwischenliegendes z ist also $\rho_1^z \neq 0$ und $\rho_1^z \neq 1$. Da immer noch angenommen wird, dass wir eine gute Strategie betrachten, gilt nach der beschriebenen Anforderung an eine gute Strategie auch an einem zwischenliegendem z , dass entweder

$$\min_y \gamma_y^z = \gamma_1^z$$

oder

$$\min_y \gamma_y^z = \gamma_3^z,$$

und somit

$$\gamma_1^z \leq \gamma_3^z \text{ oder } \gamma_3^z \leq \gamma_1^z.$$

Beliebig nahe an einem zwischenliegendem z können beide Fälle auftreten, und da die Koeffizienten γ_y^z als Integrale stetig sind, folgt, dass direkt bei einem zwischenliegendem z gilt, dass

$$\gamma_1^z = \gamma_3^z \text{ beziehungsweise } \gamma_3^z - \gamma_1^z = 0.$$

Setzt man hier die Formeln (27) und (29) ein, erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_3^z - \gamma_1^z &= \\ &= \int_0^z (\beta \rho_1^{z_1} - \beta \rho_2^{z_1} - \beta \rho_3^{z_1}) dz_1 + \int_z^1 (\beta \rho_1^{z_1} + \beta \rho_2^{z_1} + \beta \rho_3^{z_1}) dz_1 - \\ &\quad \int_0^z (-\alpha \rho_1^{z_1} - \alpha \rho_2^{z_1} - \beta \rho_3^{z_1}) dz_1 - \int_z^1 (\alpha \rho_1^{z_1} + \alpha \rho_2^{z_1} - \beta \rho_3^{z_1}) dz_1 = \\ &= \int_0^z (\alpha + \beta) \rho_1^{z_1} + (\alpha - \beta) \rho_2^{z_1} dz_1 + \int_z^1 (\beta - \alpha) \rho_1^{z_1} + (\beta - \alpha) \rho_2^{z_1} + \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& 2\beta\rho_3^{z_1}dz_1 \stackrel{(31)}{=} \\
& = \int_0^z (\alpha + \beta)\rho_1^{z_1} - \int_z^1 (\alpha + \beta)\rho_1^{z_1} + 2\beta \int_z^1 \rho_3^{z_1}dz_1 \stackrel{(32)}{=} \\
& = (\alpha + \beta)\left(\int_0^z \rho_1^{z_1}dz_1 - \int_z^1 \rho_1^{z_1}dz_1\right) + 2\beta \int_z^1 1 - \rho_1^{z_1}dz_1 = \\
& = (\alpha + \beta)\left(\int_0^z \rho_1^{z_1}dz_1 - \int_z^1 \rho_1^{z_1}dz_1\right) + 2\beta(1 - z) = 0. \tag{35}
\end{aligned}$$

Als nächstes sollen zwei zwischenliegende Blätter, nämlich z^* und z^{**} betrachtet werden. Weil sie zwischenliegend sind, gilt für beide (34) und o.B.d.A sei dazu $z^* < z^{**}$. Um zu sehen, was zwischen zwei zwischenliegenden z passiert, setzt von Neumann jedes dieser beiden z in (34) ein und zieht die beiden Resultate von einander ab:

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \beta)\left(\int_0^{z^{**}} \rho_1^{z_1}dz_1 - \int_{z^{**}}^1 \rho_1^{z_1}dz_1\right) + 2\beta(1 - z^{**}) - \\
& (\alpha + \beta)\left(\int_0^{z^*} \rho_1^{z_1}dz_1 - \int_{z^*}^1 \rho_1^{z_1}dz_1\right) - 2\beta(1 - z^*) = \\
& = (\alpha + \beta)\left(\int_0^{z^{**}} \rho_1^{z_1}dz_1 + \int_{z^*}^1 \rho_1^{z_1}dz_1 - \int_{z^{**}}^1 \rho_1^{z_1}dz_1 - \int_0^{z^*} \rho_1^{z_1}dz_1\right) + \\
& 2\beta(1 - z^{**} - 1 + z^*) = \\
& = (\alpha + \beta)\left(\int_{z^*}^{z^{**}} \rho_1^{z_1}dz_1 + \int_{z^*}^{z^{**}} \rho_1^{z_1}dz_1\right) + 2\beta(z^* - z^{**}) = \\
& = 2(\alpha + \beta) \int_{z^*}^{z^{**}} \rho_1^{z_1}dz_1 - 2\beta(z^{**} - z^*) = 0
\end{aligned}$$

Umstellen ergibt

$$\frac{1}{z^{**} - z^*} \int_{z^*}^{z^{**}} \rho_1^{z_1}dz_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \tag{36}$$

und dies ist im Prinzip nichts anderes als ein Durchschnitt. Für alle $z_1 \in [z^*, z^{**}]$ werden die zugehörigen $\rho_1^{z_1}$ aufsummiert und es wird durch die Länge des Intervalls $[z^*, z^{**}]$ geteilt. Das heißt also, dass zwischen zwei zwischenliegenden z ρ_1^z durchschnittlich $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ beträgt. Daraus folgt, dass in $[z^*, z^{**}]$ ρ_1^z nicht konstant 0 oder 1 sein kann, da der Durchschnitt sonst auch 0 oder 1 wäre. Zwischen zwei zwischenliegenden z liegt folglich mindestens ein drittes. Iterierte Anwendung dieser Erkenntnis liefert, dass im Intervall zwischen zwei zwischenliegenden z überall andere zwischenliegende z dicht liegen. Und für alle Paare von zwischenliegenden z , die in diesem Intervall liegen, gilt (35). Wegen der Stetigkeit dieses Ausdruckes folgt wiederum, dass (35) für alle z zwischen zwei zwischenliegenden z gilt und

das bedeutet, dass

$$\rho_1^z = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \text{ für alle zwischenliegenden } z^*, z^{**}$$

[vNM07, S. 199f].

Doch existieren solche zwischenliegenden z überhaupt? Von Neumann begründet ihre Existenz mit der einfachen Überlegung, dass falls es sie nicht geben würde, wäre $\rho_1^z \equiv 0$ oder $\rho_1^z \equiv 1$ im ganzen Intervall $[0,1]$. Und immer das gleiche zu machen, egal, welches Blatt man bekommt, ist ganz offensichtlich nicht besonders schlau.¹¹ Daher muss es zwischenliegende z geben, und wenn dies der Fall ist, gibt es auch ein kleinstes und ein größtes davon. Sei nun \check{z} das kleinste zwischenliegende z und \hat{z} das größte. Von Neumann erläutert zunächst, wie ρ_1^z für $z \in [\hat{z}, 1]$ aussieht. Diese z liegen über \hat{z} und sind deswegen keine zwischenliegenden z . Das heißt, für diese $z \in [\hat{z}, 1]$ gilt entweder $\rho_1^z \equiv 0$ oder $\rho_1^z \equiv 1$. Welches von beiden der Fall ist, gilt es nun herauszufinden. Für $z = 1$ gilt:

$$\gamma_3^1 - \gamma_1^1 = (\alpha + \beta) \underbrace{\int_0^1 \rho_1^{z_1} dz_1}_{(d)} > 0 \quad (37)$$

da (d) wegen der Annahme, dass es zumindest ein zwischenliegendes z geben muss, größer als 0 ist. Damit folgt mit der Stetigkeit des Ausdruckes, dass $\gamma_1^z < \gamma_3^z$ nicht nur an $z=1$ selbst, sondern auch beliebig nah an $z=1$. Wegen der Anforderung, die wir an eine gute Strategie stellen, folgt damit, dass beliebig nahe an $z=1$ $\rho_3^z = 0$ und damit $\rho_1^z = 1$ gelten muss.¹² An \hat{z} selbst gilt, weil es zwischenliegend ist, dass $\rho_1^{\hat{z}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \neq 1$ und damit ist $\hat{z} < z = 1$. Es gibt also zwischen \hat{z} und 1 kein weiteres zwischenliegendes z und es gilt

$$\rho_1^z \equiv 1 \text{ für alle } z \in [\hat{z}, 1].$$

Als nächstes betrachtet von Neumann das kleinste zwischenliegende z , \check{z} . Falls $\check{z} > 0$, dann gibt es ein Intervall $[0, \check{z}]$, in dem es kein zwischenliegendes z gibt und in dem gilt $\rho_1^z \equiv 1$ oder $\rho_1^z \equiv 0$. Es gilt auf dem Intervall $[0, \check{z}]$, dass¹³

$$(\gamma_3^z - \gamma_1^z)' =$$

¹¹Da könnte man gleich bei den reinen Strategien bleiben.

¹²Weil γ_3^z nicht minimal wird, muss $\rho_3^z = 0$ sein und so damit sorgen, dass der Term aus K verschwindet.

¹³Auch von dieser Rechnung gibt von Neumann nur das Endergebnis an.

$$\begin{aligned}
&= ((\alpha + \beta) \left(\int_0^z \rho_1^{z_1} dz_1 - \int_z^1 \rho_1^{z_1} dz_1 \right) + 2\beta(1 - z))' = \\
&= ((\alpha + \beta) \int_0^z \rho_1^{z_1} dz_1 - (\alpha + \beta) \int_z^1 \rho_1^{z_1} dz_1 + 2\beta(1 - z))' \stackrel{\rho_1^z \text{ ist konstant}}{=} \\
&= ((\alpha + \beta) \rho_1^{z_1} z - (\alpha + \beta) \rho_1^{z_1} (1 - z) + 2\beta - 2\beta z)' = \\
&= (\alpha + \beta) \rho_1^{z_1} - (\alpha + \beta) (-\rho_1^{z_1}) - 2\beta = \\
&= (\alpha + \beta) (\rho_1^{z_1} + \rho_1^{z_1}) - 2\beta = \\
&= 2(\alpha + \beta) \rho_1^{z_1} - 2\beta
\end{aligned}$$

1. Fall: $\rho_1^{z_1} \equiv 0$ in $[0, \tilde{z}]$.

Dann ist $(\gamma_3^z - \gamma_1^z)' = -2\beta < 0$, das heißt, $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ ist monoton fallend in $[0, \tilde{z}]$. An \tilde{z} selbst ist $\rho_1^{\tilde{z}} = 0$ wegen (34). Also ist $\gamma_3^{\tilde{z}} - \gamma_1^{\tilde{z}} > 0$ in $[0, \tilde{z}]$ und damit $\gamma_3^{\tilde{z}} > \gamma_1^{\tilde{z}}$. Mit der Anforderung an gute Strategien folgt, dass $\rho_3^z \equiv 0$, also $\rho_1^z \equiv 1$ gelten muss. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\rho_1^{z_1} \equiv 0$ in $[0, \tilde{z}]$.

Fall 2: $\rho_1^{z_1} \equiv 1$ in $[0, \tilde{z}]$.

Also ist $(\gamma_3^z - \gamma_1^z)' = 2\alpha > 0$. Demnach ist $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ monoton steigend in $[0, \tilde{z}]$, und da $\rho_1^{\tilde{z}} = 0$ ist $\gamma_3^{\tilde{z}} - \gamma_1^{\tilde{z}} < 0$ in $[0, \tilde{z}]$, das heißt $\gamma_1^{\tilde{z}} > \gamma_3^{\tilde{z}}$. Wie bei Fall 1 folgt mit der Anforderung an gute Strategien, dass somit $\rho_1^z \equiv 0$ in $[0, \tilde{z}]$. Auch dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\rho_1^{z_1} \equiv 1$ in $[0, \tilde{z}]$.

Da in beide Fälle zu einem Widerspruch führen, muss die Annahme, dass $\tilde{z} > 0$, falsch gewesen sein. Es folgt

$$\tilde{z} = 0.$$

Der aktuelle Stand der Dinge ist also nun, dass es ein z gibt, nämlich \hat{z} für das gilt, dass alle z , die kleiner sind, auch zwischenliegend sind, und für alle z , die größer sind, gilt $\rho_1^z = 1$. Nachdem $\tilde{z} = 0$ auch ein zwischenliegendes z ist, können wir 0 in Gleichung (34) einsetzen.

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta) \left(\int_0^0 \rho_1^{z_1} dz_1 - \int_0^1 \rho_1^{z_1} dz_1 \right) + 2\beta = \\
&= -(\alpha + \beta) \int_0^1 \rho_1^{z_1} dz_1 + 2\beta = 0
\end{aligned}$$

Umstellen ergibt

$$\int_0^1 \rho_1^{z_1} dz_1 = \frac{2\beta}{\alpha + \beta}. \quad (38)$$

Weil ja bekannt ist, dass $\rho_1^{z_1}$ bis \hat{z} durchschnittlich $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ ist, und dass für alle

$z > \hat{z}$ $\rho_1^z = 1$ gilt, spalten wir das Integral an der Stelle \hat{z} auf.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho_1^{z_1} dz_1 &= \int_0^{\hat{z}} \underbrace{\rho_1^{z_1}}_{=\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dz_1 + \int_{\hat{z}}^1 \underbrace{\rho_1^{z_1}}_{=1} dz_1 = \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} \hat{z} + 1 - \hat{z} = 1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \hat{z} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} \hat{z} = \\ &= 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \hat{z} \end{aligned}$$

Setzt man dies in (37) ein, und löst nach \hat{z} auf, erhält man

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \hat{z} &= \frac{2\beta}{\alpha+\beta} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \hat{z} &= 1 - \frac{2\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \\ \Leftrightarrow \alpha \hat{z} &= \alpha - \beta \\ \Leftrightarrow \hat{z} &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \end{aligned} \tag{39}$$

Mit dieser Vorgehensweise hat von Neumann nun eine komplette Charakterisierung der optimalen Strategie gefunden. Diese lautet

$$\rho_1^z \begin{cases} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \text{für } 0 \leq z \leq \frac{\alpha-\beta}{\alpha} \\ = 1 & \text{für } \frac{\alpha-\beta}{\alpha} < z \leq 1 \end{cases} \tag{40}$$

und für alle $z \in [0, 1]$ gilt

$$\rho_2^z = 0 \text{ und } \rho_3^z = 1 - \rho_1^z \tag{41}$$

[vNM07, S. 199ff].

Jetzt, wo das optimalste \vec{p}^z festgelegt ist, ist es auch möglich, die Koeffizienten $\gamma_1^z, \gamma_2^z, \gamma_3^z$ konkret anzugeben. Von Neumann verzichtet darauf, die so entstehenden Funktionen für die Koeffizienten anzugeben und beschränkt sich darauf, sie graphisch zu zeigen. Hier soll jedoch anhand von γ_1^z gezeigt werden, wie die Funktionen zustande kommen [vNM07, S. 202ff].

Für $z < \hat{z}$:

$$\begin{aligned} \gamma_1^z &= \int_0^z (-\alpha \rho_1^{z_1} - \alpha \rho_2^{z_1} - \beta \rho_3^{z_1}) dz_1 + \int_z^1 (\alpha \rho_1^{z_1} + \alpha \rho_2^{z_1} - \beta \rho_3^{z_1}) dz_1 \stackrel{(40)}{=} \\ &= \int_0^z (-\alpha \rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1})) dz_1 + \int_z^1 (\alpha \rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1})) dz_1 \stackrel{\text{Integral bei } \hat{z} \text{ teilen}}{=} \end{aligned}$$

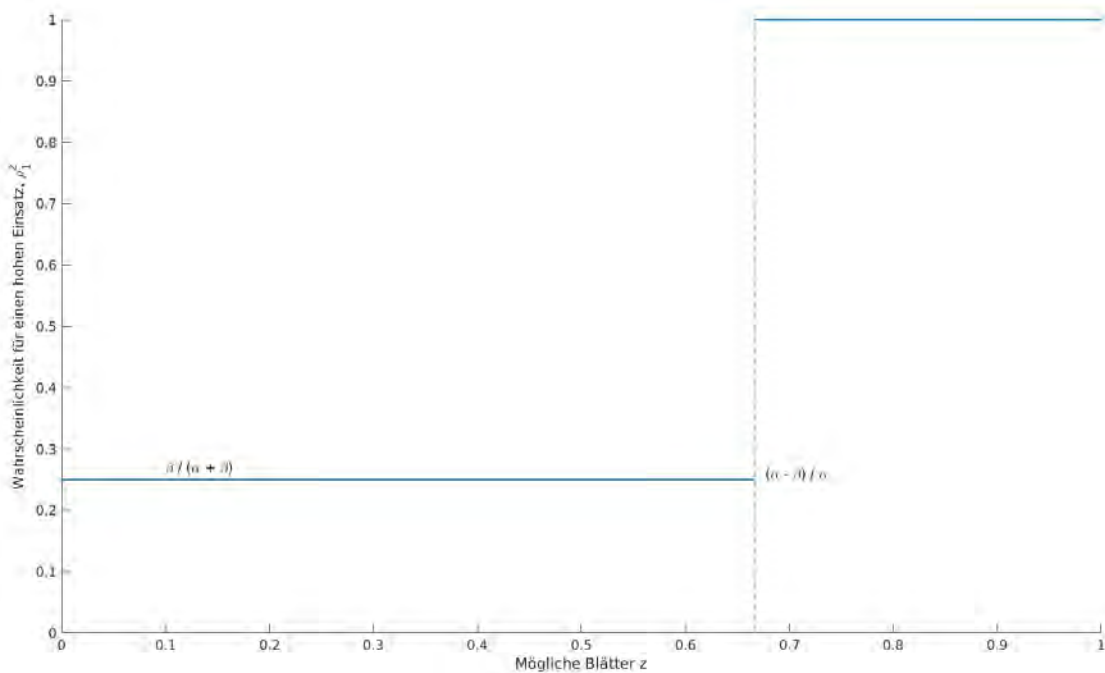


Abbildung 1: Der Verlauf von ρ_1^z

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^z (-\alpha\rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1}))dz_1 + \int_z^{\hat{z}} (\alpha\rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1}))dz_1 + \\
 &\quad \int_{\hat{z}}^1 (\alpha\rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1}))dz_1 = \\
 &= \int_0^z -\alpha\frac{\beta}{\alpha + \beta} - \beta\frac{\alpha}{\alpha + \beta}dz_1 + \int_z^{\hat{z}} \alpha\frac{\beta}{\alpha + \beta} - \beta\frac{\alpha}{\alpha + \beta}dz_1 + \int_{\hat{z}}^1 \alpha dz_1 = \\
 &= \frac{-2\alpha\beta}{\alpha + \beta}z + 0 + \alpha(1 - \hat{z}) = \\
 &= \frac{-2\alpha\beta}{\alpha + \beta}z + \alpha\left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right) = \frac{-2\alpha\beta}{\alpha + \beta}z + \alpha\frac{\beta}{\alpha} = \beta - 2\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}z
 \end{aligned}$$

Für $z > \hat{z}$:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^z &= \int_0^z (-\alpha\rho_1^{z_1} - \alpha\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1})dz_1 + \int_z^1 (\alpha\rho_1^{z_1} + \alpha\rho_2^{z_1} - \beta\rho_3^{z_1})dz_1 = \\
 &= \int_0^{\hat{z}} -\alpha\rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1})dz_1 + \int_{\hat{z}}^z -\alpha\rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1})dz_1 + \\
 &\quad \int_z^1 \alpha\rho_1^{z_1} - \beta(1 - \rho_1^{z_1})dz_1 = \\
 &= \int_0^{\hat{z}} \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}dz_1 + \int_{\hat{z}}^z -\alpha dz_1 + \int_z^1 \alpha dz_1 = \\
 &= \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} + (-\alpha)(z - \hat{z}) + \alpha(1 - z) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\beta(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} - \alpha z + (\alpha - \beta) + \alpha - \alpha z = \\
&= -2\alpha z - \frac{2\beta(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} + \frac{2\alpha(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} - \frac{\beta(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} = \\
&= \frac{\beta^2 + 2\alpha^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} - 2\alpha z
\end{aligned}$$

Die Berechnungen für γ_2^z und γ_3^z funktionieren analog. Aus ihnen ergibt sich

$$\gamma_2^z \begin{cases} = \frac{\beta(3\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} - \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta} z & \text{für } 0 \leq z \leq \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \\ = \frac{\beta(3\beta - \alpha)}{\alpha + \beta} & \text{für } \frac{\alpha - \beta}{\alpha} < z \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\gamma_3^z \begin{cases} = \beta - \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} & \text{für } 0 \leq z \leq \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \\ = \frac{\beta(3\beta - \alpha)}{\alpha + \beta} & \text{für } \frac{\alpha - \beta}{\alpha} < z \leq 1 \end{cases}$$

2.3.5 Anschauliche Interpretation der Lösung

In Worte gefasst bedeutet die eben errechnete formale Lösung des Pokerspiels nach von Neumann, dass man mit einem Blatt, das auf der Stärkeskala bei $\frac{\alpha - \beta}{\alpha}$ oder höher liegt, immer einen hohen Einsatz wählen sollte. Hat man ein schwächeres Blatt, sollte man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ hoch setzen, und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ niedrig setzen und aufgeben. Ein niedriger Einsatz mit anschließendem Kartenvergleich ist nie eine Option. Das heißt, mit einem Blatt unter $\frac{\alpha - \beta}{\alpha}$ wechselt ein Spieler, der gemäß der optimalen Strategie spielt, die Optionen 1 und 3 im Verhältnis von $\frac{\rho_3^z}{\rho_1^z} = \frac{\alpha}{\beta}$ ab. Betrachtet man die Formel, die für ρ_1^z gefunden wurde, wird auch deutlich, dass hohe Einsätze bei einem schwachen Blatt seltener werden, je weiter der hohe Einsatz a und der niedrige Einsatz b auseinander liegen, beziehungsweise je riskanter das Spiel wird. Eben diese hohen Einsätze bei schwachem Blatt, welche auf den ersten Blick ein wenig unsinnig erscheinen, sind auch bekannt als Bluffs [vNM07, S. 204]. Denn genau dies ist die Intention beim Bluffen: Wenn S_1 einen hohen Einsatz bringt, vermutet der Gegner wahrscheinlich, dass S_1 dementsprechend ein sehr gutes Blatt hat, er wird seines für schwächer halten und ist dazu geneigt, aufzugeben, weil er glaubt, keine Chance zu haben. Somit gewinnt S_1 , ganz egal, ob sein Blatt nun wirklich stärker war, oder nicht. Auf diesem Weg ist es also möglich, mit einem schwachen Blatt abzustauben [vNM07, S. 188].

Wie bereits erwähnt, gibt von Neumann nur eine graphische Darstellung der Koeffizienten, die weiter oben konkret für die optimale Strategie angegeben wurden.

Die Proportionen seiner Darstellung entsprechen denen für ein a , das dreimal so groß ist wie b [vNM07, S. 202]. Mit Hilfe der konkret berechneten Koeffizienten für die optimale Strategie wurden für diese Arbeit zwei Darstellungen angefertigt. Eine davon zeigt den Verlauf der Koeffizienten für $a = 20$ und $b = 5$, die andere für $a = 8$ und $b = 6$. Die Rückschlüsse, die von Neumann mit Hilfe der Koeffizienten und ihrer Darstellung auf das Kriterium für die gute Strategie macht, können auch anhand dieser nachvollzogen werden. Die Graphiken verdeutlichen nämlich zusätzlich, dass die berechnete Strategie das Kriterium erfüllt. Der Graph für γ_2^z ist auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ größer als die anderen, das zugehörige ρ_2^z muss also immer 0 sein und es wurde gezeigt, dass ja eben dies der Fall ist. Auch die berechneten ρ_1^z und ρ_3^z passen mit den Graphiken zusammen. Ab \hat{z} fällt γ_1^z steiler ab, während die anderen beiden konstant sind, das heißt, nach dem Kriterium für gute Strategien muss man ab \hat{z} Option 1 wählen und hoch setzen, weil der Koeffizient für diese Option am kleinsten ist. Auch diesbezüglich passen die Graphik und die errechnete Strategie zusammen. Für $z < \hat{z}$ verlaufen γ_1^z und γ_3^z gleich, aber immer noch unter γ_2^z , das heißt die Optionen 1 und 3 sind in diesem Bereich erlaubt und auch das entspricht dem berechneten Ergebnis [vNM07, S. 204].

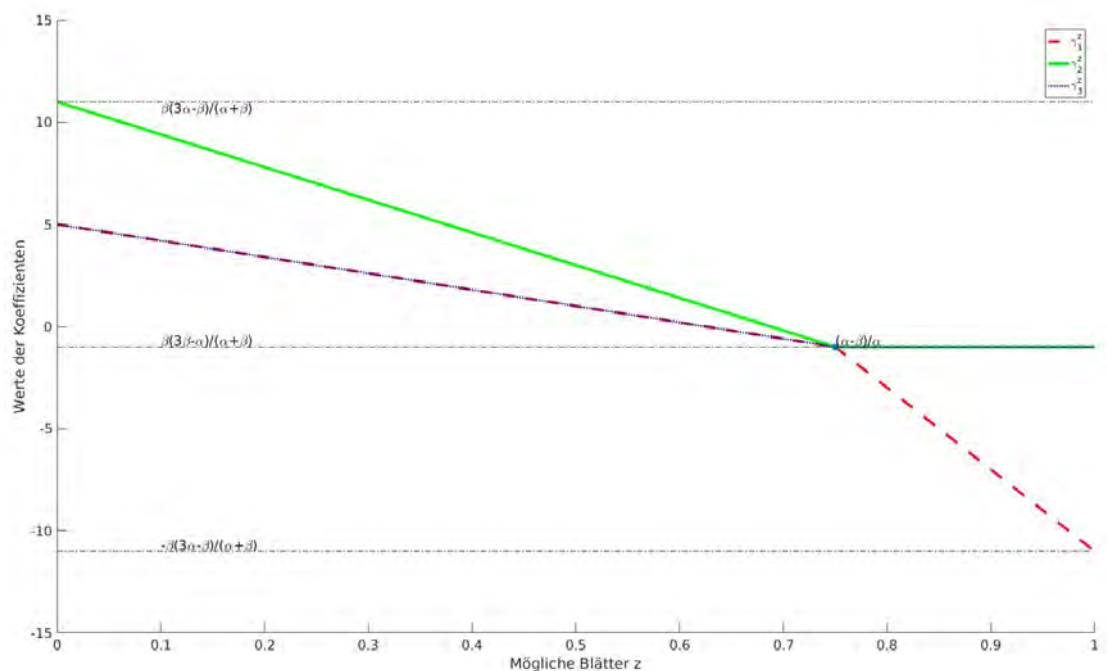


Abbildung 2: Darstellung der Koeffizienten für $a = 20$ und $b = 5$

Der visuelle Vergleich von zwei unterschiedlichen Spielszenarien, das heißt einem riskanten und einem weniger riskanten, zeigt einen weiteren interessanten Zusammenhang zwischen den möglichen Einsätzen und der Lage von $\hat{z} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ auf. Je weiter α und β auseinander liegen, also je riskanter das Spiel ist, desto höher liegt

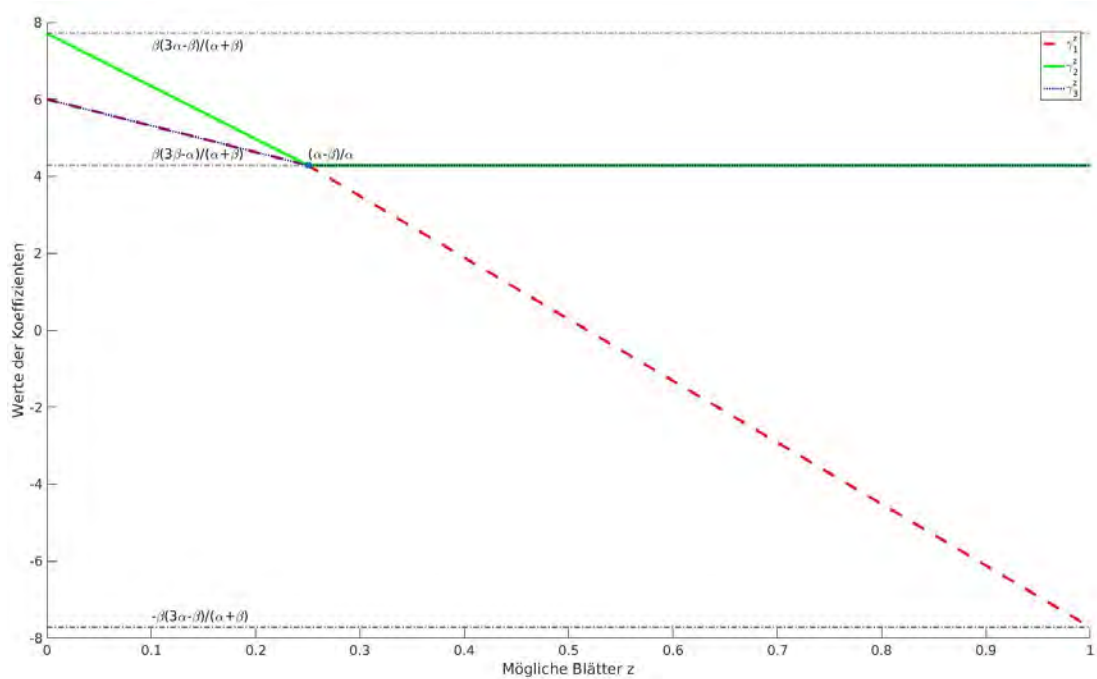


Abbildung 3: Darstellung der Koeffizienten für $a = 8$ und $b = 6$

$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$. Bei einem weniger riskanten Spiel, bei dem α und β weiter zusammen liegen, wandert $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ weiter in Richtung 0. Dies wird neben des graphischen Vergleiches auch durch die Formel $\hat{z} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ ersichtlich. Lässt man β fest und lässt α immer größer werden, nähert sich der Wert der 1 an, das heißt \hat{z} wird größer mit zunehmendem Risiko. Lässt man anders herum für ein festes β α immer weiter an β heran, wobei $\alpha > \beta$, so geht \hat{z} gegen 0. Die Erkenntnisse sind also die gleichen wie die, die durch die anschauliche Herangehensweise gewonnen wurden. Zusammengefasst heißt das also, dass man, wenn man die optimale Strategie spielt, bei einem riskanten Spiel erst ab einem im Vergleich stärkeren Blatt immer hoch setzt, als bei einem weniger riskanten Spiel. Hier schreibt die optimale Strategie vor, schon ab einem vergleichsweise schwächeren Blatt immer hoch zu setzen. Und das ist auch logisch, denn man hat ja weniger zu verlieren.

2.3.6 Verallgemeinerung der Regeln und ihre Auswirkungen auf die optimale Strategie

Für sein Pokernmodell und die Berechnung der optimalen Strategie hat von Neumann einige Vereinfachungen der Spielregeln vorgenommen, welche am Anfang dieses Abschnittes erläutert wurden. Mit Hilfe dieser konnten grundlegende Erkenntnisse über das Spiel gewonnen werden und manche Vereinfachungen sollen auch gar nicht aufgehoben werden. Doch ändert sich die Struktur der optima-

len Strategie, wenn gewisse Vereinfachungen aufgehoben werden? Da das Pokerspiel, in dem alle Regeln gleichzeitig ohne Einschränkung gelten, ungelöst ist, beschränkt sich von Neumann darauf, sein vereinfachtes Modell mit jeweils einer Erweiterung, die in Richtung des komplizierten Poker geht, zu betrachten, um diese Frage zu beantworten. Er wählt dazu drei verschiedene Aspekte aus [vNM07, S. 207]. Da er dabei lediglich die Ergebnisse erläutert und auf Details zum Weg zu diesen Ergebnissen verzichtet, soll auch hier nur ein kurzer Überblick über die Folgen der vorgenommenen Vereinfachungen zum Abschluss des Kapitels gegeben werden.

Die erste Vereinfachung, die von Neumann isoliert aufhebt, ist die, dass alle Blätter im Intervall $[0, 1]$ möglich sind, und geht zum diskreten Fall zurück, also zu den Blättern $b = 1, \dots, B$, wie sie zuerst eingeführt wurden. Das Resultat unterscheidet sich nach von Neumann mit dieser Anschauungsweise nicht wesentlich von dem, das im stetigen Fall erzielt wurde. $\rho_2^b = 0$ für alle b und es gibt ein \hat{b} mit $\rho_1^b = 1$ für alle $b > \hat{b}$, wobei $\frac{\hat{b}-1}{B-1}$ und $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ sehr nahe beieinander liegen. Der einzige Punkt, in dem sich die optimale Strategie für den diskreten Fall von dem Ergebnis der Vereinfachung unterscheidet ist der, dass das ρ_1^b für $b < \hat{b}$ nicht konstant ist. Für diskrete Blätter oszilliert ρ_1^b im Bluff-Bereich, der Durchschnitt aller ρ_1^b im Bluff-Bereich liegt jedoch bei dem errechneten $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Im diskreten Fall weist die optimale Strategie also eine viel kompliziertere Feinstruktur für $b < \hat{b}$ auf, als es bei der Vereinfachung der Fall ist. Trotzdem bringt die Befolgung der komplizierten optimalen Strategie im Vergleich zur einfachen optimalen Strategie keinen wesentlichen Vorteil, wie von Neumann erklärt. Auf tiefer gehende Ausarbeitungen bezüglich dieses Aspektes verzichtet er [vNM07, S. 208f].

Als nächstes betrachtet von Neumann den Fall, dass mehrere Einsätze als nur ein hoher und ein niedriger möglich sind. Die Blätter sind nun also wieder aus dem ganzen Intervall $[0,1]$, doch anstatt den zwei Einsätzen α und β sind nun m verschiedene Einsätze

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > 0$$

möglich. Auch in diesem Szenario gibt es ein \hat{z} , ab dem ein Spieler gemäß der optimalen Strategie immer den höchsten Einsatz bringen sollte. Für $z < \hat{z}$ sollte ein Spieler mit gewissen Wahrscheinlichkeiten, welche für jedes konkrete z anders sind, die anderen möglichen Einsätze wählen. Das heißt, die optimale Strategie ähnelt auch hier jener, die für die Vereinfachung gefunden wurde. Legt man nun den größten möglichen Einsatz α_1 und den niedrigsten α_m fest und verteilt die restlichen möglichen Einsätze $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ im Intervall $[\alpha_1, \alpha_m]$, könnte man vermuten, dass sich die optimale Strategie für $m \rightarrow \infty$ an die optimale Strategie

für ein Spiel, bei dem wirklich alle Einsätze aus $[\alpha_1, \alpha_m]$ erlaubt sind, annähert.¹⁴ Dies scheint sich bei Ausführung der Rechnungen jedoch als falsch herauszustellen. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ im Intervall $[\alpha_1, \alpha_m]$ zu verteilen, zum Beispiel

$$\alpha_p = \frac{1}{m-1}((m-p)\alpha_1 + (p-1)\alpha_m)$$

oder

$$\alpha_p = \sqrt[m-1]{\alpha_1^{m-p}\alpha_m^{p-1}}.$$

Für beide Ansätze sieht die Strategie, die man für $m \rightarrow \infty$ erhält, anders aus. Betrachtet man jedoch direkt ein Spiel, bei dem alle Einsätze zwischen α_1 und α_m erlaubt sind, so erklärt von Neumann, ist es möglich, optimale Strategien zu berechnen und es stellt sich heraus, dass die optimalen Strategien, die die zwei eben angeführten unterschiedlichen Möglichkeiten, die $\alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ ins Intervall $[\alpha_1, \alpha_m]$ zu legen, bringen, tatsächlich zur Menge der optimalen Strategien in dieser Version des Spiels gehören. Es gibt in dieser Variante des Spiels also eine größere Menge von Lösungen mit unterschiedlichen Strukturen [vNM07, S. 210f]. Schließlich soll noch der Fall betrachtet werden, dass die Spieler nicht gleichzeitig, sondern nacheinander ihre Einsätze abgeben. Da das Spiel in diesem Fall ein bisschen anders beschrieben werden muss, folgt nun ein Schnelldurchlauf dieser Beschreibung, welche an vielen Stellen völlig analog zu der abläuft, welche bereits für den vereinfachten Fall angestellt wurde. Daher ist es nicht nötig, hier ins Detail zu gehen.

Zu Beginn bekommen S_1 und S_2 ihre Blätter b_1 und $b_2 \in \{1, \dots, B\}$. Dann ist S_1 an der Reihe, einen Einsatz zu geben und kann sich dabei für einen hohen oder niedrigen Betrag entscheiden. Entscheidet er sich für den niedrigen Einsatz, ist das Spiel vorbei. Setzt S_1 hoch, kommt S_2 , der über die Wahl von S_1 Bescheid weiß, an die Reihe, seinen Einsatz zu machen. Auch er kann sich dann zwischen einem hohen und einem niedrigen entscheiden, und das Spiel ist beendet. Am Ende des Spiels sehen die Auszahlungen also folgendermaßen aus:

Setzt S_1 niedrig, bekommt er für $b_1 \stackrel{\geq}{\equiv} b_2$ von S_2 den Betrag $\frac{\beta}{-\beta}$. Wählen beide Spieler den hohen Einsatz, erhält S_1 mit $b_1 \stackrel{\geq}{<} b_2$ $\frac{\alpha}{-\alpha}$. Setzt S_1 hoch und S_2 niedrig, bekommt S_1 von S_2 einen Betrag in der Höhe β [vNM07, S. 211].

Auch hier ist eine reine Strategie eine Folge von Zahlen, die für jedes Blatt b festlegt, was der Spieler macht. Die Notation bleibt die selbe wie in der erläuterten einfacheren Form des Spiels, lediglich die Möglichkeiten der Spieler ändern sich.

¹⁴Angenommen, sie nähert überhaupt an etwas an.

1 $\hat{=}$ hoher Einsatz

2 $\hat{=}$ niedriger Einsatz

Jeder der beiden Spieler hat demnach 2^B reine Strategien zur Verfügung, das Spiel ist aber nicht symmetrisch, da die beiden Spieler dadurch, dass einer beginnen muss, unterschiedliche Rollen spielen. Für $L_+(x, y)$, $L_0(x, y)$ und $L_-(x, y)$ ergeben sich mit den eben erklärten Regeln die Tabellen:

$y_{b_2} \backslash x_{b_1}$	1	2
1	α	β
2	β	β

Tabelle 7: L_+

$y_{b_2} \backslash x_{b_1}$	1	2
1	0	β
2	0	0

Tabelle 8: L_0

$y_{b_2} \backslash x_{b_1}$	1	2
1	$-\alpha$	β
2	$-\beta$	$-\beta$

Tabelle 9: L_-

Mit diesen Werten wird es nun wieder möglich, die Elemente der Auszahlungsmatrix zu berechnen mit

$$A(x_1, \dots, x_B | y_1, \dots, y_B) = \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2}^B L_{sgn(b_1 - b_2)}(x_{b_1}, y_{b_2}).$$

Analog zu den Umformungen eben erhält man für die Auszahlung in Abhängigkeit von den diesmal 2-dimensionalen Vektoren¹⁵ $\vec{\rho}^{b_1}$ und $\vec{\sigma}^{b_2}$

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, b_2} \sum_{x, y} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x, y) \rho_x^{b_1} \sigma_y^{b_2},$$

was mittels der Koeffizienten

$$\frac{1}{B} \gamma_y^{b_2} = \frac{1}{B^2} \sum_{b_1, x} L_{sgn(b_1 - b_2)}(x, y) \rho_x^{b_1}$$

umgeschrieben werden kann zu

$$K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B) = \frac{1}{B} \sum_{b_2, y} \gamma_y^{b_2} \sigma_y^{b_2}.$$

Die Koeffizienten lauten konkret

$$\gamma_1^{b_2} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1=1}^{b_2-1} (-\alpha \rho_1^{b_1} - \beta \rho_2^{b_1}) + \sum_{b_1=b_2+1}^B (\alpha \rho_1^{b_1} + \beta \rho_2^{b_2}) \right\}$$

¹⁵Diese haben wieder die Eigenschaft, dass ihre Komponenten alle positiv sind und aufsummiert 1 ergeben.

und

$$\gamma_2^{b_2} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_1=1}^{b_2-1} (\beta \rho_1^{b_1} - \beta \rho_2^{b_1}) + \beta \rho_1^{b_2} + \sum_{b_1=b_2+1}^B (\beta \rho_1^{b_1} + \beta \rho_2^{b_1}) \right\}.$$

Da das Spiel ja nicht mehr symmetrisch ist, muss man - und das ist das einzige, worin sich die Überlegung von der für den einfachen Fall unterscheidet - die Auszahlung für den anderen Spieler gesondert betrachten. Für ihn ergibt sich:

$$K(\vec{\rho}^1, \dots, \vec{\rho}^B | \vec{\sigma}^1, \dots, \vec{\sigma}^B) = \frac{1}{B} \sum_{b_1, x} \delta_x^{b_1} \rho_x^{b_1}$$

mit den Koeffizienten

$$\delta_1^{b_1} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_2=1}^{b_1-1} (\alpha \sigma_1^{b_2} + \beta \sigma_2^{b_2}) + \beta \sigma_2^{b_1} + \sum_{b_2=b_1+1}^B (-\alpha \sigma_1^{b_2} + \beta \sigma_2^{b_2}) \right\}$$

und

$$\delta_2^{b_1} = \frac{1}{B} \left\{ \sum_{b_2=1}^{b_1-1} (\beta \sigma_1^{b_2} + \beta \sigma_2^{b_2}) + \sum_{b_2=b_1+1}^B (-\beta \sigma_1^{b_2} - \beta \sigma_2^{b_2}) \right\}.$$

Geht man nun zum stetigen Problem über, erhält man

$$K = \sum_y \int_0^1 \gamma_y^{z_2} \sigma_y^{z_2} dz_2,$$

$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-\alpha \rho_1^{z_1} - \beta \rho_2^{z_1}) dz_1 + \int_{z_2}^1 (\alpha \rho_1^{z_1} + \beta \rho_2^{z_1}) dz_1,$$

$$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (\beta \rho_1^{z_1} - \beta \rho_2^{z_1}) dz_1 + \int_{z_2}^1 (\beta \rho_1^{z_1} + \beta \rho_2^{z_1}) dz_1$$

und

$$K = \sum_x \int_0^1 \delta_x^{z_1} \rho_x^{z_1} dz_1,$$

$$\delta_1^{z_1} = \int_0^{z_1} (\alpha \sigma_1^{z_2} + \beta \sigma_2^{z_2}) dz_2 + \int_{z_1}^1 (-\alpha \sigma_1^{z_2} + \beta \sigma_2^{z_2}) dz_2,$$

$$\delta_2^{z_1} = \int_0^{z_1} (\beta \sigma_1^{z_2} + \beta \sigma_2^{z_2}) dz_2 + \int_{z_1}^1 (-\beta \sigma_1^{z_2} - \beta \sigma_2^{z_2}) dz_2.$$

Das Kriterium für gute Strategien kann übernommen werden, dabei müssen die beiden Spieler nun aber separat behandelt werden. $\vec{\rho}^{z_1}$ und $\vec{\sigma}^{z_2}$ bilden gute Strategien, wenn für alle z_2, y , für die $\gamma_y^{z_2}$ nicht minimal bezüglich y wird, $\sigma_y^{z_2} = 0$ gilt und wenn für alle z_1, x , für die $\delta_x^{z_1}$ nicht sein Minimum bezüglich x annimmt, $\rho_x^{z_1} = 0$ gilt.

Berechnet man damit die optimalen Strategien für beide Spieler, wird ersichtlich, dass es für S_1 genau eine gute Strategie gibt, während es für S_2 eine ganze Menge an guten Strategien gibt. Die folgenden Abbildungen zeigen die jeweiligen optimalen Strategien mit

$$u = \frac{(\alpha - \beta)\beta}{\alpha(\alpha + 3\beta)} \text{ und } v = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2}{\alpha(\alpha + 3\beta)}.$$

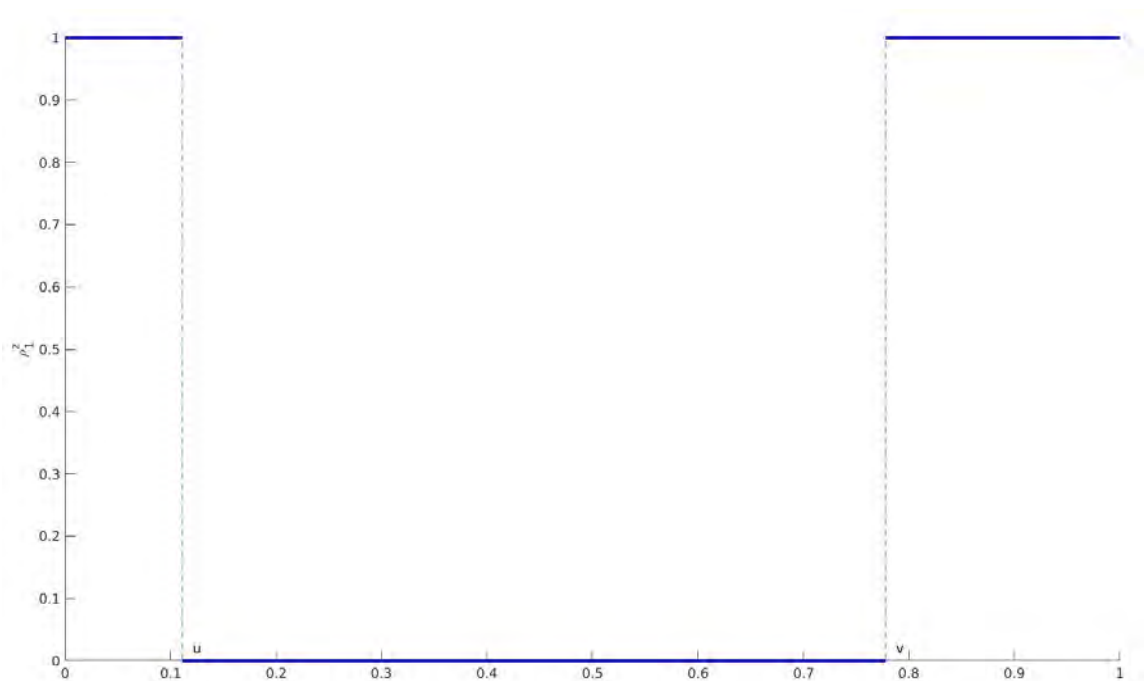


Abbildung 4: Der Verlauf von ρ_1^z bei einem Spiel mit abwechselnden Einsätzen

Dabei handelt es sich bei der optimalen Strategie für S_2 lediglich um ein Beispiel aus der ganzen Menge seiner optimalen Strategien. Tatsächlich sind für S_2 all diejenigen Strategien gut, für die σ_1^z folgende Bedingung im Intervall $[u, v]$ erfüllt:

$$\frac{1}{v - z} \int_z^v \sigma_1^z dz \begin{cases} = \frac{\beta}{\alpha} & \text{für } z = u \\ \geq \frac{\beta}{\alpha} & \text{für } u < z < v \end{cases}$$

Für die Darstellung wurde der einfachste Fall, dass $\sigma_1^z = \frac{\beta}{\alpha}$ für alle $z \in [u, v]$ gewählt, welcher diese Bedingung offensichtlich erfüllt. Betrachtet man nun die Darstellungen der Koeffizienten mit $\gamma_2^z - \gamma_1^z$ und $\delta_1^z - \delta_2^z$, wird nochmal deutlicher, dass die berechneten guten Strategien wirklich das Kriterium für optimale Strategien erfüllen¹⁶ [vNM07, S. 217].

¹⁶ Da es jetzt nur noch jeweils zwei Koeffizienten gibt, reicht es, jeweils die Differenz der beiden zu betrachten.

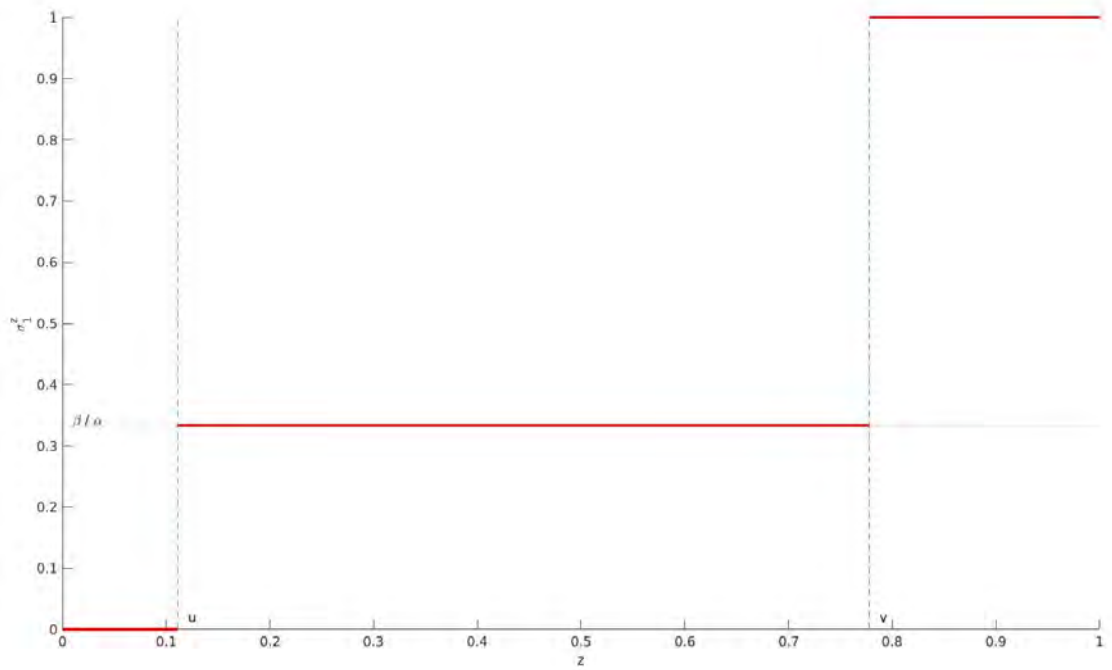


Abbildung 5: Ein Beispiel für einen möglichen Verlauf von σ_1^z

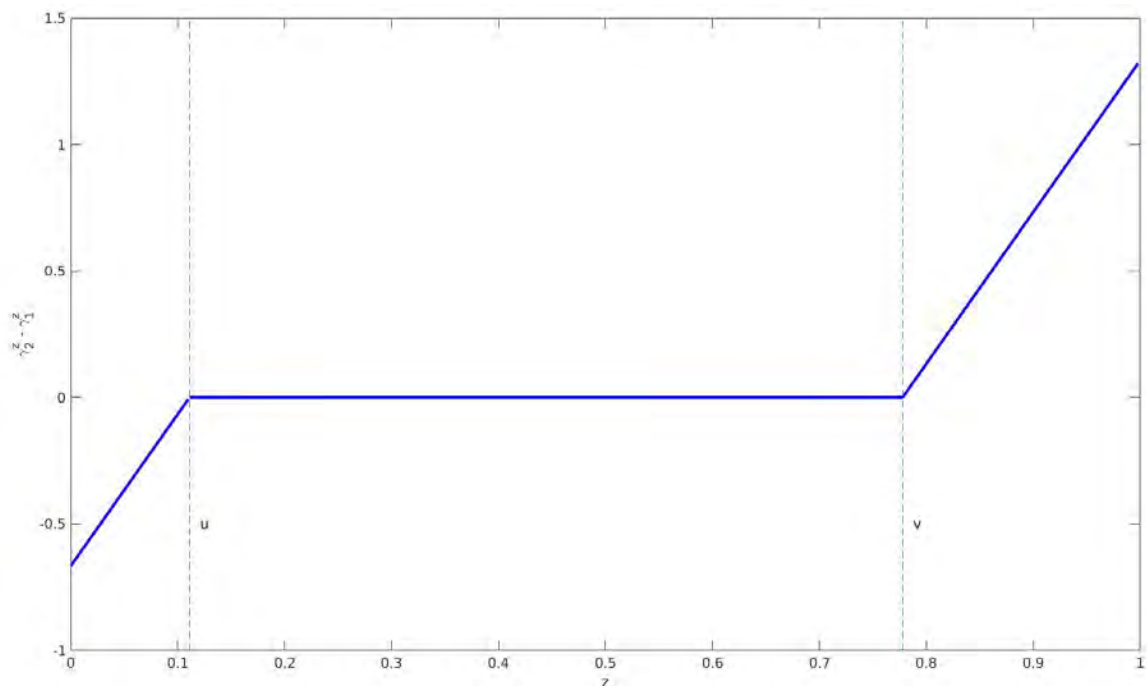


Abbildung 6: Differenz der Koeffizienten γ_2^z und γ_1^z für S_2

Da das Spiel nicht mehr symmetrisch ist, ist der Wert davon nicht mehr 0, wie

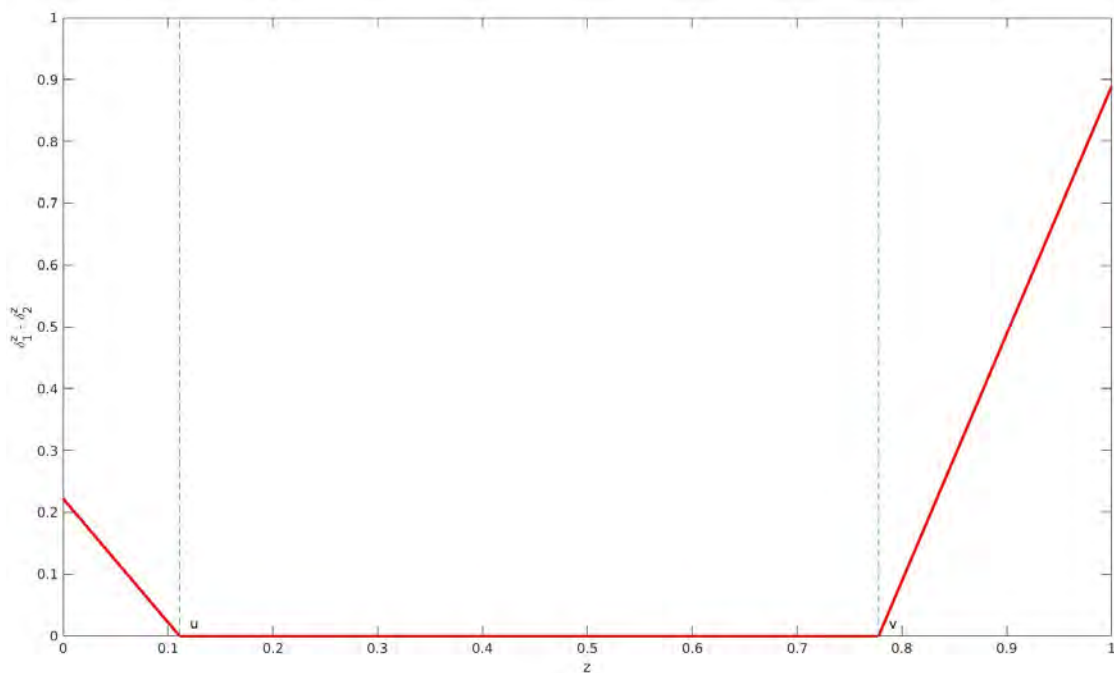


Abbildung 7: Differenz der Koeffizienten δ_1^z und δ_2^z für S_1

es vorher der Fall war¹⁷[vNM07, S. 204]. Tatsächlich gilt

$$v = \beta u = \frac{(\alpha - \beta)\beta^2}{\alpha(\alpha + 3\beta)}.$$

Der Wert ist positiv, das heißt S_1 ist im Vorteil und dies scheint angesichts der Tatsache, dass dieser beim Spiel beginnen darf, nicht sehr ungewöhnlich [vNM07, S. 218].

2.3.7 Das Poker-Modell nach Borel - Ein kurzer Vergleich

Neben John von Neumann hat sich auch Borel damit befasst, das Kartenspiel Poker aus einem mathematischen Blickwinkel zu betrachten, jedoch aus einer konkreteren Motivation heraus: Er sah in der mathematischen Betrachtung von Spielen eine Möglichkeit, Erkenntnisse bezüglich Ökonomie und Kriegskunst zu gewinnen [Bew07, S. 249]. Chris Ferguson und Thomas Ferguson geben einen kurzen Überblick über die Modelle von John von Neumann und Borel. Da dasjenige von John von Neumann im Rahmen dieser Arbeit bereits umfassend betrachtet wurde, soll auf den entsprechenden Teil in Fergusons und Fergusons Artikel nicht mehr näher eingegangen werden. Für einen abschließenden, kleinen Vergleich wird im folgenden Abschnitt das Poker-Modell von Borel kurz vorgestellt.

¹⁷Von Neumann begründet diese Tatsache nicht weiter, aber wir haben Satz 5.

Borel geht in seiner Version des Pokerspiels, die er *la relance* nennt, direkt davon aus, dass die beiden Spieler nacheinander ihre Einsätze abgeben und somit unterschiedliche Rollen einnehmen [FF03, S. 20], wie es von Neumann erst bei der Verallgemeinerung seines vereinfachten Modells macht. Wie bei der Form von Blackjack, die als Einstieg betrachtet wurde, geben die Spieler einen Starteinsatz von einer Geldeinheit, bevor sie ihre Karten kennen. Nachdem die beiden Spieler ihre Blätter z_1 und z_2 aus dem Intervall $[0,1]$ angesehen haben, hat S_1 die Wahl, ob er aufgibt, und somit seinen Anfangseinsatz an S_2 verliert, oder ob er einen gewissen Betrag $M > 1$ setzt. Falls sich S_1 entschieden hat, zu setzen, kann S_2 entweder aufgeben und seinen Starteinsatz an S_1 verlieren oder er setzt ebenfalls M und die Karten der Spieler werden verglichen. Derjenige mit dem stärkeren Blatt gewinnt $M+1$. So beschreiben Ferguson und Ferguson die Regeln von *la relance* [FF03, S. 20]. Um eine optimale Strategie für S_2 zu finden, wenden Ferguson und Ferguson das Indifferenzprinzip an und gehen davon aus, dass die Eingangseinsätze der Spieler vorher niemandem gehört haben, das heißt, man kann sie gewinnen, aber nicht verlieren. Nach den vorangegangenen Kapiteln erscheint es logisch, dass sich S_2 irgendwie ein $c \in [0, 1]$ wählen muss, sodass er für alle $z_2 < c$ aufgibt, und für alle $z_2 > c$ ebenfalls M setzt und die Blätter vergleichen will. S_2 wird dieses c natürlich so wählen, dass er S_1 das Leben möglichst schwer macht, das heißt, er wählt es so, dass S_1 , falls er ein Blatt hat, das schwächer ist als c , nicht genau weiß, ob er setzen oder aufgeben soll. Angenommen, S_2 spielt nach einer Strategie, wie sie eben beschrieben wurde und S_1 hat ein Blatt $z_1 < c$. Falls S_1 setzt und S_2 ein schwächeres Blatt als c hat, dann gewinnt S_1 2, da S_2 in diesem Fall ja sicher aufgibt. Setzt S_1 und S_2 hat ein stärkeres Blatt als c , verliert S_1 einen Betrag von M , denn S_2 wird die Karten vergleichen wollen und er hat ja das stärkere Blatt. Gibt S_1 auf, gewinnt er nichts [FF03, S. 21]. Die erwartete Auszahlung für S_1 ist also

$$2c - M(1 - c).$$

S_1 wird bezüglich seiner Entscheidung ratlos sein, falls der erwartete Gewinn für ihn 0 ist, also falls

$$\begin{aligned} 2c - M(1 - c) &= 0 \\ \Rightarrow c &= \frac{M}{M + 2} \end{aligned}$$

Die optimale Strategie, die Borel nach Ferguson und Ferguson für S_1 findet, ist der, die im Modell von von Neumann gefunden wurde, ähnlich. Auch diese schreibt vor, ab einem gewissen $c \in [0, 1]$ immer zu setzen und für Blätter, die schwächer sind als c nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu setzen. Um

diese Wahrscheinlichkeit zu finden, verwenden Ferguson und Ferguson wiederum das Indifferenzprinzip. Dazu setzen sie zunächst ϕ fest als die Wahrscheinlichkeit, dass S_1 mit $z_1 < c$ setzt. Also

$$P(S_1 \text{ setzt} | z_1 < c) = \phi$$

Mit dem Satz von Bayes folgt:

$$P(z_1 < c | S_1 \text{ setzt}) = \frac{P(S_1 \text{ setzt} | z_1 < c) \cdot P(z_1 < c)}{P(S_1 \text{ setzt})} = \frac{\phi \cdot c}{\phi c + (1 - c)}$$

S_1 will sein ϕ so wählen, dass S_2 es möglichst schwer hat, falls er genau das Blatt c hat. Falls S_2 mit $z_2 = c$ setzt und vergleichen will, gewinnt er den Betrag $M+2$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(z_1 < c | S_1 \text{ setzt})$ und er verliert M mit der Wahrscheinlichkeit $P(z_1 > c | S_1 \text{ setzt})$ [FF03, S. 21]. Diese Wahrscheinlichkeit kann berechnet werden und dies soll an dieser Stelle auch geschehen. Ferguson und Ferguson geben lediglich das Endergebnis an. Es gilt also

$$P(z_1 > c | S_1 \text{ setzt}) = \frac{P(S_1 \text{ setzt} | z_1 > c) \cdot P(z_1 > c)}{P(S_1 \text{ setzt})} = \frac{1 - c}{\phi c + (1 - c)}$$

S_2 ist also ratlos bezüglich seiner Entscheidung, falls sein erwarteter Gewinn 0 ist, also wenn gilt

$$\begin{aligned} (M + 2) \frac{\phi c}{\phi c + (1 - c)} - M \frac{1 - c}{\phi c + (1 - c)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (M + 2)\phi c - M(1 - c) &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi &= 1 - c = \frac{2}{M + 2} \end{aligned}$$

Zusammengefasst bedeutet das also, dass die optimale Strategie für S_2 so aussieht, dass er aufgibt, falls $z_2 < \frac{M}{M+2}$ und vergleicht bei $z_2 > \frac{M}{M+2}$. S_1 sollte für $z_1 > c$ immer setzen und für $z_1 < c$ nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{M+2}$.

Wo liegen nun die zentralen Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Modelle? Als erstes fällt natürlich auf, dass sich die Spielregeln unterscheiden und somit die Eigenschaften des Spiels. Während bei von Neumann kein Anfangseinsatz gespielt wird, ist dieser bei Borel Teil des Spiels. Auch bezüglich der Rollen der Spieler unterscheiden sich die Modelle. Bei von Neumann treffen beide Spieler gleichzeitig ihre Entscheidung über einen hohen oder niedrigen Einsatz und erst aufgrund dieser Entscheidungen wird bestimmt, wer von den beiden nochmal eine Entscheidung treffen muss. Bei Borel sind die Rollen von Anfang an festgelegt und die

Spieler nehmen unterschiedliche Rollen ein. Daher ist das Spiel in diesem Modell auch nicht symmetrisch und die beiden Spieler haben unterschiedliche optimale Strategien, ähnlich zu der betrachteten Regelerweiterung des Neumann-Modells bezüglich der abwechselnden Einsätze, welche im vorangegangenen Kapitel betrachtet wurde. Die Struktur der optimalen Strategien, die gefunden wurden, sind sich aber in ihren groben Zügen ähnlich. So finden sowohl von Neumann, als auch Borel für S_1 eine optimale Strategie, in der er ab einem Blatt mit einer gewissen Stärke immer hoch setzt, bzw. überhaupt setzt und für alle Blätter, die schwächer sind als dieses, dies nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit tut. Die Werte für diese Wahrscheinlichkeit, mit der im Bluff-Bereich ein hoher Einsatz gegeben wird, sind sogar gleich, wenn man den Starteinsatz im Jackpot aus dem Borel-Modell als den niedrigen Einsatz β im Neumann-Modell betrachtet und den Einsatz $M > 1$ des Borel-Modells als den hohen Einsatz α des Neumann-Modells.

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} \hat{=} \frac{2}{M + 2}$$

Selbiges gilt für das Blatt \hat{z} , beziehungsweise c , welches den Bluff-Bereich nach oben begrenzt. Nur muss man hier den Betrag $M+2$ als α identifizieren und 2 als β . Auch wenn die Übertragung von M und dem Starteinsatz auf α und β bezüglich dieser beiden relevanten Werte nicht stringent sind, so lässt sich doch feststellen, dass die Ergebnisse der beiden Modelle nicht vollkommen unterschiedlich sind. Der einzige wesentliche Unterschied besteht also mehr oder weniger im Vorhandensein der Symmetrieeigenschaft der Modelle.

3 Mathematik und Psychologie

So ausführlich wie es hier geschehen ist, wird man im echten Leben nie für jede Runde Poker die optimale Strategie berechnen können, auch, weil ja ein sehr vereinfachtes Modell betrachtet wurde, und andere Formen des Spiels, bei dem man Karten austauschen kann oder sie mit allen anderen Spieler teilt, außer Acht gelassen wurden. In groben Zügen lassen sich aus den mathematischen Erkenntnissen aber Richtlinien ableiten, die einem zu etwas mehr Erfolg verhelfen können. Trotz allem kann man jedoch immer Pech oder es mit einem wirklich schwierigen Gegner zu tun haben, der schlauer spielt als gedacht. Dies zeigt der Ausgang der Szene, die zum Einstieg geschildert wurde. Nachdem Le Chiffre alles gesetzt hat und James Bond ebenso, liegt insgesamt ein Betrag von 14 500 000 auf dem Tisch. Bond deckt seine Karten auf und offenbart ein Full House. Er ist sich immer noch

sicher, dass Le Chiffre nur blufft. Seine Handhaltung hatte ihn verraten. Als dieser jedoch seine Karten umdreht, kommen vier Buben zum Vorschein. Le Chiffre gewinnt. „Sie haben wohl gedacht, ich bluffe, Mr. Bond.“ [Cas06, 01:25:40 bis 01:26:20] Mit dieser Art von Doppel-Bluff hätte Bond nicht gerechnet. Und auch mathematisch ist dieser wohl kaum zu modellieren. Dies zeigt, dass abseits von jeder Berechnung Psychologie eine große Rolle spielt, gerade wenn es darum geht, seinen Gegner zu beeinflussen. Und die Berechnung dessen, was innerhalb eines Menschen vorgeht, liegt außerhalb der mathematischen Möglichkeiten.

Literatur

- [Bea89] John D. Beasley. *The Mathematics of Games*. Oxford University Press, Oxford, New York, 1989.
- [Bew07] Jörg Bewersdorff. *Glück, Logik und Bluff, Mathematik im Spiel - Methode, Ergebnisse, Grenzen*. vieweg, Wiesbaden, 2007.
- [FF03] Chris Ferguson and Thomas S. Ferguson. On the Borel and von Neumann Poker Models. *Game Theory and Applications*, (8):17–32, 2003.
- [Kar59] Samuel Karlin. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*. Dover Publications, New York, 1959.
- [Loo46] Lynn H. Loomis. On a Theorem of von Neumann. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, (32):213–215, 1946.
- [MJH96] Gerhard Illing Manfred J. Holler. *Einführung in die Spieltheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [Owe71] Guillermo Owen. *Spieltheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [Pet15] Hans J. M. Peters. *Game Theory. A Multi-Leveled Approach*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2015.
- [Tho12] L.C. Thomas. *Games, Theory and Applications*. Dover Publications, New York, 2012.
- [vN28] John von Neumann. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, (100):295–320, 1928.
- [vNM07] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, New Jersey, 2007.
- [Wan88] Jianhua Wang. *The theory of games*. Tsinghua University Press, Peking, 1988.

Abbildungsverzeichnis

1	Der Verlauf von ρ_1^z	45
2	Darstellung der Koeffizienten für $a = 20$ und $b = 5$	47
3	Darstellung der Koeffizienten für $a = 8$ und $b = 6$	48
4	Der Verlauf von ρ_1^z bei einem Spiel mit abwechselnden Einsätzen .	53
5	Ein Beispiel für einen möglichen Verlauf von σ_1^z	54
6	Differenz der Koeffizienten γ_2^z und γ_1^z für S_2	54
7	Differenz der Koeffizienten δ_1^z und δ_2^z für S_1	55

Medienverzeichnis

- [Cas06] Martin Campbell. *Casino Royale*. Eon Productions, Vereinigtes Königreich 2006.
- [21Trai12] Columbia Pictures Industries: *21 - Trailer*. YouTube, 2012, Web, 04.07.2017 um 12:01 Uhr, in <https://www.youtube.com/watch?v=5oR2yosNRJI>

Anhang

Beweis des Minimax-Theorems nach John von Neumann

An dieser Stelle soll schließlich noch der Beweis des Minimax-Theorems gegeben werden, wie er ursprünglich durch John von Neumann selbst erfolgt ist, und den auch Owen verwendet [Owe71, S. 17ff]. Zunächst ist es nötig, zwei Lemmata zu beweisen.

Lemma 1. (Existenz einer trennenden Hyperebene)

Sei M eine abgeschlossene und konvexe Punktmenge im n -dimensionalen euklidischen Raum und $x = (x_1, \dots, x_n) \notin M$. Dann gibt es Zahlen $p_1, \dots, p_n, p_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = p_{n+1} \quad (42)$$

und

$$\sum_{j=1}^n p_j y_j > p_{n+1} \text{ für alle } y \in M. \quad (43)$$

Beweis. Wir wählen den Punkt $z \in M$ so, dass z von allen Punkten aus M den kleinsten Abstand zu x hat. Und wegen der Abgeschlossenheit von M muss es einen solchen Punkt auch geben. Setze

$$p_j = z_j - x_j, \quad j = 1, \dots, n$$

und

$$p_{n+1} = \sum_{j=1}^n z_j x_j - \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Dies erfüllt (42), denn

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j x_j &= \sum_{j=1}^n (z_j - x_j) x_j = \sum_{j=1}^n z_j x_j - x_j^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n z_j x_j - \sum_{j=1}^n x_j^2 = p_{n+1}. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also noch, dass auch (43) gilt. Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j z_j &= \sum_{j=1}^n (z_j - x_j) z_j = \sum_{j=1}^n z_j^2 - x_j z_j = \\ &= \sum_{j=1}^n z_j^2 - \sum_{j=1}^n z_j x_j. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n p_j z_j - p_{n+1} &= \sum_{j=1}^n z_j^2 - \sum_{j=1}^n z_j x_j - \sum_{j=1}^n z_j x_j + \sum_{j=1}^n x_j^2 = \\
&= \sum_{j=1}^n z_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n z_j x_j + \sum_{j=1}^n x_j^2 = \\
&= \sum_{j=1}^n (z_j - x_j)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Durch Umstellen der Ungleichung folgt

$$\sum_{j=1}^n p_j z_j > p_{n+1}.$$

Für das z , das wir eingangs gewählt haben, ist (43) schon mal erfüllt. Bleibt nur noch zu betrachten, wie es sich mit den restlichen $y \in M$ verhält. Angenommen, es würde ein $y \in M$ existieren, für das gilt, dass

$$\sum_{j=1}^n p_j y_j \leq p_{n+1}.$$

Nach Voraussetzung ist M konvex und das bedeutet nach Definition, dass die direkte Verbindungsstrecke von y und z ganz in M enthalten ist. Das heißt, auch alle Punkte auf der Verbindungsstrecke sind Elemente von M :

$$w_r = ry + (1 - r)z \in M, \quad r \in [0, 1]$$

Für $d(x, w_r)$, den Abstand zwischen x und w_r gilt

$$d^2(x, w_r) = \sum_{j=1}^n (x_j - w_{rj})^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - ry_j - (1 - r)z_j)^2.$$

Dies kann man nun nach r ableiten und es ergibt sich

$$\frac{\delta d^2}{\delta r} = 2 \sum_{j=1}^n p_j y_j - 2 \sum_{j=1}^n p_j z_j + 2r \sum_{j=1}^n (z_j - y_j)^2.$$

Für $r = 0$ und somit $w_r = z$ gilt

$$2 \sum_{j=1}^n p_j y_j - 2 \sum_{j=1}^n p_j z_j + 2r \sum_{j=1}^n (z_j - y_j)^2 =$$

$$= 2 \underbrace{\sum_{j=1}^n p_j y_j}_{\leq 2p_{n+1}} - 2 \underbrace{\sum_{j=1}^n p_j z_j}_{> p_{n+1}} < 0.$$

Das bedeutet, dass für ein r , das klein genug ist, gilt, dass

$$d(x, w_r) < d(x, z)$$

und dies ist ein Widerspruch dazu, wie unser z gewählt wurde. Daraus folgt, dass (43) für alle $y \in M$ gelten muss. \square

Lemma 2. Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit den Elementen a_{jk} . Dann gilt genau eine dieser Aussagen:

(i) Der Punkt 0 liegt in der konvexen Hülle der Punkte

$$a_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$$

$$a_2 = (a_{12}, \dots, a_{m2})$$

$$\vdots$$

$$a_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_m = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

(ii) Es existieren $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ mit $x_j > 0$,

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1 \text{ und } \sum_{j=1}^m a_{jk} x_j > 0 \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Beweis. Angenommen, (i) gilt nicht. Mit Lemma 1 haben wir dann, dass es Zahlen $p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}$ sodass

$$\sum_{k=1}^n 0 \cdot p_k = p_{n+1}$$

und somit ist $p_{n+1} = 0$. Weiterhin gilt nach Lemma 1, dass

$$\sum_{k=1}^n p_k y_k > 0$$

für alle y aus der konvexen Hülle, die wir betrachten. Dies gilt dann natürlich auch, wenn y zufällig gleich einem der Punkte a_k, e_j ist. Demnach ist

$$\sum a_{jk} p_j \text{ für alle } k \text{ und } p_j > 0 \text{ für alle } j.$$

Wegen letzterem ist auch die Summe über alle p_j größer als 0 und man kann x_j folgendermaßen festsetzen:

$$x_j = \frac{p_j}{\sum p_j}.$$

Diese sind alle positiv und ergeben aufsummiert 1. Es gilt also Aussage (ii) über die Matrix A. \square

Unter Zuhilfenahme dieser beiden Lemmata kann das Minimax-Theorem nun bewiesen werden:

Beweis. Sei A die Auszahlungsmatrix zu einem Spiel. Nach Lemma 2 gilt eine der Aussagen (i) oder (ii). Zunächst wollen wir annehmen, dass (i) gilt. Dann ist 0 als Teil der konvexen Hülle der $m+n$ Punkte auch als Linearkombination dieser darstellbar. Es gibt also positive s_1, \dots, s_{m+n} sodass

$$\sum_{k=1}^n s_k a_{jk} + s_{n+1} = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

und

$$\sum_{k=j}^{m+n} s_k = 1.$$

Wären alle s_1, \dots, s_n gleich 0, könnte man die 0 als Linearkombination der m Einheitspunkte darstellen. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit dieser ist das aber nicht möglich. Daraus folgt, dass mindestens eines dieser s_1, \dots, s_n positiv und damit ist auch die Summe der s_k positiv. Wir setzen also

$$\eta_k = \frac{s_k}{\sum_{k=1}^n s_k},$$

womit Aussage (ii) auf die Matrix A zutrifft. Daher gilt auch

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k = \frac{-s_{n+1}}{\sum_{k=1}^n s_k} \leq 0.$$

und somit $v_2 \leq 0$.

Angenommen, es gilt (ii). Dann gilt, dass

$$\sum_{j=1}^m a_{jk} \xi_j > 0$$

und somit $v_1 > 0$. Es kann also schon mal nicht sein, dass $v_1 \leq 0 < v_2$. Die Matrix zum Spiel soll nun ersetzt werden durch die Matrix B mit den Elementen

$$b_{jk} = a_{jk} + l.$$

Für beliebige $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ gilt offensichtlich, dass

$$\vec{\xi} B \vec{\eta}^T = \vec{\xi} A \vec{\eta}^T + l,$$

und somit

$$v_1^B = v_1^A + l,$$

wobei v_1^B der untere Wert des neuen Spiels mit der Matrix B ist und v_1^A der untere Wert des ursprünglichen Spiels. Es folgt auch, dass

$$v_2^B = v_2^A + l$$

mit den entsprechenden Bezeichnungen. Da $v_1^B < 0 < v_2^B$ nicht eintreten kann, ist auch $v_1^A < -l < v_2^A$ nicht möglich. Wegen der beliebigen Wahl von l kann $v_1 < v_2$ nicht sein. In Satz 2 wurde aber bereits gezeigt, dass $v_1 \leq v_2$. Somit muss gelten

$$v_1 = v_2.$$

□

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Ausführungen an Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder Sinn anderer Werke entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht und ihre Quellen vermerkt. Die Arbeit wurde weder in gleicher oder ähnlicher Form bereits einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt, noch anderswo veröffentlicht.

Ort, Datum

Kathrin Schiermeier