

Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau

Zeit-Frequenz-Analyse von Klavieren

Bachelorarbeit

Beat Köck
Matrikel-Nummer 60979

Betreuer Prof. Dr. Tomas Sauer
Zweitkorrektor

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Symbolverzeichnis	V
1 Einleitung	1
2 Die Zeit-Frequenz-Analyse	2
2.1 Allgemeines zur Zeit-Frequenz-Analyse	2
2.1.1 Die Heisenbergsche Unschärferelation	3
2.1.2 Die gefensterte Fourier-Transformation (WFT)	5
2.1.3 Die Gabor-Transformation	6
2.2 Die Wavelet-Transformation	7
2.2.1 Grundsätzliches zur Wavelet-Transformation	7
2.2.2 Zeit-Frequenz-Auflösung bei Wavelets	9
2.2.3 Beispiele für Wavelets	11
2.2.4 Das komplexe Morlet-Wavelet - ideal für die Klanganalyse	13
3 Das Klavier	16
3.1 Die Funktionsweise und Klangerzeugung des Klaviers	16
3.2 Die Entwicklung des Hammerklaviers	17
3.3 Die Klangeigenschaften des Klaviers	18
3.4 Die Stimmung eines Klaviers	19
4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren	21
4.1 Fourier-Transformationen zu verschiedenen Aufnahmen	21
4.2 Wavelet-Analyse zu Klavieraufnahmen	24
4.2.1 Der Kammerton a bei verschiedenen Klavieren	25

Inhaltsverzeichnis

4.3	Das Zeit-Frequenz-Verhalten bei der Aufnahme von Dreiklängen	30
4.4	Zeit-Frequenz-Analyse einer simplen Melodie	32
4.5	Der Einfluss der Stimmung auf das Zeit-Frequenz-Verhalten	34
4.6	Veranschaulichung der Heisenbergschen Unschärferelation	36
5	Zusammenfassung und Ausblick	38
	Literatur	40
	Literaturverzeichnis	40

Abbildungsverzeichnis

2.1	Heisenberg-Box	4
2.2	Heisenberg-Boxen der gefensterten Fourier-Transformation	5
2.3	Streckung und Stauchung eines Wavelets	8
2.4	Verschiebung eines Wavelets	8
2.5	Heisenberg-Boxen bei Wavelets	11
2.6	Haar-Wavelet	12
2.7	Mexican Hat-Wavelet	12
2.8	Morlet-Wavelets mit verschiedenen Parametern	14
4.1	FFT zum Ton a^1	22
4.2	FFT zu einem A-Dur-Dreiklang	23
4.3	FFT einer simplen Melodie	24
4.4	Wavelet-Transformation zum Kammerton a beim Bösendorfer 290 Imperial	25
4.5	Wavelet-Transformation zum Kammerton a beim Kawai GE-30	26
4.6	Wavelet-Transformation zum Kammerton a beim Kawai CN33	27
4.7	Vergleich des Tons a^1 zwischen Konzertflügel und Digitalpiano	28
4.8	Mikrofonaufnahme des Tons a^1 beim Digitalpiano Kawai CN33	29
4.9	Wavelet-Transformation zum A-Dur-Dreiklang beim Flügel von Steingraeber & Söhne	30
4.10	Wavelet-Transformation eines A-Dur-Dreiklangs beim Digitalpiano Kawai CN33	31
4.11	Wavelet-Transformation einer einfachen Melodie auf dem Bösendorfer 290 .	32
4.12	Wavelet-Transformation eines gestimmten und verstimmten a^1	34
4.13	Wavelet-Transformation eines gestimmten und verstimmten A-Dur-Dreiklangs	35
4.14	Wavelet-Transformation zu einfacher Melodie einem verstimmten Flügel . .	36
4.15	Wavelet-Transformationen der Töne A und a^3	37

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

Symbol	Bedeutung
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{L}(\mathbb{R})$	Raum der Funktionen mit $\int_{\mathbb{R}} f(x) ^p dx < \infty$

Symbolverzeichnis

Danksagung

Ich möchte allen Leuten danken, die mir bei der Erstellung meiner Bachelorarbeit geholfen haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Tomas Sauer, der trotz Forschungssemester immer wieder Zeit fand, mich zu betreuen und meine Fragen zu beantworten. Weiterhin möchte ich dem Klavierhaus Piano Mora in Passau und stellvertretend dafür den Inhaber Carlos Mora danken, dass mir die Ausstellungsräume sowie die Klaviere und Flügel für meine Aufnahmen zur Verfügung gestellt wurden.

1 Einleitung

Der Zusammenhang zwischen Schwingungen, Frequenzen und Tönen war bereits dem Mathematiker Pythagoras aus dem alten Griechenland bekannt. Auch das Phänomen der Obertöne wurde bereits damals erkannt. Weiterhin stellte man auch relativ früh fest, dass das zeitliche Verhalten der Frequenzen den Klangcharakter in hohem Maße bestimmt. Als das Hammerklavier im 17. Jahrhundert entwickelt wurde, geschah das noch ohne technische Hilfsmittel und Computer. Die Klangqualität wurde rein durch das Gehör beurteilt und die Klaviere wurden in reiner Handarbeit gefertigt. Dennoch klangen die Klaviere bereits damals erstaunlich gut und es konnten bereits kleinere Konzertsäle ohne Lautsprecher beschallt werden. Der erste Grundstein zu einer Zeit-Frequenz-Analyse wurde bereits im 19. Jahrhundert durch die Entwicklung der Fourier-Transformation gelegt. Wirklich vorangetrieben wurde die Zeit-Frequenz-Analyse schließlich durch die Entwicklung der Quantenmechanik und besonders durch die Forschungen zum Zeit-Frequenz-Verhalten durch Dennis Gabor im den 1940er Jahren, wie Gröchenig im Vorwort zu [1] beschreibt. Durch die immer populärer werdenden Wavelets in den 1990er Jahren erhielt auch die Zeit-Frequenz-Analyse einen deutlichen Schub. Zu den vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten zählt auch die Untersuchung von akustischen Signalen. Unter anderem lässt sich mit geeigneten Verfahren auch der zeitliche Verlauf der Frequenzen von Klavieraufnahmen analysieren.

In der folgenden Arbeit sollen zunächst die Grundlagen zur Zeit-Frequenz-Analyse, davon insbesondere zu den Wavelets, beschrieben werden. Die Geschichte und die Eigenschaften des Klaviers werden in Kapitel 3 dargestellt. Kapitel 4 beschreibt die Ergebnisse der Zeit-Frequenz-Analyse von verschiedenen Klavieraufnahmen.

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

2.1 Allgemeines zur Zeit-Frequenz-Analyse

Die Zeit-Frequenz-Analyse besitzt das Ziel, Informationen über den zeitlichen Verlauf von Frequenzen zu erhalten. Sowohl die auftretenden Frequenzen als auch deren genaues zeitliches Verhalten sollen dabei in einer geeigneten Form dargestellt werden. Ein erstes Hilfsmittel dazu ist die Fouriertransformation. Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L_1(\mathbb{R})$ ist folgendermaßen definiert:

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \tag{2.1}$$

$$\hat{f}(\xi) := \tilde{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Die Fouriertransformierte einer Folge $c \in \ell(\mathbb{Z})$ wird dagegen wie folgt berechnet:

$$\hat{c}(\xi) := \tilde{c}(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) e^{-ik\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Signale sind meistens als Amplitudenfunktion über die Zeit gegeben. Für diese Signale zeigt die Fourier-Transformation an, welche Frequenzen welchen Anteil am Signal besitzen [2, S. 21]. Die Fourier-Transformation sagt jedoch nichts über den zeitlichen Verlauf dieser Frequenzen aus. Eine ideale Zeit-Frequenz-Repräsentation eines Signals beinhaltet konkrete Informationen über die Frequenzen ω , die zu einer beliebigen Zeit t auftreten. Anders gesagt, versucht die Zeit-Frequenz-Analyse, lokale Informationen eines momentanen Frequenzspektrums mit den globalen Informationen des Zeitverhaltens der Funktion f zu verbinden [1, S. 22]. Gröchenig verwendet in [1] die Notenschrift und die Musik als Veranschaulichung der Zeit-Frequenz-Analyse. Wenn f ein Musikstück bezeichnet, beschreibt die Funktion das zeitliche Verhalten des Signals. Daraus lassen sich einige

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

grundlegende Informationen wie rhythmische Muster erkennen. Die Melodie der Musik oder die einzelnen Töne können durch die Betrachtung von f aber nicht ohne weiteres bestimmt werden. Andererseits lassen sich durch die Betrachtung des Frequenzspektrums bei der Fourier-Transformierten \hat{f} zwar Aussagen über die dominanten Frequenzen treffen, aber nicht über die Melodie oder den Rhythmus. Das menschliche Ohr ist dagegen in der Lage, den akustischen Eindruck so zu verarbeiten, dass es Informationen über die Zeit und die Frequenz erhält. Bei einer Zeit-Frequenz-Repräsentation eines Signals versucht man, das menschliche Gehör zu imitieren und sowohl Informationen über die Frequenzen als auch über deren zeitlichen Verlauf darzustellen.

In der Musik wird seit vielen Jahrhunderten eine Darstellung für diese beiden Komponenten verwendet. Die uns bekannte Notenschrift ist nichts anderes, als eine Visualisierung des zeitlichen Verlaufs der Frequenzen. Die Frequenzen werden als Tonhöhen notiert, der zeitliche Ablauf wird mit der Dauer der einzelnen Noten und eventuellen Pausen vorgeschrieben. Damit kann ein Komponist relativ exakt aufs Papier bringen, welche Noten von welchen Instrument zu welcher Zeit gespielt werden sollen.

2.1.1 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Zeitlokalisierung einer Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist als

$$\mu = \mu(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt \quad (2.3)$$

definiert, die Frequenzlokalisierung von f als

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(f) = \frac{1}{\|\hat{f}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.4)$$

Die Zeitvariation und Frequenzvariation werden folgendermaßen definiert:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - \mu)^2 |f(t)|^2 dt, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \hat{\mu})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.5)$$

Der Schwerpunkt einer Funktion in der Zeit und Frequenz liegt also an der Stelle $(\mu, \hat{\mu})$ und durch die Parameter σ und $\hat{\sigma}$ wird angegeben, wie stark die Funktion in Zeit und

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

Frequenz abweicht [2, S. 79f.].

Ein Problem der exakten Darstellung von Zeit und Frequenz ist die Existenz einer Unschärfe. Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt, dass es nicht möglich ist, sowohl die Zeit als auch die Frequenz einer Funktion exakt zu lokalisieren. Je genauer die Repräsentation zeitlich ist, desto ungenauer ist sie in der Frequenz und umgekehrt. Wie bei einem quantenmechanischen Teilchen nicht Ort und Impuls exakt bestimmt werden können, muss man also auch bei der Ermittlung von Zeit und Frequenz immer bestimmte Kompromisse in eine Richtung eingehen. Mathematisch lässt sich die Heisenbergsche Unschärferelation für $f \in L_2(\mathbb{R})$ so formulieren:

$$\sigma(f)\hat{\sigma}(f) \geq \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

Aus dieser Gleichung wird außerdem ersichtlich, dass die Varianz weder in der Zeit noch in der Frequenz Null sein kann. Der Bereich, in dem sich die Frequenz und die Zeit einer Funktion befindet, lässt sich recht anschaulich anhand der sogenannten *Heisenberg-Boxen* darstellen:

$$H(f) := [\mu(f) - \sigma(f), \mu(f) + \sigma(f)] \times [\hat{\mu}(f) - \hat{\sigma}(f), \hat{\mu}(f) + \hat{\sigma}(f)] \quad (2.7)$$

Dieses Rechteck gibt an, wie unscharf die Funktion in Zeit und Frequenz ist. Der Wert kann also sowohl in der Zeit als auch in der Frequenz vom Schwerpunkt um die Variation nach oben und unten abweichen. Abbildung 2.1.1 veranschaulicht diese Heisenberg-Boxen:

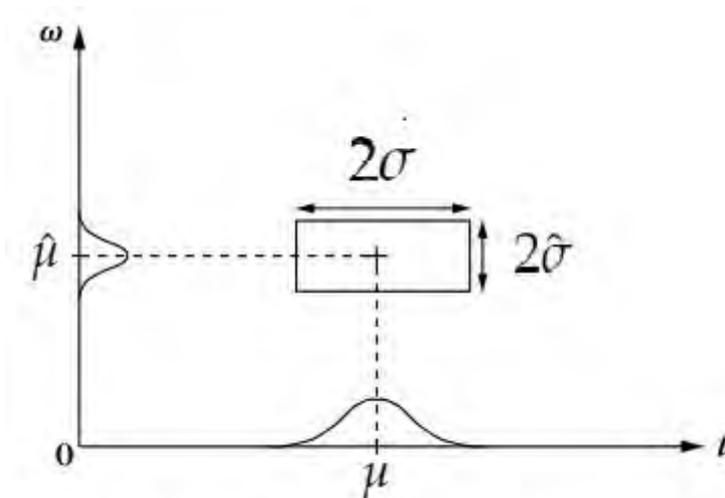


Abbildung 2.1: Heisenberg-Box [3, S.15]

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

2.1.2 Die gefensterte Fourier-Transformation (WFT)

Eine erste Möglichkeit für die Zeit-Frequenz-Analyse stellt die gefensterte Fourier-Transformation dar (englisch: *Windowed Fourier Transform*, kurz WFT). Mallat beschreibt in [3] die Eigenschaften der WFT. Für die WFT wird ein normiertes Zeitfenster $g(t)$ mit $\|g\| = 1$ mit Zentrum bei $t = 0$ in Zeit und Frequenz verschoben.

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u)e^{i\xi t}, \quad (u, \xi) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.8)$$

Das Atom $g_{u,\xi}$ wird in Zeit u und Frequenz ξ verschoben. Die Abweichung in Zeit und Frequenz von $g_{u,\xi}$ ist dabei unabhängig von u und ξ . Das bedeutet, dass die Heisenberg-Boxen unabhängig von ihrer Position die Fläche $\sigma_t \times \sigma_\omega$ besitzen.

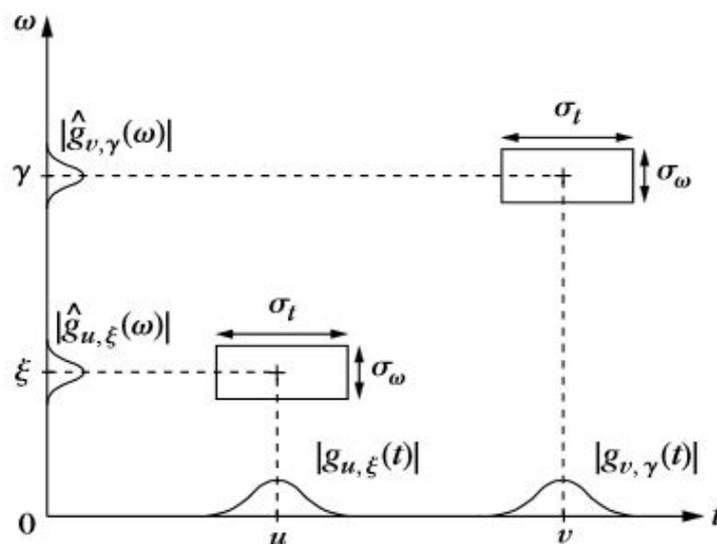


Abbildung 2.2: Die Heisenberg-Boxen der WFT [3, S. 16]

Die gefensterte Fourier-Transformation ist schließlich gegeben durch:

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t - u)e^{-i\xi t} dt \quad (2.9)$$

Diese gefensterte Fourier-Transformation ist hochredundant und stellt eindimensionale Signale in einem zweidimensionalen Zeit-Frequenz-Graphen dar. Es ist deswegen notwendig, gezielt einzelne Zeit-Frequenz-Koeffizienten auszuwählen, die das Signal gut repräsentieren [3, S.16]. Die WFT ist vor allem dann effektiv, wenn die Zeit-Frequenz-Auflösung des

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

Signals möglichst konstant ist. Wenn das Signal verschiedene Zeit-Frequenz-Auflösungen besitzt, einige mit sehr guter Frequenzlokalisierung, andere mit sehr genauer Zeitlokalisierung, bietet sich die *Wavelet-Transformation* an, da bei Wavelets die Zeit- und Frequenzauflösung unterschiedlich ist (siehe Kapitel 2.2). Die gefensterterte Fourier-Transformation wird oft auch als *Short-Time Fourier Transformation* (STFT) bezeichnet.

2.1.3 Die Gabor-Transformation

Eine spezielle Art der gefensterterten Fourier-Transformation ist die *Gabor-Transformation*, benannt nach dem Mathematiker Dennis Gabor. Als Fensterfunktion wird dabei eine beliebige Gauß-Funktion der Form

$$g_s(t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} e^{-t^2/4s} \quad (2.10)$$

mit einem fixem $s > 0$ verwendet. Die Gabor-Transformation mit den Parametern s und b ist für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ als

$$G_b^s f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g_s(t - b) e^{-i\omega t} dt \quad (2.11)$$

definiert. Die Fensterbreite hängt dabei lediglich von s ab und beträgt $2\sqrt{s}$ [4, S. 32ff.]. Bei der Gabor-Transformation fungiert also der Parameter b als Zeitvariable und gibt die Position des Fensters g_α an. Der Parameter ω steht für die Frequenz der Funktion und α bestimmt unmittelbar die Fensterbreite. Die Gabor-Transformation lässt sich weiterhin für alle Punkte $t \in \mathbb{R}$, in denen f kontinuierlich ist, mit folgender Formel umkehren:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G_b^s(f)(\omega) g_s(t - b) e^{i\omega t} db d\omega \quad (2.12)$$

2.2 Die Wavelet-Transformation

Die *Wavelet-Transformation* ist eine weitere Möglichkeit für die Zeit-Frequenz-Analyse von Signalen. Die allgemeine Bezeichnung *Wavelet* leitet sich aus der wellenartigen Struktur der meisten Wavelet-Funktionen ab (französische Bezeichnung *ondelette*). In den letzten Jahrzehnten ist die Popularität der Wavelets enorm gestiegen. Grund für die Entwicklung war wie so oft ein Anwendungsproblem, das mit den vorhandenen Mitteln nicht zufriedenstellend lösbar war. Um geophysikalische Daten zufriedenstellend analysieren zu können, machte sich die Wissenschaft daran, neue Analyseverfahren zu entwickeln. Ein Nachteil der Fourier-Transformation besteht im Fehlen einer Lokalisierungseigenschaft. Wenn sich ein Signal an einer Stelle ändert, so ändert sich die Fourier-Transformierte überall, ohne dass man durch bloßes Hinsehen die Stelle der Änderung finden kann. Zur Transformation werden immer periodisch schwingende trigonometrische Funktionen verwendet. Wavelets sind dagegen räumlich begrenzt, weswegen man durch Verschieben eine Lokalisierung und durch Stauchen oder Strecken eine bestimmte Frequenzauflösung an der entsprechenden Stelle erreichen kann [5, S. 3].

2.2.1 Grundsätzliches zur Wavelet-Transformation

Ein Wavelet ist eine mittelwertfreie Funktion, also eine Funktion $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ für die gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (2.13)$$

Eine Wavelet-Funktion ist zulässig, falls gilt [5, S. 18]:

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \right) d\omega < \infty \quad (2.14)$$

Die Wavelet-Transformierte einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ zum Wavelet ψ mit der Skala s und der Position u ist durch folgende Gleichung definiert:

$$Wf(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (2.15)$$

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

wobei $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, u \in \mathbb{R}$ [5, S. 16].

Grob formuliert wird das Wavelet mit der Form des Signals an einer bestimmten Stelle verglichen, wobei das Wavelet entweder verschoben oder gestaucht beziehungsweise gestreckt werden kann.

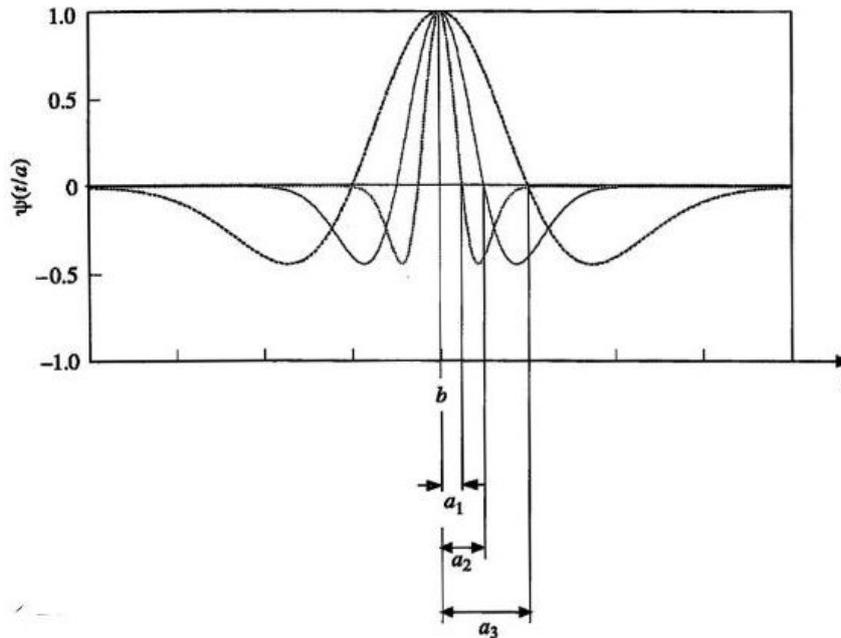


Abbildung 2.3: Streckung und Stauchung eines Wavelets [6, S. 11]

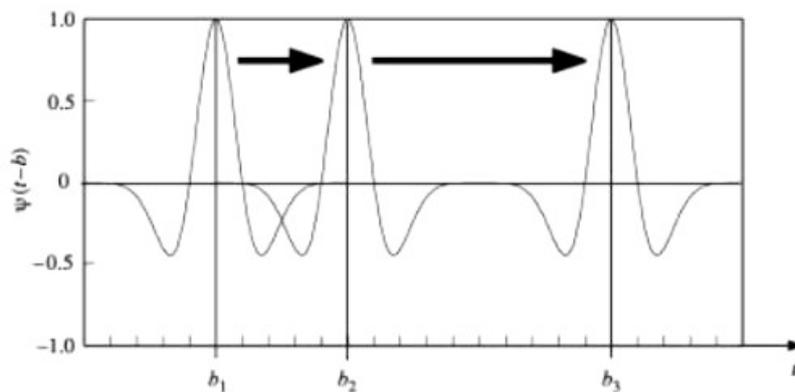


Abbildung 2.4: Verschiebung eines Wavelets [6, S. 11]

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

Stimmt die Form des Wavelets gut mit der Form des Signals überein, ergibt sich bei der Transformation ein hoher Wert. Wenn das Wavelet und das Signal nicht gut korrelieren, erhält man einen niedrigen Wert bei der Transformation. Die einzelnen Werte der Wavelet-Transformation werden schließlich in einem zweidimensionalen Diagramm eingetragen. Die X-Achse stellt dabei den Ort (beziehungsweise die Zeit) dar, während nach oben die Skalen aufgetragen sind. Die Transformation wird für verschiedene Orte und Skalen des Wavelets durchgeführt, sodass im Graph ein zweidimensionales Bild entsteht. Bei der kontinuierlichen Wavelet-Transformation (CWT) wird die Transformation, wie der Name andeutet, kontinuierlich durchgeführt während bei der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) ein diskreter Satz von Werten verwendet wird [6, S. 2]. Für zulässige Funktionen kann die Wavelet-Transformation invertiert werden, dabei wird folgende Formel verwendet:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (2.16)$$

Bei einem reellen Wavelet ψ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt folgende etwas einfachere Invertierungsformel:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (2.17)$$

Diese Umkehrformeln gelten allerdings nicht punktweise, sondern für den Hilbert-Raum L_2 [2, S. 85f.].

2.2.2 Zeit-Frequenz-Auflösung bei Wavelets

Auch bei den Wavelets existiert die Heisenbergsche-Unschärferelation. Es ist also auch hier unmöglich, sowohl die Frequenz als auch die Zeit beliebig genau zu bestimmen. Wie stark die Wavelet-Transformierte genau in Zeit und Frequenz verschmiert, hängt unmittelbar vom Wavelet selbst ab. In [3, S. 109f.] wird die Berechnung der Zeit-Frequenz-Auflösung beschrieben. Diese Regeln gelten auch für komplexe Wavelets, die oft auch als *analytische Wavelets* bezeichnet werden. Ein Wavelet ψ ist üblicherweise zentriert bei Null. Andernfalls kann man das Wavelet durch eine geeignete Verschiebung zentrieren. Dadurch ergibt sich auch die Zentrierung bei $t = u$. Die Varianz in der Zeit ergibt sich aus

$$\int_{\mathbb{R}} (t-u)^2 |\psi_{u,s}(t)|^2 dt = s^2 \sigma_t^2, \quad (2.18)$$

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

wobei $\sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\psi(t)|^2 dt$ ist. Der Schwerpunkt der Frequenz η von $\hat{\psi}(\omega)$ ist

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.19)$$

Da die Fouriertransformation von analytischen $\psi(\omega)$ bei negativen Frequenzen Null ist, muss hier nur von 0 bis ∞ integriert werden. Bei der Fouriertransformation von $\psi_{u,s}$ wird $\hat{\psi}$ lediglich um den Faktor $1/s$ gestreckt. Deswegen ergibt sich für den Schwerpunkt der Frequenz der Wert η/s .

Die Varianz in der Frequenz berechnet sich aus

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(\omega - \frac{\eta}{s}\right)^2 |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_\omega^2}{s^2}, \quad (2.20)$$

wobei

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\omega - \eta)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.21)$$

Das Zentrum der Heisenberg-Box zur Wavelet-Transformation ist also bei $(u, \eta/s)$. Die Seitenlängen sind $s\sigma_t$ und σ_ω/s . Somit ergibt sich folgende Heisenberg-Box:

$$[u - 0.5s\sigma_t, u + 0.5s\sigma_t] \times [\eta/s - 0.5\sigma_\omega/s, \eta/s + 0.5\sigma_\omega/s] \quad (2.22)$$

Durch die Multiplikation der beiden Seitenlängen des Rechtecks $s\sigma_t$ und σ_ω/s erhält man die Fläche $\sigma_t\sigma_\omega$. Wie man sehen kann, hängt die Fläche des Heisenberg-Rechtecks also nicht von der Skala s ab und ist stets konstant. Anders als beispielsweise bei gefensterten Fourier-Transformationen wie der Gabor-Transformation (siehe Abbildung in 2.1.2) hängen die jeweiligen Seitenlängen von der Skala s ab. Je kleiner s ist (also je höher die Frequenz ist), desto geringer ist die Frequenzauflösung und desto höher dagegen die Zeitauflösung. Für hohe Skalen beziehungsweise niedrige Frequenzen verhält sich die Auflösung genau umgekehrt, die Zeit besitzt eine große Unschärfe, während die Frequenz recht genau aufgelöst ist. Man spricht daher auch von *relativer* Zeit- und Frequenzauflösung, während bei der WFT mit festem Fenster eine *konstante* Zeit- und Frequenzauflösung erreicht wird [2, S. 88]. Folgende Abbildung aus [3, S. 110] visualisiert die unterschiedliche Form der Heisenberg-Boxen. Man sieht hier recht schön, welche Auswirkungen die Skala beziehungsweise die Frequenz ω auf die Zeit-Frequenz-Auflösung hat.

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

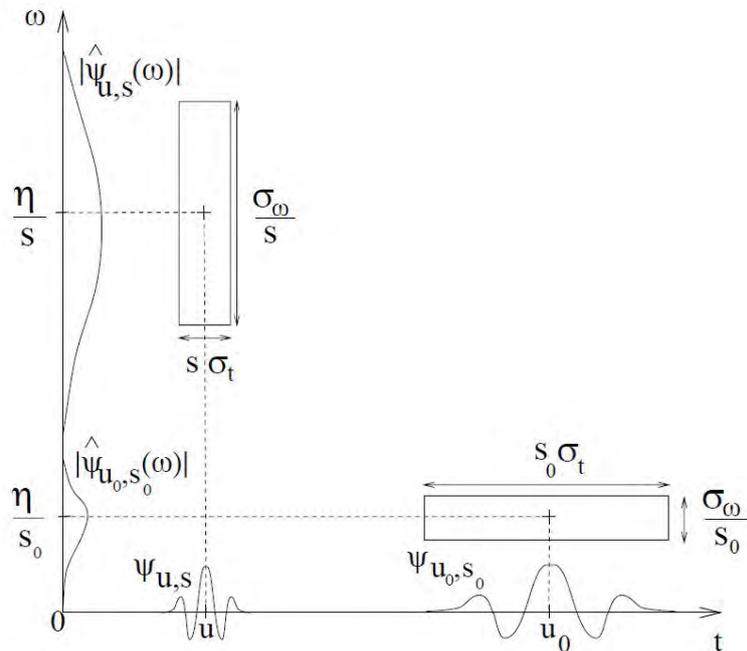


Abbildung 2.5: Heisenberg-Boxen bei Wavelets

2.2.3 Beispiele für Wavelets

Damit eine Funktion ein Wavelet ist, müssen lediglich die Voraussetzungen (2.13) und (2.14) gelten. Das Wavelet muss also mittelwertfrei sein und endliche Energie besitzen. Deswegen gibt es sehr viele Möglichkeiten und Beispiele für Wavelets. Ein sehr einfaches Beispiel für ein Wavelet stellt das sogenannte *Haar-Wavelet* dar. Es ist folgendermaßen definiert [5, S. 19]:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & : 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (2.23)$$

Wie man an der Funktion und auch am Graph erkennen kann, besitzt das Haar-Wavelet einen kompakten Träger.

2 Die Zeit-Frequenz-Analyse

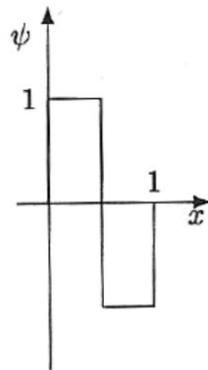


Abbildung 2.6: Haar-Wavelet [5, S. 20]

Viele Wavelet-Mutterfunktionen werden auch als Ableitungen von stetig differenzierbaren Funktionen generiert. Denn für die Zulässigkeit eines Wavelets $\phi \in L^2$ gilt folgendes [5, S. 19]:

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}) \text{ ist stetig differenzierbar} \Rightarrow \psi = \phi' \text{ ist zulässig} \quad (2.24)$$

Ein Wavelet dieser Art ist das sogenannte *Mexican Hat-Wavelet*. Hierfür wurde eine Gauß-Funktion zweimal abgeleitet, woraus sich folgende Gleichung für das Wavelet ergibt [5, S. 19]:

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} = (1 - x^2)e^{-x^2/2} \quad (2.25)$$

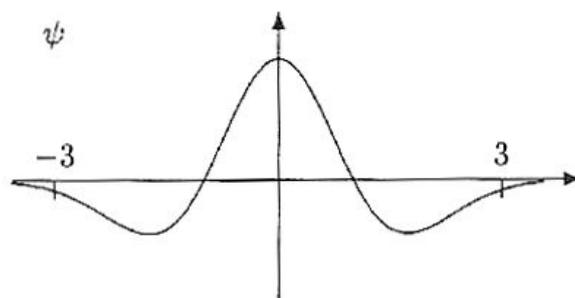


Abbildung 2.7: Mexican Hat-Wavelet [5, S. 20]

Am Bild sieht man deutlich, woher dieses Wavelet seinen Namen hat. Die Form erinnert an den typisch mexikanischen Sombrero.

2.2.4 Das komplexe Morlet-Wavelet - ideal für die Klanganalyse

Die beiden gerade genannte Beispiele sind reale Wavelets. Jedoch gibt es auch einige komplexe oder analytische Wavelets, mit denen man Betrag und Phase des Signals getrennt betrachten kann. Wie bereits erwähnt, ist die Fourier-Transformation bei diesen Wavelets für negative Frequenzen Null. Das Mexican Hat-Wavelet lässt sich beispielsweise sehr einfach zu einem komplexen Wavelet machen, indem man bei der Fourier-Transformierten die negativen Frequenzen auf Null setzt und dann die inverse Fourier-Transformation anwendet. Das meistverwendete komplexe Wavelet, das sich aus dem Mexican Hat-Wavelet ableitet, ist das sogenannte *Morlet-Wavelet*. In [6, S. 35ff.] beschreibt Addison die grundlegenden Eigenschaften des Morlet-Wavelets. Es ist als

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}(e^{i2\pi f_0 t} - e^{-(2\pi f_0)^2/2})e^{-t^2/2} \quad (2.26)$$

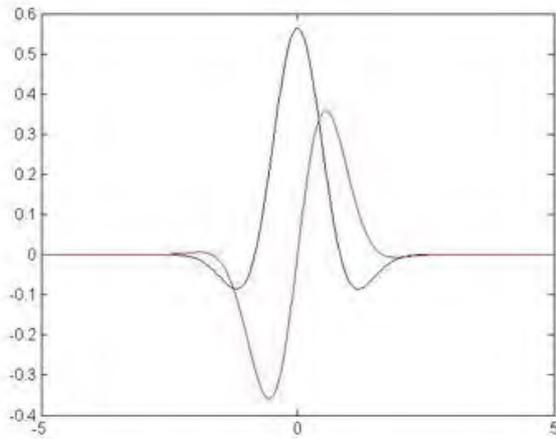
definiert, wobei f_0 die zentrale Frequenz dieses Mutter-Wavelets ist. Dieser Parameter kann angepasst werden, wodurch sich die Form und die Eigenschaften des Morlet-Wavelets verändern. Solange f_0 nicht sehr klein ist, lässt sich der Term $e^{-(2\pi f_0)^2/2}$ in der Gleichung vernachlässigen, da sein Wert dann aufgrund des Verhaltens der Exponentialfunktion nahe Null ist. Die Gleichung für das Morlet-Wavelet kann dann vereinfacht dargestellt werden:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4}e^{i2\pi f_0 t}e^{-t^2/2} \quad (2.27)$$

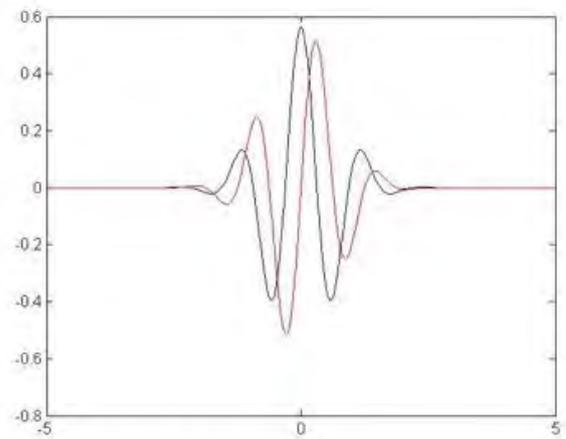
Der erste Faktor dieser Funktion ist für die Normalisierung verantwortlich, also dass $\|\psi\|_2 = 1$ gilt. In der Mitte der vereinfachten Gleichung steht die Gleichung für eine komplexe Sinuskurve, die auch als $\cos(2\pi f_0 t) + i \sin(2\pi f_0 t)$ geschrieben werden kann. Der dritte Faktor ist eine Gauß-Funktion mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1. Diese vereinfachte Gleichung ist natürlich nicht mittelwertfrei, wie es eigentlich von einem Wavelet gefordert wird. Der Fehler, der sich durch diese vereinfachte Gleichung ergibt, ist jedoch vor allem bei etwas größerem f_0 vernachlässigbar gering [6, S. 35]. In folgender Abbildung sind der Realteil (schwarz) und der Imaginärteil (rot) von Morlet-Wavelets mit verschiedenen Parametern zu sehen. Der Parameter s entspricht dabei der Streckung des Wavelets, während f_0 die zentrale Frequenz angibt. Um gestreckte, gestauchte und verschobene Morlet-Wavelets zu berechnen, wird t in der Gleichung durch $(t - u)/s$ ersetzt.

Man kann erkennen, dass der Imaginärteil um ein Viertel der Schwingungsdauer ver-

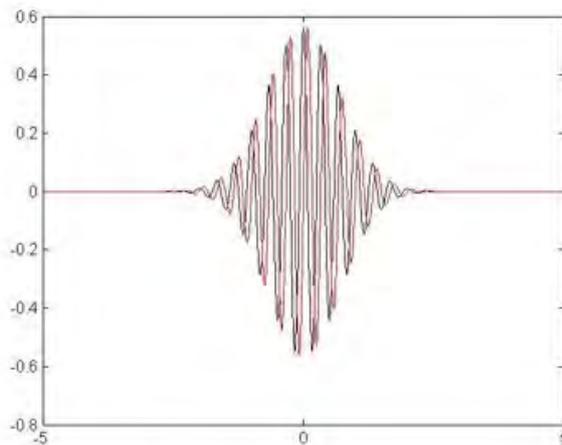
2 Die Zeit-Frequenz-Analyse



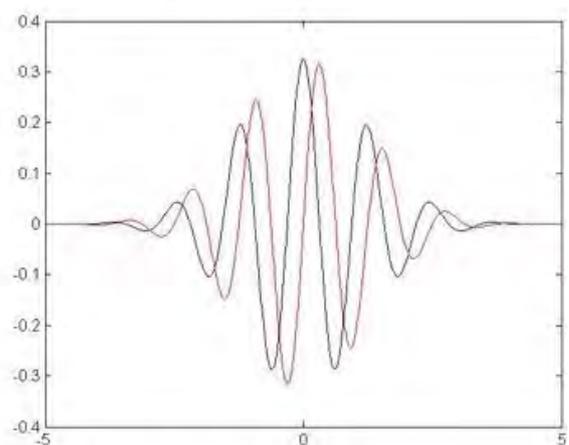
$s = 1; f_0 = 0.3$



$s = 1; f_0 = 0.8$



$s = 1; f_0 = 3$



$s = 3; f_0 = 0.8$

Abbildung 2.8: Morlet-Wavelets mit verschiedenen Parametern

schoben ist. Weiterhin kann man sehr gut sehen, welchen Einfluss die Parameter auf das Morlet-Wavelet haben. Die zentrale Frequenz f_0 der Sinusschwingung bestimmt, wie viele Schwingungen das Morlet-Wavelet besitzt. Mit steigendem f_0 nimmt natürlich die Anzahl der Schwingungen zu. Wenn man die Gleichung (2.27) betrachtet (mit $t = (t - u)/s$), stellt man schnell fest, dass der Parameter s die Standardabweichung der Gauß-Funktion ist. Mit dem Parameter s wird so das Morlet-Wavelet gestreckt oder gestaucht.

2 *Die Zeit-Frequenz-Analyse*

Beim Morlet-Wavelet wird eine komplexe Sinusfunktion mit einer Gaußfunktion multipliziert. Die Form des Morlet-Wavelets ähnelt stark einem abklingenden Sinuston, daher eignet es sich gut für die Analyse von Audiosignalen, wie sie auch durch Instrumente wie das Klavier erzeugt werden.

3 Das Klavier

Das Klavier ist eines der vielseitigsten und beliebtesten aller Instrumente. Für kein anderes Instrument wurde in allen Epochen eine solche Fülle an Literatur verfasst, von kleinen und großen Solostücken bis hin zu Klavierkonzerten, bei denen Klavierpassagen vom Orchester untermalt werden. Der Klavierbau ist dabei eine Kunst für sich und die Spannweite in Klang und Preis ist bei Klavieren enorm.

3.1 Die Funktionsweise und Klangerzeugung des Klaviers

In [7, S. 28ff.] beschreibt Kentner die Mechanik und die Klangerzeugung beim Klavier, wobei er sich immer wieder auf das bedeutsame Buch „The Act Of Touch In All Its Diversity - An Analysis And Synthesis Of Pianoforte Tone Production“ von Tobias Matthay aus dem Jahre 1903 bezieht. Um einen Ton erzeugen zu können, müssen immer Schwingungen generiert werden. Wie bei vielen anderen Instrumenten werden beim Klavier dazu Saiten zu Schwingungen angeregt. Anders als bei Zupfinstrumenten, wo die Saiten direkt gegriffen werden, werden beim Hammerklavier die Saiten mit einem Hammer angeschlagen. Dieser wird durch das Drücken einer Taste in Bewegung versetzt. Eine komplizierte Hebelmechanik überträgt die Bewegung von der Taste auf den Hammer und damit auf die Saite. Bei den meisten Streich- oder Zupfinstrumenten gibt es nur vier oder fünf Saiten. Mit den Fingern kann der schwingende Teil der Saiten verkürzt werden, dadurch wird der Ton höher. Beim Klavier gibt es für jeden Ton eine eigene Taste und einen zugehörigen Chor aus drei Saiten.

Trifft der Hammer auf den Saitenchor, wird dieser in Schwingung versetzt. Die Schwingungen werden durch den Resonanzboden des Klaviers verstärkt, breiten über die Luft aus und werden vom menschlichen Ohr wahrgenommen. Die Tonhöhe hängt dabei von der Frequenz der Schwingung ab, die Lautstärke ihrer „Stärke“. Wenn eine Saite in ihrer

3 Das Klavier

gesamten Länge schwingt und nur die beiden Endpunkte in Ruhe bleiben, entspricht das der Grundschiwingung, die für den Grundton verantwortlich ist. Eine Saite kann aber auch in mehreren Teilen schwingen, hierbei befinden sich im Lauf der schwingenden Saite ein oder mehrere Schwingungsknoten, die bei der Schwingung in Ruhe bleiben [8, S. 58f.]. Dadurch enthält ein Saitenton immer auch einzelne Obertöne, die aus den Oberschwingungen der Saite entstehen.

3.2 Die Entwicklung des Hammerklaviers

Wenn in der Barockzeit von einem Klavier die Rede war, meinte man üblicherweise ein Clavichord oder ein Cembalo. Mit diesen Vorformen des Klaviers, wie wir es heute kennen, war noch kein differenziertes Spiel bezüglich der Lautstärke möglich. In [8] beschreibt Herbert Junghanns die Entwicklung des Hammerklaviers. Der italienische Cembalobauer Bartolomeo Cristofori (1655-1731) hatte nicht als einziger das Bestreben, ein Instrument zu entwickeln, das eine dynamische Spielweise ermöglicht. 1709 gelang ihm schließlich mit der Erfindung der Hammermechanik eine bahnbrechende Erfindung. Cristofori bezeichnet das Wesentliche seiner Erfindung mit den Begriffen *piano e forte*, also laut und leise. Daraus entwickelte sich später *Pianoforte* als Bezeichnung für das neue Instrument. Die Entwicklung des Hammerklaviers wurde vor allem in Deutschland weiter vorangetrieben. Die ersten Jahrzehnte nach der Erfindung fand das Hammerklavier jedoch noch keinen recht großen Anklang, beispielsweise lehnten Komponisten wie Johann Sebastian Bach das Instrument ab. Deutsche Klavierbauer verhalfen jedoch dem Hammerklavier nach und nach zum Sieg über das bis dahin vorherrschende Cembalo [8, S. 28f.]. Christian Ernst Friederici veränderte Mitte des 18. Jahrhunderts die Form des Hammerklaviers und übernahm die Kastenform des Clavichords. Dadurch entstand das *Tafelklavier*, das von da an über 100 Jahre große Beliebtheit genoss [8, S. 30].

Die sogenannte „englische Mechanik“ verhalf dem Hammerklavier zu einem präziserem Anschlag, zu ausdrucksreicherem Spiel und zu höherer Lautstärke. Die Saiten wurden immer dicker und die Instrumente besaßen erstmals eine Flügelform, wie sie heute noch bei Konzertinstrumenten verwendet wird. Durch die dickeren und stärker gespannten Saiten veränderte sich auch die Klangfarbe der Instrumente. Die Hämmer wurden größer und schwerer und auch der Resonanzboden wurde verstärkt. Dadurch ging der Oberton-

3 Das Klavier

reichtum sehr zurück. Weiterhin wurde der Tonumfang erhöht, von vier Oktaven bei den ersten Hammerklavieren von Cristofori bis hin zu 85 Tönen im Jahr 1823 [8, S. 35f.]. Die Klavierfabrikanten Erard und Herz entwickelten in den folgenden Jahren die Hammermechanik weiter, die Erard-Herz-Mechanik findet sich auch in den modernen Flügeln wieder. Eine weitere heute noch gültige Neuerung war die Erfindung des *Pianinos*. Die Saiten wurden beim Pianino etwas verkürzt und aufrecht platziert. Diese Bauart wird auch heute noch bei den aufrecht stehenden Klavieren verwendet. Großer Vorteil war und ist die Platzersparnis durch die kompakte Bauweise. Das Pianino wurde recht schnell zum meistgebauten Klaviertyp. In den folgenden Jahren wurde viel mit den Materialien des Klaviers experimentiert, eine der wesentlichsten Neuerungen stellte die Befilzung der Hammerköpfe dar, die auch heute noch Verwendung findet [8, S. 37ff.]. Das Hammerklavier hat sich in seinen beiden Formen, dem Flügel mit waagrechter Positionierung der Saiten und dem aufrechtem Klavier, bis heute erhalten.

3.3 Die Klangeigenschaften des Klaviers

Bei Anschlagen der Taste eines Klaviers schlägt ein Hammer auf die zur Taste gehörenden Saiten. Dadurch werden Schwingungen erzeugt, die sich im Resonanzraum des Klaviers verstärken und schließlich für das menschliche Ohr hörbar werden. Dieses Prinzip der Tonerzeugung ist beim Flügel und beim Pianino identisch. Durch die veränderte Bauweise, die andere Form des Resonanzkörpers und die größere Länge der Saiten unterscheidet sich der Klangeindruck eines Flügels von der eines Pianinos. Für Konzerte und Tonaufnahmen wird fast ausschließlich der Flügel verwendet, die Klangqualität eines Pianinos kann mit der eines Konzertflügels nicht mithalten. Auch innerhalb der beiden Bauformen gibt es zwischen verschiedenen Modellen teilweise erhebliche Unterschiede im Klang.

Töne sind in ihrer Reinform Sinusschwingungen einer bestimmten Frequenz. Der Kamerton a besitzt beispielsweise eine Frequenz von 440 Hz. Wenn eine Taste eines Klaviers angeschlagen wird, wird jedoch keineswegs nur ein reiner Ton der jeweiligen Tonhöhe erzeugt. Der erzeugte Klang ist immer eine Mischung aus dem Grundton, der dem gewünschten Ton der angeschlagenen Taste entspricht, und einer Anzahl von Obertönen. Die Frequenzen der verschiedenen Obertöne, die mit dem Grundton auch Teil- oder Partialtöne genannt werden, sind immer ganzzahlige Vielfache des Grundtons. Anzahl, Verteilung

3 Das Klavier

und Stärke der einzelnen Obertöne bestimmen die Klangfarbe eines Instruments [8, S. 51]. Diese Klangfarbe variiert zwischen verschiedenartigen Instrumenten, jedoch besitzen auch einzelne Klaviermodelle unterschiedliche Klangfarben.

Bei einem Klavier besitzt jede Note ein eigenes Spektrum. Wenn man beim selben Instrument das Obertonverhalten verschiedener Noten untersucht, stellt man fest, dass sich die Ausprägung der einzelnen Partialtöne unterscheidet. Den Gesamtklang eines Klaviers durch das Klangspektrum zu definieren, ist demzufolge schwierig, da die 88 Tasten jeweils ein unterschiedliches Obertonverhalten besitzen [8, S. 99].

Allerdings lassen sich ein paar Grundcharakteristika des Klavierklangs herausstellen, die das Klavier von anderen Instrumenten wie der Trompete, der Violine oder der Flöte unterscheidet. Beim Klavier entwickeln sich gleich nach dem Anschlag alle, oder fast alle Partialtöne. Diese werden vom Geräusch des Hammerschlags begleitet, der vor allem die tieferen Partialtöne beeinflusst. Bei der Flöte werden beispielsweise viel weniger Obertöne erzeugt, die auch nicht simultan starten und enden. Weiterhin sorgt der Hauch des Flötisten, der durch das Anblasen entsteht, für den charakteristischen Klang der Flöte. Insgesamt bestimmen also vor allem der Anschlag, der Ausklang der Töne und das Verhalten der Obertöne die Klangfarbe eines Instruments [8, S. 100].

3.4 Die Stimmung eines Klaviers

Ein wesentlicher Faktor für den Klang und die Tonqualität eines Klaviers ist die Stimmung. Selbst Musikklaier können ein deutlich verstimmtes Klavier recht schnell erkennen. Bei einer Oktave verdoppelt sich arithmetisch gesehen jeweils die Frequenz der Töne, während also der Kammerton a^1 mit 440 Hz schwingt, besitzt der Ton a^2 die Frequenz 880 Hz. Das Schwingungsverhältnis von sieben Oktaven ist also 2^7 . Diese sieben Oktaven entsprechen genau zwölf Quinten. Eine reine Quinte besitzt ein Schwingungsverhältnis von 3:2, wenn also man vom Kammerton a^1 eine reine Quinte nach unten geht, erhält man den Ton d^1 mit $293 \frac{1}{3}$ Hz. Zwölf reine Quinten besitzen das Schwingungsverhältnis von $(3 : 2)^{12}$. Mit etwa 129,75 ist dieses Frequenzverhältnis aber etwas höher als 2^7 , was 128 ergibt. Geht man also vom tiefen C eines Klaviers in zwölf reinen Quinten nach oben, erhält man einen Ton mit einer leicht höheren Frequenz als bei sieben Oktavsritten. Diese Differenz wird auch „Pythagoreisches Komma“ genannt und beträgt etwas weniger als ein Viertel eines Halbtons [7, S. 39]. Dadurch ist es also unmöglich, ein Klavier so zu stimmen,

3 Das Klavier

dass alle Intervalle das exakte Frequenzverhältnis besitzen. Die Ungenauigkeiten, die sich aus dem *Pythagoreischem Komma* ergeben, müssen nun irgendwie verteilt werden. Dazu gibt es verschiedene Ansätze. Früher wurden viele Klaviere *wohltemperiert* gestimmt. Bei dieser Stimmung werden die Ungenauigkeiten bei einzelnen Intervallen nicht gleichmäßig verteilt, je nach Tonlage weichen die Intervalle mehr oder weniger der reinen Stimmung ab. Dadurch ergeben sich aus der Stimmung bestimmte Charakteristika einzelner Tonarten. Heutzutage ist die *gleichstufige Stimmung* am gebräuchlichsten. Hier werden die einzelnen Intervalle über den gesamten Tonumfang des Klaviers gleich gestimmt. Somit sind auch alle Tonarten gleich genau beziehungsweise ungenau. Eine Oktave wird hier der Theorie nach in zwölf gleich große Halbtonschritte unterteilt, die jeweils das Frequenzverhältnis von $\sqrt[12]{2}$ besitzen. Die Oktaven sind die einzige Intervalle, die exakt gestimmt werden. In der Praxis ist die gleichstufige Stimmung allerdings nicht so einfach, da unser Gehör nicht linear ist. Tiefe Töne hören wir etwas höher, auf der anderen Seite klingt für das menschliche Gehör ein Ton mit 3000 Hz tiefer als die Oktave von 1500 Hz [8, S. 98]. Wegen der Inharmonizität der Saite sind außerdem auch die Obertöne bei einzelnen Tönen eines Klaviers leicht verschoben. Beispielsweise ist der 4. Teilton nicht die Doppeloktave des Grundtons, sondern klingt etwas höher als diese. Die Abweichung richtet sich dabei nach den Beschaffenheiten der Saite [7, S. 98f.]. Aufgrund dieser Tatsachen lässt sich ein Klavier auch bei der *gleichstufigen Stimmung* nicht ausschließlich mit elektronischen Hilfsmitteln wie einem Stimmgerät stimmen. Damit das Instrument für das menschliche Ohr angenehm klingt, muss es auch immer nach Gehör gestimmt werden.

Insgesamt tragen eine Vielzahl von Faktoren zum Klang eines Klaviers bei. Die Länge und Beschaffenheit der Saiten, das Außenmaterial des Klaviers, Form und Material des Resonanzraums sowie die Stimmung des Instruments sind für den Klang eines Instruments verantwortlich. Auch die Raumakustik hat einen nicht unerheblichen Einfluss auf den Klangeindruck, der entsteht. Da beim Klavierbau noch sehr viel Handarbeit im Spiel ist, besitzt jedes Instrument einen einzigartigen Charakter.

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

Im folgenden Kapitel sollen nun die Verfahren zur Frequenz- beziehungsweise Zeit-Frequenz-Analyse auf verschiedene Aufnahmen von Klavieren angewendet werden. Dazu wurden das Aufnahmegerät *Tascam DP-01 Digital Portastudio* zusammen mit einem externen Mikrofon verwendet. Die aufgenommenen Signale wurden anschließend mit *Audacity* geschnitten und angepasst. Mit dem Programm *Octave* und geeignetem Programmcode wurden die Aufnahmen anschließend verschiedenen Fourier- und Wavelettransformationen unterzogen.

4.1 Fourier-Transformationen zu verschiedenen Aufnahmen

Zuerst wollen wir uns die *FFT* zu einigen Klavieraufnahmen ansehen. Bei der *FFT* (*Fast Fourier Transform*) handelt es sich um eine schnelle Berechnungsmethode zur *Diskreten Fouriertransformation* (*DFT*). Gerade bei Tonaufnahmen macht es wenig Sinn, eine kontinuierliche Fouriertransformation zu verwenden, da die zu bearbeitenden und transformierenden Datenmengen dabei zu hoch wären. Bei der *DFT* wird das Signal an bestimmten diskreten Punkten ausgewertet. Wie viele das sind, hängt von der Abtastrate ab. Bei unserer Analyse wurde stets mit einer Abtastrate von 44100 Hz gearbeitet, also liegen pro Sekunde 44100 Abtast- beziehungsweise Messpunkte vor. Wie bereits erwähnt lassen sich mit der „normalen“ Fouriertransformation nur die Anteile der Frequenzen am Ton herausfinden, über den zeitlichen Verlauf lassen sich keine Aussagen treffen. In der folgenden Abbildung ist das Frequenzspektrum des Kammertons a^1 aus einer Aufnahme des Konzertflügels *Bösendorfer 290 Imperial* zu sehen:

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

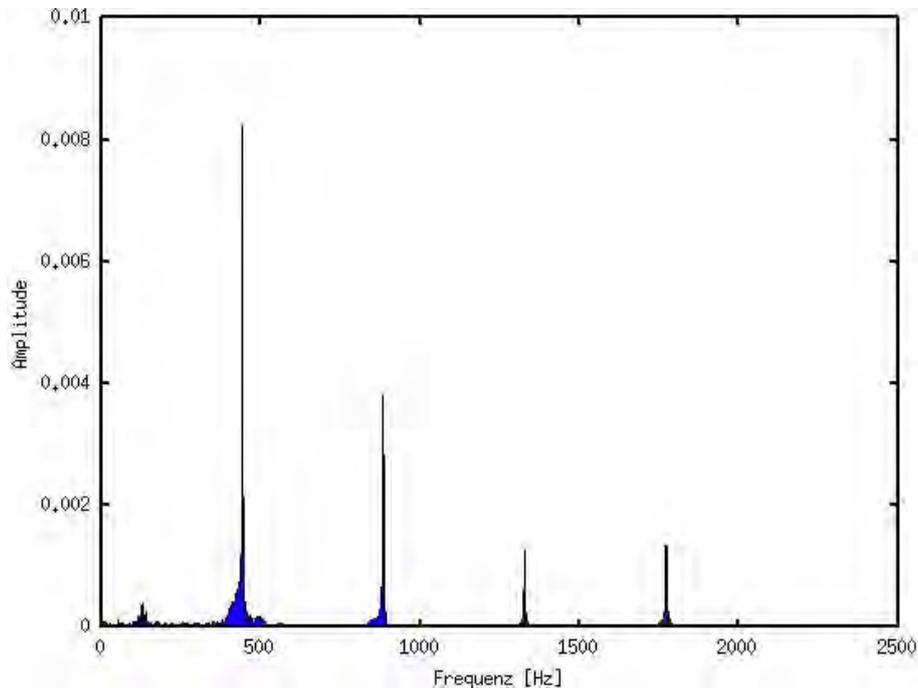


Abbildung 4.1: Frequenzspektrum zum Kammerton *a*

Der Ton wird klar ersichtlich vom Grundton *a* mit der Frequenz 440 Hz dominiert. In der Abbildung sind auch die ersten drei Obertöne zu sehen, der erste Oberton ist das a^2 mit 880 Hz, also eine Oktave höher. Interessant zu beobachten ist, dass der dritte Oberton a^3 mit der Frequenz 1760 Hz etwas dominanter ist als der zweite Oberton, der mit 1320 Hz etwas über dem e^3 bei der gleichstufigen Stimmung liegt. In der Abbildung lässt sich auch eine kleine Spitze im niederfrequenten Bereich erkennen, diese lässt sich durch den Geräuschanteil beim Anschlagen der Taste erklären. Interessant ist auch die FFT zur Aufnahme eines C-Dur-Dreiklangs in Abbildung 4.2. Die drei Grundtöne des Dreiklangs, a^1, cis^2, e^2 mit den Frequenzen 440 Hz, 554,37 Hz und 659,26 Hz ¹, besitzen natürlich die größte Amplitude. Dass die Spitzen eine unterschiedliche Höhe besitzen, liegt vor allem an ungleichmäßigen Anschlagen des Dreiklangs mit der rechten Hand. Der Daumen betätigt die Taste als stärkster Finger meistens etwas fester. Im Klavierunterricht wird außerdem gelehrt, der Oberstimme besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Deshalb reicht auch der Ton e^1 von der Intensität fast an den untersten Dreiklangton heran, da ich wie die meisten Klavierspieler die Betonung der Oberstimme trotz eventuell schwächeren Fingern bereits verinnerlicht habe. Die Spitzen der ersten Obertöne lassen sich noch schön

¹ Die Frequenzen zur gleichstufigen Stimmung stammen von <http://pianotip.de/frequenz.htm>, aufgerufen am 25.09.2013

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

den Grundtönen aus dem Dreiklang zuordnen. Bei den Ausschlägen rechts von 1500 Hz wird es dann allerdings schwieriger, die einzelnen Spitzen durch bloßes Hinsehen den Grundtönen zuzuordnen.

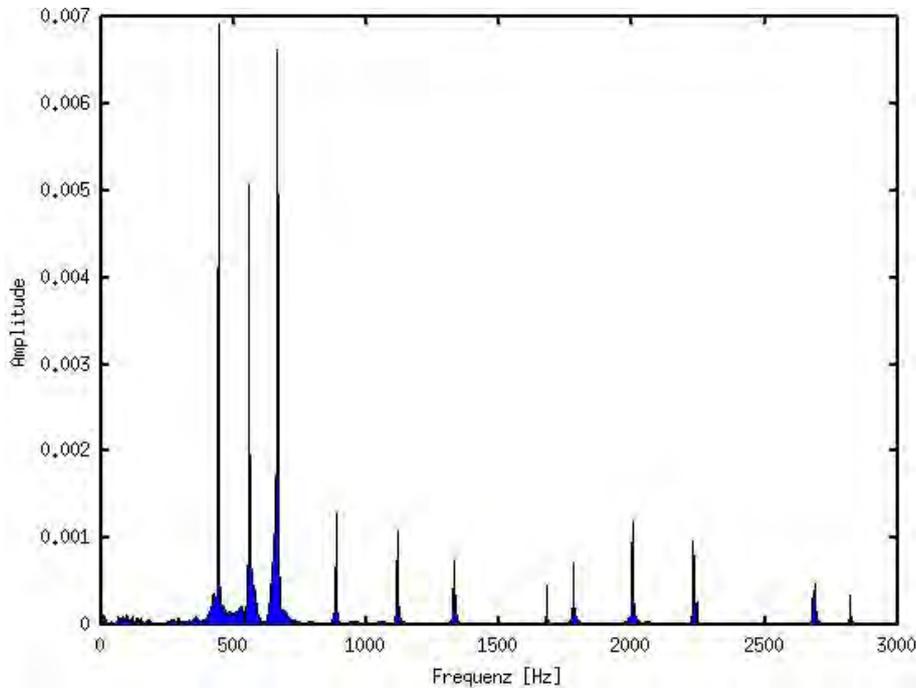


Abbildung 4.2: Frequenzspektrum bei einem A-Dur-Dreiklang

Bei gleichzeitig angeschlagenen Tönen oder wie im ersten Beispiel einem einzelnen Ton ist die FFT durchaus ein geeignetes Hilfsmittel, um sich die Frequenzverteilung anzusehen. Bei Aufnahmen von Tönen, die sich verändern, ist die FFT, wie in Kapitel 2 erläutert, kein ideales Verfahren mehr. Die Abbildung 4.3 stellt die FFT zu einer simplen Melodie dar. Bei der dazugehörigen Aufnahme wurden die ersten fünf Töne der C-Dur-Tonleiter (von c^1 bis g^1) auf- und abwärts gespielt. Grund- und Obertöne zu erkennen ist hier deutlich schwieriger, was natürlich an den fünf verschiedenen Tönen liegt. Beim Dreiklang konnte man dagegen noch mit etwas Mühe die Grundtöne erkennen und einige Obertöne zuordnen. Über den zeitlichen Verlauf der einzelnen Töne lässt sich methodisch bedingt sowieso keine Aussage treffen.

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

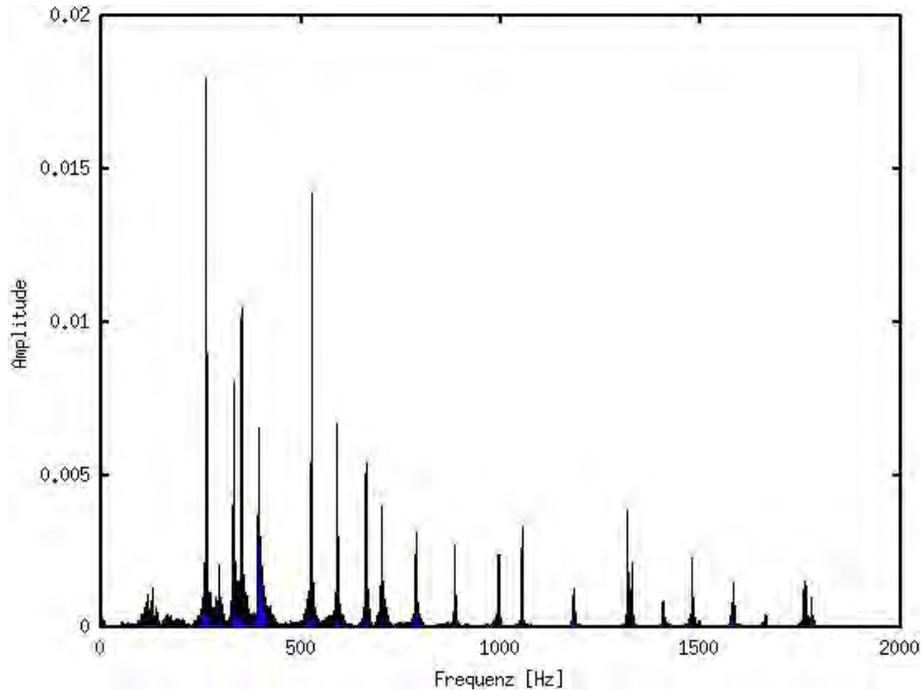


Abbildung 4.3: FFT zu einer simplen Melodie

Insgesamt eignet sich die FFT vor allem dazu, bei einzelnen Tönen eines Instruments die Partialtöne darzustellen. Sobald sich die Töne zeitlich verändern, bieten sich weitere Verfahren zur Zeit-Frequenz-Analyse an.

4.2 Wavelet-Analyse zu Klavieraufnahmen

Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben, ist die Wavelet-Transformation ein ideales Hilfsmittel, um Zeit-Frequenz-Verläufe von Signalen zu analysieren. Bei akustischen Signalen wie Klängen und Tönen ist das *Morlet-Wavelet* ideal, da es den abklingenden Sinusschwingungen eines Tons sehr ähnlich ist. In den folgenden Abschnitten werden die Morlet-Wavelet-Transformationen verschiedener Signale untersucht.

4.2.1 Der Kammerton a bei verschiedenen Klavieren

Bereits am Zeit-Frequenz-Verhalten des Tons a^1 mit der Frequenz 440 Hz lassen sich einige Aussagen über den Klang des Klaviers treffen.

Für die Wavelet-Transformation von Abbildung 4.4 wurde dieselbe Aufnahme des Kammertons a wie in Abbildung 4.1 verwendet. Der Ton stammt vom Konzertflügel Bösendorfer Imperial 290. Nach rechts ist die Zeit aufgetragen, bei einer Abtastrate von 44100 Hz sind also knapp zwei Sekunden dargestellt. Nach oben sind die Skalen aufgetragen, die sich indirekt proportional zu den Frequenzen verhalten. In dieser und in allen folgenden Abbildungen zur Wavelet-Transformation ist der logarithmische Absolutbetrag dargestellt. Mit der unteren waagrechten Linie ist die Skala zum Ton a^1 markiert. In der FFT zur Aufnahme war bereits ersichtlich, dass natürlich der Grundton der dominanteste Ton im Klang ist. Der erste Oberton a^2 mit einer Frequenz von 880 Hz befindet sich an der oberen waagrechten Linie bei einem Skalenwert von 88. Die weiteren Obertöne sind nur noch schwach ausgeprägt.

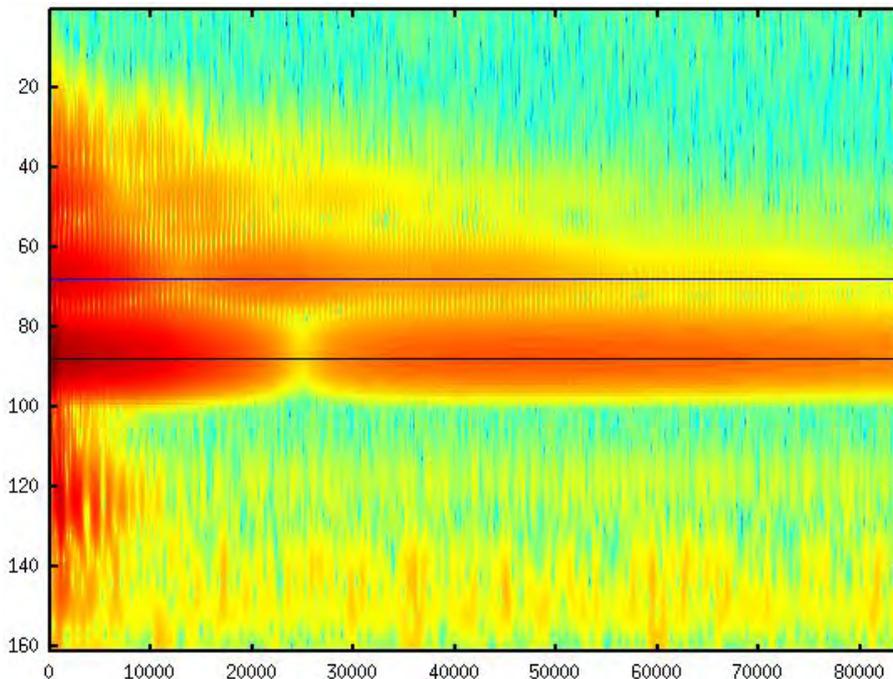


Abbildung 4.4: Wavelet-Transformation zum Kammerton a

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

Die große Stärke der Wavelet-Analyse zeigt sich, wenn man das Verhalten des Grundtons betrachtet. Nach etwa 25000 Abtasteinheiten wird der Ton kurz leise, um anschließend wieder lauter zu werden. Dieses Verhalten wird Schwebung genannt. Schwebungen entstehen, wenn die drei Saiten vom Saitenchor einer Taste nicht ganz gleich gestimmt werden, sondern eine leichte Differenz aufweisen. Die Differenz der Frequenz der Saiten entspricht dabei der Frequenz der Schwebung. Am Bild kann man erkennen, dass die Schwebung länger als eine Sekunde dauert und deshalb die einzelnen Saiten zum a^1 eine Differenz von weniger als einem Herz besitzen. Diese Schwebungen lassen sich in der FFT zum Signal nicht erkennen, da keine Aussagen über den zeitlichen Verlauf der Töne möglich sind. Weiterhin kann man beobachten, dass die Obertöne deutlich schneller abklingen als der Grundton. Die niederfrequenten Anteile des Klangs, die bereits in der FFT ersichtlich wurden, sind auch bei der Wavelet-Darstellung recht deutlich zu sehen. Bei der Wavelet-Transformation wird aber klar, dass diese Geräuschanteile des Klangs nicht etwa sehr leise, sondern einfach nur sehr kurz auftreten. Nach einer Achtelsekunde ist der größte Teil des Geräuschs wieder abgeklungen. Abbildung 4.5 zeigt die Aufnahme des Kammertons a beim Einsteiger-Flügel Kawai GE-30:

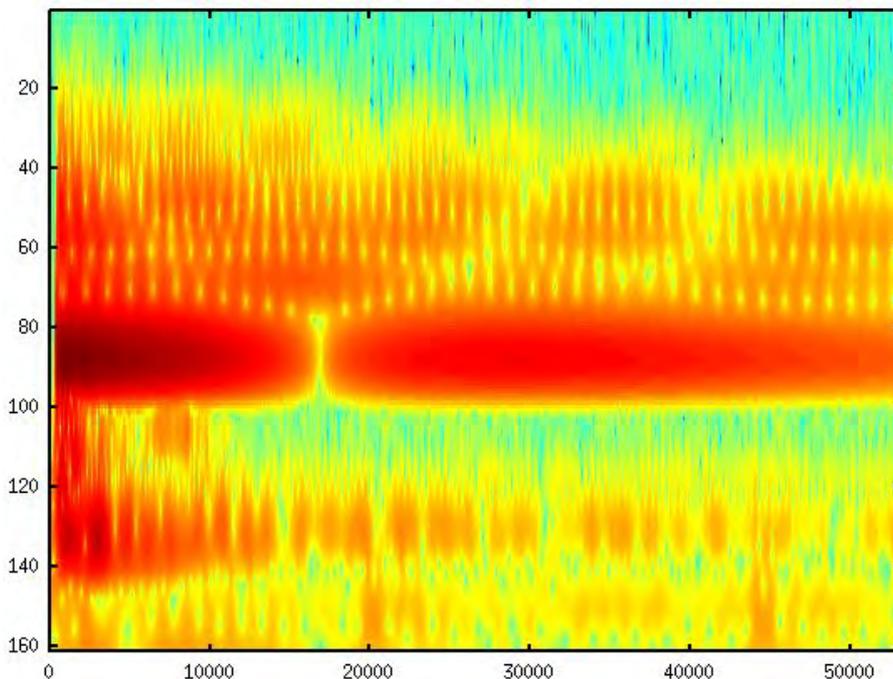


Abbildung 4.5: Kammerton a beim Kawai GE-30

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

Auf den ersten Blick sieht man bei diesem Bild, dass die Obertöne lange nicht so klar definiert sind wie beim Konzertflügel von Bösendorfer. Bei der Aufnahme des Bösendorfer-Flügels ist vor allem der erste Oberton recht klar und „flackert“ nicht so stark wie beim Flügel von Kawai. Dies liegt vor allem an Material und Qualität des Resonanzbodens. Der Bösendorfer-Flügel ist 2,90 Meter lang und es wurde alles daran gesetzt, den Klang möglichst rein und klar zu gestalten. Beim deutlich kleineren und günstiger produzierten Flügel von Kawai schafft es der Resonanzboden vor allem bei den Obertönen nicht, die Schallwellen perfekt aufzunehmen und zu verstärken. Auch der niederfrequente Geräuschanteil hält beim Instrument von Kawai länger an, da die Aufnahme allerdings insgesamt etwas kürzer ist und dementsprechend weniger Abtastpunkte auf gleicher Breite aufgetragen werden, sollte man sich aber hier vom optischen Eindruck nicht täuschen lassen. Auch bei Abbildung 4.5 lässt sich deutlich die Schwebung beim Grundton erkennen.

Interessant ist die Aufnahme des Tons a^1 beim Digitalpiano Kawai CN33 in der Abbildung 4.6:

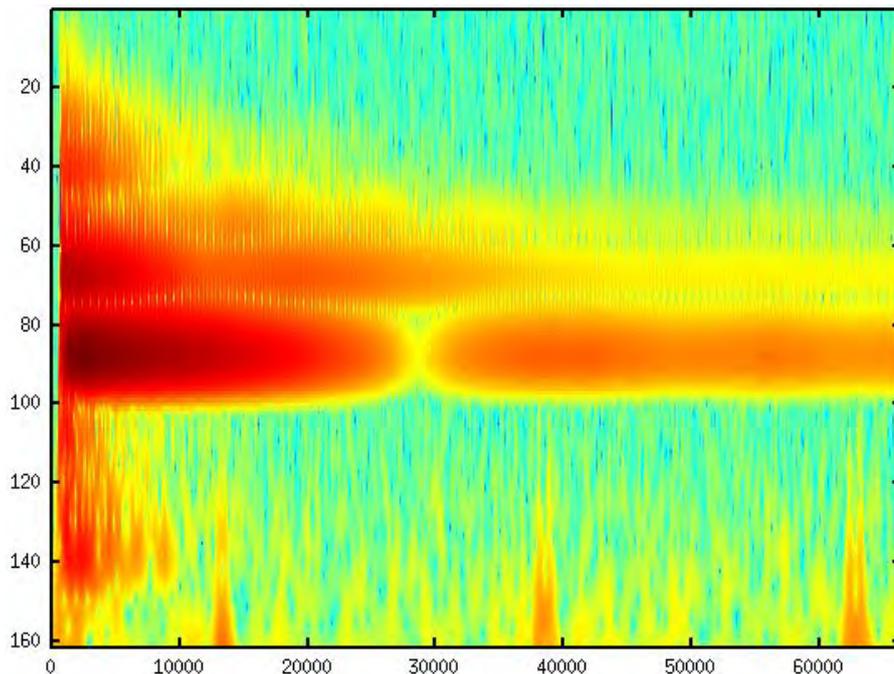


Abbildung 4.6: a^1 beim Digitalpiano Kawai CN33

Während alle anderen Aufnahmen mit einem externen Mikrofon gemacht wurden, wurde bei dieser Aufnahme das digitale Piano direkt angeschlossen. Für die Töne des Kawai

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

CN33 wurden von einem Konzertflügel von Kawai alle Töne einzeln aufgenommen, analysiert und gesampelt [9]. Dadurch soll der Klang der Tasten beim Digitalpiano möglichst nahe an den des Flügels herankommen. In der Abbildung 4.7 werden die Wavelet-Analysen der Aufnahmen vom Bösendorfer Konzertflügel und dem Digitalpiano von Kawai gegenübergestellt. Beim Vergleich lässt sich erkennen, dass das Zeit-Frequenz-Verhalten beim Ton a^1 bei den beiden Aufnahmen ziemlich ähnlich ist. Das Zeit-Frequenz-Verhalten beim Digitalpiano ist also recht ähnlich wie bei einem Konzertflügel, da für das E-Piano ein recht ausgereiftes und fortschrittliches Sampling der Töne durchgeführt wurde.

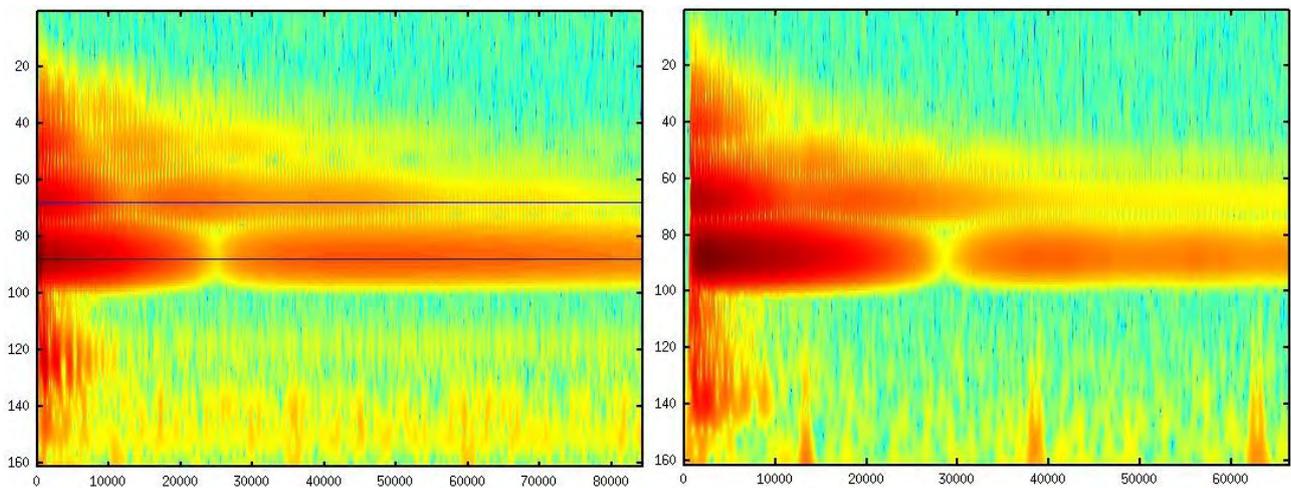


Abbildung 4.7: Vergleich Konzertflügel (links) mit Digitalpiano (rechts)

In Abbildung 4.8 ist erneut die Wavelet-Transformation des Kammertons a des digitalen Pianos Kawai CN33 zu sehen. Hier wurde der Klang nicht direkt aufgenommen, sondern über die eingebauten Lautsprecher mit einem Mikrophon. Die Klangqualität wird bei einem Digitalpiano oftmals von den Lautsprechern limitiert. Während bei einem Konzertflügel ein fast drei Meter langer Resonanzboden zur Verfügung steht, besitzt das Kawai CN33 zwei Lautsprecher mit je 16 Watt [9], durch den der Klang hörbar gemacht wird. Das Klangbild des Tons rückt bei dieser Aufnahme wieder etwas vom Konzertflügel-Klang weg. Die auffälligste Änderung ist das Fehlen der charakteristischen Schwebung beim Grundton.

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

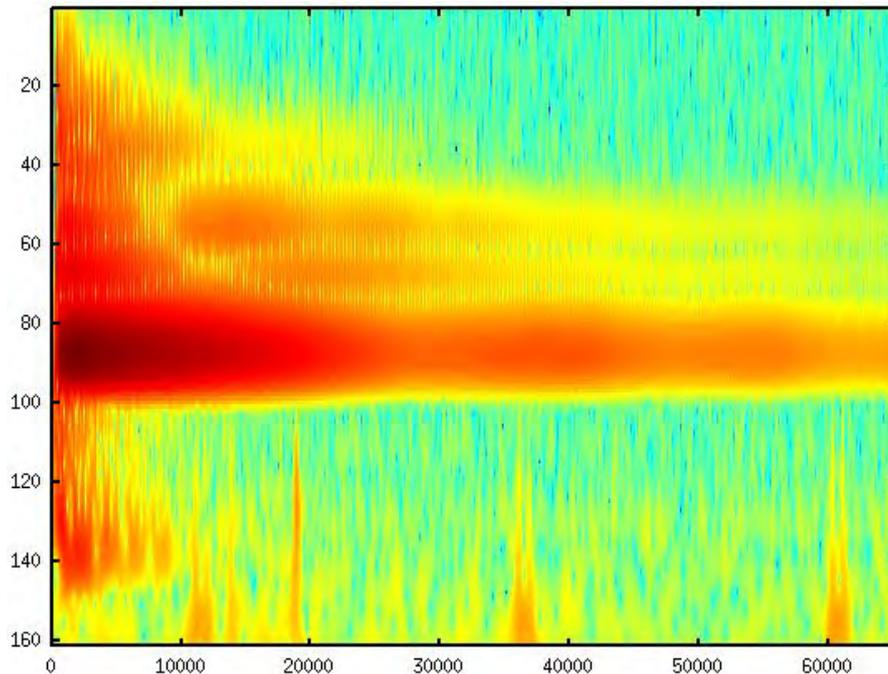


Abbildung 4.8: Mikrofonaufnahme des Kawai CN33

Auch das Obertonverhalten ist bei der Mikrofonaufnahme verändert, vor allem beim ersten Oberton, der hier unklarer und weniger ausgeprägt ist. Durch den Einsatz von hochwertigen Lautsprechern lässt sich der Klang eines Digitalpianos deutlich verbessern, die Akustik eines guten Flügels wird aber auch hiermit vermutlich nicht so schnell erreicht. Insgesamt lassen sich schon durch die Zeit-Frequenz-Analyse eines Tons interessante Erkenntnisse gewinnen. Der Konzertflügel von Bösendorfer besitzt einen klaren Klang mit markanten Obertönen. Das Einsteigermodell von Kawai hat beim Ton a^1 bereits ein etwas anderes Zeit-Frequenz-Verhalten. Bei einem einzelnen Ton ahmt ein Digitalpiano den Klang eines Konzertflügels bereits recht gut nach, die guten Klangeigenschaften gehen aber durch den eingebauten Lautsprecher etwas verloren.

4.3 Das Zeit-Frequenz-Verhalten bei der Aufnahme von Dreiklängen

Im Folgenden wird das Zeit-Frequenz-Verhalten von Dreiklängen mit dem Morlet-Wavelet analysiert. In Kapitel 4.1 wurde die Frequenzverteilung eines A-Dur-Dreiklangs mithilfe der FFT betrachtet, die Morlet-Wavelet-Transformation stellt auch den zeitlichen Verlauf der Frequenzen dar.

Abbildung 4.9 zeigt die Wavelet-Transformation eines A-Dur-Dreiklangs aus den Tönen a^1 , cis^2 und e^2 vom Salonkonzertflügel Steingraeber & Söhne C 212-N.

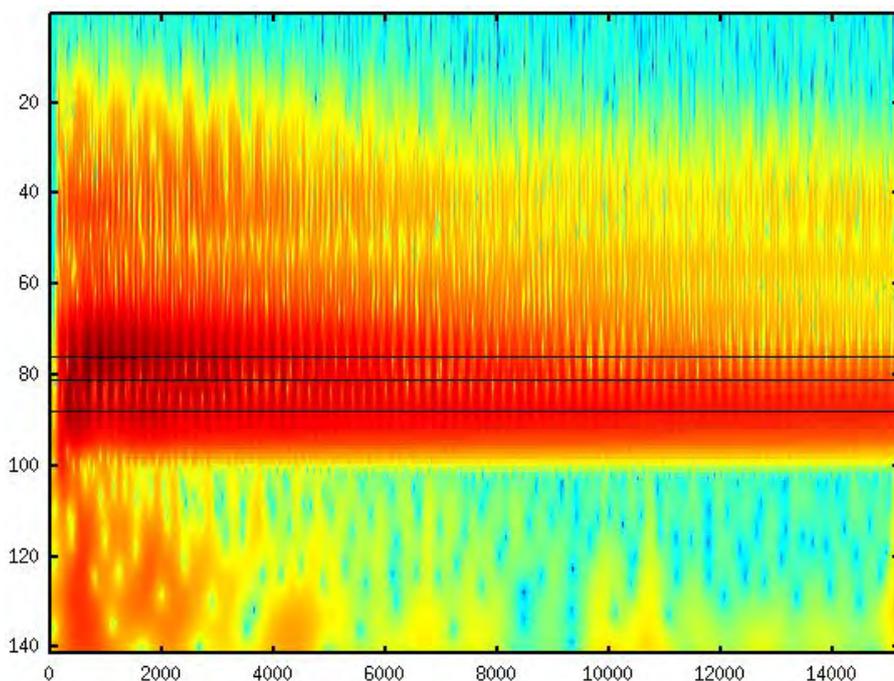


Abbildung 4.9: A-Dur-Dreiklang beim Flügel von Steingraeber & Söhne

Die Grundtöne des Dreiklangs sind hier mit den drei schwarzen Linien gekennzeichnet. Anhand dieser Darstellung lässt sich erkennen, dass der obere Ton des Dreiklangs zwar am Anfang recht dominant ist, aber etwas schneller abklingt als die tieferen Töne. Bei dieser Darstellung ist es etwas schwer, einzelne Töne und Obertöne zu erkennen. Hier sieht man recht schön das Problem, das sich aus der Heisenbergschen Unschärferelation ergibt. In der Darstellung lassen sich die einzelnen Töne kaum trennen, da die Frequenzen der Dreiklangtöne und auch deren Obertöne relativ eng zusammen liegen. Lediglich die

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

ungefähre Position der Grundtöne lässt sich durch die dunkelroten Stellen zu Beginn erahnen.

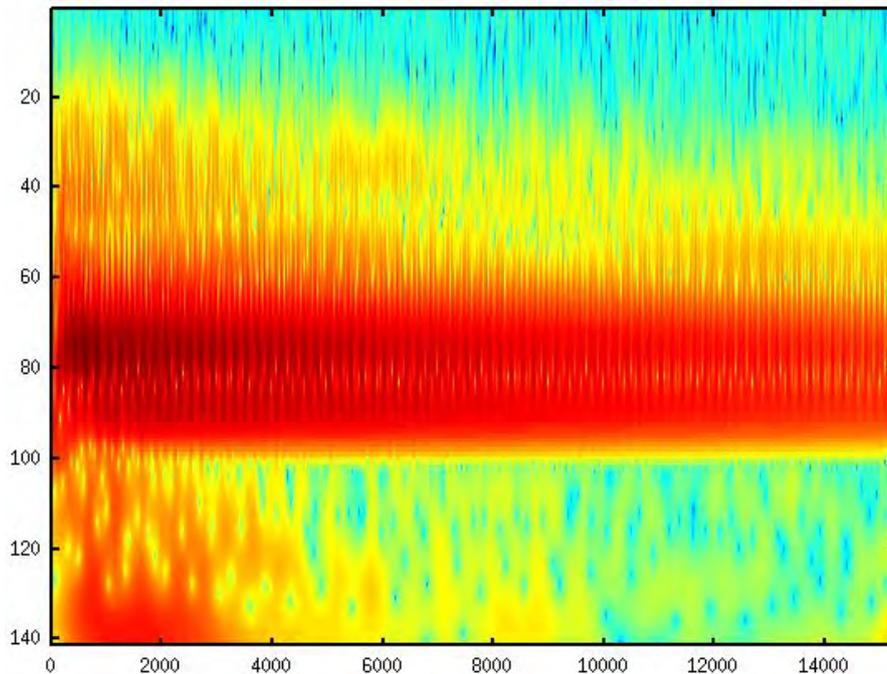


Abbildung 4.10: A-Dur-Dreiklang am Kawai CN33

Die Abbildung 4.10 zeigt denselben Dreiklang, allerdings stammt er vom Digitalpiano Kawai CN33. Der deutlichste Unterschied, der sich aus der Darstellung herauslesen lässt, sind die etwas schwächer ausgeprägteren Obertöne. Bei mehreren gleichzeitig angeschlagenen Tönen wird das genaue Verhalten der Schwingungen beim Klavier immer komplizierter. Deshalb ist es auch besonders schwer, das Verhalten von mehreren gleichzeitigen Tönen beim Digitalpiano realistisch wirken zu lassen. Theoretisch könnte man bei einem Digitalpiano sämtliche Tastenkombinationen sampeln und den jeweiligen Effekt und die Klangeigenschaften speichern. Aufgrund der enorm hohen Anzahl an Möglichkeiten, die Tasten des Klaviers zu betätigen, wird dies jedoch in naher Zukunft nicht zu verwirklichen sein.

4.4 Zeit-Frequenz-Analyse einer simplen Melodie

Besonders bei Aufnahmen von Melodien oder sonstigen Tonfolgen kann die Wavelet-Transformation ihre Stärken voll ausspielen. Durch die Darstellung des zeitlichen Frequenzverlaufs können Melodien je nach Komplexität gut visualisiert werden.

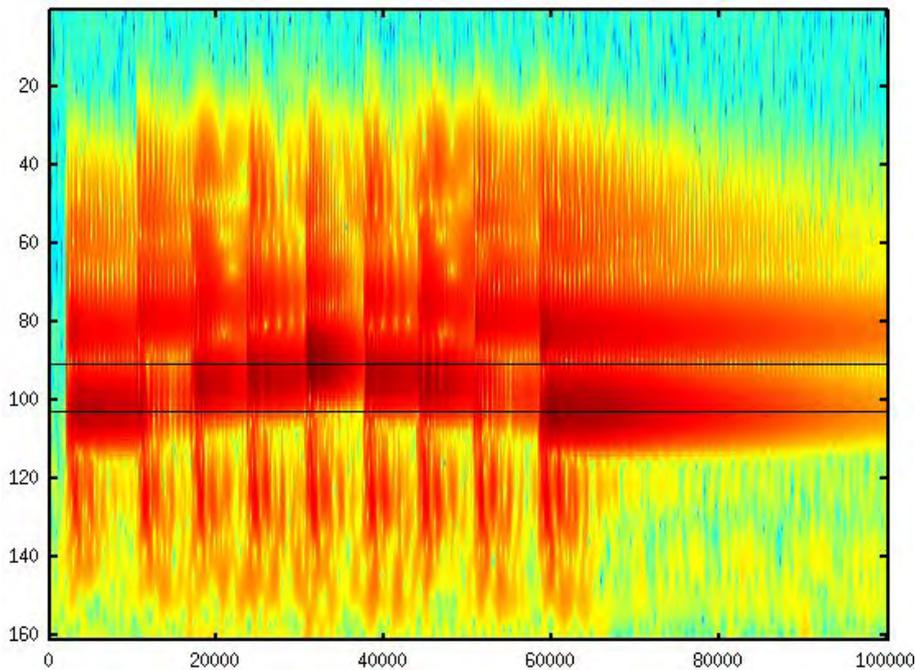


Abbildung 4.11: Einfache Melodie auf dem Bösendorfer 290

Abbildung 4.11 zeigt die Wavelet-Transformation einer einfachen Tonfolge. Ausgehend vom Ton c^1 wurde eine kleine Tonleiter aufwärts bis zum g^1 und von dort wieder abwärts zum c^1 gespielt. Mit den beiden schwarzen Linien sind die äußeren Töne der Tonfolge markiert. Die Wavelet-Darstellung dieser Melodie ist recht eindeutig, auch ohne irgendwelche Informationen könnte man aus der Abbildung herauslesen, dass eine kleine Tonleiter gespielt wurde.

Zu Beginn der einzelnen Töne lässt sich jeweils ein kurzer niederfrequenter Geräuschanteil erkennen. Weiterhin sieht man die Frequenzen der Obertöne, die parallel zu den Grundtönen nach oben und unten wandern.

Sowohl beim Aufwärtsspielen als auch beim Abwärtsspielen ist das d^1 etwas schwächer ausgeprägt, was wieder am unterschiedlich starken Fingereinsatz liegen dürfte. Aus der Abbildung lässt sich auch herauslesen, dass die äußeren Töne recht dominant sind. Daran

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

lässt sich erkennen, wo beim Spielen Akzente gesetzt wurden. Der erste Ton wurde relativ fest angeschlagen, denn er stellt den Beginn der Melodie dar und ist üblicherweise betont. Die ganze Tonfolge strebt schließlich auf den höchsten Ton g^1 zu, der auch wieder betont wird. Schließlich kehrt sich die Melodie um und der unterste Ton c^1 markiert den Endpunkt der Tonfolge und wird deshalb auch wieder akzentuiert. Idealerweise sollten bei einer solchen Tonreihe die mittleren Töne allesamt gleich stark betont sein, was in dieser Aufnahme durch das etwas schwächere d nicht der Fall war. Daraus könnte man ein mögliches Anwendungsgebiet der Wavelet-Transformation ableiten. Ein perfektionistischer Pianist könnte sein Tonleiter oder sonstiges Melodiespiel aufnehmen und sich die Wavelet-Transformation ansehen. Ist der Melodieverlauf nicht zu komplex, kann recht schnell erkennen werden, ob die gewünschte Betonung der Töne erreicht wurde. Mit ein paar zusätzlichen Features kann die Wavelet-Analyse auch in ein kindgerechtes Programm eingebettet werden. Besonders das Smartphone wäre auch eine ideale Plattform dafür, denn es besitzt bereits ein eingebautes Mikrofon und das Klavierspiel kann schnell und unkompliziert aufgenommen werden. So könnte beispielsweise jungen Klavierschülern anhand von Farben oder Balken visualisiert werden, ob die Melodie sauber und gleichmäßig gespielt wurde und die Betonung richtig war. Klavierlehrer könnten ein derartiges Programm im Unterricht einsetzen oder den Schülern zum Üben ans Herz legen.

4.5 Der Einfluss der Stimmung auf das Zeit-Frequenz-Verhalten

Das Zeit-Frequenz-Verhalten wird natürlich in großem Maße von der Stimmung des Klaviers beeinflusst. Von der Stimmung hängen vor allem die typischen Schwebungen ab. Das Schwebungsverhalten richtet sich danach, wie eng die Frequenzen der drei Saiten eines Tons zusammen liegen. Sind alle drei Saiten exakt gleich gestimmt, ergeben sich auch keine Schwebungen beim Spielen der Taste.

Um den Unterschied zwischen einem gestimmten und ungestimmten Klavier zu veranschaulichen, wurden Aufnahmen der gleichen Töne an einem Flügel vor und nach dem Stimmen gemacht. Dazu wurde jeweils der Salonkonzertflügel Steingraeber & Söhne C-212 N verwendet.

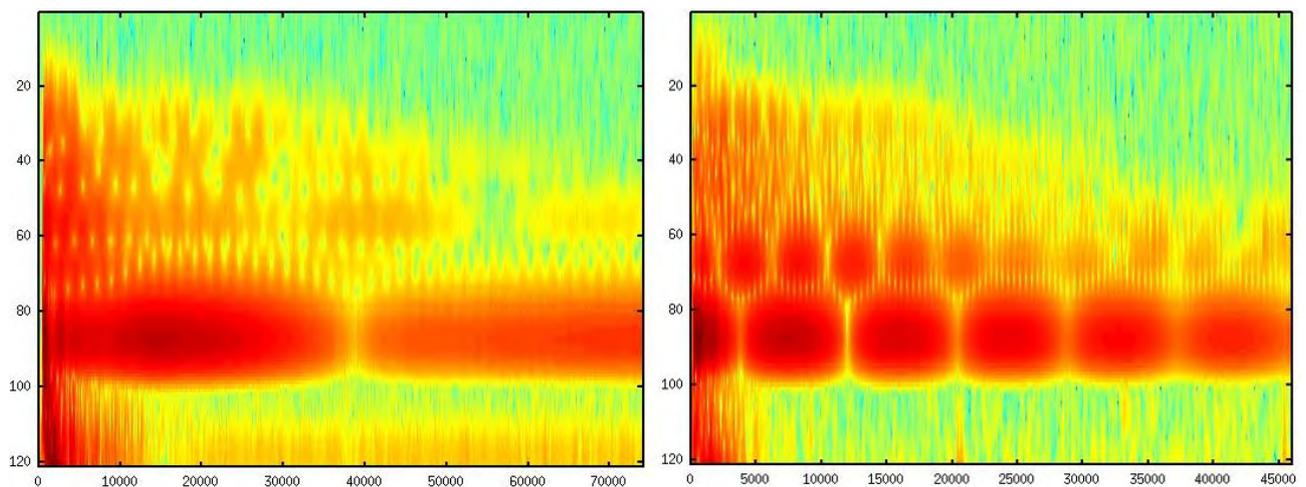


Abbildung 4.12: Vergleich zwischen gestimmten und verstimmten a^1

Abbildung 4.12 stellt die Wavelet-Transformation zu zwei Aufnahmen des Tons a^1 dar. Das linke Bild zeigt das unverstimmte a , das bei etwa einer Sekunde mit einer Schwebung beginnt. Im rechten Bild wird zwar nicht viel mehr als eine Sekunde dargestellt, dennoch lassen sich mehrere Schwebungen erkennen, sowohl beim Grundton, als auch beim ersten Oberton. Da pro Sekunde etwa fünf Schwebungen auftreten, liegen die Saiten des Tons a hier etwa 5 Hertz auseinander. Auch ein ungeübtes Gehör erkennt eine so starken Verstimmung sofort, der Ton klingt unangenehm. Während sich langsame Schwebungen

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

für das menschliche Ohr angenehm anhören, entsteht hier ein recht schriller akustischer Eindruck.

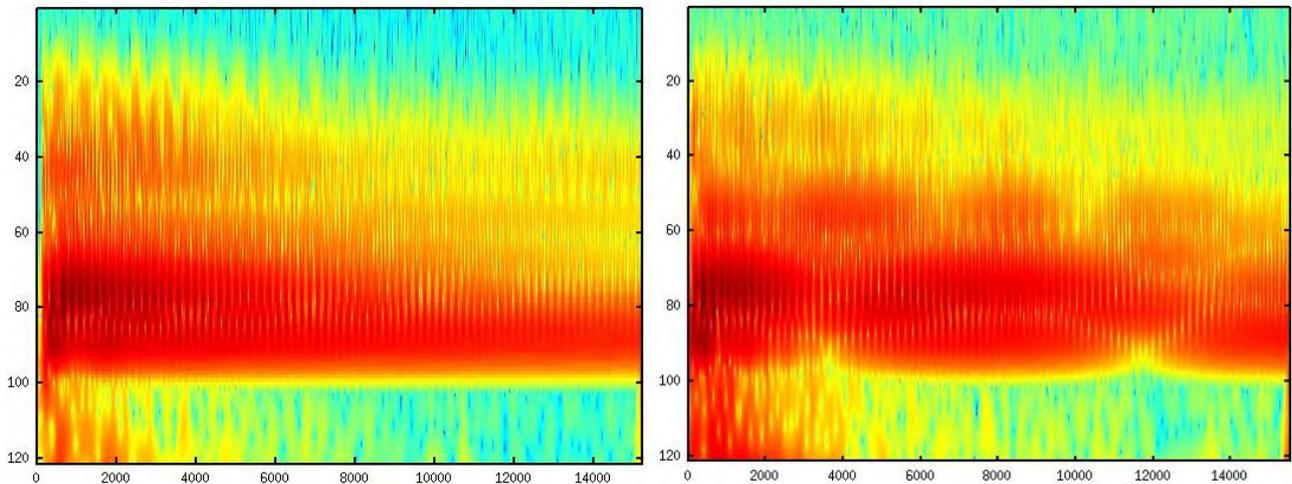


Abbildung 4.13: A-Dur-Dreiklang gestimmt und verstimmt

Auch an Abbildung 4.13 lässt sich sehr schön der unterschiedliche Zeit-Frequenz-Verlauf bei einem gestimmten und ungestimmten Klavier beobachten. Im Bild links ist der A-Dur-Dreiklang (a^1, cis^2, e^2) des gestimmten Steingraeber & Söhne-Flügels dargestellt. Das Bild ist ähnlich wie beim C-Dur-Dreiklang aus Abbildung 4.9, die drei Grundtöne befinden sich bei zwischen den Skalenwerten 76 und 88. Insgesamt wirkt die Darstellung relativ geordnet und klar strukturiert. Ganz anders ist das im rechten Bild. Alle drei Töne des Dreiklangs sind hier verstimmt und weisen schnelle Schwebungen auf. Dies lässt sich an den breitgezogenen „Wölkchen“ bei den verschiedenen Skalenwerten erkennen. Durch die Betrachtung der grafischen Darstellung kann man bereits erahnen, dass der Klang des Dreiklangs alles andere als rein ist.

Abbildung 4.14 verdeutlicht noch einmal schön das unterschiedliche Zeit-Frequenz-Verhalten bei verstimmten Tönen eines Klaviers. Bei dieser Melodie sind nicht alle Töne verstimmt, lediglich der untere, mittlere und obere Ton der kleinen Tonleiter sind nicht sauber gestimmt. Dementsprechend kann man bei diesen Tönen sehr gut die schnelle Schwebungen beobachten, die vor allem auch am ersten Oberton erkennbar sind. Die sauberen Töne besitzen hingegen „normales“ Verhalten, wie es schon in Kapitel 4.4 anhand der Abbildung 4.11 beobachtet wurde.

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

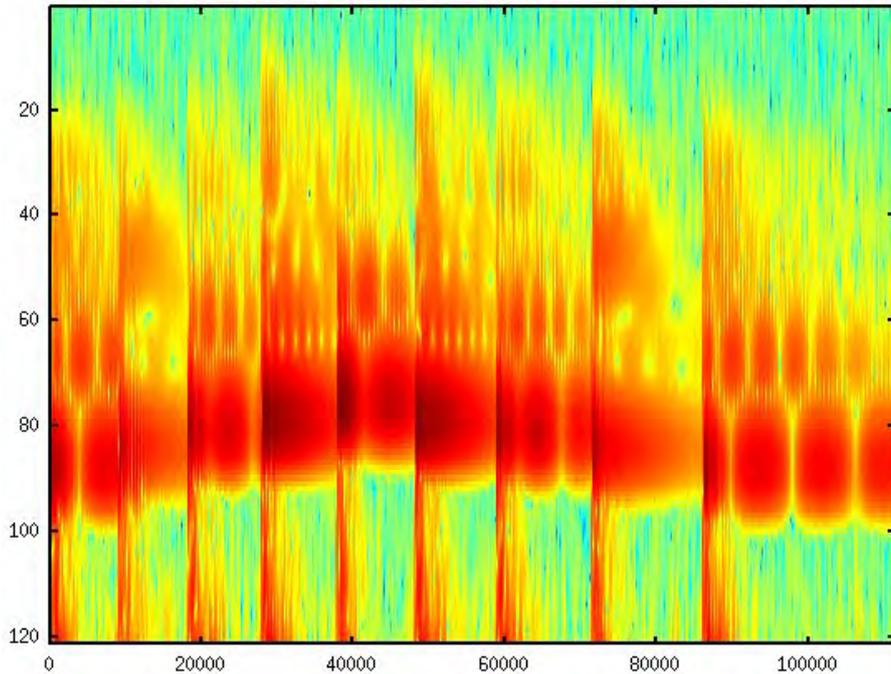


Abbildung 4.14: Melodie auf teilweise verstimmten Klavier

Ein verstimmtes Klavier lässt sich also nicht nur akustisch als solches erkennen, auch an der Wavelet-Darstellung werden verstimmte Töne deutlich.

4.6 Veranschaulichung der Heisenbergschen Unschärferelation

Wie bereits in Kapitel 2.2.2 erläutert wurde, tritt bei der Wavelet-Transformation die Heisenbergsche Unschärferelation auf. Die Zeit-Frequenz-Auflösung ist aber bei Wavelets im Gegensatz zu Verfahren wie der Gabor-Transformation relativ und nicht absolut.

Abbildung 4.15 zeigt die Wavelet-Transformationen der Töne A und a^3 auf einem sauber gestimmten Klavier mit den Frequenzen 110 Hz und 1760 Hz. Wenn man sich die Theorie der Heisenbergschen Unschärferelation und die relative Zeit-Frequenz-Auflösung bei Wavelets vor Augen führt, ist es wenig überraschend, dass der hohe Ton im linken Bild deutlich schlechter in der Frequenz aufgelöst ist als der tiefe Ton. Die Skala zum Grundton ist in beiden Bildern wieder mit der waagrechten Linie markiert, außerdem ist die ungefähre Unschärfe des Tons eingezeichnet. Beim linken Bild sind mehrere Schwebungen zu

4 Zeit-Frequenz-Analyse bei Klavieren

erkennen, obwohl das Klavier auch bei diesem Ton richtig gestimmt wurde. Die minimale prozentuale Frequenzabweichung, die die einzelnen Saiten des Saitenchores bei allen Tasten des Klaviers besitzen, machen bei 1760 Hz eben mehrere Hertz aus. Je tiefer der Ton ist, desto geringer ist die absolute Abweichung in der Frequenz.

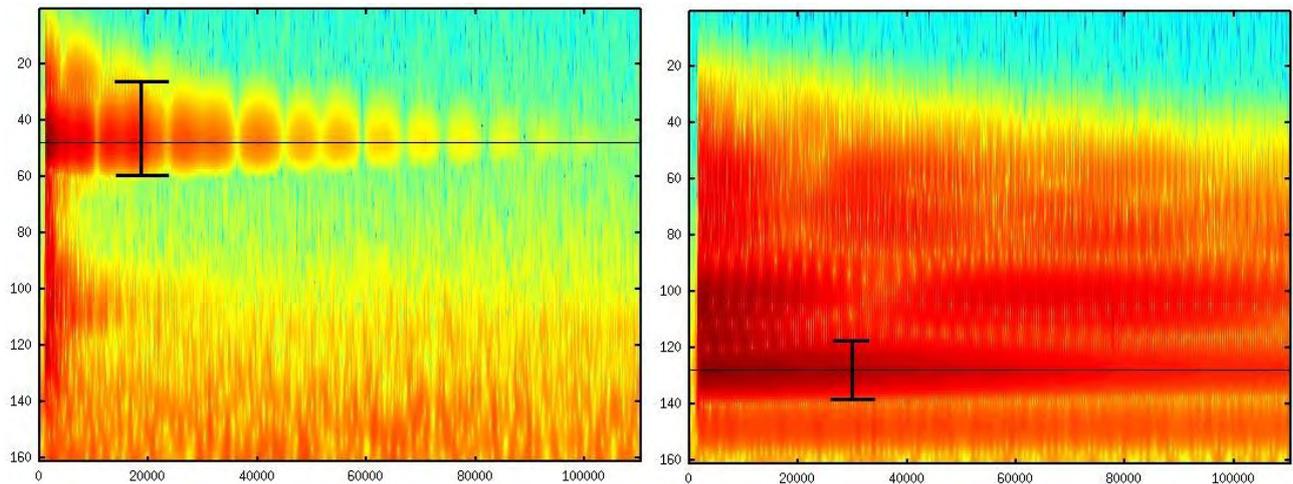


Abbildung 4.15: Vergleich zwischen hohem und tiefem Ton

Gerade auch wegen der hohen Schwingungszahl besitzen höhere Töne eine bessere Zeit-Auflösung als tiefe Töne. Dies lässt sich auch gut mit unserem Verständnis von Schwingungen vereinbaren. Der tiefste Ton eines normalen Klaviers besitzt die Frequenz 27,5 Hz, während der höchste Ton mit 4186,01 Hz schwingt. Für eine komplette Schwingung benötigt also der tiefe Ton etwa 0,03 Sekunden, während der höchste Ton in ungefähr 239 Mikrosekunden einmal schwingt. Um einmal voll zu schwingen, benötigt also ein tiefer Ton etwas länger als ein hoher Ton [2, S.88]. Hohe Töne lassen sich zeitlich also besser auflösen als tiefe Töne.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Wavelet-Analyse stellt eine interessante Möglichkeit dar, den Zeit-Frequenz-Verlauf von Klaviertönen zu analysieren. Damit lassen sich zu Beispiel die allgemeinen Klangcharakteristika des Klaviers visualisieren. Bei einzelnen Tönen lässt sich so der zeitliche Verlauf der einzelnen Obertöne darstellen. Auch die für Klaviere charakteristischen Schwebungen sind in den graphischen Darstellung der Wavelet-Transformation deutlich sichtbar. Der Unterschied im Klang von Flügeln verschiedener Preis- und Qualitätsklassen kann durch die Wavelet-Analyse greifbarer gemacht werden. Ein Merkmal von hochwertigen Konzertflügeln sind klare und ausdrucksstarke Obertöne, die bei einem günstigeren und kleineren Flügel nicht erreicht werden. Durch die Wavelet-Transformation lassen sich die Unterschiede im Obertonverhalten klar ersichtlich darstellen.

Auch der Klang eines Digitalpianos kann schön mit der Wavelet-Transformation analysiert werden. Dabei zeigt sich, dass das Klangverhalten einzelner Töne bereits recht nahe an das eines guten Flügels herankommt. Bei gleichzeitig angeschlagenen Tönen gelingt es den digitalen Klavieren noch nicht ganz, ihre Vorbilder nachzuahmen. Ein großer Minuspunkt bei den Digitalpianos ist weiterhin, dass die Tonausgabe nur über einen Lautsprecher möglich ist. Auch ein noch so gut abgemischter Ton kann dabei deutlich an Qualität verlieren. Große Konzertflügel bieten durch den großen Resonanzboden einen brillanten Klang, der außerdem ganz ohne Strom und Lautsprecher auskommt.

Die Auswirkung von schlecht gestimmten Tönen auf das Zeit-Frequenz-Verhalten des Klaviers können ebenfalls durch die Wavelet-Analyse anschaulich dargestellt werden. Das theoretische Konstrukt der Heisenbergschen Unschärferelation lässt sich auch anhand der Wavelet-Transformation von Klavieraufnahmen beobachten.

Ein Klavierstimmer verlässt sich beim Stimmen des Klaviers fast ausschließlich auf sein Gehör, lediglich feste Bezugspunkte wie der Kammerton a^1 mit 440 Hz werden mit dem Stimmgerät gestimmt. Ansonsten ist das Stimmgerät für die Aufgabe, ein verstimmtes Klavier wohlklingend zu machen, eher ungeeignet. Die Frequenzen der üblicherweise

5 Zusammenfassung und Ausblick

verwendeten gleichstufige Stimmung sind zu komplex, als dass sie sich anhand simpler Zahlen überprüfen lassen könnten. Die Wavelet-Analyse könnte ein alternatives Hilfsmittel sein, um den Klavierstimmer bei seiner Arbeit zu unterstützen. Wenn das gewünschte Zeit-Frequenz-Verhalten bekannt ist, könnte mit einem geeigneten Programm anhand der Wavelet-Transformation der Töne überprüft werden, ob bestimmte Intervalle und Töne bereits gut gestimmt sind.

Auch für die Hersteller von digitalen Pianos könnte die Wavelet-Analyse ein Hilfsmittel sein, um dem Klang eines Konzertflügels möglichst nahe zu kommen. Sogar die eingebauten Lautsprecher des Instruments könnten gegebenenfalls auf ihre Qualität hin überprüft werden.

Wenn die Wavelet-Transformation in geeignete Programme eingebettet wird, kann sie neben der theoretischen Analyse von Klavierklängen auch durchaus praktische Zwecke erfüllen. Allerdings müssen die genauen Parameter der Transformation, die Art der Darstellung und die Implementierung genau auf die Anwendung zugeschnitten sein. Das Programm sollte sich auch ohne vertiefte Kenntnisse der Wavelet-Transformation nutzen lassen.

Literaturverzeichnis

- [1] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [2] T. Sauer, *Einführung in die Signal- und Bildverarbeitung*, Vorlesungsskript, 2012.
- [3] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*, Elsevier, 2008.
- [4] O. Christensen, D. Labate, K. Gröchenig, B. Forster, P. Massopust, *Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis*, Birkhäuser, 2009.
- [5] A. K. Louis, P. Maaß, A. Rieder, *Wavelets. Theorie und Anwendungen*, Teubner Verlag, 1998.
- [6] P. S. Addison, *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*, CRC Press, 2010.
- [7] L. Kentner, *Das Klavier*, Ed. Sven Erik Bergh, 1975.
- [8] H. Junghanns, *Der Piano- und Flügelbau*, Verlag das Musikinstrument, 1979.
- [9] Kawai Digital Piano CN-Serie, Broschüre.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Ort, Datum

Unterschrift