# Eine univariante B-Spline Interpolation von Punktfolgen unter Zuhilfenahme von Smooth Minimum Arc Paths

eingereichte
BACHELOR-ARBEIT
von

Simon Reichhuber
Matrikel-Nr.: 67718

geb. am 24.09.1992

Universität Passau
Lehrstuhl für
Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung

Betreuer: Prof. Dr. Tomas Sauer

Beginn: 22.09.2015
Abgabe: 12.10.2015

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, wie eine B-Spline Interpolation um eine Punktfolge verbessert werden kann, indem ein *Smooth Minimum Arc Path* (SMAP) eingesetzt wird. Interpoliert wurden Punktfolgen in der Ebene, die durch grobes Abtasten von parametrisierte Kurvenfunktionen erzeugt wurden. Der SMAP fungierte dabei als ein Krümmungsschätzer der Ausgangspunkte. Das Krümmungsverhalten wurde auf die Knoten der B-Splines abgebildet, sodass an Stellen hoher Krümmung die Knotenabstände verdichtet sind. Daraus ließ sich ein Splineinterpolant entwickeln, der einer Evaluierung unterzogen wurde. Dazu wurde ein adäquater Abstandsbegriff eingeführt, um eine quantifizierte Aussage über den Fehler der Approximation zu machen. Im Ergebnis konnten die krümmungssensitiven Splininterpolanten besser als die bereits existierenden Splineinterpolanten abscheiden.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einleitung** **3**

**2 Definitionen** **5**
2.1 Splinekurven . . . . . 5
2.2 Interpolation . . . . . 9
2.3 Smooth Minimum Arc Paths (SMAPs) . . . . . 9

**3 Methodik** **13**
3.1 Wahl der Knoten . . . . . 13
3.1.1 Äquidistante Knoten . . . . . 14
3.1.2 Knoten aus Datenpunktabständen . . . . . 14
3.1.3 Knotenvektor aus Krümmung . . . . . 15
3.2 Wahl der Interpolationsstellen . . . . . 17
3.2.1 Interpolation an den Knoten . . . . . 18
3.2.2 Interpolation an den Greville Abszissen . . . . . 18
3.3 Bestimmung der Kontrollpunkte . . . . . 18
3.3.1 Zusatzbedingungen . . . . . 19
3.3.2 Natürlicher Splineinterpolant . . . . . 20
3.4 Übersicht der beschriebenen Approximationen . . . . . 22

**4 Evaluation** **23**
4.1 Abstandsbegriff . . . . . 23
4.1.1 Punkt-Kurve-Abstand . . . . . 23
4.1.2 Kurve-Kurve-Abstand . . . . . 24
4.2 Auswertung . . . . . 24
4.2.1 Vorgehen . . . . . 24
4.2.2 Interpolation an der Klothoide . . . . . 25
4.3 Fazit . . . . . 27

**5 Ausblick und Zusammenfassung** **28**
5.1 Offene Fragen . . . . . 28
5.2 Résumé . . . . . 29

**6 Anhang** **30**
6.1 Historischer Rückblick auf Approximationen . . . . . 30
6.2 Implementierung in *MATLAB* . . . . . 31
6.3 Skript zum Auffinden des SMAPs . . . . . 31
6.4 Beispielhafte SMAP Approximation . . . . . 32
6.5 Verwendete Kurvenfunktionen . . . . . 33
6.6 Interpolationen an Kurvenfunktionen . . . . . 36
6.6.1 Interpolation an der logarithmischen Spirale . . . . . 40
6.6.2 Interpolation an der „Blumenkurve“ . . . . . 42

**Verwendete Abbildungen** **44**

**Quellenverzeichnis** **47**

# Kapitel 1

# Einleitung

Durch die Digitalisierung und die damit einhergehende Verbesserung von Kapazität und Leistung unserer Recheneinheiten liegt uns heute eine große Menge an Daten bereit. Um aus diesen geeignete Informationen abzuleiten, wird neben der Filterung eine speichereffiziente Darstellung der Daten gewünscht. Ein Teil dieser Daten sind digitale Bilder, Bewegungsdaten oder Straßenkarten. Hier stellt oftmals eine Kurve in der Ebene eine wichtige Informationsgrundlage dar. Beispielsweise können die Kontur eines Objekts in digitalen Bilder, Bewegungsdaten oder Straßenverläufe als Kurven aufgefasst werden. Dazu kann aus den Daten eine geordnete Folge an zweidimensionalen Punkten $\boldsymbol{p}_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$ entnommen werden [2]. Es stellt sich jedoch die Frage, wie aus dieser Folge an diskreten Punkten eine parametrisierte Kurvenfunktion der Form $c(t) : I \to \mathbb{R}^2$ abgeleitet werden kann, die einen geringeren Speicherbedarf benötigt und effizient zu berechnen ist. Eine mögliche Forderung ist es, dass die Kurve $c(t)$ die Punkte $\boldsymbol{p}_j$ in der richtigen Reihenfolge durchqueren soll. Findet man auch noch Stellen $x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n$, an denen sie diese Punkte annehmen soll, führt dies zu den $n$ Interpolationsbedingungen $c(x_j) = p_j$.
Um diese zu erfüllen, kann der von Schönberg [12] definierte Raum der univarianten Splines zur Ordnung $m \in \mathbb{N}$ fokussiert werden. Ein Element dieses Raums ist eine Kurve, welche eine gewisse Glattheitsbedingung erfüllt und aus zusammenhängenden Polynomen des Höchstgrads $m$ besteht. Dargestellt werden kann diese Kurve durch Kontrollpunkte, deren Polygon die konvexe Hülle der Kurve vorgibt, und den sogenannten B-Splines. Mit den Interpolationsbedingung können die Kontrollpunkte determiniert werden. Für die B-Splines gibt De Boor eine einfache rekursive Berechnungsvorschrift an [3]. Weiter schreibt er, dass die dabei als Parameter notwendigen Knoten $t_i, \quad i = 1, \ldots, m+n+1$ aus einer approximierten Krümmung der Punktfolge bestimmt werden können [4]. Da bisherige Krümmungsschätzer an Punktfolgen unbefriedigende Ergebnisse lieferten, soll hier ein neuer Ansatz zur Bestimmung der Krümmung anhand eines Smooth Minimum Arc Paths diskutiert werden. Die daraus gewonnenen Splineinterpolanten sollen in einer Evaluation mit den bereits existierenden natürlichen Splineinterpolanten mit Knoten aus dem Punktab-

stand sowie mit einem Splineinterpolanten mit äquidistanten Knoten verglichen werden. Dazu wird zuvor erörtert, welche Abstandsbegriffe herangezogen werden können, um ein quantifizierbares Maß für die Güte der Approximation zu erhalten. Betrachtet werden Punktfolgen aus Kurvenfunktionen. Dies erlaubt es die Splineinterpolanten auf Punkten einer groben Abtastrate der Kurvenfunktion mit Punkten der Kurvenfunktion höchster Abtastrate zu vergleichen.
Die erwähnten Begriffe sollen im Folgenden definitionsgemäß wie in [11] eingeführt werden.

# Kapitel 2

# Definitionen

## 2.1 Splinekurven

Bevor die Definition einer Splinekurve eingeführt wird, sollte zunächst der Begriff der Knoten geklärt werden.

**Definition 2.1.1.** *Eine endliche indizierte Menge* $T = T_{m,n} = \{t_1, \ldots, t_{n+m+1}\}$ *heißt* ***Knotenfolge*** *der Ordnung* $m$ *falls*

**i)** $t_1 \leq \cdots \leq t_{n+m+1}$

**ii)** $t_j < t_{j+m+1}$

Die Knotenfolge besteht also aus den $(n + m + 1)$ reellen Einträgen, die durch ihre Indizierung der Größe nach geordnet sind. Demnach repräsentiert die Knotenfolge eine monoton aufsteigende Folge mit der zusätzlichen Bedingung, dass der Wert eines Knotens $t_j$ höchstens $(m + 1)$-mal in der Folge auftauchen darf. Einfacher ausgedrückt werden kann dies mit der **Vielfachheit** $\mu = \mu_j$, die angibt wie oft ein Knoten innerhalb der Knotenfolge $T$ wiederholt wird.

$$t_1 \leq \cdots \leq t_{j-1} < t_j = \cdots = t_{j+\mu-1} < t_{j+\mu} \leq \cdots \leq t_{n+m+1} \tag{2.1}$$

**Bemerkung.** *Ist* $\mu_j = 1$ *für* $j = 1, \ldots, m + n + 1$ *wird die zugehörige Knotenfolge auch als* **einfache Knotenfolge** *bezeichnet. Die Knoten werden im Folgenden so gewählt, dass die sogenannten Randknoten* $t_{m+1}$ *und* $t_{n+1}$ *eine Vielfachheit von* $\mu = m + 1$ *besitzen.*

**Definition 2.1.2 (Raum der auf $T$ stückweise polynomialen Funktionen).** *Der Raum der auf* $T$ *stückweise polynomialen Funktionen* $\mathbb{P}_m(T)$ *der Ordnung* $m$ *zum Knotenvektor* $T$ *setzt sich aus allen Funktionen zusammen die folgende Bedingung erfüllen:*

**i)** $f$ *ist eine auf* $T$ *stückweise polynomiale Funktion vom Höchstgrad* $m$ : $f|_{(t_j, t_{j+1})} \in \Pi_m$.

**Definition 2.1.3 (Splineraum).** *Der Splineraum $\mathbb{S}_m = \mathbb{S}_m(T)$ der Ordnung $m$ zum Knotenvektor $T = T_{m,n}$ setzt sich aus allen Funktionen $f$ aus dem Raum der auf $T$ stückweise polynomialen Funktionen $f \in \mathbb{P}_m(T)$ zusammen, die folgende zusätzliche Bedingung erfüllen.*

**i)** *$f$ besitzt eine gewisse globale Glattheit*
$t_{j-1} < t_j = \cdots = t_{j+\mu-1} < t_{j+\mu} \quad \Rightarrow \quad f \in C^{m-\mu}(t_{j-1}, t_{j+\mu})$

Der Knotenvektor erfüllt in Definition 2.1.2 zwei Funktionen. Zum einen gibt er an, wo die Polynomsegmente aneinandergeheftet sind und zum anderen bestimmt er durch die Vielfalt der Knoten auch den Grad der Stetigkeit. Mit dem Knotenvektor $T$ kann schließlich die oben erwähnte Berechnungsvorschrift von De Boor [4] zur Berechnung der **B-Splines** $N_j^k$ angewendet werden. Damit sind die B-Splines $N_j^k$ für $k = 0, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n + m - k$ der Ordnung $k$ wie folgt definiert:

**Definition 2.1.4 (B-Splines).**

$$N_j^0(x, T) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_j^k(x, T) = \frac{x - t_j}{t_{j+k} - t_j} N_j^{k-1}(x, T) + \frac{t_{j+k+1} - x}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(x, T)$$

**Bemerkung.** *Bei mehrfachen Knoten tritt für $t_{j+k} = t_j$ eine 0 im Nenner auf. Da die dazugehörigen Träger hier aber die leere Menge bilden, können diese Terme einfach ignoriert werden.*

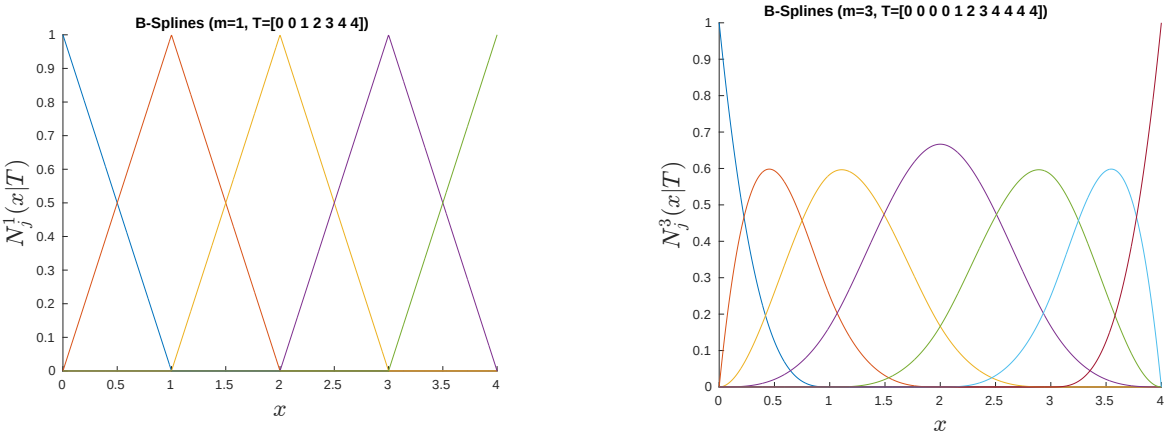


Abbildung 2.1: *links*: B-Splines zum Knotenvektor der Ordnung $m = 1$ und *rechts* $m = 3$

Aus Gründen einer effizienten Implementierung werden die B-Splines $N_j^m(X, T), \quad j = 1, \ldots, n$ zu den Interpolationsstellen $X = \{x_1, \ldots, x_M\}, \quad M \in \mathbb{N}$ und dem Knotenvektor $T = T_{m,n}$ in der **B-Spline Matrix $\boldsymbol{N}$** reihenweise zusammengefasst.

**Definition 2.1.5** (**B-Spline Matrix**).

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1(x_1|T) & \dots & N_1(x_M|T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(x_1|T) & \dots & N_n(x_M|T \end{bmatrix}$$

Weiter bezeichnen $\boldsymbol{d}_j \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, \dots, n$ die **Kontrollpunkte**, welche auch in einer Matrix zusammengefasst werden können:

$$\boldsymbol{d} = [\boldsymbol{d}_j : j = 1, \dots, n] \in \mathbb{R}^{2\times n} \tag{2.2}$$

Zusammen mit den Kontrollpunkten bilden die B-Splines eine mögliche Basis des Splineraums (siehe zum Beispiel [10]). Damit lässt sich nun eine **Splinekurve** beschreiben als:

**Definition 2.1.6** (**Splinekurve**). *Zu den Kontrollpunkten $\boldsymbol{d}_j$, der Knotenfolge $T$ und den in der B-Splines $N_j^m(x|T)$ ist ein Splinekurve (oder kurz: Spline) der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ und der Dimension 2 eine Abbildung:*

$$S : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$mit \quad S(x|T) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{d}_j N_j^m(x, T)$$

**Bemerkung.** *Mit der B-Spline Matrix $\boldsymbol{N}_m$ und der Matrix aus den Kontrollpunkten $\boldsymbol{d}$ ist eine einfache Auswertung der Splinekurve möglich:*

$$S(x|T) = \sum_{j=1}^{n} d_j N_j^m(x, T) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{N}_m(x|T) \tag{2.3}$$

Zusammenfassend lässt sich eine B-Splinekurve der Dimension $d$ also durch:

- die Ordnung $m$,
- den Knotenvektor $T = T_{m,n}$,
- und das Kontrollpolygon $\boldsymbol{d}$

... eindeutig beschreiben. Ihre $k$-te Ableitung kann nach [11] bei Randknoten $(m+1)$-facher Vielfachheit berechnet werden durch:

**Definition 2.1.7** (**Ableitung der Splinekurve**).

$$(S_m \boldsymbol{d})^{(k)}(x) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{N}_m^{(k)}(x|T) = \boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{G}}_k \boldsymbol{N}_{m-k}(x|\hat{T}_k) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{d}_j (N_j^{m-k})^{(k)}(x|\hat{T}_k)$$

*, wobei* $\hat{T}_k = \hat{T}_{k,n+m-k} = \{t_{k+1}, \ldots, t_{m+n+1-k}\}$

*und die Matrizen* $\hat{\boldsymbol{G}}_k \in \mathbb{R}^{n \times n-k}, k = 1, \ldots, m$ *rekursiv definiert sind durch*

$\hat{\boldsymbol{G}}_0 = \boldsymbol{I}_n, \quad \hat{\boldsymbol{G}}_k = \hat{G}_{k-1}\hat{\boldsymbol{D}}_{n-k+1}\Delta_{m-k+1}\hat{T}_k$

*, mit* $\Delta_m \hat{T}_k = diag[(t_{j+m} - t_j)^{-1} : j = k+1, \ldots, m+n-k] \in \mathbb{R}^{n-k \times n-k}$

$$und \quad \hat{\boldsymbol{D}}_n = \begin{bmatrix} -1 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n-k} \tag{2.4}$$

## 2.2 Interpolation

Eine Spezialfall der Approximation stellt die Interpolation dar. Diese beschäftigt sich mit dem folgenden Problem.

**Definition 2.2.1** (**Interpolationsproblem**). *Beim sogenannten Interpolationsproblem stellt sich die Frage, wie zu gegebenen Interpolationsstellen $X \subset \mathbb{R}$ und Werten $y \in \mathbb{R}^X$ eine Funktion $f$ gefunden werden kann, sodass:*

$$f(X) = y, \quad \textit{also} \quad f(x) = y_x, \quad x \in X$$

In Definition 2.2.1 wird also gefordert, dass die Funktion $f$ an den vorgegebenen Interpolationsstellen die vorgegebenen Punkte $y_x$ passiert. Hier werden nur die endlichen Interpolationsstellen $X = \{x_1, \ldots, x_M\}, \quad M \in \mathbb{N}$ betrachtet. In manchen Anwendungsfällen sind die Stellen $x_i$ gegeben, an denen die zu approximierende Kurve die vorliegenden Punkte als Werte annimmt $f(x_i) = \boldsymbol{p}_i$. Beispielsweise könnte $x_i$ den Zeitpunkt markieren, zu welchem die Aufnahme $\boldsymbol{p}_i$ gemacht wurde. Sind die Interpolationstellen hingegen nicht angegeben, müssen geeignete Abschätzungen dafür gefunden werden.

## 2.3 Smooth Minimum Arc Paths (SMAPs)

Auch *Smooth Minimum Arc Paths* können zum Zwecke der Approximation eingesetzt werden und wie die Splinekurve sind auch SMAPs stückweise definierte Kurven. Diese werden aber anders als die Splinekurven aus Kreisbögen oder Strecken zusammengesetzt und erfüllen eine andere Stetigkeitsbedingung. Die benötigten Elemente werden der Reihe nach definiert. Wie bereits erwähnt, ist die **Strecke** eines der möglichen Segmente von SMAPs.

**Definition 2.3.1** (**Strecke**). *Eine Strecke zwischen den Punkten $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} &l : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ &l(t) = \boldsymbol{p}(1-t) + t\boldsymbol{q}, \end{aligned}$$

Ein anderes Segment stellt der **Kreisbogen** dar.

**Definition 2.3.2** (**Kreisbogen**). *Ein Kreisbogen um den Mittelpunkt $\boldsymbol{p}_c \in \mathbb{R}^2$ mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$, dem Startwinkel $\phi_{start} \in \mathbb{R}$ und dem Endwinkel $\phi_{end} \in \mathbb{R}$ ist eine*

*Abbildung*

$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \boldsymbol{p}_c + r \begin{bmatrix} \cos((1-t)\phi_{start} + t\phi_{end}) \\ \sin((1-t)\phi_{start} + t\phi_{end}) \end{bmatrix} & , \textit{für } \phi_{start} < \phi_{end} \\ \\ \boldsymbol{p}_c + r \begin{bmatrix} \cos((1-t)\phi_{end} + t\phi_{start}) \\ \sin((1-t)\phi_{end} + t\phi_{start}) \end{bmatrix} & , \textit{für } \phi_{end} < \phi_{start} \end{cases}$$

**Bemerkung.** *Für $\phi_{start} < \phi_{end}$ wird hier der Kreisbogen gegen den Uhrzeigersinn durchschritten; andernfalls im Uhrzeigersinn.*

Damit ist ein **Segment** wie folgt definiert:

**Definition 2.3.3** (**Segment**). *Ein Segment $s \in \{l, \sigma\}$ ist entweder eine Strecke $l$ oder ein Kreisbogen $\sigma$ .*

Jetzt kann ein **Kreisbogenspline** aus einer Folge von zusammenhängenden Segmenten gebildet werden.

**Definition 2.3.4** (**Kreisbogenspline**). *Ein Kreisbogenspline ist eine Folge von Segmenten $(s_i)_{i=1}^n$ mit*

$$s_i(1) = s_{i+1}(0)$$

Für die weitere Spezifizierung eines SMAPs wird zuerst eine neue Stetigkeitsklasse eingeführt.

**Definition 2.3.5** (**Geometrische Differenzierbarkeit**). *Seien $\boldsymbol{f} : [u_0, u^*]$ und $\boldsymbol{g} : [u^*, u_1]$ in $C^1$ die parametrisierten Kurven mit*

$$\boldsymbol{f}(u^*) = \boldsymbol{g}(u^*) \quad \textit{und} \quad \frac{d\boldsymbol{f}}{du}(u) \neq 0, \quad \frac{d\boldsymbol{g}}{du}(u) \neq 0$$

*, es handelt sich dabei also um reguläre Kurven, dann hat die zusammengesetzte Kurve $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}]$ die geometrische Differenzierbarkeit $G^1$ genau dann wenn,*

$$\boldsymbol{f}'(u) = \frac{\dot{\boldsymbol{f}}(u)}{||\dot{\boldsymbol{f}}(u)||_2} = \frac{\dot{\boldsymbol{g}}(u)}{||\dot{\boldsymbol{g}}(u)||_2} = \boldsymbol{g}'(u), \quad \textit{mit } \dot{\boldsymbol{f}}(u) := \frac{d\boldsymbol{f}}{du}(u)$$

Außerdem ist ein wichtiges Charakteristikum eines SMAPs, dass er durch ein **geschlossenes Polygon** begrenzt ist.

**Definition 2.3.6** (**Geschlossenes Polygon**). *Ein geschlossenes Polygon ist eine geordnete Menge aus Strecken $P = \{l_i :, i = 1, \ldots, n\}$ mit*

$$l_i(1) = l_{i+1}(0) \textit{ und } l_n(1) = l_1(0) \tag{2.5}$$

Ein solches geschlossenes Polygon ist auch der **$\epsilon$-Kanal**. Dieser wird durch die zu approximierende Punktemenge definiert.

**Definition 2.3.7** (**$\epsilon$-Kanal**). *Der $\epsilon$-Kanal zu gegebenen Punkten $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, \ldots, n$ ist das Polygon $P = \{l_{Start}, l_2, \ldots, l_{n-1}, l_{Ziel}\}$ mit den als Start und Ziel ausgezeichneten, disjunkten Strecken $l_{Start}$ und $l_{Ziel}$, für welches:*

- *alle Punkte $\boldsymbol{p}_i$ im Abschluss des Polygons liegen,*
- *der Anfangspunkt $\boldsymbol{p}_1$ auf $l_{Start}$ und der Endpunkt auf $\boldsymbol{p}_n$ auf $l_{Ziel}$ liegt*
- *der minimale Abstand eines Punktes $\boldsymbol{p}_i$ zu allen Strecken $l_j, \quad j = 2, \ldots, n-1$ außer zu den Strecken Start und Ziel gleich $\epsilon$ ist:*
  $$\min_{j \in \{2,\ldots,n-1\}, t \in [0,1]} ||\boldsymbol{p_i} - l_j(t)|| = \epsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \quad l_j \in P \setminus \{l_{Start}, l_{Ziel}\}.$$

**Bemerkung.** *Es sollen nur Punktfolgen betrachtet werden, die gemäß der Definiton 2.3.7 zu einem einfachen Polygon führen, das heißt die Kanten, oder Streckenzüge, berühren sich ausschließlich in den Endpunkten.*

Damit ist ein **Smooth Minimum Arc Spline (SMAP)** gegeben durch:

**Definition 2.3.8** (**Smooth Minimum Arc Spline (SMAP)**). *Ein SMAP ist ein Kreisbogenspline aus einer minimalen Anzahl an Segmenten, sodass der Kreisbogenspline die geometrische Differenzierbarkeit $G^1$ erfüllt und innerhalb eines $\epsilon$-Kanals um die Punkte $\boldsymbol{p}_i$ liegt.*

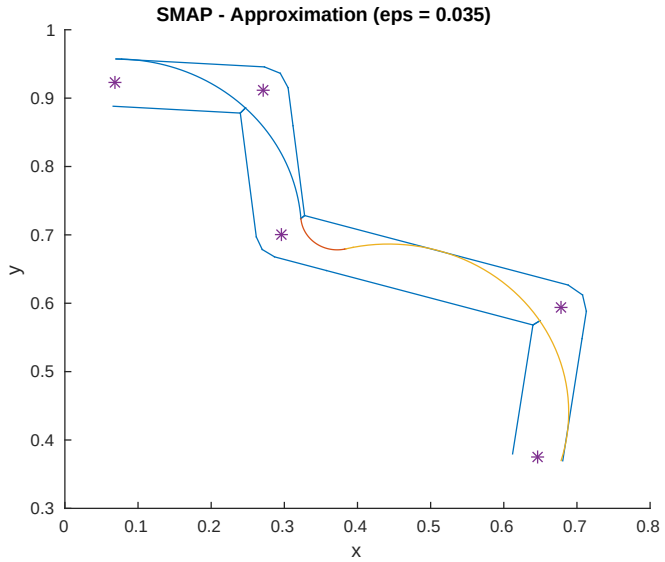


Abbildung 2.2: Minimaler Kreisbogenspline in einem $\epsilon$-Kanal um 5 Punkte

In der Abbildung 2.3 ist eine beispielhafte SMAP Approximation um fünf willkürlich gesetzte Datenpunkte ersichtlich. Weitere Informationen über SMAPs inklusive einer Beschreibung zum Auffinden solcher SMAPs finden sich in der Dissertation von Georg Maier [8].
Für die spätere Knotenberechnung wird hier noch eine Funktion der Krümmung des SMAPs benötigt. Da der Definitionsbereich dieser Funktion über die Länge des SMAPs parametrisiert werden soll, müssen noch ein paar weitere Definitionen eingeführt werden.

**Definition 2.3.9** (**Länge eines Segments**). *Die Länge des Segments $s$ ist gegeben durch:*

$$length(s) = \begin{cases} ||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}||_2 & \text{, für } s \text{ ist Strecke } l(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \\ r_s|\phi_{end} - \phi start| & \text{, für } s \text{ ist Kreisbogen } \sigma(\phi_{start}, \phi_{end}, r) \end{cases} \tag{2.6}$$

Da die lokale Krümmung des SMAPs durch die Krümmung eines Segments gegeben ist wird folgende Definition benötigt:

**Definition 2.3.10** (**Krümmung eines Segments**). *Die **Krümmung eines Segments** $\kappa_{segment}(s)$ ist gegeben durch:*

$$\kappa_{segment}(s) = \begin{cases} 0 & \text{, für } s \text{ ist Strecke } l \\ r^{-1} & \text{, für } s \text{ ist Kreissegment } \sigma(r) \end{cases} \tag{2.7}$$

... und mit der Selektionsfunktion $\pi$, welche einem bestimmten Längenabschnitt $l < L_{SMAP}$ im SMAP den Index des dazugehörigen Segments zuweist.

**Definition 2.3.11** (**Selektionsfunktion des SMAPs**). *Sei ein SMAP gegeben durch $(s_i)_{i=1}^n$. Dann ist die Selektionsfunktion $\pi$ definiert durch:*

$$\begin{aligned} &\pi : [0, L_{SMAP}] \to \{1, \ldots, n\} \\ &\pi(l) = i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{i-1} length(s_j) \leq l < \sum_{k=i}^{n} length(s_k) \\ &\pi(L_{SMAP}) = n \\ &mit \quad L_{SMAP} := \sum_{i=1}^{n} length(s_i) \end{aligned} \tag{2.8}$$

... ergibt sich die gewünschte Stufenfunktion der Krümmung des SMAPs $\kappa_{SMAP}$:

**Definition 2.3.12.** *Die Krümmung eines SMAPs $(s)_{i=1}^n$ über seine Länge ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} &\kappa_{SMAP} : [0, L_{SMAP}] \to \mathbb{R}_0^+ \\ &\kappa_{SMAP}(l) = \kappa_{segment}(s_{\pi(l)}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

# Kapitel 3

# Methodik

In diesem Kapitel werden verschiedene Methoden der Splineinterpolation beschrieben. Unterschieden werden die Methoden anhand ihrer unterschiedlichen Knotenwahl. Dabei wird neben den gängigen äquidistanten Knoten und Knoten aus den Punktabständen der zu approximierenden Punktfolge auch eine neue Knotenwahl eingeführt. Letztere verwendet den oben definierten SMAP als Krümmungsschätzer. Basierend auf den Knotenvektor werden in einem zweiten Schritt passende Interpolationsstellen bestimmt. Durch die Bedingung des Interpolationsproblems können anschließend die Kontrollpunkte bestimmt und ein Splineinterpolant gefunden werden.
Im Folgenden werden ausschließlich Splinekurven der Ordnung $m = 3$ mit dem zugehörigen Polynomhöchstgrades 3, betrachtet. Dieser sogenannte kubische Spline kann in hinnehmbarer Zeit berechnet werden, weil die rekursive Definition in 2.1.4 für eine Ordnung von $m = 3$ zu einer Anzahl von lediglich $2^3 = 8$ Termen führt.

## 3.1 Wahl der Knoten

Es werden jeweils Knoten mit Randknoten $(m + 1)$-facher Vielfachheit der Form:

$$t_1 = \cdots = t_{m+1} \quad \text{und} \quad t_{n+1} = \cdots = t_{n+m+1} \tag{3.1}$$

... betrachtet. Diese Knoten führen dazu, dass der zugehörige Spline den ersten $\boldsymbol{d}_1$ und letzten Kontrollpunkt $\boldsymbol{d}_n$ passiert, was auch als Endpunktinterpolation bezeichnet wird. Außerdem wird aus Implementierungsgründen das durch die Knoten aufgespannte Intervall $[t_1, t_{n+m+1}]$ auf $[0, 1]$ normiert. Damit ist $t_1 = \cdots = t_{m+1} = 1$ und $t_{n+1} = \cdots = t_{n+m+1} = 0$. Die übrigen inneren Knoten $t_j, \quad j = m + 2, \ldots, n$ werden im Folgenden verschieden definiert.

### 3.1.1 Äquidistante Knoten

Bei äquidistanten Knoten sind die zugehörigen B-Splines lediglich voneinander verschobene Kopien. Setzt man hingegen $(m+1)$-fache Randknoten voraus, ergeben sich unterschiedliche B-Splines $N_j^m$, wie sie in Abbildung 2.1 ersichtlich sind. Die Knoten ergeben sich als:

$$\begin{aligned} &t_1 = \cdots = t_{m+1} = 0 \\ &t_{m+1+i} = \frac{i}{n-m-1}, \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-m-1 \\ &t_{n+1} = \cdots = t_{n+m+1} = 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Damit enthalten diese keinerlei Information über die zu interpolierende Punktmenge. Dennoch bietet dieses Verfahren einen Vorteil. Da selbst die Anzahl der Knoten $n+m+1$ nicht von der Anzahl der zu approximierenden Ausgangspunkte $M$ abhängt, kann mit diesem Verfahren die Anzahl $n$ der offenen Freiheitsgrade und damit die Anzahl der Kontrollpunkte $\boldsymbol{d}_j, \quad j = 1, \ldots, n$ beliebig gewählt werden.

### 3.1.2 Knoten aus Datenpunktabständen

Zu $M$ zu interpolierenden Punkten $\boldsymbol{p}_i$ wählt man hierbei die Knoten gemäß der Abstände zweier benachbarter Punkte $||\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i||_2$ und erweitert diese, sodass man $(m+1)$-fache Randknoten erhält. Damit erhält man $M + 2m$ Knoten, die nach $M + 2m =: n + m + 1$, geeignet sind um $n = M + m - 1$ B-Spline Basisfunktionen $N_j$ zu erzeugen.

$$\begin{aligned} &t_1 = \cdots = t_{m+1} = 0 \\ &t_{m+j} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{j-1} ||\boldsymbol{p}_{k+1} - \boldsymbol{p}_k||_2, \quad j = 1, \ldots, n-m+1 \\ &t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_{n+m+1} \\ &\text{, mit der Gesamtlänge des Polygons der Ausgangspunkte: } L := \sum_{1}^{M-1} ||\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i||_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dieses Verfahren führt also zu einem Knotenvektor $T_{m,n} = T_{m,M+m-1}$

### 3.1.3 Knotenvektor aus Krümmung

Ein anderer Ansatz beschäftigt sich mit dem Krümmungsverhalten der Ausgangspunkte.

#### Herleitung der Knotenwahl aus der Krümmung nach Carl de Boor

De Boor [3] leitet hierfür einen geeigneten Ansatz zur Bestimmung der Knoten her. Um eine geeignete Abschätzung zu bemühen, werden Splines $s \in S_m(T)$ durch eine geeignete Knotenwahl so konstruiert, dass diese im Raum der stetigen, stückweise polynomialen Funktionen $s \in \mathbb{P}_m \cap C[a,b]$ liegen (siehe Definition 2.1.2). Betrachtet werden dazu die $m \cdot (o+1)$ Knoten:

$$T = \{\underbrace{t_1, \ldots, t_m}_{m}, \underbrace{t_{m+1}, \ldots, t_{2m}}_{m}, \ldots, \underbrace{t_{mo+1}, \ldots, t_{m(o+1)}}_{m}\} \tag{3.4}$$

der Vielfachheit $\mu_i = m$ im Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit den zugehörigen Werten:

$$\begin{aligned} &\tau_j = t_{(j-1)m+1}, \quad j = 1, \ldots, o+1 \\ &a =: \tau_1 < \cdots < \tau_{o+1} := b \quad o \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.5}$$

, die in der Menge:

$$\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_{o+1}\} \tag{3.6}$$

... zusammengefasst sind. Das $o$ ist hierbei frei wählbar in $\mathbb{N}$. Ist die gewünschte Knotenanzahl $n+m+1$ kein Vielfaches der Ordnung $m$, sollten laut De Boor noch weitere Knoten hinzugefügt werden. Für diese Wahl ergibt sich, wegen der Vielfachheit der Knoten von $m$, dass der zugehörige Splineraum $S_m(T) \in C^{(m-m)}$ mit dem Raum $\mathbb{P}_m(\tau) \cap C^0[a,b]$ übereinstimmt. Damit kann das ebenfalls in [4] auf Seite 189 beschriebene Theorem angewandt werden:

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} |g^{(m-1)}(x)|^{\frac{1}{m-1}} = \frac{1}{o} \int_a^b |g^{(m-1)}(x)|^{\frac{1}{m-1}} \, dx, \quad j = 1, \ldots, o$$

$$\Rightarrow$$

$$dist(g, \mathbb{P}_m(\tau) \cap C[a,b]) = dist(g, S_m(T)) \leq const_m \, o^{-(m-1)} \Big( \int_a^b |g^{(m-1)}(x)|^{\frac{1}{m-1}} \, dx \Big)^{m-1}$$

$$\text{mit } dist(f,g) := \min_x \{||f(x) - g(x)||_2\}$$

und der in $m$ abhängigen Funktion $const_m$

(3.7)

Dies wirft die Frage auf, wie die Funktion $|g^{(m-1)}|$ gewählt werden soll. De Boor schlägt vor, diese durch eine stückweise konstante Funktion $h$ zu approximieren. Im Rahmen dieser Arbeit wurde für dieses $h$ und der Ordnung $m = 3$ die durch den SMAP gefundene Krümmung $\kappa_{SMAP}$ verwendet (Siehe Definition 2.3.12).

$$h := \kappa_{SMAP} \approx |g^{(3-1)}| \tag{3.8}$$

Hier wurden gleich zwei Abschätzungen gemacht. Zum einen wurde davon ausgegangen, dass die durch den SMAP gefundene Krümmung $\kappa_{SMAP}$ eine gute Abschätzung für die Krümmung der Kurve $\kappa_g$ ist, was in [1] gezeigt wird. Zum anderen ist die Krümmung der Kurve:

$$\kappa_g(t) := \frac{g^{(2)}(t)}{(1 + g^{(1)}(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \approx g^{(2)}(t) \tag{3.9}$$

... eine gute Näherung für die zweite Ableitung. Mit $h$ liegt also eine geeignete Abschätzung der 2. Ableitung von $g$ vor. Um des Weiteren die Voraussetzung für die Implikation in 3.7 zu erfüllen, wird zuerst eine Hilfsfunktion $G$ erstellt:

$$G(x) := \int_a^x (h(s))^{\frac{1}{m-1}}\, ds \tag{3.10}$$

Und wenn $h(l) > 0$ stückweise konstant ist und $G$ eine stetige, streng monoton wachsende sowie stückweise lineare Funktion ist, folgt daraus die Existenz von der inversen Funktion $G^{-1}$. Diese setzt voraus, dass $h(l) > 0$ ist. Da aber für den Längenabschnitt $[l_{start}, l_{end}]$, an welchem der SMAP eine Strecke ist, $\kappa_{SMAP}([l_{start}, l_{end}]) = 0$ gilt und damit $G([l_{start}, l_{end}]) = \int a^x (\kappa_{SMAP})^{\frac{1}{m-1}}\, ds$ konstant ist, folgt, dass $G$ nicht mehr umkehrbar ist. Dies kann umgangen werden, indem eine fiktive Krümmung von Strecken $C = const$ einführt wird. Die Funktion, die sich damit aus $\kappa_{SMAP}$ ergibt, wird im Folgenden mit $\kappa^C_{SMAP}$ bezeichnet. Damit wird $h$ gesetzt auf $h := \kappa^C_{SMAP}$.

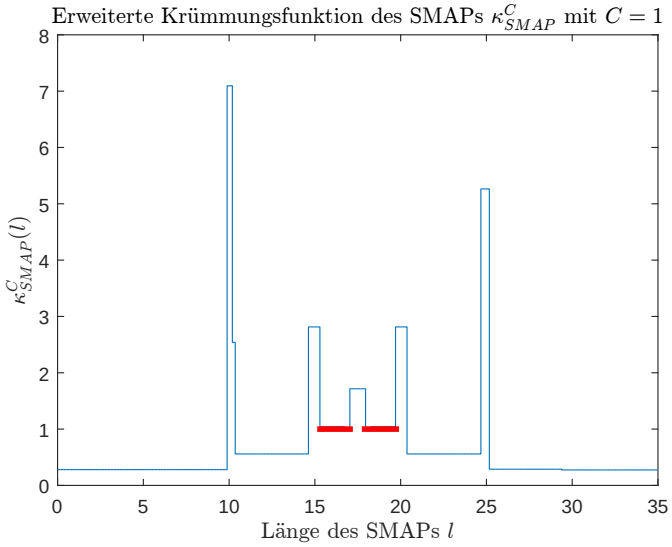


Abbildung 3.1: Erweiterte Krümmungsfuntion des SMAPs $\kappa^C_{SMAP}$ an Schneemann (Siehe Anhang 6.1)

Schließlich ergeben sich die Knotenstellen wegen 3.7 zu

$$\tau_j := G^{-1}(\frac{j-1}{o} G(b)), \quad j = 1, \ldots, o+1 \tag{3.11}$$

Damit ergeben sich die gesuchten $m(o+1)$ Knoten zu:

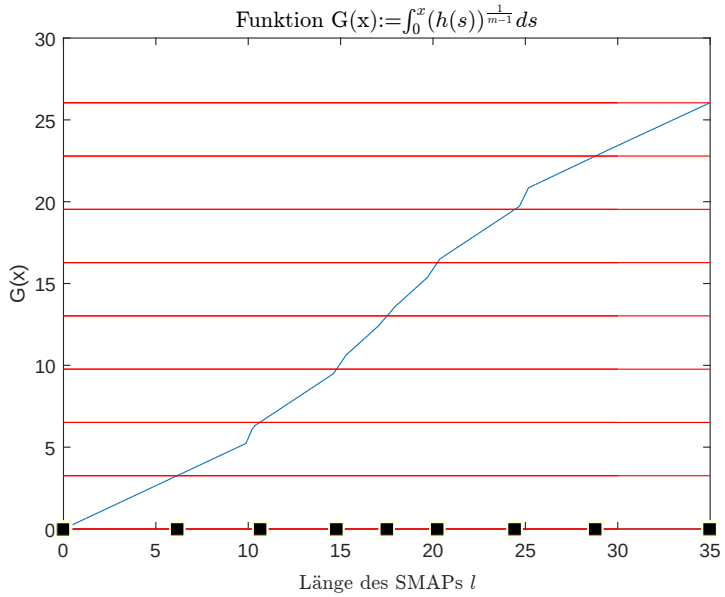


Abbildung 3.2: Funktion $G(x) := \int_0^x (h(s))^{\frac{1}{m-1}} ds$ (blau); gefundene Knotenwerte $\tau_j$ (schwarz) an Schneemann (Siehe Anhang 6.1)

$$T = \{\underbrace{\tau_1, \ldots, \tau_1}_{m}, \ldots, \underbrace{\tau_{o+1}, \ldots, \tau_{o+1}}_{m}\} \tag{3.12}$$

Der dazugehörige Knotenvektor wird jetzt noch mit den gewünschten $(m+1)$-fachen Randknoten versehen. Diese ergeben sich, wenn der erste $t_1$ und letzte Knoten $t_{m(o+1)}$ aus $T$ wiederholt wird. Außerdem kann eine Normierung vorgenommen werden, indem durch das größte Element des Knotenvektors geteilt wird. Für eine beliebige Wahl von $o$ ergeben sich also $m(o+1)+2$ Knoten.

## 3.2 Wahl der Interpolationsstellen

Eine wichtige Frage bei der Betrachtung von interpolierenden Splinekurven ist die Wahl der Interpolationsstellen. Wie diese $x_i$ abzuschätzen sind, ist kein triviales Problem. Hierzu findet man in [9] verschiedene Ansätze. Allgemein sollte für jedes $x_i$ der B-Spline $N_j^m(x_i|T)$ einen Beitrag größer Null liefern.

### 3.2.1 Interpolation an den Knoten

Der hier verwendete Ansatz wählt die Interpolationsstellen gemäß der Knoten mit den $m+1$-fachen Randknoten als:

$$x_i = t_{m+i}, \quad j = 1, \ldots, n-m+1 \tag{3.13}$$

Diese Wahl der Interpolationsstellen wurde für den Knotenvektor über die Datenpunktabstände verwendet. Damit ergeben sich zu $M$ Punkten $M-2$ Interpolationsstellen.

### 3.2.2 Interpolation an den Greville Abszissen

Die sogenannten Greville Abszissen eignen sich für die Interpolation, was im Folgenden durch die Schoenberg-Whitney Bedingung bestätigt wird (Siehe 1). Für $n+m+1$-Knoten sind diese gegeben durch:

$$x_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} t_{j+k}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

Da der zuletzt beschriebene Knotenvektor aus der Krümmung für eine beliebige Wahl $o$ eine Anzahl von $m(o+1)+2$ Knoten definiert, ergeben sich entsprechend $mo+1$ Greville Abszissen.

## 3.3 Bestimmung der Kontrollpunkte

Jetzt kann mit Hilfe des Interpolationsproblems 2.2.1,der Splinekurve $S_m(X|T) = \boldsymbol{dN}(X|T)$ und der zu interpolierenden Punkten $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_i : i = 1, \ldots, M$ ein Gleichungssystem aufgestellt werden.
Gemäß dem Interpolationsproblem muss der Spline an den Stellen $x_i$ den Datenpunkten entsprechen:

$$S_m(x_j|T) = \sum_{j}^{n} \boldsymbol{d}_j N_j(x_i|T) = \boldsymbol{p}_{x_i}, \qquad x_i \in X, \quad i = 1, \ldots, M \tag{3.15}$$

oder in Matrixform

$$\boldsymbol{d}_j \boldsymbol{N}_m(X|T) = \boldsymbol{p} \tag{3.16}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Matrix $\boldsymbol{N}_m(X|T)$ invertierbar ist. Ist dies der Fall, so lässt sich das gesuchte Kontrollpolygon $\boldsymbol{d}$ durch Umformung bestimmen durch:

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{y}\boldsymbol{N}^{-1}) \tag{3.17}$$

Nach dem Satz von Schoenberg-Whitney kannn ein eindeutiger Splineinterpolant genau dann gefunden werden, wenn folgende Bedingung zu den Knoten und Interpolationsstellen erfüllt ist:

**Satz 1** (**Schoenberg-Whitney-Bedingung).** *Die Interpolation an den Stellen* $X = \{x_j : j = 1, \ldots, n\}, x_1 < \cdots < x_n$ *hat genau dann eine eindeutige Lösung in* $S_m(T_{m,n})$ *wenn*

$$t_j < x_j < t_{j+m+1}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

**Bemerkung.** *Die Schoenberg-Whitney Bedingung kann nur angewendet werden, wenn auch mindestens genauso viele Interpolationsstellen wie Datenpunkte vorliegen.*

Bei der Wahl der Interpolationsstellen gemäß der Greville Abszissen wird diese Bedingung erfüllt.

$$t_j \leq t_{j+1} \leq \frac{1}{m}(t_{j+1} + \cdots + t_{j+m} \leq t_{j+m}) \leq t_{j+m+1} \tag{3.18}$$

Die Wahl der Interpolationsstellen $X = \{x_1, \ldots, x_{n-m+1}\}$ an den Knoten aus den Datenpunktabständen, gemäß der Methodik in Kapitel 3.2.1 hingegen, führt zu dem Gleichungssystem:

$$\boldsymbol{N}_m = \begin{bmatrix} N_1(x_1|\,T) & \ldots & N_1(x_M|\,T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n(x_1|\,T) & \ldots & N_n(x_M|\,T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times M}, \quad M < n \tag{3.19}$$

... das nicht quadratisch ist.
In der allgemeinen Form:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\ &\text{mit } \boldsymbol{A} := \boldsymbol{N}(X|\,T)^T \text{ , } \boldsymbol{x} := \boldsymbol{p}^T \text{ und } \boldsymbol{y} := \boldsymbol{p}^T \\ &\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M \times n}, \quad M < n \end{aligned} \tag{3.20}$$

...zeigt sich, dass das zugrunde liegende Gleichungssystem unterbestimmt ist.
Die Anzahl der Zeilen in $A \in \mathbb{R}^{M \times n}$ ist kleiner als die Anzahl der Spalten. Es ist damit in den meisten Fällen unlösbar. Um dennoch eine Lösung zu finden, werden weitere Zusatzbedingungen gefordert.

### 3.3.1 Zusatzbedingungen

Es gibt eine Reihe an Zusatzbedingungen, von denen die natürlichen und die Hermiten Randbedingungen vorgestellt werden sollen. Zusatzbedingungen werden je nach Anwendungsfall eingesetzt. Bei den folgenden Zusatzbedingungen wird von einer ungeraden Ordnung ausgegangen.

**Natürliche Randbedingungen:** Hierbei wird gefordert, dass bestimmte hohe Ableitungen der Splinekurve an den Randknoten $t_{m+1}$ und $t_{n+1}$ verschwinden.

$$(s_m \boldsymbol{d})^{(k)}(t_j) = 0, \quad k = \frac{m-1}{2} + 1, \ldots, m-1, \quad j = m+1, n+1. \tag{3.21}$$

**Hermite Randbedingungen:** Die Hermiten Randbedingungen legen Werte für Ableitungen an den Randknoten fest.

$$S_m(k)\boldsymbol{d}(t_j), \quad k = 1, \ldots, \frac{m-1}{2}, \quad j = m+1, n+1 \tag{3.22}$$

**Bemerkung.** *Hier ist ein weiterer Vorteil der Wahl von kubischen Splines $m = 3$ ersichtlich. Bei der Wahl einer ungeraden Ordnung lassen sich nämlich zusätzliche Randbedingungen gleichmäßig auf die Randknoten verteilen.*

### 3.3.2 Natürlicher Splineinterpolant

Für die natürlichen Zusatzbedingungen eines kubischen natürlichen Splines wird die 2. Ableitung der Splinekurve $S_3^{(2)}$ benötigt (Siehe Definition 2.1.7). Die daraus gefolgerten natürlichen Zusatzbedingungen:

$$S_3^{(2)}(t_4) = \mathbf{0} \quad \wedge S_3^{(2)}(t_4) = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

mit einer ungeraden B-Spline Ordnung führen zu folgendem erweiterten linearen Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y} \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{ccc} N_1^{(2)}(t_{m+1}|\,\hat{T}_2) & \ldots & N_n^{(2)}(t_{m+1}|\,\hat{T}_2) \\ \hline N_1(x_1|\,T) & \ldots & N_n(x_1|\,T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1(x_{n-2}|\,T) & \ldots & N_n(x_{n-2}|\,T) \\ \hline N_1^{(2)}(t_{n+1}|\,\hat{T}_2) & \ldots & N_n^{(2)}(t_{n+1}|\,\hat{T}_2) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{d}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{p}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{n-2} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

Somit hat die Matrix $\boldsymbol{A}$ vollen Rang und das zugrunde liegende Gleichungssystem kann gelöst werden. Die gesuchten Kontrollpunkte ergeben sich aus Berechnungsvorschrift 3.17 und der gewünschte Splineinterpolant ergibt sich als:

$$S_m(T, X) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{N}_m(X|\,T) \tag{3.25}$$

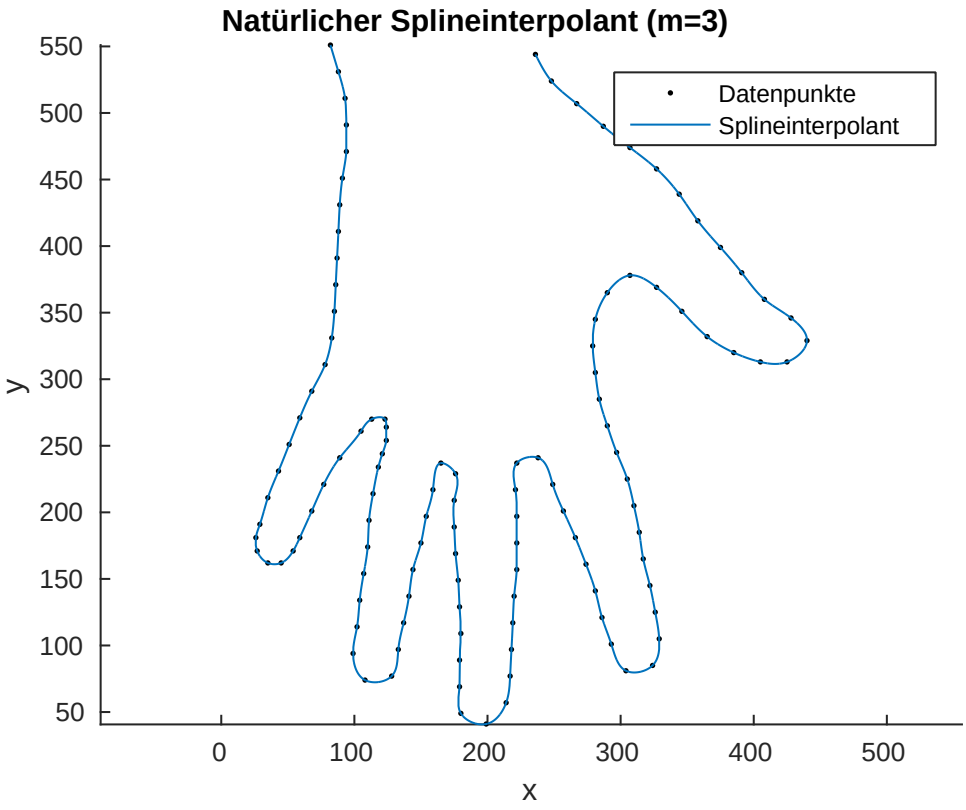


Abbildung 3.3: Natürlicher Splineinterpolant von handförmiger Punktfolge mit der Ordnung $m = 3$

## 3.4 Übersicht der beschriebenen Approximationen

Für die drei vorgestellten Interpolationsmethodiken werden die Bezeichnungen $I_1$,$I_2$ und $I_\kappa$ verwendet. $I_1$ stellt hier den Interpolanten $S_m(X_{Greville}|\, T_{\text{äquidistant}})$ dar, für welchen die äquidistanten Knoten $T_{\text{äquidistant}}$ und die Interpolationsstellen an den Greville Abszissen definiert wurden. Weiter ist $I_2$ der Splineinterpolant $S_m(T'_{dist}|\, T_{dist})$ mit den Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten $T'_{dist} \subset T_{dist}$. Zuletzt bezeichnet $I_\kappa$ den Splineinterpolanten $S_m(X_{Greville}|\, T_\kappa)$ der sich aus den mit der Krümmung des SMAPs bestimmten Knoten $T_\kappa$ und den Greville Abszissen $X_{Greville}$ auseinandersetzt.

| **Bezeichnung** | **Knoten** | **Interpolationsstellen** |
|---|---|---|
| $I_1$ | äquidistant | Greville Abszissen |
| $I_2$ | aus Datenpunktabständen | Knoten & natürliche Zusatzbedingungen |
| $I_\kappa$ | aus der Krümmung | Greville Abszissen |

Tabelle 3.1: Übersicht über die eingesetzten Interpoaltionsmethodiken

# Kapitel 4

# Evaluation

## 4.1 Abstandsbegriff

Entscheidend für die quantitative Abweichung von der Originalkurve ist die Angabe eines Fehlers. Man unterscheidet eine Vielzahl von Fehler Metriken, die je nach Anwendung spezifiziert werden müssen.

### 4.1.1 Punkt-Kurve-Abstand

Ein erster Abstandsbegriff von der Punktmenge $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{p}_i : i = 1, \ldots, n]$ zu einer parametrisierten Kurve $\boldsymbol{f}(u)$ betrachtet zu jedem Punkt $\boldsymbol{p}_i$ den minimalen Abstand zur Kurve und maximiert dann:

$$d_1(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p}) = \max_i \min_{u \in I} ||\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p}_i||_2 \tag{4.1}$$

Interpolierende Kurven haben einen $d_1$-Abstand von 0, denn nach der Interpolationseigenschaft und den Interpolationsstellen $X = [x_i : i = 1, \ldots, n]$ gilt:

$$d_1(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{p}) = \max_i \min_{u \in I} ||\boldsymbol{f}(x_i) - \boldsymbol{p}_i||_2 = \max_i ||\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_i||_2 = 0 \tag{4.2}$$

Die Umkehrung gilt hierbei jedoch nicht, denn aus einem $d_1$-Abstand von 0 kann man zwar folgern, dass die Kurve alle Punkte passiert, dass sie diese Punkte an den zugehörigen Interpolationsstellen durchquert, ist jedoch nicht impliziert. Dennoch kann dieser Abstandsbegriff für eine Validierung der Implementierung herangezogen werden.
Ein weiteres Problem sind Kurven die sich selbst schneiden oder sich selbst im späteren Kurvenverlauf annähern. Das Verfahren berücksichtigt nämlich nicht die Reihenfolge der Punktmenge und bildet diese auch nicht geeignet auf das Parameterintervall der Kurve ab.

### 4.1.2 Kurve-Kurve-Abstand

Hierbei kann das Abstandsmaß $d_1$ verwendet werden und um Kommutativität zu garantieren wird $d_1$ erweitert zu:

**Definition 4.1.3 (Hausdorff-Abstand).**

$$d_{hausdorff}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \max\{\max_{w\in J}\min_{u\in I}||\boldsymbol{f}(u) - \boldsymbol{g}(w)||_2,\ \max_{u\in I}\min_{w\in J}||\boldsymbol{f}(u) - \boldsymbol{g}(w)||_2\} \quad (4.3)$$

Warum der Hausdorff-Abstand nicht schon beim Punkt-Kurve-Abstandsbegriff eingesetzt wurde, liegt an folgender Beobachtung. Würde man den Hausdorff-Abstand von einer Kurve zu den Punkten $\boldsymbol{p}_i$ messen, so würde für diesen gelten, dass

$$d_{hausdorff} \geq h := \max_i\{||\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i||\}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \quad (4.4)$$

Fehler, die kleiner als dieser maximale Punktabstand sind, gehen also nicht in den Hausdorff-Abstand mit ein. Bei vergleichbarer Parametrisierung eignet sich der Hausdorff Abstand als Einschätzung des maximalen Interpolationsfehlers und kann für eine Evaluation verwendet werden.

## 4.2 Auswertung

### 4.2.1 Vorgehen

Zur Auswertung wurden parametrisierte Kurvenfunktionen betrachtet $c(t) \to \mathbb{R}^2$. Diese wurden in sehr großen Schritten abgetastet, sodass letztlich nur $10-40$ Punkte aufgenommen wurden. An diesen wurden die Interpolationsmethodiken $I_1, I_2, I_\kappa$ angewandt. Anschließend wurden die Hausdorff-Abstände (Siehe 4.1.3) von dem Interpolanten zu den tatsächlichen Kurvenfunktionen numerisch berechnet. Dabei wurde eine sehr feine Abtastrate, die zu $10^4$ Aufnahmen führt, verwendet. Bei $I_\kappa$ wurden die für die Bestimmung der Krümmungsfunktion $\kappa^C_{SMAP(\epsilon)}$ notwendigen Konstanten der virtuellen Krümmung $C$ sowie der halben Kanalbreite $\epsilon$ (Siehe 2.3.7) konstant gesetzt auf $C = 1$ und $\epsilon = 0.1$. Es wurden ausschließlich Punktfolgen $\boldsymbol{p}_i, \quad i = 1, \ldots, M$ betrachtet für die $(M+1)\%m = 0$ gilt. Denn für diese kann ein $o \in \mathbb{N}$ gefunden werden, für das die notwendigen $mo+1 = M$ Greville Abszissen erzeugt werden können und somit das Gleichungssystem nach der Schoenberg-Whitney Bedingung eindeutig lösbar ist.
Für die Auswertung wurden folgende Kurven verwendet (Siehe Definitionen im Anhang 6.5):

- Kreis
- Sinuskurve
- Klothoide

- Logarithmische Spirale
- Blumenkurve

Diese sind geeignet, da alle außer die Kreisfunktion starke Krümmungsänderungen aufweisen. Somit soll beobachtet werden, ob die krümmungssensitive Interpolation $I_\kappa$ im Vergleich zu $I_1$ und $I_2$ signifikant auf diese Krümmungsänderungen reagiert.

### 4.2.2 Interpolation an der Klothoide

Folgend werden die Interpolationen an den Klothoiden beispielhaft vorgestellt. Die Auswertungen zu allen anderen Kurvenfunktionen finden sich im Anhang. Klothoiden sind so charakterisiert, dass ihre Krümmung über die Länge der Kurve konstant zunimmt, das heißt die größte Krümmung findet sich am Ende der Kurve.

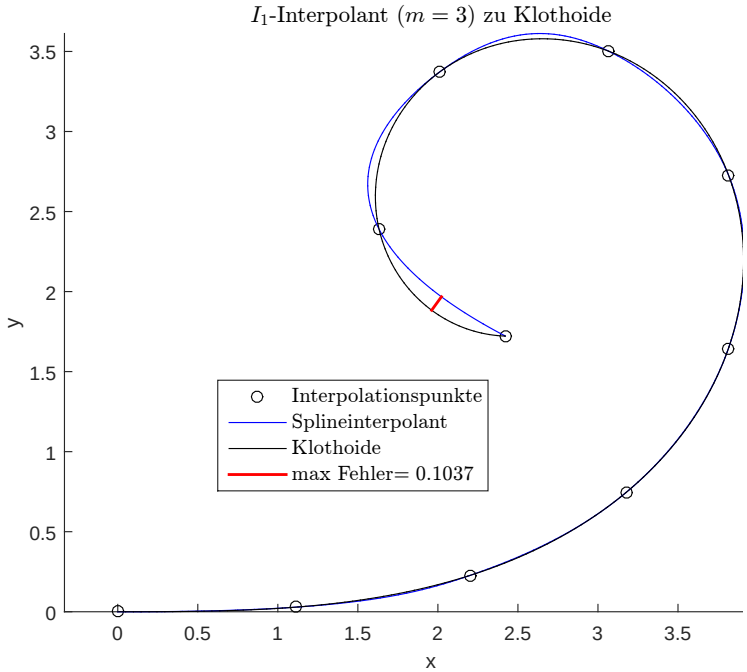


Abbildung 4.1: $I_1$ Interpolation einer Klothoide also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

Hier Fällt auf, dass gerade im letzten Abschnitt der Kurve, also dort wo die Krümmung am größten ist, auch der größte Hausdorff Abstand $d_{hausdorff}(c, I_1) = 0.1037$ gemessen wird.

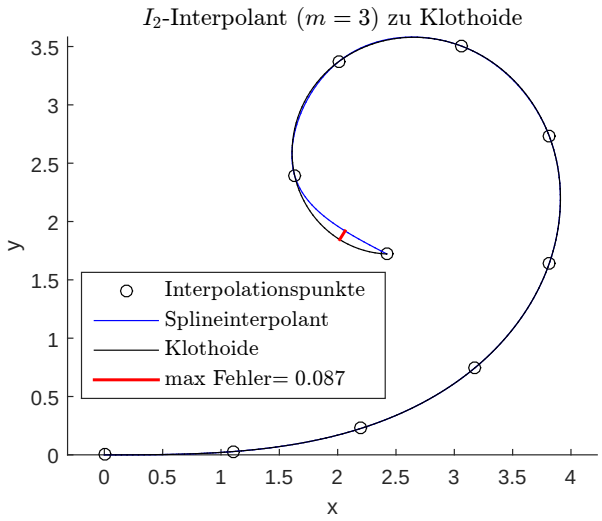


Abbildung 4.2: $I_2$ Interpolation einer Klothoide also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich bei der Interpolation mit $I_2$. Auch dort ist der Fehler am Ende der Kurve am größten. Mit $d_{hausdorff}(c, I_2) = 0.087$ ist er in einer ähnlichen Größenordnung wie $d_{hausdorff}(c, I_1)$. Bei der Interpolation $I_\kappa$ hingegen wird ein geringerer Hausdorff-Abstand $d_{hausdorff}(c, I_\kappa) = 0.0484$. Außerdem liegt dieser Abstand nicht mehr an der Stelle der größten Krümmung der Klothoide. Der Hausdorff Abstand im Vergleich $d_{hausdorff}(c, I_\kappa) \approx 1.8 \cdot d_{hausdorff}(c, I_2) \approx 2.1 \cdot d_{hausdorff}(c, I_1)$ ist ein Indiz dafür, dass die Methodik $I_\kappa$ Kurven großer Krümmungsänderung mit einem geringeren Haudorff Abstand interpoliert.

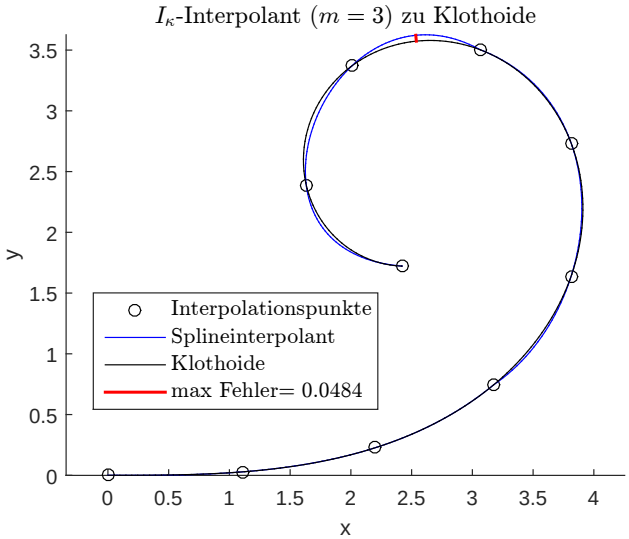


Abbildung 4.3: $I_\kappa$ Interpolation einer Klothoide also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

## 4.3 Fazit

Zusammenfassend ergaben sich die Hausdorff-Abstände:

| **Kurve:** | **Kreis** | **Sinuskurve** | **Klothoide** | **log. Spirale** | **„Blumenkurve“** |
|---|---|---|---|---|---|
| $d_{hausdorff}$ | | | | | |
| $d_{hausdorff}(c, I_1)$ | 0.2626 | 0.014 | 0.1037 | 0.0204 | 0.0397 |
| $d_{hausdorff}(c, I_2)$ | 0.1985 | 0.0075 | 0.087 | 0.0126 | 0.0848 |
| $d_{hausdorff}(c, I_\kappa)$ | 0.0533 | 0.0085 | 0.0484 | 0.0028 | 0.022 |

Tabelle 4.1: Hausdorff-Abstände der Interpolanten $I_1$, $I_2$ und $I_\kappa$ zu den Kurven *Kreis*, *Sinuskurve*, *Klothoide*, *log. Spirale* und *Blumenkurve*

Man sieht, dass die Methodik $I_\kappa$ in 4 von 5 betrachten Kurven den kleinsten Hausdorff Abstand aufweist. Nur im Falle der Sinuskurve war der Hausdorff-Abstand des natürliche Spline $I_2$ geringer als der des Interpolanten $I_\kappa$. Die Methodik $I_2$ zeigte im Vergleich zu der Methodik $I_1$ in 3 von 5 Fällen einen geringeren Hausdorff Abstand. Auffallend ist auch, dass Kurven mit einem nahezu symmetrischen Krümmungsverlauf besser von $I_1$ und $I_2$ approximiert werden konnten als Kurven mit einem asymmetrischen Kurvenverlauf. Zu Letzteren zählen die Klothoide und die logarithmische Spirale, welche deutlich besser mit der Interpolationsmethodik $I_\kappa$ approximiert werden konnten.

# Kapitel 5

# Ausblick und Zusammenfassung

## 5.1 Offene Fragen

**Wahl des $\epsilon$:** Eine offene Frage ist, wie bei der Interpolation mit $I_\kappa$ ein optimales $\epsilon$ für den $\epsilon$-Kanal bestimmt werden kann. Auch wenn bei den Beispielinterpolationen mit $I_\kappa$ jeweils eine Konstante $\epsilon = 0.1$ gewählt wurde und damit gute Ergebnisse erzielt werden konnten, wäre ein $\epsilon^*$ mit der Eigenschaft:

$$\epsilon^* := \arg\min_{\epsilon} d_{hausdorff}(f, I_\kappa(\epsilon)) \tag{5.1}$$

... denkbar. Die Eindeutigkeit und mögliche Abhängigkeit, beispielsweise zu dem Abstand der vorgegebenen Punkte, sollten weiter betrachtet werden. Hilfreich könnte hierbei auch der Zusammenhang zwischen $\epsilon$ und der Segmentanzahl im SMAP sein. Dieser Zusammenhang konnte jedoch bislang noch nicht ausreichend genau beschrieben werden.

**Wahl von zusätzlichen Knoten für $I_\kappa$:** Ein grundsätzliches Problem von $I_\kappa$ ist, dass zu einer Ordnung $m$ nur eine bestimmte Anzahl von $n := om + 1, \quad m \in \mathbb{N}$ Punkten interpoliert werden können. Der Vorschlag von De Boor weitere Knoten in den entsprechenden Knotenvektor der Länge $(o+1)m + 2$ einzufügen, konnte nicht zufriedenstellend umgesetzt werden. Auch wenn lediglich $1 - 2$ zusätzliche Knoten $t_1^*, t_2^* \in [t_1, t_{n+m+1}]$ ausreichen würden, um dieses Problem zu umgehen, ist es sehr schwierig geeignete Stellen für diese zu finden. Verschiedene Ansätze zur Wahl der zusätzlichen Knoten wurden betrachtet:

**i)** $t_1^* = \tau_2 \quad$ und $\quad t_2^* = t_n$

**ii)** $t_1^* = |\tau_2 - \tau_1|/2 \quad$ und $\quad t_2^* = |\tau_{o+1} - \tau_o|/2$

Beide Varianten führten jedoch zu Verzerrungen der Interpolationskurve und einem deutlich größeren Hausdorff Abstand.

## 5.2 Résumé

Trotz der oben genannten Schwierigkeiten eignete sich die Krümmungsinformation des SMAPs zur Konstruktion der Knoten. Der darauf basierende Interpolationsansatz $I_\kappa$ war in der Lage, stetige Splinekurven zu erzeugen, die in den meisten Fällen einen geringeren Haudorff-Abstand aufwiesen als der natürliche Interpolant $I_2$ oder der Interpolant mit äqudistanter Knotenwahl $I_1$. Die verlorene Stetigkeit $C^{m-1}$ muss dafür aber in Kauf genommen werden.

# Kapitel 6

# Anhang

## 6.1 Historischer Rückblick auf Approximationen

Der in der Geschichte der Mathematik oftmals erwähnte Begriff der Approximation kommt von dem lateinischen Verb *approximare*, was soviel wie *sich annähern* bedeutet. Dabei kann das konkrete Ziel der Annäherung von verschiedenster Gestalt sein. So wird in der numerischen Mathematik nach Näherungen für skalare Werte oder auch für ganze Funktionen gesucht.
Ein Beispiel für die Approximation der reellen Zahl $\sqrt{2}$ ist das sogenannte *Heron - Verfahren*. Wählt man hierbei einen passenden Startwert, kann durch wiederholtes Einsetzen folgender Iterationsvorschrift ein hinreichend genauer Wert der gesuchten Wurzel gefunden werden:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \tag{6.1}$$

Bemerkenswert ist, dass bereits nach dem vierten Iterationsschritt die Abweichung $\Delta := |\sqrt{2} - x_4|$ von der Größenordnung $\Delta < 10^{-5}$ ist. Das Verfahren setzt jedoch einen guten Startwert voraus, welcher nahe genug an $\sqrt{2}$ ist. Setzt man beispielsweise eine negative Zahl in 6.1 als Startwert ein, so konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{2}$.

Eine andere Art der Approximation ist die von Kurven. Hierbei werden zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall wird davon ausgegangen, dass die Zielfunktion $f$ bekannt ist und wegen ihrer Komplexität eine Approximation bemüht wird, um die Zielfunktion einfacher ausdrücken zu können. Beispielsweise kann durch eine sogenannte Taylor–Reihe, das Verhalten einer Funktion um eine bestimmte Stelle $x_0$ simuliert werden.
Ein Spezialfall der Approximation ist die Interpolation an Punkten. Der dazugehörige Interpolant ist eine Kurve, die alle Punkte durchläuft. Eine geeignete Funktion für die Interpolation sind Splines. Übersetzt werden kann der englische Begriff *spline* mit dem aus dem Schiffsbau bekannten Terminus eines *Straks*. Ein Strak bezeichnet dort eine Latte, die nach Biegen und Fixieren durch angrenzender Nägel

in die Form einer glatten Kurve, gebracht wird [7]. Schoenberg zeigte, dass vor allem die Splines für die Approximation besonders geeignet sind. Für diese konnte er eine geeignete Basis, nämlich die B-Splines, angeben. Für einen praxistauglichen Einsatz gab 1972 Carl De-Boor [3] eine einfache rekursive Berechnungsvorschrift an. Somit finden sich Splines heute in vielen Anwendungsbereichen und vor allem im Computer Aided Geometric Designs (CAGD) wieder. Gemäß dieser Analogie werden Splines mathematisch als Polyomketten angesehen, welche an den sogenannten Knoten *zusammengebunden* sind und eine bestimmte Glattheitsbedingung erfüllen. Da in der Praxis die gegebenen Punkte das Resultat von Messungen und mit verschiedenen Messfehlern versehen sind, ist hier eine genaue Interpolation an den Punkten oft nicht gewollt. Nach Otto Glatter [5] empfiehlt es sich in solchen Fällen, schwankende Messfehler mit der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen. Diese Methode benutzte bereits der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß, um ein medienwirksames Ereignis vorauszusagen. Beispielsweise nachzulesen in [6] hat der italienische Astronom Guiseppe Piazzi am 1. Januar 1801 den Planenten Ceres entdeckt und konnte ihn 41 Tage lang beobachten, bevor die Sichtung des nur ein Viertel des Monddurchmessers großen Ceres durch helle Sonnenstrahlen unmöglich wurde. Gauß erhielt darauf im Oktober 1801 Zugang zu den Beobachtungsdaten und bestimmte durch die Methode der Kleinsten Quadrate den nächsten Erscheinungsort bzw. –zeitpunkt. Damit konnte der Astronom Franz Xaver von Zach am 7. Dezember 1801 auf dem Seeberg bei Gotha wieder wahrgenommen werden konnte.

## 6.2 Implementierung in *MATLAB*

Die Implementierung erfolgte in *MATLAB*. *MATLAB* kommt von ***M*AT***r*ix-***L*AB***o*ratory und unterstützt effiziente Matrixoperationen.

## 6.3 Skript zum Auffinden des SMAPs

Der Arbeit lag das Skript `smap` zum Auffinden eines minimalen Kreisbogensplines vor. Dieses verlangt als Eingabe die im `.csv`-Format geordnete Punktmenge (siehe Anhang Beispiel einer geordneten Menge im .csv Format) sowie die Kanalbreite $\epsilon$ und konstruiert damit gemäß der Definition 2.3.8 einen minimalen Kreisbogenspline, welcher in Form einer `.dxf`-Datei zurückgegeben wird. Ein Vorteil des `.dxf`- oder auch `Drawing-Interchange`-Files ist, dass es übersichtlich gegliedert ist und damit leicht in *MATLAB* ausgelesen werden kann.

## 6.4 Beispielhafte SMAP Approximation

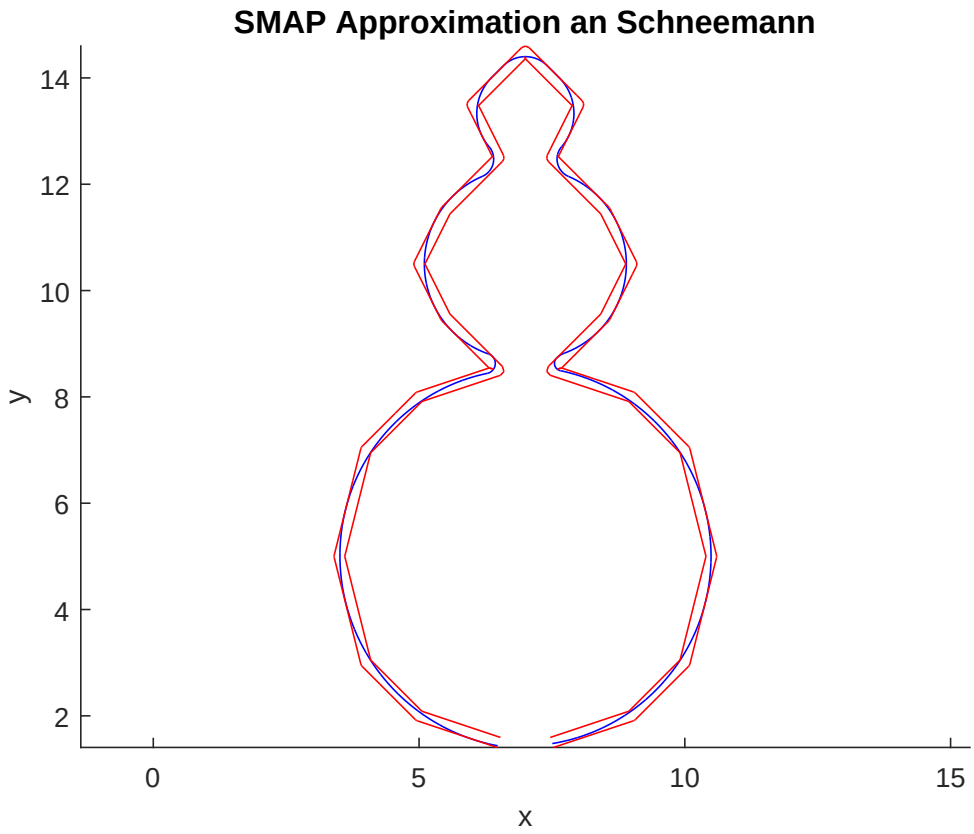


Abbildung 6.1: SMAP Approximation mit $\epsilon = 0.1$ zu 25 Punkten auf Schneemann (SMAP: blau; $\epsilon$-Kanal: rot)

## 6.5 Verwendete Kurvenfunktionen

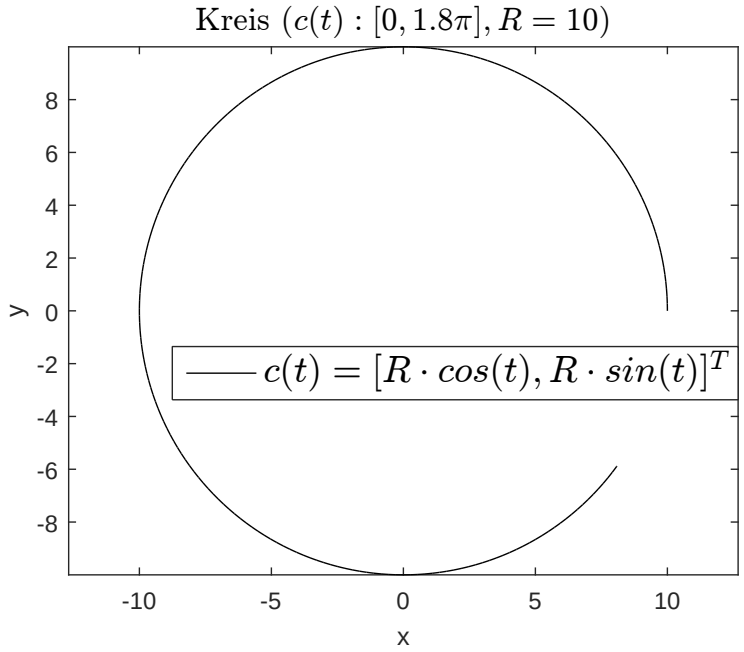


Abbildung 6.2: Graph des Kreises

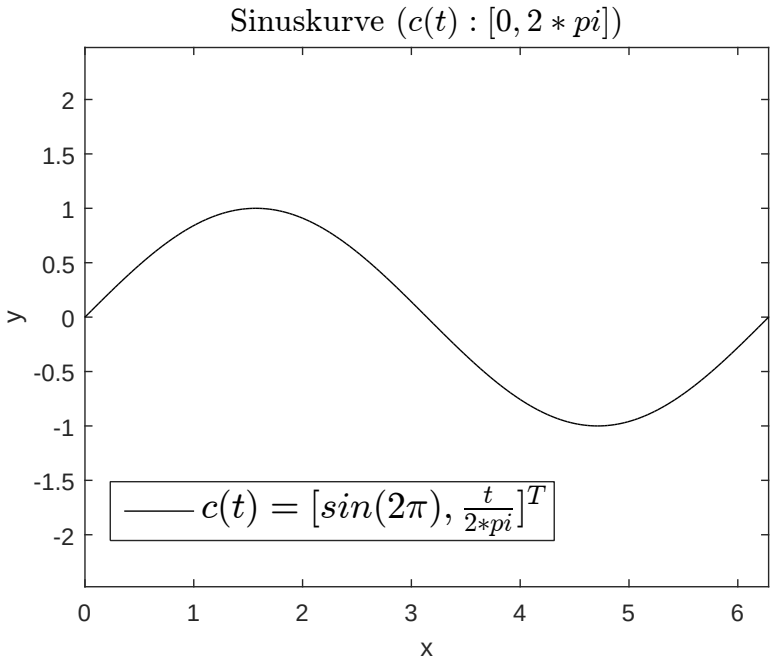


Abbildung 6.3: Graph der Sinuskurve

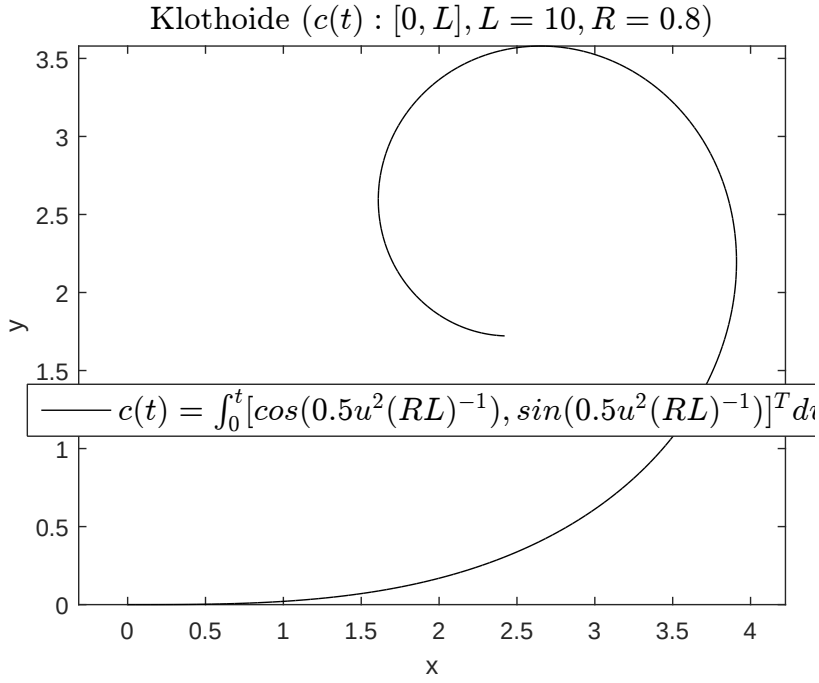


Abbildung 6.4: Graph der Klothoide

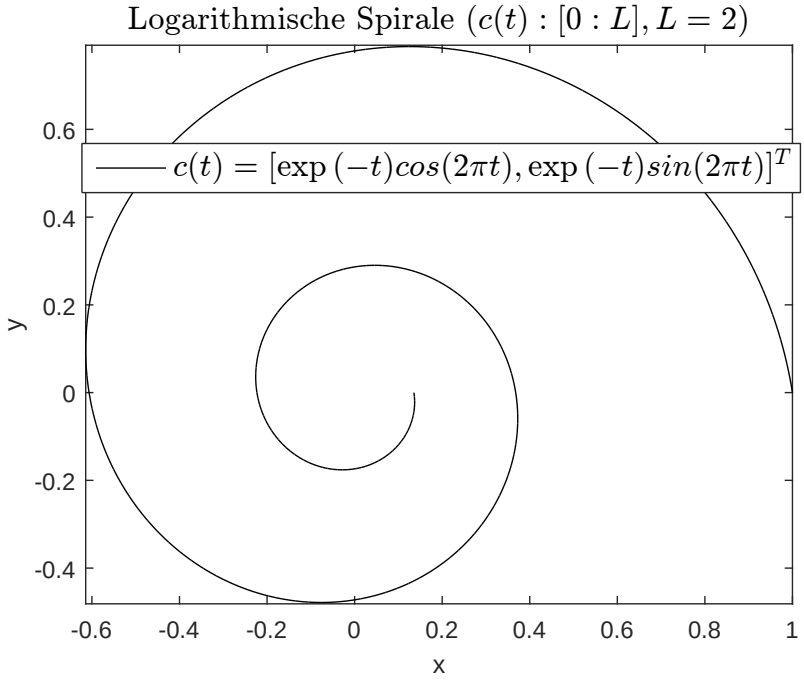


Abbildung 6.5: Graph der logarithmischen Spirale

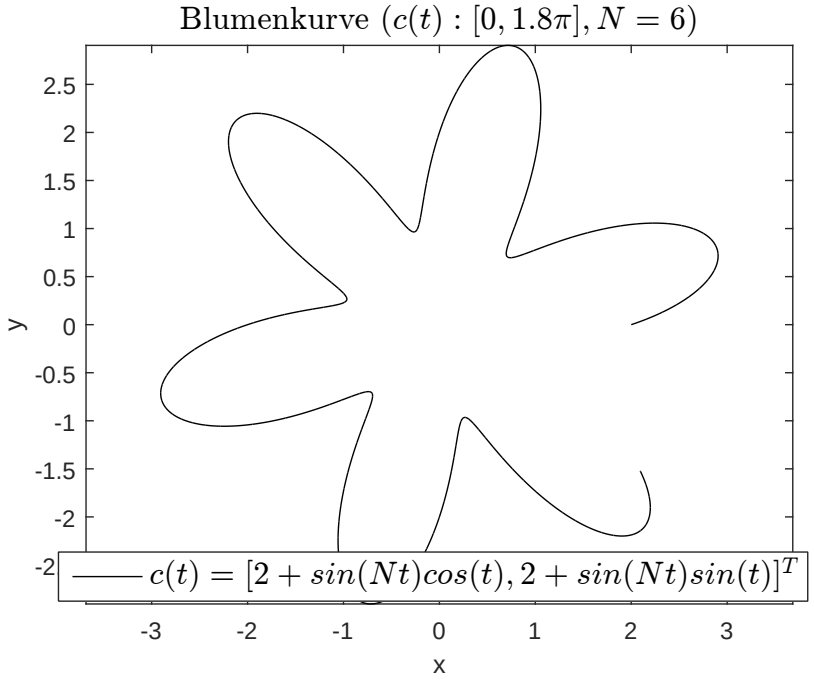


Abbildung 6.6: Graph der „Blumenkurve “

## 6.6 Interpolationen an Kurvenfunktionen

### Interpolation am Kreis

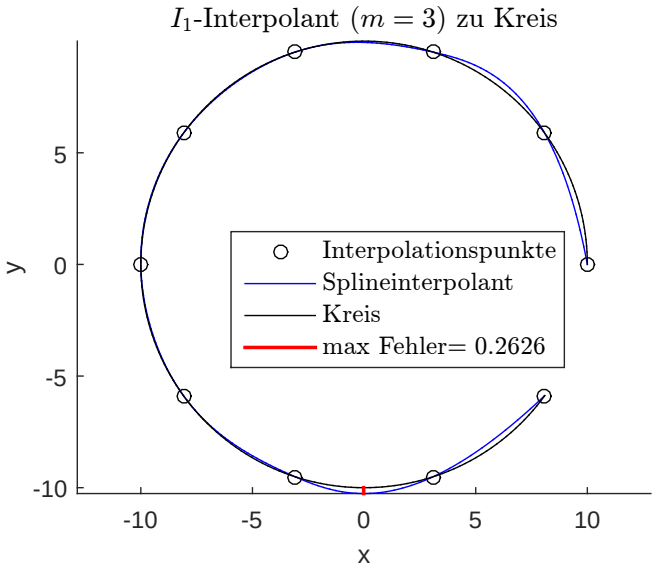


Abbildung 6.7: $I_1$ Interpolation eines Kreises also mit Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

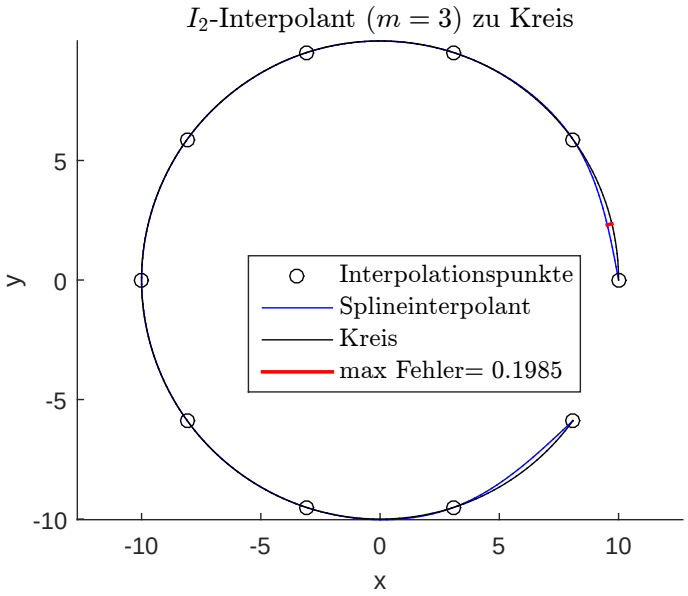


Abbildung 6.8: $I_2$ Interpolation eines Kreises also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten

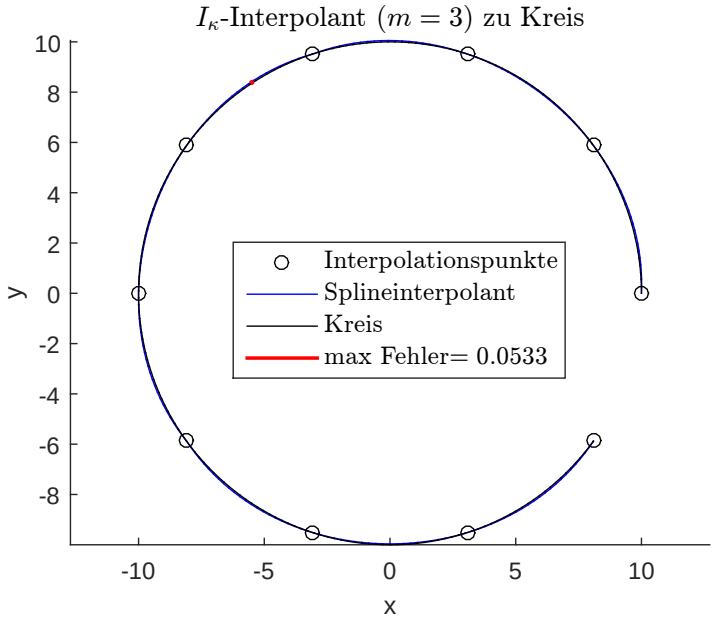


Abbildung 6.9: $I_\kappa$ Interpolation eines Kreises also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

### Interpolation an der Sinuskurve

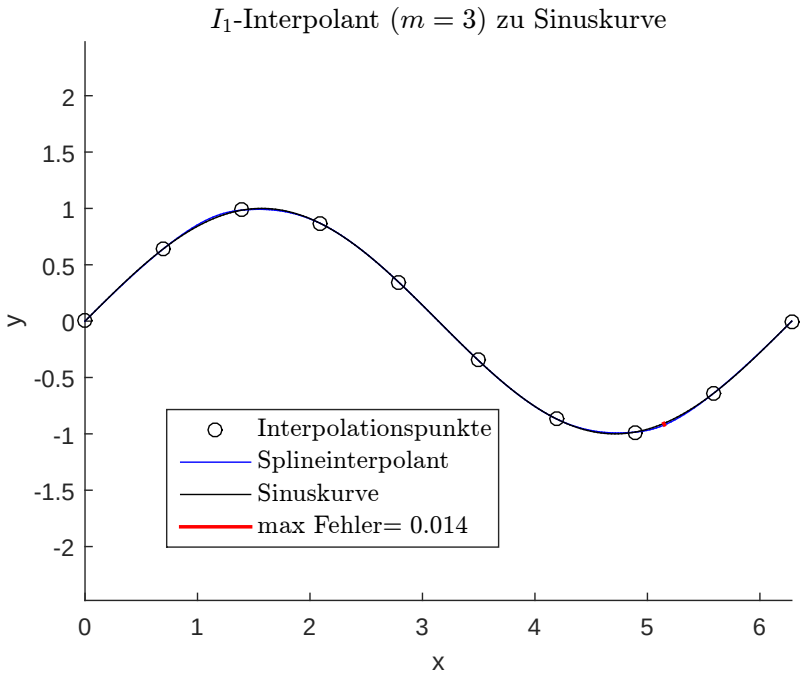


Abbildung 6.10: $I_1$ Interpolation einer Sinuskurve also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

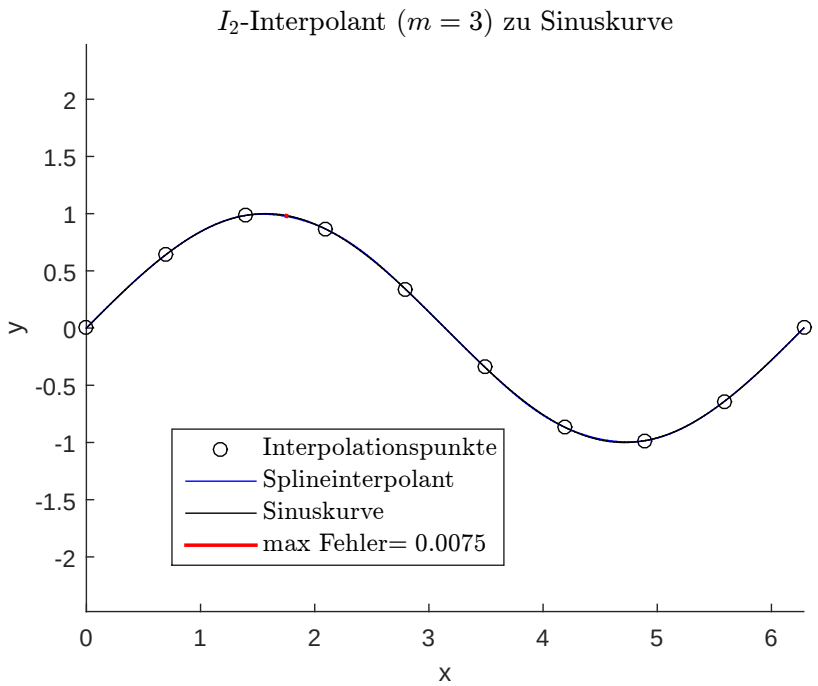


Abbildung 6.11: $I_2$ Interpolation einer Sinuskurve also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten

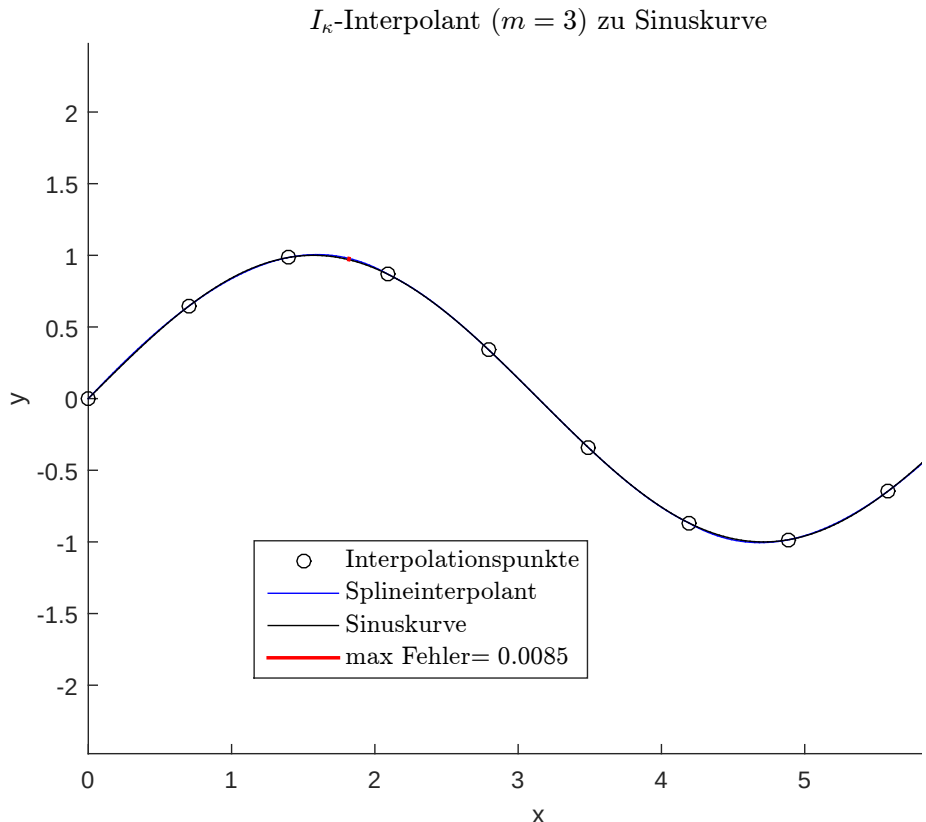


Abbildung 6.12: $I_\kappa$ Interpolation einer Sinuskurve also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

### 6.6.1 Interpolation an der logarithmischen Spirale

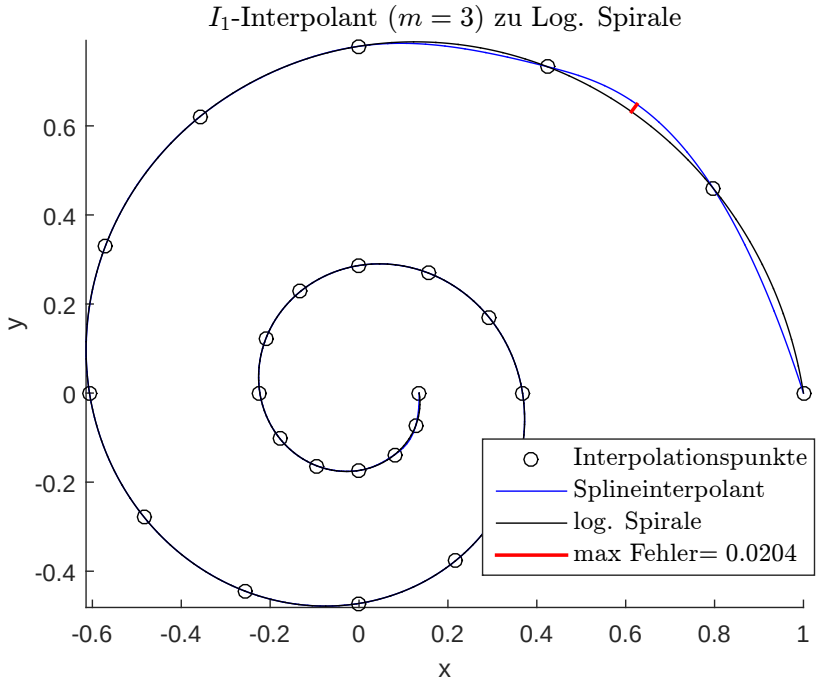


Abbildung 6.13: $I_1$ Interpolation einer Logarithmischen Spirale also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

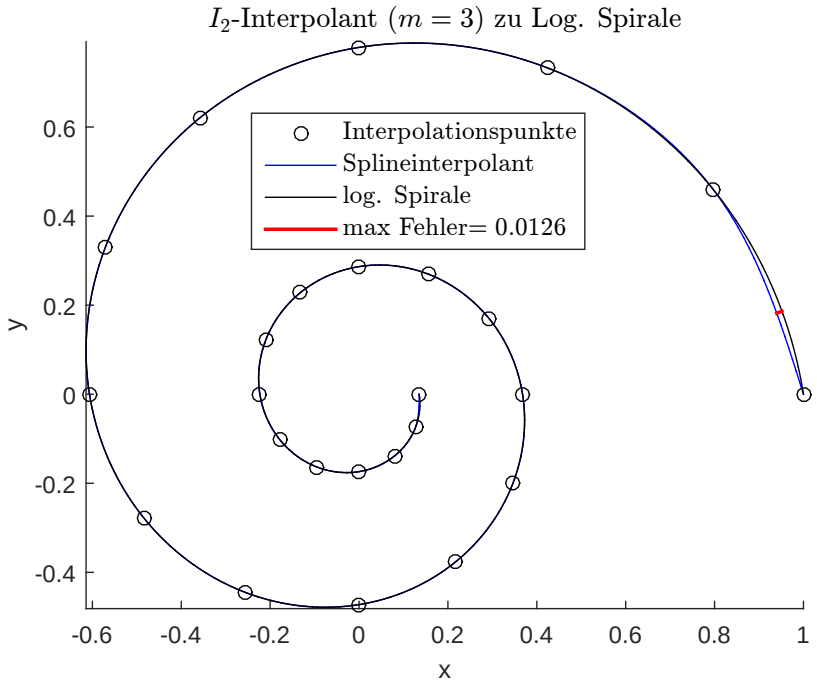


Abbildung 6.14: $I_2$ Interpolation einer Logarithmischen Spirale also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten

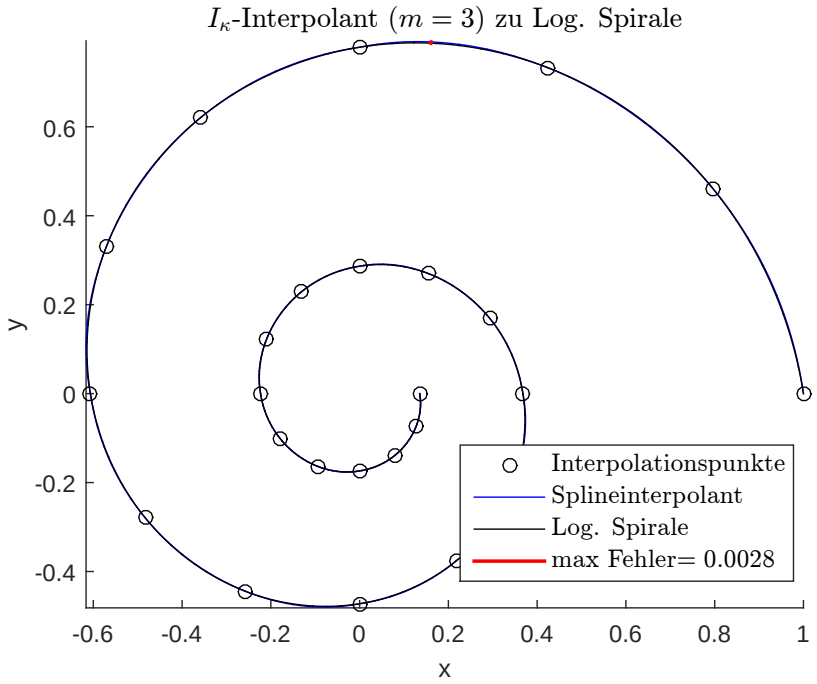


Abbildung 6.15: $I_\kappa$ Interpolation einer Logarithmischen Spirale also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

### 6.6.2 Interpolation an der „Blumenkurve“

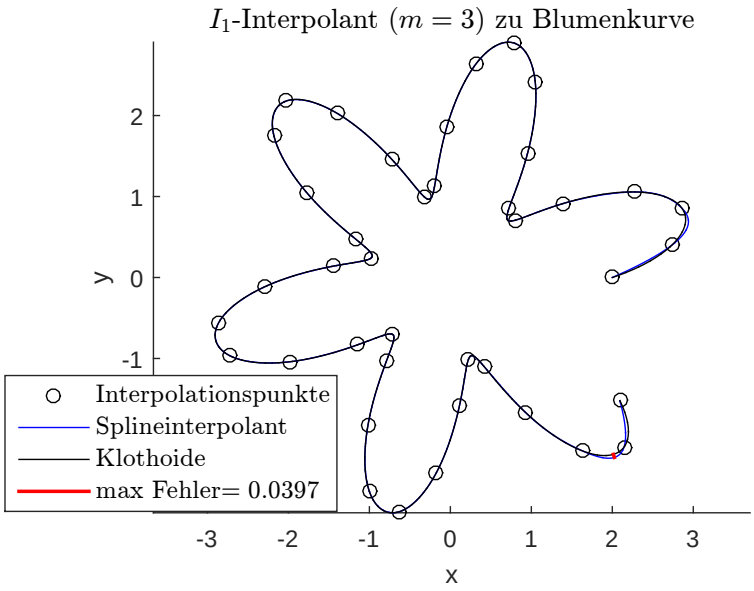


Abbildung 6.16: $I_1$ Interpolation einer „Blumenkurve“ also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

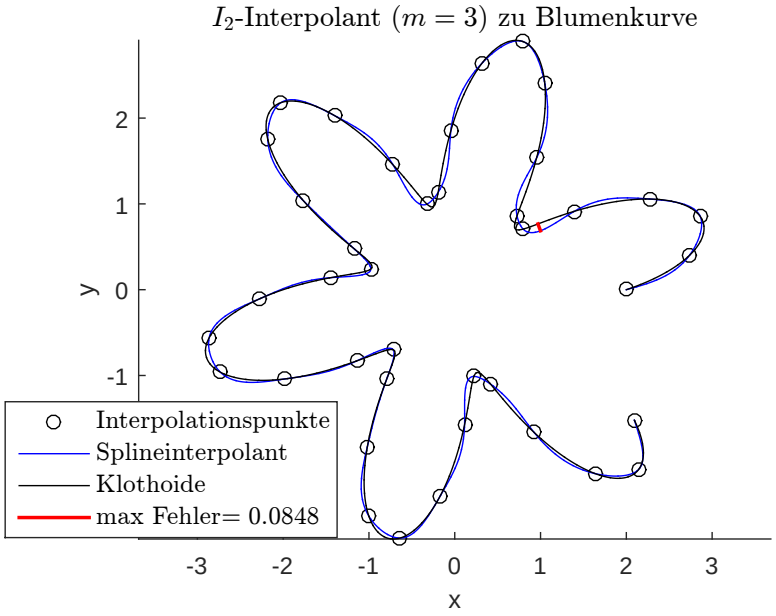


Abbildung 6.17: $I_2$ Interpolation einer „Blumenkurve“ also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten

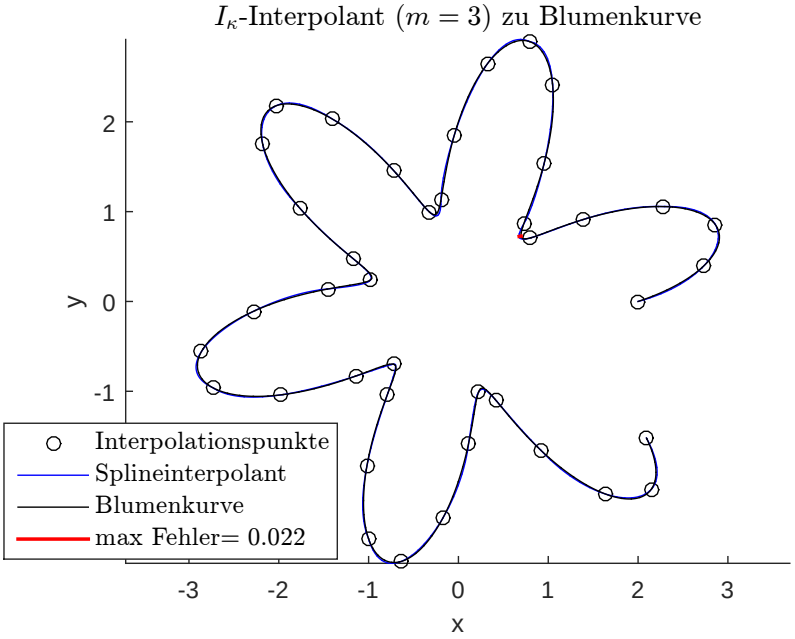


Abbildung 6.18: $I_\kappa$ Interpolation einer „Blumenkurve“ also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen

# Abbildungsverzeichnis

2.1 *links*: B-Splines zum Knotenvektor der Ordnung $m = 1$ und *rechts* $m = 3$ . . . . . 6
2.2 Minimaler Kreisbogenspline in einem $\epsilon$-Kanal um 5 Punkte . . . . . 11

3.1 Erweiterte Krümmungsfuntion des SMAPs $\kappa^C_{SMAP}$ an Schneemann (Siehe Anhang 6.1) . . . . . 16
3.2 Funktion $G(x) := \int_0^x (h(s))^{\frac{1}{m-1}}\, ds$ (blau); gefundene Knotenwerte $\tau_j$ (schwarz) an Schneemann (Siehe Anhang 6.1) . . . . . 17
3.3 Natürlicher Splineinterpolant von handförmiger Punktfolge mit der Ordnung $m = 3$ . . . . . 21

4.1 $I_1$ Interpolation einer Klothoide also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 25
4.2 $I_2$ Interpolation einer Klothoide also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten . . . . . 26
4.3 $I_\kappa$ Interpolation einer Klothoide also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 26

6.1 SMAP Approximation mit $\epsilon = 0.1$ zu 25 Punkten auf Schneemann (SMAP: blau; $\epsilon$-Kanal: rot) . . . . . 32
6.2 Graph des Kreises . . . . . 33
6.3 Graph der Sinuskurve . . . . . 34
6.4 Graph der Klothoide . . . . . 34
6.5 Graph der logarithmischen Spirale . . . . . 35
6.6 Graph der „Blumenkurve “ . . . . . 35
6.7 $I_1$ Interpolation eines Kreises also mit Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 36
6.8 $I_2$ Interpolation eines Kreises also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten . . . . . 37

6.9 $I_\kappa$ Interpolation eines Kreises also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 37
6.10 $I_1$ Interpolation einer Sinuskurve also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 38
6.11 $I_2$ Interpolation einer Sinuskurve also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten . . . . . 39
6.12 $I_\kappa$ Interpolation einer Sinuskurve also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 39
6.13 $I_1$ Interpolation einer Logarithmischen Spirale also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 40
6.14 $I_2$ Interpolation einer Logarithmischen Spirale also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten . . . . . 41
6.15 $I_\kappa$ Interpolation einer Logarithmischen Spirale also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 41
6.16 $I_1$ Interpolation einer „Blumenkurve“ also mittels Splineinterpolant äquidistanter Knoten und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 42
6.17 $I_2$ Interpolation einer „Blumenkurve“ also mittels natürlichem Splineinterpolant mit Knoten aus den Datenpunktabständen und Interpolationsstellen an den Knoten . . . . . 43
6.18 $I_\kappa$ Interpolation einer „Blumenkurve“ also mittels Splineinterpolant mit Knoten aus der Krümmung und Interpolationsstellen an den Greville Abszissen . . . . . 43

# Tabellenverzeichnis

3.1 Übersicht über die eingesetzten Interpoaltionsmethodiken . . . . . 22

4.1 Hausdorff-Abstände der Interpolanten $I_1$, $I_2$ und $I_\kappa$ zu den Kurven *Kreis*, *Sinuskurve*, *Klothoide*, *log. Spirale* und *Blumenkurve* . . . . . 27

# Literaturverzeichnis

[1] S. Brummer, F. Janda, G. Maier, and A. Schindler. Evaluation of a mapping strategy based on smooth arc splines for different road types. In *Intelligent Transportation Systems - (ITSC), 2013 16th International IEEE Conference on*, pages 160–165, Oct 2013.

[2] J. Canny. A computational approach to edge detection. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, PAMI-8(6):679–698, Nov 1986.

[3] C. de Boor. On calculating with b-splines. *J. Approx. Theory*, 1972.

[4] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.

[5] O. Glatter and H. Greschonig. Approximation of titration curves and other sigmoidal functions by proportionally spaced cubic b-splines. *Microchimica Acta*, 89(1-6):389–399, 1986.

[6] U. Krengel. Von der Bestimmung von Planetenbahnen zur modernen Statistik. *Mathematische Semesterberichte*, 53(1):1–16, 2006.

[7] G. Lube. Spline-interpolation. 2004-2005.

[8] G. Maier. *Smooth Minimum Arc Paths*. Shaker-Verlag, 2010.

[9] G. Nürnberger. Approximation by spline functions. 1989.

[10] A. H. Peter Deuflhard. *Numerische Mahematik 1*. 4 edition, 2008.

[11] T. Sauer. Splinekurven und -flächen in CAGD und Anwendung, 2012.

[12] I. Schoenberg. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. volume 4, pages 45–99, 1946.