Fourier-Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen

Florian Iglauer Matrikelnummer 89646

4. November 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Fourier-Analysis beschäftigt sich normalerweise vor allem mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der Torusgruppe $\mathbb{T}$ und ihren zugehörigen Standardtopologien. All diese Objekte haben nun gemeinsam, dass sie zusammen mit ihren Standardtopologien als lokalkompakte abelsche Gruppen aufgefasst werden können. Diese Arbeit setzt sich daher mit der Verallgemeinerung der Fourier-Analysis auf lokalkompakte abelsche Gruppen auseinander. Nachdem wir uns die grundlegenden Konzepte der abstrakten harmonischen Analysis ansehen, setzen wir uns mit dem zugehörigen Maß auseinander. Während man sich in der Fourier-Analysis im Zusammenhang mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß ansieht, sehen wir uns hier dessen Verallgemeinerung nämlich das Haar-Maß an. Um mit diesem arbeiten zu können, müssen wir zeigen, dass dies tatsächlich existiert und (bis zu einem gewissen Grad) eindeutig ist. Anschließend betrachten wir allgemeiner den Raum aller komplexen, regulären Maße auf einer lokalkompakten abelschen Gruppe G nämlich $M(G)$. Hierbei sehen wir uns die Faltung und die Fourier-Stieltjes-Transformation als Operationen auf diesen Maßen an. Beim Raum der einfach integrierbaren Funktionen auf G nämlich $L^1(G)$ wiederholen wir dies und betrachten insbesondere $L^1(G)$ als Unteralgebra von M(G). Im darauffolgenden Kapitel sehen wir uns noch Theoreme an, die nicht in die vorherigen beiden Kapitel passen, aber auf ihnen aufbauen. Mithilfe des Pontryagin Dualitätssatzes, den wir uns danach anschauen, sehen wir dann, dass eine lokalkompakte abelsche Gruppe G die Dualgruppe ihrer Dualgruppe ist. Damit erklärt sich nicht nur die Bezeichnung Dualgruppe, sondern es erlaubt uns abschließend auch zu erklären, wie man eine lokalkompakte abelsche Gruppe kompaktifiziert und welchen Zusammenhang dies mit fast-periodischen Funktionen hat. Der Inhalt ist dabei eine Aufbereitung des 7. Kapitels des Buches [4]. Die Theoreme sind also diesem Buch entnommen, wobei die Beweise anderen aufgelisteten Quellen entnommen sind.

Kapitel 2

Grundlegende Konzepte der Fourier-Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen

Um im späteren Verlauf der Arbeit Fourier-Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen betreiben zu können (im Folgenden werden lokalkompakte abelsche Gruppen als LKA-Gruppen abgekürzt), müssen wir zunächst einmal die Grundbegriffe klären, wobei wir dann auch bereits einen groben Überblick über das Ausmaß und Ziel der Fourier-Analysis auf LKA-Gruppen geben können.

2.1 Lokalkompakte abelsche Gruppen

Als Gruppe bezeichnen wir ein Tupel bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation $+ : \begin{cases} G \times G \to G \\ (a,b) \mapsto a + b \end{cases}$, wobei folgende Gruppenaxiome gelten müssen:

- Neutrales Element: $\exists! 0_G \in G : a + 0_G = 0_G + a = a \; \forall a \in G$.
- Inverses Element:$\forall a \in G \; \exists! -a \in G : a + (-a) = -a + a = 0_G$.
- Assoziativität:$(a + b) + c = a + (b + c) \; \forall a, b, c \in G$.

Gilt zusätzlich die Bedingung $a + b = b + a \; \forall a, b \in G$, so heißt die Gruppe abelsche Gruppe. Stattet man diese abelsche Gruppe nun mit einer Topologie aus, sodass G mit ihr zu einem Hausdorffraum wird (wobei zusätzlich gefordert wird, dass $(a, b) \mapsto a + b$ eine stetige Abbildung von $G \times G$ nach G und $a \mapsto -a$ eine stetige Abbildung von G nach G bezüglich der Topologie ist), so bezeichnet man G als topologische abelsche Gruppe. Ist die Topologie zusätzlich lokalkompakt, so können wir die Gruppe nun schlussendlich als lokalkompakte abelsche Gruppe bezeichnen. Dass G hausdorffsch ist meint hierbei, dass distinkte Punkte in G stets zueinander disjunkte Umgebungen besitzen und die Lokalkompaktheit meint, dass jeder Punkt in G eine kompakte Umgebung besitzt [1, vgl. S. 252 f.]. Um ein Gefühl für dieses Konzept zu bekommen, schauen wir uns ein paar Beispiele an:

- Jede abelsche Gruppe ist mit der diskreten Topologie offensichtlich eine LKA-Gruppe, da die diskrete Topologie punktetrennend ist und die offenen Mengen, die nur aus einzelnen Punkten bestehen, offenbar auch kompakt sind. Zusätzlich sind alle Abbildungen unter der diskreten Topologie stetig und somit auch die Gruppenoperationen.
- Da die lokalkompakten abelschen Gruppen die Verallgemeinerung der Torusgruppe $\mathbb{T}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ darstellen, sind jene mit ihren Standardtopologien logischerweise ebenfalls LKA-Gruppen.
- Sei G eine LKA-Gruppe, so ist eine abgeschlossene Untergruppe H mit der Teilraumtopologie (also der Topologie, deren offene Mengen aus den Schnittmengen der offenen Mengen in G mit H bestehen) ebenfalls eine LKA-Gruppe [1, vgl. S. 254].
- Sieht man sich die Quotientengruppe G/H mit der Quotiententopologie an (eine Menge U ist in G/H offen genau dann, wenn ihr Urbild in G offen ist), so gilt auch hier, dass G/H eine LKA-Gruppe ist [1, vgl. S. 254].
- Seien $G_1, \ldots, G_n$ LKA-Gruppen, so ist die direkte Summe (versehen mit der Produkttopologie) wieder eine LKA-Gruppe [1, vgl. S. 255].

2.2 Haar-Maß

Auf unserer LKA-Gruppe G können wir nun ein Maß definieren, um im Folgenden integrieren zu können. Hierfür definieren wir zunächst einmal das Konzept der Borelmenge. Wir definieren auf einem lokalkompakten Hausdorffraum X (der bei uns immer unsere LKA-Gruppe G sein wird) eine Familie B an Teilmengen aus X, die alle abgeschlossenen Teilmengen enthält und unter abzählbaren Vereinigungen und unter der Komplementbildung abgeschlossen ist. Die Elemente aus B heißen Borelmengen. Ein Maß μ ist nun eine Abbildung, die diese Borelmengen auf $[0, \infty]$ abbildet, für die $\mu(E) = \sum \mu(E_i)$ gilt (wobei $E = \bigcup E_i$ und $\{E_i\}$ eine abzählbare Menge paarweise disjunkter Borelmengen E_i ist) und für die $\mu(E) < \infty$ gilt, wenn E präkompakt ist. Als $|\mu|$ definieren wir die Abbildung mit der Eigenschaft $|\mu|(E) = \sup \sum |\mu(E_i)|$, wobei das Supremum über endliche Vereinigungen von E_i aus $\{E_i\}$ läuft, die E ergeben [1, vgl. S. 264 f.]. Das Maß, das wir nun definieren heißt Haar-Maß und hat die Eigenschaft ein nichtnegatives, reguläres Maß zu sein, welches ungleich 0 ist und zusätzlich translationsinvariant ist [1, vgl. S. 1]. Es gilt also für ein Haar-Maß μ

- Regulärität: $|\mu|(E) = \sup |\mu|(K) = \inf |\mu|(V)$ ($K \subset E$ ist eine kompakte Menge, $E \subset V$ ist eine offene Menge, sup läuft über alle K mit $K \subset E$ und inf läuft über alle V mit $E \subset V$).
- Translationsinvarianz: $\mu(E + x) = \mu(E)$ (E ist eine Borelmenge in G und $x \in G$).
- Ungleich 0: Es gibt eine Borelmenge E in G, sodass $\mu(E) > 0$.
- Nichtnegativität: Es gibt keine Borelmenge E in G, für die gilt: $\mu(E) < 0$.

Das Haarmaß (beziehungsweise das zugehörige Integral) wird uns dann im Folgenden erlauben, uns den $L^1(G)$ anzuschauen und ihn zusammen mit der Faltung von Funktionen aus $L^1(G)$ als Banachalgebra aufzufassen. Anschließend lassen sich dann homogene Banachräume auf G definieren.

2.3 Charaktere und die Dualgruppe

Als Charakter bezeichnen wir einen Homomorphismus γ von G in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen, sodass $|\gamma(x)| = 1$. γ ist also ein Homomorphismus von G nach $\mathbb{T}$. Somit gilt für γ:

- $|\gamma(x)| = 1 \ \forall x \in G$.
- $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) \ \forall x, y \in G$.

Sei Γ die Menge aller stetigen Charaktere auf G, so bildet Γ wieder eine Gruppe (die sogenannte Dualgruppe), wenn man die Addition durch die punktweise Multiplikation definiert. Es gilt also

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x).$$

Des Weiteren können wir aus Γ eine LKA-Gruppe machen, wenn wir Γ eine passende Topologie geben. Sei K eine kompakte Teilmenge in Γ, so definieren wir

$$N(K, r) = \{\gamma : (x, \gamma) \in U_r \ \forall x \in K\}.$$

Die Mengen $N(K, r)$ und ihre Translationen bilden nun die Basis für eine solche Topologie. Es kann gezeigt werden, dass Γ nicht nur die Dualgruppe von G ist, sondern, dass G auch die Dualgruppe von Γ ist. Dieses Resultat wird als Pontryagin's Dualitätssatz bezeichnet und rechtfertigt somit auch die Bezeichnung von Γ als Dualgruppe. $\gamma(x)$ wird wegen der Dualität daher auch als (x, γ) geschrieben. Wir sehen uns auch hier wieder Beispiele an.

- Sei $G = \mathbb{R}$. Wir wählen ein $\gamma \in \Gamma$ und ein $\delta > 0$, sodass $\int_0^\delta \gamma(t)dt = \alpha \neq 0$. Nach Definition gilt

  $$\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t) \ x, t \in \mathbb{R}.$$

  Nun haben wir

  $$\alpha\gamma(x) = \gamma(x)\int_0^\delta \gamma(t)dt = \int_0^\delta \gamma(x+t)dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)dt.$$

  Da γ stetig ist, wissen wir, dass der letzte Teil der Gleichung differenzierbar ist. γ hat also eine stetige Ableitung. Leitet man $\gamma(x+t)$ also nach t ab, so erhält man $\gamma'(x+t) = \gamma(x)\gamma'(t)$. Setzt man t=0, so erhält man nun $\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x)$. Nun gilt aber $\gamma(0) = 1$ und γ ist beschränkt, weshalb bereits $\gamma(x) = e^{iyx}$ mit $y \in \mathbb{R}$ folgt. Die Abbildung von γ auf y ist dann ein Isomorphismus. Weiterhin gilt, dass die Topologien von $\mathbb{R}$ und $\hat{\mathbb{R}}$ übereinstimmen. Um dies zu zeigen, kreieren wir eine offene Nullumgebung bezüglich der Topologie der Dualgruppe. Wir definieren $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Nun ist $y \in V(n, r)$ genau dann, wenn $|1 - e^{ixy}| < r$, wobei $|x| \leq n$. Dies entspricht nun der Definition einer offenen Menge bezüglich der Dualgruppentopologie. Nun gilt aber $y \in V(n, r)$ genau dann, wenn $|y| < \frac{n}{2} arcsin(\frac{r}{2})$. Also stimmen die beiden Topologien überein [1, vgl. S. 12 f.].

- Sei $G = \mathbb{T}$, so handelt es sich bei den Charakteren um Abbildungen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{T}$. Charaktere haben also stets die Form $\gamma_y : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, x \mapsto e^{iyx}$ mit $y \in \mathbb{R}$, was sich durch die Wiederholung der vorherigen Berechnungen wieder zeigt. Nun gilt aber zusätzlich, dass $\gamma(x + 2\pi) = \gamma(x)$ ist. Also gilt

  $$e^{iyx} = e^{iy(x+2\pi)} = e^{iyx} \cdot e^{iy2\pi}.$$

Dies gilt aber nur, wenn $e^{i2y\pi} = 1$ ist, also wenn y ganzzahlig ist. Man kann nun also γ_y mit y identifizieren und somit bekommt man $\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$, wobei $\hat{\mathbb{T}}$ die Dualgruppe von $\mathbb{T}$ meint. Die Topologie von $\hat{\mathbb{T}}$ ist die diskrete Topologie. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass $\mathbb{T}$ kompakt ist und die Dualgruppe einer kompakten Gruppe diskret ist (was wir im Folgenden auch noch beweisen werden) [1, vgl. S. 13].

- Sieht man sich nun die Dualgruppe von $\mathbb{Z}$ an, also $\hat{\mathbb{Z}}$, so wissen wir, dass $\gamma(1) = e^{i\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Damit ergeben sich nun Charaktere der Form $\gamma_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}, n \mapsto e^{in\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Bildet man γ_α nun auf $e^{i\alpha}$ ab, so erhält man wieder einen Isomorphismus und die Topologien stimmen (ähnlich wie für $G = \mathbb{R}$) überein. Somit gilt also $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$ und $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$ [1, vgl. S. 13].

Kapitel 3

Theoreme über das Haar-Maß

Da wir die Konzepte der LKA-Gruppe, des Haar-Maßes und der Dualgruppe nun definiert haben, können wir uns unsere ersten Theoreme anschauen, um mit diesen Konzepten arbeiten zu können. Um mit dem Haar-Maß arbeiten zu können, müssen wir zunächst einmal zeigen, dass es existiert und dass es tatsächlich (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) eindeutig ist.

3.1 Eindeutigkeit des Haar-Maßes

Zunächst einmal zeigen wir die Eindeutigkeit des Haar-Maßes.

[**Theorem**] Das Haar-Maß ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig [1, vgl. S. 2].
Beweis:
Sei $g \in C_c(G)$, sodass $\int_G g dm = 1$. Wir definieren nun $\lambda := \int_G g(-x) dm'(x)$. Nun gilt für

$f \in C_c(G)$:

$$
\begin{aligned}
\int_G f dm' &= \underbrace{\int_G g(y)dm(y)}_{=1} \int_G f(x)dm'(x) \\
&= \int_G g(y)dm(y) \int_G f(x+y)dm'(x) \\
&= \int_G g(y) \int_G f(x+y)dm'(x)dm(y) \\
&= \int_G \int_G g(y)f(x+y)dm'(x)dm(y) \\
&= \int_G \int_G g(y)f(x+y)dm(y)dm'(x) \\
&= \int_G \int_G g(y-x)f(y)dm(y)dm'(x) \\
&= \int_G g(y-x) \int_G f(y)dm(y)dm'(x) \\
&= \int_G g(y-x)dm'(x) \int_G f(y)dm(y) \\
&= \underbrace{\int_G g(-x)dm'(x)}_{\lambda} \int_G f(y)dm(y) \\
&= \lambda \int_G f dm.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $m' = \lambda m$ und die Behauptung ist bewiesen.

3.2 Existenz des Haar-Maßes

Nun basiert dieses Eindeutigkeitstheorem natürlich auf der Annahme, dass das Haar-Maß überhaupt existiert. Dies müssen wir nun noch beweisen.

[**Theorem**] Es existiert ein Haar-Maß auf G [3, vgl. S. 22][2, vgl. S. 5].
Beweis:
Zunächst müssen wir einige Konzepte definieren, die wir für unseren Beweis brauchen. Das erste Konzept ist die Haar-Überdeckungsfunktion. Seien $f, g \in C_c^+(G)$, so gibt es $x_j \in G$ und $c_j \in \mathbb{R}^+$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, sodass $f(t) \leq \sum_{j=1}^n c_j g(x_j t)\ \forall t \in G$. Für die Menge aller möglichen $\sum_{j=1}^n c_j$, die die Ungleichung erfüllen, bestimmt man die größte untere Schranke. Dies ist das Ergebnis der Haar-Überdeckungsfunktion und wird als $(f : g)$ geschrieben. Für diese Funktion gelten nun folgende Eigenschaften:

- (Links-)Invarianz: $(f_s : g) = (f : g)$:

Beweis: $f_s(x) = f(sx) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j sx)$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j g(x'_j x) \ (x'_j := x_j s).$$

- Sublinearität: $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$:
  Beweis:
  $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
  $$\leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j x) + \sum_{j=1}^{n} c'_j g(x_j x)$$
  $$= \sum_{j=1}^{n} (c_j + c'_j) g(x_j x).$$
  Hieraus folgt bereits die Behauptung.

- $(cf : g) = c(f : g)$ für $c > 0$:
  Beweis:
  $$f(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j x) \Rightarrow cf(x) \leq \sum_{j=1}^{n} cc_j g(x_j x)$$
  und somit gilt die Behauptung.

- Monotonie: $f_1 \leq f_2 \Rightarrow (f_1 : g) \leq (f_2 : g)$:
  Beweis:
  Da $f_1 \leq f_2$, gilt: Wenn
  $$(f_2 : g) = \sum_{j=1}^{n} c_j,$$
  dann ist
  $$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j x).$$
  Somit gilt die Behauptung.

- $(h : f) \leq (g : f)(h : g)$:
  Beweis: Es gilt:
  $$h(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j x)$$
  und
  $$g(x) \leq \sum_{k=1}^{n'} c'_k f(x'_k x).$$
  Daher gilt

$$
\begin{aligned}
h(x) &\leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j x) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n'} c'_k f(x'_k x_j x) \\
&= \sum_{j=1,k=1}^{n,n'} \underbrace{c_{jk}}_{=c_j c'_k} f(\underbrace{x_{jk}}_{=x_j x'_k} x).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
(h:g) &\leq \sum_{k=1}^{n'} c'_k f(x'_k x_j x) \\
&= \sum_{j=1,k=1}^{n,n'} c_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n'} c'_k = (g:f)(h:g).
\end{aligned}
$$

- $\frac{\max_{x\in G} f(x)}{\max_{x\in G} g(x)} \leq (f:g)$:
  Beweis:
  Wir wählen ein $\epsilon > 0$ und ein $x \in G$, sodass $f(x) \geq \max_G f - \epsilon$.
  Dann gilt
  $$
  \begin{aligned}
  \max_G f - \epsilon &\leq f(x) \\
  &\leq \sum_{j=1}^{n} c_j g(x_j x) \\
  &\leq \max_G g \sum_{j=1}^{n} c_j
  \end{aligned}
  $$
  und dies impliziert, dass
  $$\sum_{j=1}^{n} c_j \leq \frac{\max_G f - \epsilon}{\max_G g}$$
  und da ϵ beliebig war, gilt die Behauptung.

Nun können wir die Funktion normalisieren. Dafür definieren wir

$$I_\psi = \frac{(\psi : f)}{(\psi : f_0)},$$

wobei $f_0 \neq 0$ beliebig gewählt werden kann und

$$\psi \in C_U^+(G) := \{g \in C^+(G) : g(x) = 0 \forall x \in U\}.$$

Um U geeignet zu wählen, benötigen wir noch eine Hilfsaussage. Diese besagt, dass

$$I_\psi(f_1) + I_\psi(f_2) \leq I_\psi(f_1 + f_2) + \epsilon,$$

wenn $\epsilon > 0$ gewählt wird, U eine Einheitsumgebung ist, $f_1, f_2 \in C^+(G)$ und $\psi \in C_U^+(G)$. I_ψ ist somit annähernd linear. Um dies zu beweisen, definieren wir $g \in C^+(G)$, sodass

$$f_1(x) + f_2(x) > 0 \Rightarrow g(x) = 1.$$

Anschließend definieren wir $f := f_1 + f_2 + \delta g$ für $\delta > 0$ und $h_i := \frac{f_i}{f}$ für $i \in \{1, 2\}$ mit der Konvention, dass $h_i = 0$, wenn $f = 0$ ist. Nun sind die h_i stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt sind und sie sind sogar lokal gleichmäßig stetig, weshalb es eine Einheitsumgebung gibt, sodass $|h_i(x) - h_i(y)| < \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$ mit $x^{-1}y \in U$ gilt. Nun definieren wir $\psi \in C_U^+(G)$ mit $f(x) \leq \sum_{j=1}^n c_j \psi(x_j x)$. Wenn nun aber $\psi(x_j x) \neq 0$ gilt, so wissen wir, dass $xx_j \in U$ gilt und da U symmetrisch ist, gilt weiterhin $x^{-1}x_j^{-1} \in U$. Daraus folgt nun, dass $|h_i(x) - h_i(x_j^{-1})| < \epsilon$ und daher folgt, dass

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f(x)h_i(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^n c_k \psi(x_k x) h_i(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^n c_k \psi(x_k x)(h_i(x_k^{-1}) + \epsilon). \end{aligned}$$

Also gilt $(\psi : f_j) \leq \sum_{k=1}^n c_k \psi(x_k x)(h_i(x_k^{-1}) + \epsilon)$ und somit

$$\begin{aligned} (\psi : f_1) + (\psi : f_2) &\leq \sum_{k=1}^n c_k \psi(x_k x)(\underbrace{(h_1 + h_2)}_{\leq 1}(x_k^{-1}) + 2\epsilon) \\ &\leq \sum_{k=1}^n c_k (1 + 2\epsilon). \end{aligned}$$

Nun kommt $\sum_{k=1}^n c_k$ beliebig nahe an $(\psi : f)$ heran, weshalb

$$\begin{aligned} I_\psi(f_1) + I_\psi(f_2) &\leq \sum_{k=1}^n c_k (1 + 2\epsilon) \\ &= I_\psi(f)(1 + 2\epsilon) \\ &\leq (I_\psi(f_1 + f_2) + \delta I_\psi(g))(1 + 2\epsilon) \end{aligned}$$

gilt. Gehen nun δ und ϵ gegen 0, so erhalten wir die Behauptung. Um uns der Invarianz des Integrals anzunähern, müssen wir also einen Grenzwert für ψ bestimmen, welcher mit beliebig kleinem Träger arbeiten kann. Sei $f \in C_c^+(G)$ und $f \neq 0$, so wissen wir, dass

$$(\psi : f) \leq (f_0 : f)(\psi : f_0)$$

und

$$(\psi : f_0) \leq (f : f_0)(\psi : f)$$

gilt. Daher gilt

$$I_\psi(f) \in [\frac{1}{(f : f_0)}, (f_0 : f)] =: S_f.$$

Da S_f kompakt ist, gilt nach dem Satz von Tychonov, dass $S := \prod_f S_f$ kompakt ist. Für $I_\psi \in S$ ist $I_\psi f \in S_f$ eine Koordinatenprojektion. Sei nun U eine 1-Umgebung in G, so definieren wir

$$S_U := \overline{\{I_\psi : \psi \in C_U^+(G)\}}.$$

Da S_U eine abgeschlossene Menge in S ist und S kompakt ist, ist auch S_U kompakt. Nun gilt

$$S_{U_1} \cap \dots \cap S_{U_n} = S_{U_1 \cap \dots \cap U_n} \text{ mit } U_j \text{ kompakt}$$

und damit haben die S_U-Mengen die endliche Durchschnittseigenschaft, woraus folgt, dass ihr Durchschnitt nicht leer ist. Wir können daher ein I im Durchschnitt aller S_U wählen, welches dann die Eigenschaft hat, dass für $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(G)$, $U \subset G$ mit kompaktem U und $\epsilon > 0$ ein $\psi \in C_U^+(G)$ existiert, sodass

$$|I(f_j) - I_\psi(f_j)| < \epsilon \text{ mit } j \in \{1, \dots, n\}$$

gilt. Damit erfüllt I nun die Nichtnegativität, Invarianz, Linearität und Homogenität als Eigenschaften und ist unser gesuchtes Integral.

Kapitel 4

Der Maßraum $M(G)$

Um den Maßraum zu definieren, definieren wir erst einmal eine Norm. $||\mu|| = |\mu|(X)$, wobei X ein lokalkompakter Hausdorffraum ist. Die Menge aller regulären, komplexen Maße, für die $||\mu||$ endlich ist, bezeichnen wir als $M(X)$ beziehungsweise, wenn wir für X die LKA-Gruppe G einsetzen, dann $M(G)$. $M(G)$ ist nun ein normierter Vektorraum mit der Addition $(\mu+\lambda)(E) = \mu(E)+\lambda(E)$ und der Skalarmultiplikation $\mu(\alpha E) = \alpha\mu(E)$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und E eine Borelmenge ist [1, vgl. S. 265].

4.1 Faltung in $M(G)$

Für zwei Maße $\mu, \lambda \in M(G)$ kann man eine Art Multiplikation nämlich die Faltung definieren. Es gilt $(\mu*\lambda)(E_1) = (\mu\times\lambda)(E_2)$, wobei E_1 eine Borelmenge in G ist und $E_2 = \{(x,y) \in G\times G : x+y \in E_1\}$ ist. E_2 ist ebenfalls eine Borelmenge auf $G\times G$, denn $E_1 \times G$ ist eine Borelmenge auf $G\times G$ und der Homöomorphismus $(x,y) \mapsto (x-y,y)$ bildet $E_1\times G$ auf E_2 ab. Fasst man die Faltung nun als Multiplikation auf $M(G)$ auf, so erhalten wir folgendes Theorem:

[**Theorem**] $M(G)$ wird mit der Faltung zu einer kommutativen Banachalgebra mit Einheit [1, vgl. S. 14].
Beweis:
Zunächst zeigen wir, dass $M(G)$ unter der Faltung abgeschlossen ist. Aufgrund des Jordan Dekompositionstheorems ist es ausreichend, lediglich nichtnegative Maße zu betrachten. Sei E eine Borelemenge auf G und die Vereinigung disjunkter Mengen E_i. Nun gilt $(\mu*\lambda)(E_1) = \sum(\mu*\lambda)(E_i)$, denn wenn die Mengen E_i disjunkt sind und E ihre Vereinigung ist, so sind auch die Mengen $E_{i2} = \{(x,y) \in G\times G : x+y \in E_i\}$ disjunkt und E_2 ist ihre Vereinigung, weshalb $(\mu\times\lambda)(E_2) = \sum(\mu\times\lambda)(E_{i2})$ für das Maß $\mu\times\lambda$ gelten muss. Da $\mu\times\lambda$ regulär sein muss, gilt

$$(\mu\times\lambda)(K) > (\mu\times\lambda)(E_2) - \epsilon,$$

wobei $K \subset E_2$ eine kompakte Menge ist und $\epsilon > 0$. Das Bild von K unter der Abbildung $(x,y) \mapsto x+y$ bezeichnen wir nun als C. C ist offenbar eine Teilmenge von E und kompakt. Weiterhin gilt $K \subset C_2$, wenn $C_2 = \{(x,y) \in G\times G : x+y \in C\}$ definiert wird. Somit gilt

$$(\mu*\lambda)(C) = (\mu\times\lambda)(C_2) \geq (\mu\times\lambda)(K) > (\mu*\lambda) - \epsilon,$$

wodurch $\mu * \lambda$ von innen regulär ist. Die äußere Regularität folgt dann aus der Komplementbildung. Somit ist $\mu * \lambda$ regulär und offenbar beschränkt, wodurch $\mu * \lambda \in M(G)$. Da

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_2)$$

ist und G kommutativ ist, können wir sagen, dass

$$\{(x, y) \in G \times G : x + y \in E\} = \{(y, x) \in G \times G : y + x \in E\}$$

gilt und somit

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)(E_2) = (\lambda \times \mu)(E_2) = (\lambda * \mu)(E).$$

Damit ist die Faltung kommutativ. Um Assoziativität zu beweisen, definieren wir $E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in G^n : x_1 + \cdots + x_n \in E\}$ und $(\mu_1 * \cdots * \mu_n)(E) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(E_n)$. Wegen Fubini's Theorem gilt dann die Assoziativität. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $||\mu * \lambda|| \leq ||\mu|| \cdot ||\lambda||$ und dass $M(G)$ eine Einheit hat. Sei χ_E die charakteristische Funktion der Borelmenge E in G, so gilt für

$$\begin{aligned}(\mu * \lambda)(E) &= \int_G \chi_E d(\mu * \lambda) \\ &= \int_{G \times G} \chi_E(x + y) d(\mu \times \lambda) \\ &= \int_G \int_G \chi_E(x + y) d\mu(x) d\lambda(y).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_G f d(\mu * \lambda) &= \int_{G \times G} f(x + y) d(\mu \times \lambda) \\ &= \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y)\end{aligned}$$

für alle endlichen linearen Kombinationen charakteristischer Funktionen. Da nun aber alle beschränkten Borelfunktionen das gleichmäßige Limit von Folgen dieser Linearkombinationen sind, muss die Gleichung für alle $f \in L^\infty(G)$ gelten. Wenn nun $|f(x)| \leq 1 \; \forall x \in G$ gilt, so muss

$$\left| \int_G f(x + y) d\mu(x) \right| \leq ||\mu|| \; \forall y \in G$$

gelten. Daher muss nun

$$\int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y) \leq \int_G ||\mu|| d\lambda(y) = ||\mu|| \cdot ||\lambda||$$

gelten. Da $\chi_E(x) \leq 1 \; \forall x \in G$ gilt, gilt daher $||\mu * \lambda|| \leq ||\mu|| \cdot ||\lambda||$. Um zu zeigen, dass $M(G)$ eine Einheit besitzt, definieren wir

$$\delta_0 : \begin{cases} \delta_0(E) = 1, \text{ wenn } 0 \in E \\ \delta_0(E) = 0, \text{ wenn } 0 \notin E \end{cases}.$$

δ_0 ist nun offenbar beschränkt und von außen regulär, da jedes V mit $E \subset V$ die 0 enthält und somit $|\mu|(E) = \inf |\mu|(V)$ gilt. Weiterhin ist δ_0 von innen regulär, denn wenn wir eine kompakte Menge K mit $K \subset E$ haben, so ist auch $K \cup \{0\}$ kompakt und somit muss $|\mu|(E) = \sup |\mu|(K)$ gelten. Also ist $\delta_0 \in M(G)$ und da $\mu * \delta_0 = \mu$ gilt, existiert eine Einheit.

4.2 Fourier-Transformationen auf $M(G)$

Zu jedem $\mu \in M(G)$ lässt sich die Fourier-Stieltjes-Transformation
$\hat{\mu} = \int_G (-x, \gamma) d\mu(x)$ definieren und die Menge all dieser Transformationen $B(\Gamma)$ definieren.

[**Theorem**] Diese Transformationen sind nun gleichmäßig stetig und beschränkt [1, vgl. S. 15].
Beweis:
Da $|\gamma(x)| = 1$ gilt, können wir sagen, dass $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq ||\mu||$, wodurch $\hat{\mu}$ beschränkt ist. Nun gilt aufgrund der Regularität von $|\mu|$, dass es für $\delta > 0$ eine kompakte Menge K gibt, sodass für ihr Komplement K' $|\mu|(K') < \delta$ gilt. Nun gilt für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| &= |\int_G (-x, \gamma_1) d\mu(x) - \int_G (-x, \gamma_2) d\mu(x)| \\
&= |\int_G (-x, \gamma_1) - \int_G (-x, \gamma_2) d\mu(x)| \\
&= |\int_G (-x, \gamma_1) - (-x, \gamma_2) d\mu(x)| \\
&= |\int_G (-x, \gamma_1) - (-x, \gamma_2) d\mu(x)| \\
&= |\int_G ((-x, \gamma_1) - (-x, \gamma_2))(x, \gamma_1) d\mu(x)| \\
&= |\int_G 1 - (-x, \gamma_2)(-x, -\gamma_1) d\mu(x)| \\
&= |\int_G 1 - (-x, \gamma_2 - \gamma_1) d\mu(x)| \\
&= |\int_G 1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2) d\mu(x)| \\
&\leq \int_G |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)| d\mu(x) \\
&= \int_G |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)| d|\mu|(x) \\
&= \int_K |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)| d|\mu| + \int_{K'} |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)| d|\mu|.
\end{aligned}$$

Definieren wir jetzt

$$N(K, \delta) = \{\gamma : (x, \gamma) \in U_\delta \ \forall x \in K\},\ U_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |1 - z| < \delta\}$$

und $\gamma_1 - \gamma_2 \in N(K, \delta)$, so ist der Integrand $|1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|$ kleiner als δ für $x \in K$, weshalb das Integral über K nicht größer als $\delta||\mu||$ sein kann und das zweite Integral über K' kleiner als $2||\mu|| = 2\delta$ sein, da der Integrand kleiner gleich 2 sein muss. Somit folgt bereits, dass $\hat{\mu}$ gleichmäßig stetig ist.

[**Theorem**] Weiterhin gilt für die Transformation $\widehat{\mu * \lambda} = \hat{\mu} \cdot \hat{\lambda}$, wodurch $B(\Gamma)$ zu einer Algebra gleichmäßig stetiger Funktionen auf Γ unter der punktweisen Multiplikation und Addition wird und die Abbildung $\mu \mapsto \hat{\mu}(\gamma)$ für $\gamma \in \Gamma$ ein komplexer Homomorphismus wird [1, vgl. S. 15][4, vgl. S. 206].
Beweis:

Wir wissen bereits, dass $\int_G f d(\mu * \lambda) = \int_G \int_G f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y)$ gilt, weshalb

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu * \lambda}(\gamma) &= \int_G (-z, \gamma) d(\mu * \lambda)(z) \\
&= \int_G \int_G (-x-y, \gamma) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G \int_G (-x, \gamma)(-y, \gamma) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G \int_G (-x, \gamma)(-y, \gamma) d\mu(x) d\lambda(y) \\
&= \int_G (-x, \gamma) d\mu(x) \int_G (-y, \gamma) d\lambda(y) \\
&= \hat{\mu}(\gamma) \hat{\lambda}(\gamma)
\end{aligned}$$

gelten muss. Somit gilt die Gleichung.

Kapitel 5

Die einfach integrierbaren Funktionen $L^1(G)$

Faltung und Transformation lassen sich nun nicht nur für $M(G)$, sondern auch für $L^1(G)$ definieren. Hierbei wird auch $L^1(G)$ mit der Faltung als Multiplikation zu einer Banachalgebra. Ebenfalls ähnlich ist, dass die Menge aller Fourier-Transformationen auf $L^1(G)$ wie die Menge aller Fourier-Stieltjes-Transformationen $B(\Gamma)$ eine Algebra unter den punktweisen Operationen bildet.

5.1 Faltung in $L^1(G)$

Seien f und g Borelfunktionen (also Funktionen, deren Urbilder offener Mengen Borelmengen sind) auf einer LKA-Gruppe G, so definieren wir mit

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$$

die Faltung. Diese ist natürlich nur definiert, wenn

$$\int_G |f(x-y)g(y)|dy < \infty.$$

Wir sehen uns nun $L^1(G)$ an und wollen Folgendes zeigen:

[**Theorem**] $L^1(G)$ wird mit der Faltung zu einer kommutativen Banachalgebra [1, vgl. S. 3 ff.].
Beweis:

Wir müssen 4 Dinge zeigen:

- Kommutativität der Faltung.
- Subadditivität der Norm.
- Geschlossenheit der Faltung.
- Assoziativität der Faltung.

Aufgrund der Translationsinvarianz gilt:

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_G f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_G f(-y)g(y+x)dy \\ &= \int_G f(y)g(-y+x)dy = (g*f)(x),\end{aligned}$$

womit die Faltung kommutativ ist. Um die Subadditivität zu zeigen, benötigen wir den Satz von Fubini. Also müssen wir zeigen, dass $f(x-y)g(y)$ borel-messbar auf $G \times G$ ist. Dazu sehen wir uns eine offene Menge V in der komplexen Ebene an und definieren $E = f^{-1}(V)$, $E' = E \times G$ und $E'' = \{(x,y) \in G \times G : x - y \in E\}$. Da f per Definition eine Borelfunktion ist, ist E eine Borelmenge, wodurch auch $E \times G$ eine Borelmenge wird. Nun ist die Abbildung, die (x,y) nach $(x+y, y)$ abbildet, ein Homöomorphismus. Zudem bildet sie E' nach E'' ab, wodurch E'' ebenfalls eine Borelmenge ist. Nun ist $f(x-y) \in V \Leftrightarrow (x,y) \in E''$, weshalb $f(x-y)$ eine Borelfunktion in $G \times G$ ist. Somit ist auch $f(x-y)g(y)$ eine Borelfunktion. Daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}||f*g||_1 &= \int_G \int_G |f(x-y)g(y)|dydx \\ &= \int_G \int_G |f(x-y)g(y)|dxdy \\ &= \int_G |g(y)| \int_G |f(x)|dxdy \\ &= ||f||_1 \int_G |g(y)|dy \\ &= ||f||_1 ||g||_1.\end{aligned}$$

Wenn nun $\phi(x) = \int_G |f(x-y)g(y)|dy$ gesetzt wird, so können wir daher sagen, dass $\phi \in L^1(G)$ gilt. Also wissen wir, dass $\phi(x) < \infty$ für fast alle x gelten muss, weshalb $f*g$ für fast alle x existiert. Weiterhin wissen wir, dass $|(f*g)(x)| \leq \phi(x)$ gelten muss, weshalb die Subadditivität gelten muss und $f*g \in L^1(G)$. Da $f*g$ für fast alle x in $L^1(G)$ ist, ist auch $f*(g*h)$ für fast alle x definiert. Nun gilt

$$\begin{aligned}
(f*(g*h))(x) &= \int_G f(x-z)((g*h)(z))dz \\
&= \int_G \int_G f(x-z)g(z-y)h(y)dydz \\
&= \int_G \int_G f(x-z)g(z-y)h(y)dzdy \\
&= \int_G \int_G f(x-z-y)g(z)h(y)dzdy \\
&= \int_G \int_G (f*g)(x-y)h(y)dy \\
&= ((f*g)*h)(x).
\end{aligned}$$

Damit gilt auch die Assoziativität.
Somit können wir sagen, dass $L^1(G)$ mit der Faltung als Multiplikation zu einer kommutativen Banachalgebra wird, da $L^1(G)$ zusätzlich ein Banachraum ist. Nun sind also sowohl $M(G)$ als auch $L^1(G)$ mit der Faltung als Multiplikation kommutative Banachalgebren. Tatsächlich ist $L^1(G)$ sogar eine Unteralgebra von $M(G)$. Um dies zu sehen, können wir durch $f \in L^1(G)$ ein Maß $\mu_f \in M(G)$ mit $\mu_f(E) = \int_E f(x)dx$ (für eine Borelmenge E in G) generieren lassen. Jedes solches Maß μ_f ist gleichmäßig stetig bezüglich des Haar-Maßes [1, vgl. S. 16]. Laut dem Radon-Nikodym Theorem gilt auch die Umkehrung, dass alle gleichmäßig stetigen Maße in $M(G)$ die Form μ_f für ein $f \in L^1(G)$ haben. Da $f, g \in L^1(G)$ miteinander identifiziert werden, wenn sie sich lediglich auf einer Menge mit Haar-Maß 0 unterscheiden, können wir sagen, dass die Abbildung zwischen f und μ_f bijektiv ist. Somit ist $L^1(G)$ also eine Unteralgebra von $M(G)$. Die Definition der Faltung lässt sich tatsächlich noch erweitern, wobei wir dies nur skizzieren werden, da in den Quellen, auf die sich diese Arbeit bezieht auch nur skizziert wurde. Dafür definieren wir zunächst das Konzept eines homogenen Banachraumes. Ein homogener Banachraum ist ein linearer Unterraum B von $L^1(G)$, welcher mit einer Norm $||\ ||_B$ ausgestattet wird, sodass $||f||_B \geq ||f||_1\ \forall f \in B$ gilt und B ein Banachraum bezüglich dieser Norm ist und folgende Eigenschaften erfüllt:

- $||f_\tau||_B = ||f||_B$, wobei $f \in B$, $\tau \in \mathbb{T}$ und $f_\tau(x) = f(x-\tau)$.
- $lim_{\tau \to \tau_0} ||f_\tau - f_{\tau_0}||_B = 0\ \forall f \in B, \tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$.

(Sieht man sich für $1 < p < \infty$ den Raum $L^p(G)$ an, so sieht man, dass dieser die Kriterien offenbar erfüllt.) [4, vgl. S. 14]. Nun können wir die Definition der Faltung erweitern, indem wir uns den homogenen Banachraum B anschauen. Denn wenn $f \in L^1(G)$ und $g \in B$, so kann gezeigt werden, dass $f * g \in B$ und $||f*g||_B \leq ||f||_1 ||g||_B$ gilt [4, vgl. S. 203].

5.2 Fourier-Transformationen auf $L^1(G)$

Sei $f \in L^1(G)$, so definieren wir mit $\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)dx$ die Fourier-Transformation, wobei $\gamma \in \Gamma$ ist. Mit $A(\Gamma)$ bezeichnen wir die Menge aller solcher Funktionen $\hat{f}$.

[**Theorem**] Nun ist $A(\Gamma)$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation eine Algebra [1, vgl. S. 9].

Beweis:

$$\begin{aligned}
\widehat{f+g}(\gamma) &= \int_G (f+g)(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G f(x)(-x,\gamma)dx + \int_G g(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \hat{f}(\gamma) + \hat{g}(\gamma)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\gamma) &= \int_G (f*g)(x)(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G \int_G f(x-y)g(y)dy(-x,\gamma)dx \\
&= \int_G \int_G f(x-y)g(y)(y-x,\gamma)(-y,\gamma)dydx \\
&= \int_G g(y)(-y,\gamma) \int_G f(x-y)(y-x,\gamma)dxdy \\
&= \int_G g(y)(-y,\gamma)dy \int_G f(x-y)(y-x,\gamma)dx \\
&= \hat{g}(\gamma)\hat{f}(\gamma).
\end{aligned}$$

Die Funktionen in $A(\Gamma)$ sind stetig. Tatsächlich gilt:

[**Theorem**] Die schwache Topologie, die $A(\Gamma)$ auf Γ induziert, stimmt mit der bisherigen Topologie überein [1, vgl. S. 9 f.].
Beweis: Wir zeigen, dass mithilfe der offenen Mengen in Γ eine Basis für die schwache Topologie definiert werden kann. Dafür definieren wir

$$N(K,r) := \{\gamma : (x,\gamma) \in U_r \ \forall x \in K\},$$

wobei K eine kompakte Menge in G ist und

$$U_r := \{z \in \mathbb{C} : |1-z| < r\}$$

ist. Sei V eine Umgebung von γ_0, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\gamma_0 = 0$ setzen können. Wir wollen nun zeigen, dass $\gamma_0 + N(K,r) \subset V$ beziehungsweise $N(K,r) \subset V$. Nun gibt es per Definition $f_1, \dots, f_n \in L^1(G)$ und $\epsilon > 0$, sodass

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{\gamma : |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| < \epsilon\} \subset V$$

gilt. Nun liegt $C_c(G)$ dicht in $L^1(G)$, weshalb angenommen werden kann, dass $f_1, \dots, f_n$ außerhalb einer kompakten Menge $K \subset G$ verschwinden. Wählt man nun $r < \frac{\epsilon}{\max_i ||f||_1}$ und $\gamma \in N(K,r)$, so gilt

$$|\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| \leq \int_K \underbrace{|(-x,\gamma) - 1|}_{<r} |f_i(x)|dx \leq r||f||_1 < \epsilon.$$

Daher muss $N(K,r) \subset V$ gelten und die Behauptung gilt.

Kapitel 6

Weitere Theoreme über Transformationen auf $M(G)$ und $L^1(G)$

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Eindeutigkeitstheorem für $M(G)$, dem Umkehrungstheorem und dem Planchereltheorem. Diese Theoreme benötigen das Vorwissen aus den beiden vorhergehenden Kapiteln und bekommen daher ihr eigenes Kapitel.

6.1 Eindeutigkeitstheorem

[**Theorem**]Das Eindeutigkeitstheorem besagt, dass $\hat{\mu} = 0$ bereits $\mu = 0$ impliziert, wenn $\mu \in M(\Gamma)$ ist [1, vgl. S. 17].
Beweis:
Zunächst beweisen wir, dass $\int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(\gamma) = 0 \ \forall x \in G$ bereits $\mu = 0$ impliziert, wenn $\mu \in M(\Gamma)$ gilt. Sei $f \in L^1(G)$, so gilt

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \hat{f}(\gamma) d\mu(\gamma) &= \int_\Gamma \int_G f(x)(-x, \gamma) dx d\mu(\gamma) \\ &= \int_G \int_\Gamma f(x)(-x, \gamma) d\mu(\gamma) dx \\ &= \int_G f(x) \underbrace{\int_\Gamma (-x, \gamma) d\mu(\gamma)}_{=0} dx = 0\end{aligned}$$

und da $A(\Gamma)$ dicht in $C_0(\Gamma)$ (dem Raum der stetigen Funktionen in Γ, die bei $\pm\infty$ verschwinden) liegt, weshalb $\int_\Gamma \phi d\mu = 0 \ \forall \phi \in C_0(\Gamma)$ gilt und womit $\mu = 0$. Der Pontryagin Dualitätssatz, welchen wir uns später noch anschauen werden, impliziert dann, dass $\mu \in M(G)$ und $\hat{\mu}(\gamma) = 0 \ \forall \gamma \in \Gamma$ bereits $\mu = 0$ impliziert. Somit haben wir das Eindeutigkeitstheorem hergeleitet.

6.2 Umkehrungstheorem

Zunächst müssen wir das Konzept einer positiv-definiten Funktion definieren. Eine Funktion ϕ auf G heißt positiv-definit, wenn

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \overline{c_m} \phi(x_n - x_m) \geq 0$$

für jede Wahl von $x_1, \ldots, x_N \in G$ und $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ [1, vgl. S. 17 f.]. Sei nun $B(G)$ die Menge aller Funktionen auf G, die sich als Integral

$$\int_{\Gamma} (x, \gamma) d\mu(\gamma)$$

darstellen lassen. Nun ist $B(G)$ gleichbedeutend mit der Menge aller endlichen linearen Kombinationen stetiger, positiv-definiter Funktionen auf G [1, vgl. S. 21].

[**Theorem**] Das Umkehrungstheorem besagt nun, dass $\hat{f}$ nicht nur die Transformation von f ist, sondern auch $f(-x)$ unter gewissen Umständen die Fourier-Transformation von $\hat{f}(x)$ ist [1, vgl. S. 21 f.]. Es gilt:

- Sei $f \in B^1(G)$, so ist $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.
- Ist das Haar-Maß von G fest, so lässt sich das Haar-maß von Γ normalisieren, sodass $f(x) = \int_{\Gamma} \hat{f}(\gamma)(x, \gamma) d\gamma$ für alle $f \in B^1(G)$ gilt.

Beweis:
$B^1(G)$ steht für $L^1(G) \cap B(G)$. Wenn wir eine Funktion f mit $f(x) = \int_{\Gamma} (x, \gamma) d\mu(\gamma)$ haben, so bezeichnen wir $\mu_f = \mu$, um die Verbindung zwischen f und μ festzuhalten. Sei nun $f \in B^1$ und $h \in L^1(G)$, so gilt

$$\begin{aligned}
(h * f)(0) &= \int_G h(-x) f(x) dx \\
&= \int_G h(-x) \int_{\Gamma} (x, \gamma) d\mu_f(\gamma) dx \\
&= \int_G \int_{\Gamma} h(-x)(x, \gamma) d\mu_f(\gamma) dx \\
&= \int_{\Gamma} \int_G h(-x)(x, \gamma) dx d\mu_f(\gamma) \\
&= \int_{\Gamma} \hat{h}(\gamma) d\mu_f(\gamma).
\end{aligned}$$

Sei nun $g \in B^1(G)$, so folgt daraus

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \hat{h}\hat{g}d\mu_f &= \int_\Gamma \widehat{h*g}d\mu_f \\ &= ((h*g)*f)(0) \\ &= (h*(g*f))(0) \\ &= (h*(f*g))(0) \\ &= ((h*f)*g)(0) \\ &= \int_\Gamma \widehat{h*f}d\mu_g \\ &= \int_\Gamma \hat{h}\hat{f}d\mu_g.\end{aligned}$$

Nun liegt $A(\Gamma)$ dicht in $C_0(\Gamma)$ und somit folgt

$$\hat{g}d\mu_f = \hat{f}d\mu_g$$

aus der Gleichung

$$\int_\Gamma \hat{h}\hat{g}d\mu_f = \int_\Gamma \hat{h}\hat{f}d\mu_g.$$

Um nun die beiden Aussagen zu zeigen, konstruieren wir ein positives lineares Funktional T auf $C_c(\Gamma)$. Wenn K der Träger einer Abbildung $\psi \in C_c(\Gamma)$ ist, so können wir für jedes $\gamma_0 \in K$ eine Funktion $u \in C_c(G)$ finden, sodass $\hat{u}(\gamma_0) \neq 0$. Dies ist möglich, da $C_c(G)$ dicht in $L^1(G)$ liegt. Nun ist die Fourier-Transformation von $u * \tilde{u}$ (mit $\tilde{u}(x) = \overline{u(-x)}$) nirgends negativ, denn

$$\widehat{u*\tilde{u}} = \hat{u}\hat{\tilde{u}} = \hat{u}\overline{\hat{u}} \geq 0$$

und da $\hat{u}(\gamma_0) \neq 0$ ist auch $\overline{\hat{u}(\gamma_0)} \neq 0$ und daher muss $\widehat{u*\tilde{u}}(\gamma_0) > 0$ sein. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Funktionen $u_1, \ldots, u_n$, sodass es

$$g = u_1 * \tilde{u}_1 + \cdots + u_n * \tilde{u}_n$$

gibt, mit $\hat{g} > 0$ auf ganz K. Nun ist $g \in C_c(G)$ und daher folgt bereits, dass $g \in B^1$ gilt. Wir definieren nun T durch

$$T\psi = \int_\Gamma \left(\frac{\psi}{\hat{g}}\right) d\mu_g.$$

$T\psi$ ist nun wohldefiniert, denn würden wir g durch f austauschen (, wobei $f \in B^1$ und $\hat{f}$ auf K nicht 0 ist), so würde sich der Wert von $T\psi$ nicht ändern. Dies folgt aus der Gleichung $\hat{g}d\mu_g = \hat{f}d\mu_f$, denn diese impliziert $\int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}}\hat{f}d\mu_g = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}}\hat{g}d\mu_f$. Offenbar ist T linear und da g positiv definit ist, wissen wir, dass $\mu_g \geq 0$ gelten muss. Wenn also $\psi \geq 0$ ist, dann muss auch $T\psi \geq 0$ sein. Nun gibt es ψ und μ_f, sodass $\int_\Gamma \psi d\mu_f \neq 0$. Somit muss

$$T(\psi\hat{f}) = \int_\Gamma \left(\frac{\psi\hat{f}}{\hat{g}}\right) d\mu_g = \int_\Gamma \psi d\mu_f \neq 0$$

gelten. Daher ist $T \neq 0$. Wir wählen nun $\psi \in C_c(\Gamma)$ und $\gamma_0 \in \Gamma$. Zusätzlich konstruieren wir wieder g, sodass $\hat{g} > 0$ auf K und $K + \gamma_0$. Wenn wir nun $f(x) = (-x, \gamma_0)g(x)$ setzen, so erhalten wir

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma_0)g(x)(-x, \gamma)dx = \int_G (-x, \gamma_0 + \gamma)g(x)dx = \hat{g}(\gamma + \gamma_0)$$

und $\mu_f(E) = \mu_g(E - \gamma_0)$. Weiterhin definieren wir $\psi_0(\gamma) = \psi(\gamma - \gamma_0)$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
T\psi_0 &= \int_\Gamma \left(\frac{\psi(\gamma - \gamma_0)}{\hat{g}(\gamma)}\right) d\mu_g(\gamma) \\
&= \int_\Gamma \left(\frac{\psi(\gamma)}{\hat{g}(\gamma + \gamma_0)}\right) d\mu_f(\gamma) \\
&= \int_\Gamma \left(\frac{\psi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)}\right) d\mu_f(\gamma) \\
&= T\psi.
\end{aligned}$$

Somit ist T translationsinvariant. Hieraus folgt $T\psi = \int_\Gamma \psi(\gamma)d\gamma$, wobei $d\gamma$ das Haar-Maß ist. Somit gilt also

$$\int_\Gamma \psi d\mu_f = T(\psi \hat{f}) = \int_\Gamma \psi \hat{f} d\gamma \ \forall \psi \in C_c(\Gamma)$$

und daraus folgt $\hat{f}d\gamma = d\mu_f$. Nun ist μ_f ein endliches Maß und somit ist auch $\hat{f}d\gamma$ endlich, woraus $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$ folgt. Setzt man $\hat{f}d\gamma = d\mu_f$ nun in $f(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)d\mu_f(\gamma)$ ein, so erhält man die Umkehrungsformel $f(x) = (x, \gamma)\hat{f}d\gamma$, womit der Beweis fertig ist.
Wie bereits erwähnt, ist das Haar-Maß lediglich bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig. Mithilfe des Umkehrungstheorems lässt es sich nun normalisieren. Ist das Haar-Maß für G gegeben, so lässt sich das Haar-Maß für Γ eindeutig festlegen. Zusätzlich können wir das Haar-Maß für diskrete und kompakte Gruppen normalisieren (und somit eindeutig festlegen). Wir legen nun fest, dass das Maß von G zu 1 normiert wird, wenn G kompakt ist und dass das Maß einer Ein-Punkt-Menge 1 ist, wenn G diskret ist. Dabei gilt:

[**Theorem**] Wenn wir das Haar-Maß wie oben angegeben normalisieren, so ist die Umkehrungsformel erfüllt.
Beweis:
Um zu beweisen, dass die Umkehrungsformel gilt, beweisen wir, dass sie für eine Funktion (nicht 0) und ihre Fourier-Transformation gilt. Wir wählen $f = 1$ und G kompakt. Nun gilt

$$\hat{f}(0) = \int_G \underbrace{(x, 0)}_{=1} f(x)dx = 1,$$

da das Maß von G gleich 1 ist und $\hat{f}(\gamma) = 0$, wenn $\gamma \neq 0$ ist. Sei nun m_Γ das - mithilfe des Umkehrungstheorems - normalisierte Haar-Maß von Γ. Dann gilt $1 = f(0) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma) = m_\Gamma(\{0\})$. Also hat jeder Punkt das Maß 1 bezüglich m_Γ. Sei G nun diskret, so hat jeder Punkt Maß 1 und wir legen

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x = 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

fest. Dann ist

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx = 1,$$

da jeder Punkt Maß 1 hat. Somit gilt

$$m(\Gamma) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(0,\gamma)d\gamma = f(0) = 1$$

sofern die Umkehrungsformel gilt.

6.3 Plancherel Theorem

Das Plancherel Theorem besagt, dass die Fourier-Transformation zwischen $L^2(G)$ und $L^2(\Gamma)$ normerhaltend ist. Formal bedeutet das:

[**Theorem**] Die Fourier-Transformation beschränkt auf $(L^1 \cap L^2)(G)$ ist eine Isometrie auf eine dichte Teilmenge von $L^2(\Gamma)$ und kann somit eindeutig zu einer Isometrie zwischen $L^2(G)$ und $L^2(\Gamma)$ erweitert werden [1, vgl. S. 26].
Beweis:
Sei $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$ und $g = f * \tilde{f}$. Dann ist $g \in L^1(G)$, da $f, \tilde{f} \in L^1(G)$ und g ist stetig und positiv definit. Weiterhin gilt

$$|\hat{g}| = |\widehat{f * \tilde{f}}| = |\hat{f}||\hat{\tilde{f}}| = |\hat{f}|^2$$

und mithilfe des Umkehrungstheorems erhalten wir

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_G f(x)\tilde{f}(-x)dx = g(0) = \int_\Gamma \hat{g}(\gamma)(0,\gamma)d\gamma = \int_\Gamma |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

Somit gilt $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$. Sei Φ die Menge aller $\hat{f} \in A(\Gamma)$ mit $f \in (L^1 \cap L^2)(G)$, so ist Φ invariant bezüglich der Multiplikation mit (x,γ), da $(L^1 \cap L^2)(G)$ translationsinvariant ist. Sei nun $\psi \in L^2(\Gamma)$, sodass $\int_\Gamma \phi\overline{\psi}d\gamma = 0 \ \forall \phi \in \Phi$ gilt, so gilt auch

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}(x,\gamma)d\gamma = 0$$

und da $\phi\overline{\psi} \in L^1(\Gamma)$ impliziert das Eindeutigkeitstheorem, dass $\phi\overline{\psi} = 0$ fast überall für alle $\phi \in \Phi$ gelten muss. Nun ist $(L^1 \cap L^2)(G)$ invariant bezüglich der Multiplikation mit (x,γ) $\forall \gamma \in \Gamma$ und somit ist Φ translationsinvariant. Somit gibt es für jedes $\gamma_0 \in \Gamma$ ein $\phi \in \Phi$, welches in einer Umgebung von γ_0 nicht 0 ist. Somit muss $\psi = 0$ sein, womit 0 das einzige Element in $L^2(\Gamma)$ ist, welches zu Φ orthogonal ist. Somit liegt Φ dicht in $L^2(\Gamma)$.

Kapitel 7

Der Pontryagin Dualitätssatz

Eine der wichtigsten Aussagen in der harmonischen Analysis ist der Dualitätssatz von Pontryagin. Dieser sagt aus, dass für eine LKA-Gruppe G und ihre Dualgruppe Γ nicht nur gilt, dass Γ die Dualgruppe von G ist, sondern dass auch G die Dualgruppe von Γ ist. Formal bedeutet dies:

[**Theorem**] Es gibt einen Isomorphismus, der auch ein Homöomorphismus ist zwischen G und Γ [1, vgl. S. 27 f.].

7.1 Hilfsaussagen zum Beweis des Dualitätssatzes

Bevor wir den Satz selbst beweisen, benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen.

[**Theorem**] (x, γ) ist stetig auf (G, Γ) [1, vgl. S. 10].
Beweis:
Mithilfe der Gleichung

$$\hat{f}(\gamma)(x, \gamma) = \hat{f}_x(\gamma)$$

ergibt sich die Stetigkeit von (x, γ) auf (G, Γ), wenn $\hat{f}_x(\gamma)$ für alle $f \in L^1(G)$ stetig auf (G, Γ) ist. Wir setzen x_0, γ_0 und $\epsilon > 0$, sodass es Umgebungen V von x_0 und W von γ_0 gibt, sodass

$$||f_x - f_{x_0}||_1 < \epsilon$$
$$|\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \epsilon$$

für alle $x \in V$, $\gamma \in W$ gilt. Dies ist möglich, da sowohl $\hat{f}_{x_0}$, als auch die Translation stetig sind. Da

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma)| &= |\int_\Gamma f(y-x)(-y,\gamma)d\gamma - \int_\Gamma f(y-x_0)(-y,\gamma)d\gamma| \\
&= |\int_\Gamma [f(y-x) - f(y-x_0)](-y,\gamma)d\gamma| \\
&\leq \int_\Gamma |[f(y-x) - f(y-x_0)](-y,\gamma)|d\gamma \\
&= \int_\Gamma |f(y-x) - f(y-x_0)|d\gamma \\
&= ||f_x - f_{x_0}||_1
\end{aligned}$$

gilt, folgt

$$|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < 2\epsilon$$

für $x \in V$ und $\gamma \in W$, woraus die Behauptung folgt.

[**Theorem**] Γ ist punktetrennend auf G [1, vgl. S. 24].
Beweis:
Wenn $x_0 \in G$ mit $x_0 \neq 0$ ist, so können wir eine Umgebung der 0 in G wählen, sodass $x_0 \notin V$. Somit gibt es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $(x_0, \gamma) \neq 1$. Dadurch ist Γ auf G punktetrennend, denn aus $x_1 \neq x_2$ folgt $(x_1 - x_2, \gamma) \neq 1$ und somit $(x_1, \gamma) \neq (x_2, \gamma)$.

[**Theorem**] Wenn E eine nichtleere, offene Menge in Γ ist, so gibt es ein $\hat{f} \in A(\Gamma)$ mit $\hat{f} \neq 0$, sodass $\hat{f}(\gamma) = 0$ außerhalb von E [1, vgl. S. 27].
Beweis:
Sei K eine kompakte Teilmenge von E mit $m(K) > 0$ und sei V eine kompakte Nullumgebung, sodass $K + V \subset E$. Nun setzen wir $\hat{f} = \hat{g} * \hat{h}$, wobei $\hat{g}$ und $\hat{h}$ jeweils charakteristische Funktionen für K beziehungsweise V sind. Dann ist $\hat{f}(\gamma) = 0$, wenn $\gamma \notin K + V$ gilt und da wir $\hat{g}, \hat{h} \in L^2(\Gamma)$ haben, muss auch $\hat{g} * \hat{h} \in A(\Gamma)$ gelten. Zudem ist

$$\int_\Gamma \hat{f}(\gamma) d\gamma = m(K)m(V) > 0$$

womit $\hat{f} \neq 0$ ist.

7.2 Beweis des Dualitätssatzes

Wir wissen, dass (x, γ) eine stetige Funktion auf $G \times \Gamma$ ist, weshalb $x \in G$ ein stetiger Charakter auf Γ ist. Sei $\hat{\Gamma}$ die Dualgruppe von Γ, so gilt daher $x \in \hat{\Gamma}$ und es gibt eine natürliche Abbildung α, die so definiert wird, dass $(x, \gamma) = (\gamma, \alpha(x))$ mit $x \in G$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt. $\alpha(x)$ bildet also γ auf $\gamma(x)$. Es soll nun gezeigt werden, dass α so ein Isomorphismus und Homöomorphismus ist. Zunächst lässt sich feststellen, dass

$$\begin{aligned}
(\gamma, \alpha(x+y)) &= (x+y, \gamma) \\
&= (x, \gamma)(y, \gamma) \\
&= (\gamma, \alpha(x))(\gamma, \alpha(y)) \\
&= (\gamma, \alpha(x) + \alpha(y))
\end{aligned}$$

gilt, weshalb α Homomorphismus ist. Da Γ punktetrennend auf G ist, wissen wir, dass α injektiv sein muss. Daher ist α ein Isomorphismus, womit G und $\alpha(G)$ zueinander isomorph sind. Nun können wir

$$V = \{x \in G : |1 - (x, \gamma)| < r \ \forall \gamma \in C\}$$

und

$$W = \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} : |1 - (\gamma, \hat{\gamma})| < r \ \forall \gamma \in C\}$$

für eine kompakte Menge C in Γ definieren und es gilt, dass die Mengen V eine Umgebung der Einheit in G bilden und die Mengen W eine Umgebung der Einheit in $\hat{\Gamma}$. Nun gilt

$$\alpha(V) = W \cap \alpha(G)$$

und somit können wir sagen, dass α und α^{-1} an der 0 stetig sind. Da α ein Isomorphismus ist, gilt dies auch für alle Translationen von α und daher für alle Punkte in G oder $\alpha(G)$. Damit ist α ein Homöomorphismus von G in $\hat{\Gamma}$. Somit können wir sagen, dass $\alpha(G)$ lokalkompakt bezüglich der relativen Topologie, die $\alpha(G)$ als Teilmenge von $\hat{\Gamma}$ hat, ist. Um zu zeigen, dass $\alpha(G) = \hat{\Gamma}$ gilt, zeigen wir 2 weitere Dinge.

- $\alpha(G)$ ist abgeschlossen in $\hat{\Gamma}$.
- $\alpha(G)$ liegt dicht in $\hat{\Gamma}$.

Sei $\hat{\gamma}_0 \in \overline{\alpha(G)}$ und sei U eine präkompakte (der Abschluss von U nämlich $\overline{U}$ ist kompakt) Umgebung von $\hat{\gamma}_0$. Nun gilt, dass $\alpha(G) \cap \overline{U}$ kompakt ist, da $\alpha(G)$ lokalkompakt ist. Somit wissen wir, dass $\alpha(G) \cap \overline{U}$ abgeschlossen ist, da $\hat{\Gamma}$ ein Hausdorffraum ist. Da $\hat{\gamma}_0$ nun im Abschluss von $\alpha(G) \cap \overline{U}$ liegt, wissen wir daher, dass $\hat{\gamma}_0 \in \alpha(G)$ gilt und $\alpha(G)$ somit abgeschlossen ist. Wir nehmen nun an, dass $\alpha(G)$ nicht dicht in $\hat{\Gamma}$ liegt. Es gibt nun eine Funktion $F \in A(\hat{\Gamma})$, die nicht 0 ist, aber an allen Punkten in $\alpha(G)$ 0 ist. Sei nun $\phi \in L^1(\Gamma)$, so ist

$$F(\hat{\gamma}) = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma, \hat{\gamma})d\gamma$$

mit $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$. Nach Voraussetzung ist nun $F(\alpha(x)) = 0$ für alle $x \in G$, weshalb

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)(-x, \gamma)d\gamma = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma, \alpha(x))d\gamma = 0$$

gilt. Daher muss $\phi = 0$ sein und somit muss $F = 0$ sein, wodurch ein Widerspruch entsteht. Daher liegt $\alpha(G)$ dicht in Γ und da $\alpha(G)$ abgeschlossen ist, ist $\alpha(G) = \hat{\Gamma}$. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Kapitel 8

Fast-periodische Funktionen und die Bohr-Kompaktifizierung

8.1 Bohr-Kompaktifizierung

Wir können nun jede LKA-Gruppe kompaktifizieren, also ihr eine kompakte LKA-Gruppe $\overline{G}$ zuordnen, in der sie dicht liegt. Dafür benötigen wir zunächst einmal zwei Theoreme. Das erste Theorem brauchen wir hier nur für den Beweis des zweiten.

[**Theorem**] Sei G eine diskrete LKA-Gruppe, so hat $L^1(G)$ als Banachalgebra bezüglich der Faltung eine Einheit [1, vgl. S. 6].
Beweis:
Sei G diskret mit normalisiertem Haar-Maß ($m(E) = 1$, wenn E eine Ein-Punkt-Menge ist), so gilt

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(x - y)g(y)$$

und wenn wir

$$e : \begin{cases} e(x) = 1 \text{ wenn } x = 0 \\ e(x) = 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

definieren, so ist $e \in L^1(G)$ und $(f * e) = f$.

[**Theorem**] Wenn G eine diskrete LKA-Gruppe ist, so ist Γ kompakt. Wenn G eine kompakte LKA-Gruppe ist, so ist Γ diskret [1, vgl. S. 10].
Beweis:
Sei G diskret, so hat $L^1(G)$ nach unserem vorhergehenden Theorem bezüglich der Faltung eine Einheit. Damit muss der maximale Idealraum Γ kompakt sein. Sei G nun kompakt und das Haar-Maß wieder entsprechend normalisiert ($m(G) = 1$), so gilt

$$\int_G (x, \gamma) dx = \begin{cases} 1 \text{ wenn } \gamma = 0 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für $\gamma = 0$ ist dies offensichtlich. Wir müssen daher lediglich den Fall $\gamma \neq 0$ untersuchen. Wenn $\gamma \neq 0$ ist, dann gibt es ein $x_0 \in G$, sodass $(x_0, \gamma) \neq 1$. Also haben wir

$$\int_G (x, \gamma) dx = (x_0, \gamma) \int_G (x - x_0, \gamma) dx = (x_0, \gamma) \int_G (x, \gamma) dx$$

und da $(x_0, \gamma) \neq 1$ ist, muss $\int_G (x, \gamma) dx = 0$ sein. Sei nun $f(x) = 1 \; \forall x \in G$, so ist $f \in L^1(G)$, da G kompakt ist und $m(G)$ somit endlich ist. Nun ist

$$\hat{f}(0) = \int_G f(x)(x, 0) dx = m(G) = 1$$

und für $\gamma \neq 0$

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(x, \gamma) d\gamma = \int_G (x, \gamma) d\gamma = 0.$$

Nun ist $\hat{f}$ stetig und somit können wir sagen, dass die Menge $\{0\}$ in Γ offen ist, womit Γ diskret ist.

Mithilfe des Pontryagin Dualitätssatzes lässt sich nun folgendes Theorem folgern:

[**Theorem**] Jede kompakte abelsche Gruppe ist die Dualgruppe einer diskreten abelschen Gruppe und jede diskrete abelsche Gruppe ist die Dualgruppe einer kompakten abelschen Gruppe [1, vgl. S. 29].

Mithilfe dieses Theorems können wir nun jede LKA-Gruppe kompaktifizieren. Dazu betrachten wir eine LKA-Gruppe G mit Dualgruppe Γ. Wir definieren Γ_d als Γ mit diskreter Topologie und $\overline{G}$ als Dualgruppe von Γ_d. Durch das folgende Theorem können wir dann zeigen, dass G dicht in $\overline{G}$ liegt, $\overline{G}$ also tatsächlich eine Kompaktifizierung von G ist. Wir definieren eine Abbildung β von G nach $\overline{G}$ durch

$$(x, \gamma) = (\gamma, \beta(x)),$$

für die gilt:

[**Theorem**] Die Abbildung β ist ein stetiger Isomorphismus von G in eine dichte Untergruppe $\beta(G)$ von $\overline{G}$ [1, vgl. S. 30].
Beweis:
Wir wissen, dass Γ auf G punktetrennend ist, womit β injektiv ist und ähnlich wie in unserem Beweis des Pontryagin Dualitätssatzes gilt

$$\begin{aligned}
(\gamma, \beta(x_1 + x_2)) &= (x_1 + x_2, \gamma) \\
&= (x_1, \gamma)(x_2, \gamma) \\
&= (\gamma, \beta(x_1))(\gamma, \beta(x_2)) \\
&= (\gamma, \beta(x_1) + \beta(x_2))
\end{aligned}$$

und somit ist β ein Homomorphismus. Folglich ist β ein Isomorphismus von G nach $\beta(G)$. Sei nun W eine Nullumgebung in $\overline{G}$. Wir wissen, dass eine Teilmenge von Γ_d genau dann kompakt ist, wenn sie endlich ist, da Γ_d diskret ist. Daher gibt es $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ und $r > 0$, sodass W die Menge

$$\{\overline{x} \in \overline{G} : |1 - (\gamma_i, \overline{x})| < r; \; i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

enthält, welche eine Nullumgebung in $\overline{G}$ ist. Die Umgebung

$$V = \{x \in G : |1 - (x, \gamma_i)| < r;\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

ist nun eine Nullumgebung in G und wenn $x \in V$ gilt, dann muss $\beta(x) \in W$ gelten. Somit ist β stetig bei 0 und durch Translation überall stetig. Nun müssen wir noch zeigen, dass $\beta(G)$ dicht in $\overline{G}$ liegt. Dazu sehen wir uns den Abschluss von $\beta(G)$ in $\overline{G}$ an, welchen wir H nennen. Angenommen $H \neq \overline{G}$, so ist $\overline{G}/H$ eine kompakte LKA-Gruppe, welche nicht trivial ist. Wir bezeichnen eine Abbildung γ von einer LKA-Gruppe G nach $\mathbb{C}$ mit

- $|\gamma(x)| = 1\ \forall x \in G$,
- $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)\ \forall x, y \in G$

als Charakter. Da $\overline{G}/H$ nicht trivial ist, muss es einen nichtstetigen Charakter ϕ geben, der nicht 1 ist. Die Abbildung $\overline{x} \mapsto \phi(\overline{x}+H)$ ist nun ein stetiger Charakter auf $\overline{G}$, welche 1 ist, wenn $\overline{x} \in H$ ist und nicht trivial. Somit muss es ein $\gamma_0 \in \Gamma$ geben mit $\gamma_0 \neq 0$, sodass

$$(x, \gamma_0) = (\gamma_0, \beta(x)) = 1\ \forall x \in G$$

gilt. Dadurch muss $\gamma_0 = 0$ gelten, womit wir einen Widerspruch haben und der Beweis vollständig ist.

Wenn wir eine LKA-Gruppe G haben, so ist G die Gruppe aller stetigen Charaktere auf Γ und $\overline{G}$ die Gruppe aller Charaktere auf Γ. Da G nun dicht in $\overline{G}$ liegt, wissen wir aufgrund des vorhergehenden Theorems also, dass sich jeder Charakter durch stetige Charaktere annähern lassen.

[**Theorem**] Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, $\epsilon > 0$ und ϕ ein Charakter auf Γ, so gibt es einen stetigen Charakter auf Γ, sodass

$$|\psi(\gamma_i) - \phi(\gamma_i)| < \epsilon\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

gilt [1, vgl. S. 31].
Beweis:
Wir wissen, dass $\phi \in \overline{G}$ ist und die Menge aller $\psi \in \overline{G}$ offen in $\overline{G}$ ist. Da $\beta(G)$ dicht in $\overline{G}$ liegt müssen sich die offene Menge und $\beta(G)$ schneiden. Somit ist das Theorem bewiesen.

8.2 Fast-periodische Funktionen

Den letzten Teil der Arbeit werden wir lediglich skizzieren, da dies in den aufgelisteten Quellen - insbesondere in [1] - ähnlich gehandhabt wurde. Um fast-periodische Funktionen zu definieren, müssen wir zunächst trigonometrische Polynome definieren. Diese sind endliche lineare Kombinationen von stetigen Charakteren auf der LKA-Gruppe G. Fast-periodische Funktionen sind nun Funktionen auf G, gegen die trigonometrische Polynome auf G gleichmäßig konvergieren [1, vgl. S. 32]. Die Menge der fast-periodischen Funktionen bezeichnen wir als $AP(G)$. Wir wissen, dass Γ auf G punktetrennend ist. Das Stone-Weierstrass-Theorem impliziert für die trigonometrischen Polynome als Algebra somit, dass diese eine Subalgebra von $C(G)$ bilden, wenn G kompakt ist und weiterhin dicht in $C(G)$ liegt. Folglich liegen sie auch dicht in $L^1(G)$ für $1 \leq p < \infty$, wenn G kompakt ist [1, vgl. S. 24]. Da die trigonometrischen Polynome gleichmäßig gegen die fast-periodischen Funktionen konvergieren, gilt somit

$$AP(G) = C(G),$$

wenn G kompakt ist [4, vgl. S. 207]. Die fast-periodischen Funktionen auf G sind weiterhin genau die Restriktionen - und zwar von stetigen Funktionen auf $\overline{G}$ - auf G. Dies liegt daran, dass trigonometrische Polynome gleichmäßig gegen fast-periodische Funktionen in G konvergieren und da G dicht in $\overline{G}$ liegt auch auf $\overline{G}$ konvergieren. Zudem kann jede stetige Funktion in $\overline{G}$ durch trigonometrische Polynome angenähert werden [4, vgl. S. 207].

Literaturverzeichnis

[1] Walter Rudin: *Fourier Analysis on Groups*, Dover Edition, New York: Dover Publications, Inc., 2017.

[2] Lynn H. Loomis: *Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Dover Edition, New York: Dover Publications, Inc., 2011

[3] Tomas Sauer: *Wavelets*, Vorlesungsskript, 2012, abgerufen am 03.10.2021

[4] Yitzhak Katznelson: *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3. Edition, Cambridge: Cambridge Univerity Press, 2004

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, ____(Name),

a) dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unzulässige Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie die wörtlich und sinngemäß übernommenen Passagen aus anderen Werken kenntlich gemacht habe.

b) Außerdem erkläre ich, dass ich der Universität ein einfaches Nutzungsrecht zum Zwecke der Überprüfung mittels einer Plagiatssoftware in anonymisierter Form einräume.

_____________________________________ _________________________________

Ort, Datum Unterschrift