Fakultät für Informatik und Mathematik

Bachelorarbeit

Symmetriestrukturen in der Musik

Zsuzsanna Huber

Universität Passau
Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt
Digitale Bildverarbeitung

Prof. Dr. Tomas Sauer

Studienfach: Internet Computing
Betreuer: Prof. Dr. Tomas Sauer
Datum: 9. Juli 2015

Danksagung

Ich bedanke mich herzlich beim Herrn Prof. Dr. Tomas Sauer, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, an meinem Wunschthema aus dem Gebiet der Musik zu arbeiten. Als Musikpädagogin war es mir eine große Freude, die Bereiche der Informatik und der Musik zum Abschluss des Bachelor-Studiums zu verbinden.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden relevante Aspekte der Gruppentheorie mathematisch und musikalisch betrachtet, charakterisiert und gegenübergestellt. Dabei können geometrische Objekte und musikalische Abschnitte einer Komposition verglichen werden. Dazu wird vorausgesetzt, dass das Objekt in seiner Form abgeschlossen ist und aus einer endlichen Anzahl an Punkten besteht. Auch das musikalische Motiv ist auf eine bestimmte Menge an Noten festgelegt. In der Verarbeitung werden Punkte des Objekts bzw. Töne vertauscht, was einer Permutation entspricht. Die Menge aller Permutationen fügen sich zu einer Permutationsgruppe.
In der Gruppentheorie ist eine weitere spezielle Gruppe enthalten: die Symmetriegruppe, die in musikalischen Kompositionen als Strukturierungsprinzip in wenigen Fällen angewandt wird. In musikalischen Werken ist die Bildung von Symmetrieformen ein Kompositionsprinzip, die aus mathematischer Sicht einer Untergruppe zuzuordnen sind.
Weiterhin wird die Anwendung *MUSYmmetry* beschrieben. Sie stellt eine praktische Umsetzung dieser Symmetriestrukturen dar. Der Benutzer wählt dabei ein Motiv selbst aus und damit kann eine musikalische Komposition generiert werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Woraus besteht Musik? Kann man sie einfach analysieren und sie aus einer kognitiven Sicht betrachten? Dies ist auf jeden Fall zu bejahen, doch der vollständige Umfang kann nicht erfasst werden und das macht die Musik komplex und lebendig.
Um Musik in ihre Bestandteile zu zerlegen, betrachten wir die unterschiedlichen Tätigkeitsebenen: Wahrnehmung von Musik in Form von Zuhören, das aktive „Musikmachen“ und das Komponieren als das Notieren von Musik, wie in *Abbildung 1.1* dargestellt. Die Musik ist ein Kommunikationsmittel, der all diese Bereiche in Zusammenhang bringt und in Beziehung setzt [14, S.4f.].

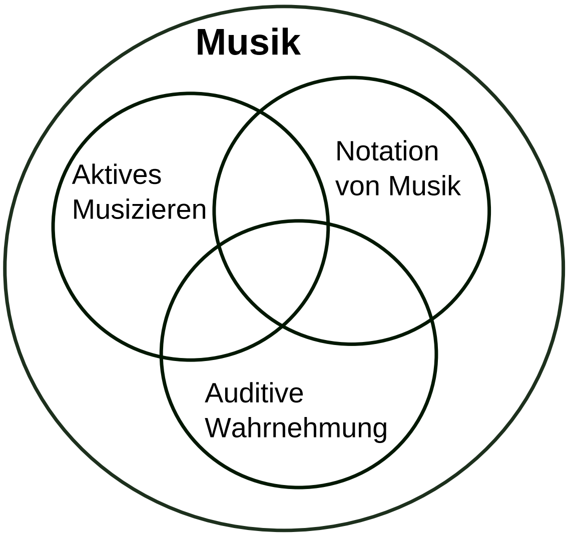


Abb. 1.1: Die Tätigkeitsebenen in der Musik. (Verfasser: Zsuzsanna Huber)

Die Kompositionstechnik hat sich im Laufe der Epochen geändert und ist von strukturellen Regeln geprägt. In der klassischen Musik sind sie z.B. in bestimmte Satzfolgen aufgebaut. Außerdem wurden in den musikalischen Epochen abweichende Kompositionsstile bevorzugt. Die Melodik, Harmonik und die Satztechnik sind dabei von entscheidender Bedeutung.
Im Mittelalter bis 1420 war die Gregorianik zunächst von der Einstimmigkeit über Verselbstständigung der Stimmführung bis hin zu komplexen Modellen geprägt [10, S.185] [21]. Bis 1600 entwickelte sich in der Renaissance das *Motiv* und dessen mehrstimmige Verarbeitung. Die Satztechnik der Polyphonie hat sich herausgebildet [10, S.229]. In der Epoche des Barocks [11, S.303ff.] dominierte die Homophonie. Die Wiener Klassik [11, S.367ff.] war vor allem mit einer klaren Gliederung und Periodik in der Komposition

bestimmt. Erst in der Romantik [11, S.435ff.] wurden diese Konturen verwischt, sogar Tonalität aufgelöst und in der Satztechnik gerät die Ausdruckkraft in den Vordergrund. Poly- und Homophonie sind zu dieser Zeit in den Kompositionen vergegenwärtigt. Im Impressionismus [11, S.515ff.] wird dieser Stil noch weiter ausgebaut. Expressionismus, Dodekaphonie, Serialismus, Neoklassizismus, Klangkomposition und Minimal Music bilden eine Kompositionsvielfalt im 20. Jahrhundert. Das Spiel mit Dissonanzen, Gleichwertigkeit von Tönen, Clustern, experimenteller Musik sind einige Beispiele dieser Epochen. Unterschiedliche kompositorische Ansätze und Prinzipien werden in der geschichtlichen Entwicklung angedeutet, darunter auch die Symmetrie. Sie versucht Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen [17, S.43]. *Die Idee der Symmetrie vereinfacht die Kompliziertheit der Welt, durch sie ist eine tiefe Einsicht in die kosmische Realität ermöglicht.[...] Durch Einfachheit und Wahrheit, Verständnis und Schönheit sind exakte Naturwissenschaften und schöne Künste miteinander verbunden* [17, S.44]. Symmetrie als eine Eigenschaft der Schönheit ist in der Musik als strukturelles Mittel anzusehen.
Inwieweit die unterschiedlichen Formen der Symmetrie in den Kompositionen verwendet werden, hängt vom Komponisten ab. Das Prinzip der Symmetrie bietet eine Vielfalt an Auswahl zur musikalischen Komposition. In einer guten Komposition werden aber die Erwartungen der Zuhörer unterbrochen und dadurch Langeweile vermieden. Es sollte darin eine Balance gefunden werden zwischen der Vorhersagbarkeit und Überraschungsmomenten [15, S.299]. Die Symmetrie ist also zwar ein wichtiges Mittel für ein schönes, musikalisches Werk, diese sollte aber unterbrochen und durch Unregelmäßigkeiten, Abweichungen lebendig gehalten werden.
Die vorliegende Arbeit stellt einen Bezug zwischen der Mathematik und der Musik auf Basis von Symmetriestrukturen her. Die Komposition hat in der geschichtlichen Entwicklung bestimmte Methoden und Regeln, nach denen sie sich orientiert. Die Wahrnehmung der Musik auf der Kommunikationsebene wird mit kognitiver und analytischer Betrachtungsweise in Zusammenhang gebracht. Dass der Zuhörer eines musikalischen Werkes die Komplexität, die analysiert werden kann, erkennt, ist unwahrscheinlich. Vielmehr kann sie eher als ein Mittel angesehen werden, um die erwünschte Wirkung und Tiefe zu erreichen.

1.2 Inhalt

Betrachtet man eine musikalische Komposition und nimmt sich daraus ein Motiv bestehend aus n Tönen, so kann es gruppentheoretisch untersucht werden. In *2 Gruppentheorie* werden zunächst die grundlegenden, algebraischen Eigenschaften von Gruppen beschrieben und danach in Beziehung zu musikalischen Kompositionsprinzipien in der Verarbeitung eines Motivs gebracht.
Die Symmetrieformen als Teil der Gruppentheorie bilden eine besondere Untergruppe. In *3 Symmetrie* wird vorab kurz geklärt, woher die Symmetrie stammt und welche Bedeutung sie besitzt. Des Weiteren werden in diesem Kapitel die unterschiedlichen Formen aus der Sicht der Geometrie dargelegt. Ebenso finden sich zahlreiche Beispiele von Symmetrien in musikalischen Kompositionen wieder, die der mathematischen entsprechen.
In der Musik existieren algorithmische und nicht-algorithmische Kompositionsmethoden, die mit algebraischer Gruppentheorie und Symmetrie in Verbindung stehen – siehe *4 Komposition und Methodik*.

Symmetriestrukturen stellen die Grundlage für die Entwicklung einer eigenen musikalischen Kompositionsmethodik dar. Sie wird in der Anwendung *MUSYmmetry* umgesetzt und in *5 Die Anwendung MUSYmmetry* näher beschrieben. Es wird kein ganzheitliches, musikalisches Werk, im Sinne von dynamischer, lebendiger, von Struktur abweichender Musik generiert. Es stellt eine komplett strukturierte Form dar.

2 Gruppentheorie

2.1 Gruppentheorie in der Mathematik

In diesem Kapitel werden die grundlegenden gruppentheoretischen Begrifflichkeiten aus algebraischer Sicht eingeführt, die im Zusammenhang mit musikalischen Kompositionen relevant sind.

2.1.1 Geschichtliches

Die Gruppentheorie entstand im 19. Jahrhundert aus drei unterschiedlichen Richtungen: Permutationssystemen in der Algebra, gruppentheoretischen Ansätzen der Zahlentheorie und abgeschlossener Transformationssysteme der Geometrie [7, S.94f.]. Bis dahin dienten in der algebraischen Mathematik Permutationen als Hilfsmittel bei Gleichungssystemen. Die konkrete Komposition von Permutationen verwendeten Paulo Ruffini (1799), Nils Henrik Abel (1829) und Evariste Galois (1830-1832), durch die die Analyse von Auflösbarkeitsbedingungen von algebraischen Gleichungen erklärt werden konnte. In der Zahlentheorie waren Leonhard Euler und Carl Friedrich Gauß die Vorreiter, die sich mit der Ordnung von Untergruppen der multiplikativen Gruppe der *Restklasse modulo m* und der *zyklischen Gruppe* auseinandersetzten. Ab 1840 waren in der Geometrie gruppentheoretische Ansätze vorhanden, beispielsweise bei Betrachtung gewisser Transformationstypen und Symmetriestudien. August Ferdinand Möbius (1827) integrierte die Verwandtschaftsbeziehungen durch Auszeichnung von Transformationsgruppen als Eigenschaften der verschiedenen Geometriezweige. Auch im Bereich Kristallographie wurden die Symmetriensysteme studiert und der bekannte Teil aus endlichen Gruppen durch Permutationssymbolik dargestellt [7, S.94f.].

2.1.2 Gruppe

Gruppe

Definition 2.1. Sei G eine Menge von Elementen und $\cdot$ eine Verknüpfung zwischen diesen Elementen. *(G, ·)* wird als Gruppe bezeichnet, wenn folgende Axiome erfüllt sind [5, S.43]:

1. Assoziativgesetz:
   $\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}, \forall\ \mathbf{a, b, c} \in \boldsymbol{G}$
2. Es existiert ein $e \in G$ als neutrales Element mit folgenden Eigenschaften:
   a) $\boldsymbol{e} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{e} = \mathbf{a}, \forall\ \mathbf{a} \in \boldsymbol{G}$
   b) Inverses:
   $\forall\ \mathbf{a} \in \boldsymbol{G}$ existiert ein $\mathbf{a^{-1}} \in \boldsymbol{G}$, sodass gilt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a^{-1}} = \mathbf{a^{-1}} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{e}$, $\mathbf{a^{-1}}$ als das inverse Element von $\mathbf{a}$

Bemerkung 2.2. Besitzt G auch die kommutative Eigenschaft ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\forall$ **a, b** $\in$ $\boldsymbol{G}$), so wird sie eine *kommutative* oder auch *abelsche Gruppe* genannt, ansonsten eine *nicht-kommutative Gruppe*. Zur Vereinfachung schreibt man die Verknüpfung $a \cdot b$ auch als ab.

Untergruppe

Die Untergruppe stellt einen Bezugspunkt für das Kapitel *3 Symmetrie* her.

Definition 2.3. Sei *G'* eine nichtleere Teilmenge der Gruppe G und *G'* $\subset$ G. *G'* bildet eine Untergruppe, wenn ihre Elemente mit der multiplikativen Verknüpfung $\cdot$ von G eine Gruppe bilden [2, S.9]. Es gelten: **a, b** $\in$ ***G'*** auch $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ $\in$ ***G'*** und $\mathbf{a^{-1}}$ $\in$ ***G'*** [5, S.47]. Mit der multiplikativen Verknüpfung ist die Gruppe *G'* abgeschlossen [26, S.102].

Beispiel 2.4. Die noch im Folgenden beschriebene *Diedergruppe* bildet eine Untergruppe einer Gruppe G. Sie enthält n Rotationen und n Spiegelungen einer Abbildung mit n Elementen [26, S.104].

Produktgruppen

Definition 2.5. Das Kreuzprodukt von zwei Gruppen G_1 und G_2, ist $G_1 \times G_2$[1, S.69ff.]. Die neu entstandene Gruppe beinhaltet alle Möglichkeiten der paarweisen Anordnung bzw. des Produktes eines Elementes aus der Gruppe G_1 mit einem Element aus Gruppe G_2.

Bemerkung 2.6. Die Ordnung der Produktgruppe aus zwei endlichen Gruppen entspricht dem Produkt ihrer Ordnungen [1, S.70].

Beispiel 2.7. Seien $G_1 = \{\text{A, B, C}\}$ und $G_2 = \{1, 2, 3, 4\}$. Das Produkt ergibt die Tupel [1, S.69]:

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 = \{&(\text{A}, 1), (\text{A}, 2), (\text{A}, 3), (\text{A}, 4),\\ &(\text{B}, 1), (\text{B}, 2), (\text{B}, 3), (\text{B}, 4),\\ &(\text{C}, 1), (\text{C}, 2), (\text{C}, 3), (\text{C}, 4)\} \end{aligned}$$

Symmetriegruppe

Diese spezielle Gruppe wird aus geometrischer Sicht studiert. Es wird eine Verknüpfung der Gruppe G als eine Abbildung $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \mapsto \mathbf{G}$ definiert. Die *Abgeschlossenheit* ist darin integriert [26, S.102].

Definition 2.8. Eine Symmetriegruppe $\mathbf{S_n}$ bildet eine Gruppe von n Elementen, die zusammen ein Objekt darstellen. Sie besteht aus der Menge aller Kongruenzabbildungen des Objekts, die es auf sich selbst durch die Verknüpfung $\cdot$ abbildet [1, S.24]. Besteht die Gruppe aus $\mathbf{n \geq 3}$ Elementen, so ist sie nicht kommutativ [5, S.44].

Anschauliche Überlegung 2.9. Wir betrachten zunächst die Assoziativität:
$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, $\forall$ **a, b, c** $\in$ Gruppe $\boldsymbol{G}$
Bei der Komposition wird immer unabhängig von der Klammerung zunächst **c**, danach **b** und zuletzt **a** ausgeführt unabhängig von der Klammerung. Die Abbildung jedes einzelnen Punktes des Objektes ist identisch bei der Durchführung von $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ und $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(∀ **a, b, c** ∈ ***G***) [1, S.24].
Weiterhin werden die Eigenschaften der Identität und des Inversen erfüllt.
Zur Bedingung des Inversen stellen wir uns lediglich vor, dass wir eine Translation, Spiegelung oder Rotation durchführen. Wenn wir die Bewegung in umgekehrter Reihenfolge ausüben, muss die Ebene in der Ausgangsposition sein.
Bildet man die Symmetriegruppe identisch ab, also mit einer Translation von der Länge 0 oder einer Rotation von 0°, so entspricht sie der Identität [1, S.6].

Diedergruppe und Zyklische Gruppe

Es wird unter den zwei Symmetriegruppen *Diedergruppe* und *Zyklische Gruppe* unterschieden [1, S.25].

Definition 2.10 (Diedergruppe)**.** Die ***n*-te** Diedergruppe stellt einen reguläres n-gon dar, $\mathbf{D}_n$. Dabei ist n-gon ein Polygon mit n Ecken. Sie ist die Gruppe der n Rotationen und n Spiegelungen der Ebene, die ein reguläres n-Eck in sich überführen [3, S.27]. Ihre Ordnung beträgt *2n* [26, S.105].

In *Abbildung 2.1* sind einige Polygone mit n Eckpunkten dargestellt.

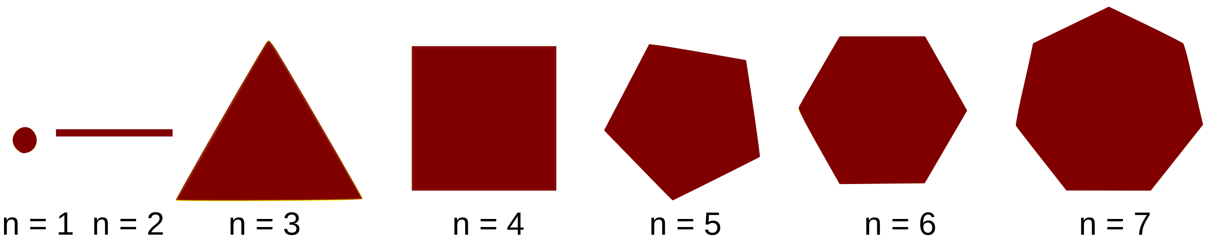


Abb. 2.1: Diedergruppe $\mathbf{D}_n$: n Rotationen und n Spiegelungen [1, nach: S.25]

Beispiel 2.11. In *Abbildung 2.2* ist die Diedergruppe eines Quadrates dargestellt mit den acht möglichen Symmetrien (n Rotationen und n Spiegelungen): {**I** (**R**$_{360}$ / **R**$_0$), **R**$_{90}$, **R**$_{180}$, **R**$_{270}$, **H, V, D, D'**}. **R**$_n$ ist dabei eine Rotation um n Grad, **H** eine horizontale, **V** eine vertikale Spiegelung, **D, D'** eine Hintereinanderausführung von **H** und einer Drehung um 90°.
Zu Orientierungszwecken ist auf dem Quadrat ein Männchen abgebildet, wobei der Hintergrund der Vorderseite hellblau, der Rückseite hellgrün ist. Bei Rotationen ist nach der Bewegung weiterhin die Vorderseite zu sehen, bei den Spiegelungen die Hinterseite. Als weitere Orientierungspunkte dienen in den Ecken die Buchstaben **A, B, C, D**.

Definition 2.12 (Zyklische Gruppe)**.** Eine Symmetriegruppe von einem gerichteten, regulären n-gon, $\mathbf{C}_n$, wird als die ***n*-te zyklische Gruppe** bezeichnet. Sie wird durch ein Element **a** ∈ $\mathbf{C}_n$ erzeugt und besteht aus den Potenzen $\boldsymbol{a}, a^2, \ldots, a^n = \boldsymbol{e}$ (**e** als neutrales Element) [3, S.27]. Sie kann durch Drehungen der Ebene um einen festen Punkt oder einer festen Achse aus definiert werden. Die zyklische Gruppe enthält n Rotationen, sodass die Ordnung n beträgt. Jede zyklische Gruppe ist abelsch [3, S.12].

Die *Abbildung 2.3* zeigt einige gerichtete Polygone mit n Eckpunkten.

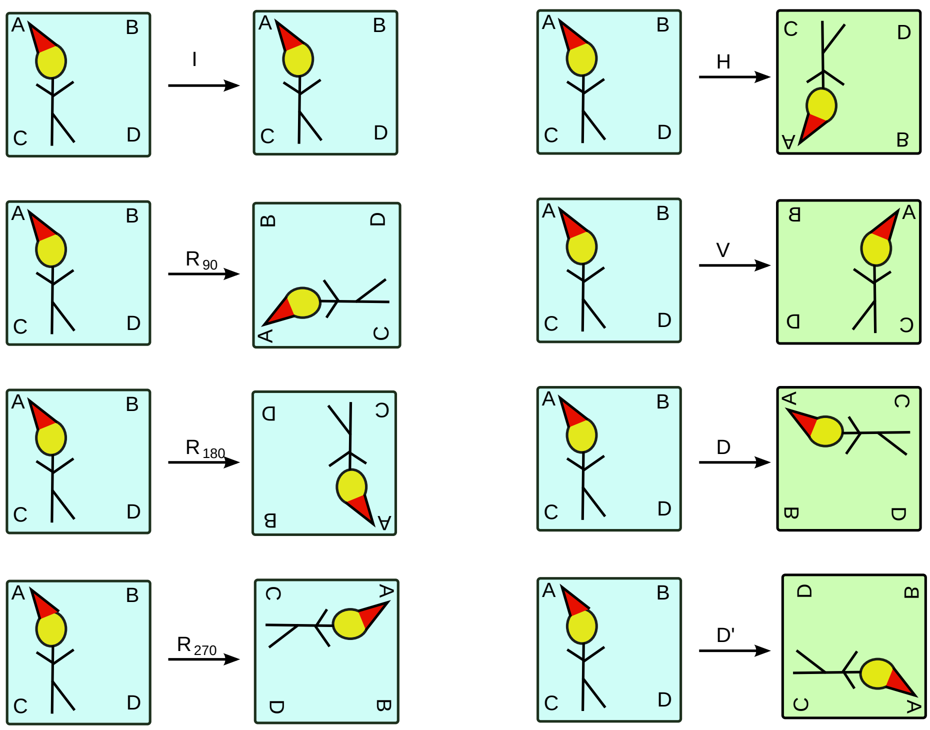


Abb. 2.2: Die Symmetriegruppe eines Quadrates mit $n = 4$ Ecken enthält 4 Rotationen und 4 Spiegelungen [1, nach: S.19].

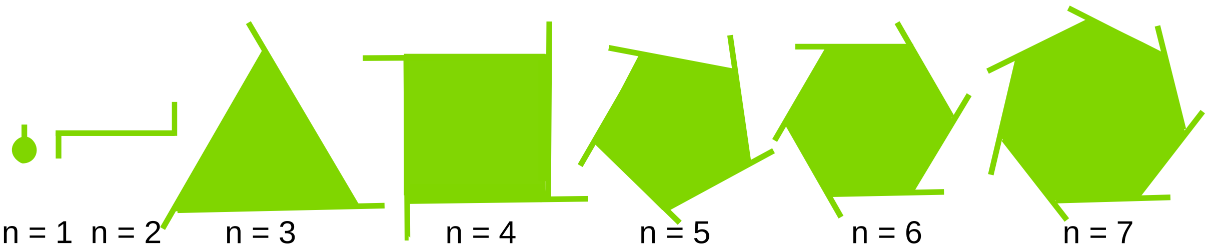


Abb. 2.3: Zyklische Gruppe $\mathbf{C}_n$: n Rotationen [1, nach: S.25]

Restklasse modulo m

Definition 2.13. Es wird eine zyklische Gruppe mit m Elementen aufgestellt mit $m > 0$. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werden in m Klassen geteilt.
Zu jedem $\mathbf{r} \in \{\mathbf{0, 1, ..., m -1}\}$ wird die Menge $\mathbf{r} + \boldsymbol{m}\mathbb{Z}$ betrachtet.
Die *Restklasse modulo m* [5, S.49f.] besteht aus den Zahlen, die bei Division durch m den gleichen Rest hinterlassen.

Bemerkung 2.14. Ist $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{m} > \mathbf{0}$, so ist die Menge $\mathbb{Z}/\boldsymbol{m}\mathbb{Z}$ der *Restklassen modulo m* mit der Addition eine abelsche Gruppe.

Beispiel 2.15. Als Beispiel einer *Restklasse modulo m* nehmen wir die Uhr mit $m = 12$. Geht ein Mensch um 8 Uhr in die Arbeit für 6 Stunden, so ist es $(8 + 6) \bmod 12 = 2$ Uhr, wenn er nach Hause geht.

Permutation

Definition 2.16. Sei *(G, ·)* eine Gruppe bestehend aus endlich vielen Elementen. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung der gegebenen Menge auf sich selbst wird *Permutation* genannt [2, S.5].
Die Permutation ist vollständig bestimmt, wenn für jedes Element angegeben wird, durch welches es ersetzt wird [17, S.10].

Permutationsgruppe

Definition 2.17. Sei die Gruppe *(G, ·)* endlich mit n Elementen. Die Menge aller Permutationen von n geordneten Elementen heißt $\mathbf{P}_n$ und wird die n-te Permutationsgruppe genannt.

Bemerkung 2.18. Die Ordnung der Permutationen beträgt $n!$ [1, S.75f.]. Mit anderen Worten ergeben jeweils zwei Permutationen nacheinander ausgeführt eine dritte, die ebenfalls zu der Permutationsgruppe gehört.

Komposition von Permutationsgruppen

Definition 2.19. Die Verknüpfung bzw. Komposition von Permutationen wird mit $\cdot$ dargestellt. Um Permutationen zu komponieren, betrachten wir jede davon als eine Aktion wie Vertauschen, Bewegen oder Zirkulieren von Elementen. Den Ausgangspunkt bildet die Identität [1, S. 76ff.].

Beispiel 2.20. Nehmen wir als Beispiel $\mathbf{P}_3$ als eine Permutationsgruppe von drei Buchstaben **{A, B, C}**. So entspricht das Ausgangswort **ABC** der Identität. Die Ordnung beträgt *3!*, welche sind:
$\mathbf{P}_3$ **= {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}**

CBA beispielsweise entsteht durch das Vertauschen von **A** und **C** zu **CBA**, in zyklischer Notation notiert als **(13)**, gefolgt von **(23)** zu **ACB**. Das Ausgangswort ist dabei immer **ABC**. Die Komposition kann in der Abbildung von beiden Operationen nachvollzogen werden. Die zyklische Notation dieses Beispiels ist **(132)**. Die Bildung der Permutation durch **(132)** wird in *Abbildung 2.4* dargestellt. Äquivalent zu *Verknüpfung von Symmetrieformen* ist die Reihenfolge bei der Ausführung entscheidend. Die Komposition von Permutationen ist nicht kommutativ. Wir bezeichnen im Folgenden das Vertauschen von Elementen bzw. der Buchstaben als Transformation.

Bemerkung 2.21. Die Permutationen einer Permutationsgruppe enthalten Symmetrien. In der $\mathbf{P}_3$-Gruppe ($\mathbf{P}_3$ **= {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}**) sind folgende spiegelsymmetrisch:[1]

ABC $\updownarrow$ CBA, ACB $\updownarrow$ BCA und BAC $\updownarrow$ CAB

Die Hälfte der Permutationsgruppe ist symmetrisch zur anderen [17, S.36].

[1] $\updownarrow$ ist das Symbol für die vertikale Spiegelungsachse

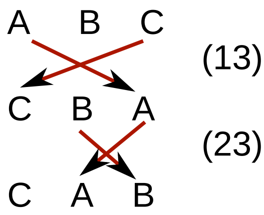


Abb. 2.4: Die Umformung der Permutation **CAB** aus: **ACB** · **CBA** [1, nach: S.77]

Gerade und ungerade Permutationen

Permutationen haben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl an Element-Tausch-Operationen. Gerade Permutationen formen eine *2.1.2 Untergruppe* von $\mathbf{P}_n$ [1, S.82f.]. Wir prüfen dazu die drei Eigenschaften der Untergruppe (Assoziativität, Identität, Inverses) von Gruppen.

1. **Identität:** 0 ist eine gerade Zahl. Wenn wir eine Permutation ohne Vertauschen von Elementen generieren, so erhalten wir die Identität.

2. **Assoziativität:** Eine Komposition von zwei geraden Permutationen ergibt eine gerade Permutation in der Summe.

3. **Inverses:** Das Inverse einer geraden Permutation ist gerade. Dabei ist die Reihenfolge umgekehrt.

2.2 Gruppentheorie in der Musik

Die gemeinsame Schnittstelle zwischen Symmetriestrukturen in der Musik und Mathematik bildet die Gruppentheorie. Zu Beginn dieses Kapitels wird geklärt, welche speziellen Gruppen in musikalischen Werken vorkommen. Des Weiteren werden musikalische Beispiele von Permutationen aus $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ und $\mathbf{P_4}$ gezeigt, also die Verarbeitung eines Motivs bestehend aus zwei, drei oder vier Noten.

2.2.1 Gruppentheoretische Anwendung in Kompositionen

Studiert man die Symmetriegruppen *Dieder- und zyklische Gruppe*, so entsprechen zyklische Gruppen in der Musik lediglich in einfacher Art einer Symmetriegruppe. Es sind darin keine Spiegelungen oder Transpositionen enthalten. Es können gewisse Formen und Strukturen ($\mathbf{C}_5$, $\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_2$) in der Musik zyklischen Gruppen zugeordnet werden. Ein Beispiel für $\mathbf{C}_5$ sei die fünfteilige musikalische Form **A A A A A** von *Des Baches Wiegenlied* aus dem Zyklus *Die schöne Müllerin* von Franz Schubert [17, S.216f.]. Der Teil **A** wird mit jeder neuen Strophe des Liedes wiederholt.
Die *Diedergruppe* kommt in Kompositionen nur im Ausnahmefall vor. Dabei darf ein Motiv ausschließlich aus Tönen bestehen, die auf der Mittellinie im Fünf-Linien-Notensystem sind, wie in *Abbildung 2.5* zu sehen. Diese entspricht der Diedergruppe eines Rechtecks, die insgesamt vier Abbildungen enthält, wie die *Abbildung 2.6* deutlich zeigt. Die grüne

Diagonale dient zur Orientierung, damit eine Transformation illustrativ erkennbar ist. **I** stellt die Identität, $\mathbf{R_{180}}$ eine Rotation um 180°, **H** eine horizontale und **V** eine vertikale Spiegelung dar.

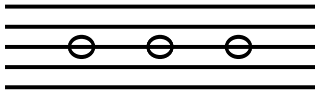


Abb. 2.5: Ein Motiv der Diedergruppe zugehörig: eine Notensequenz auf der Mittellinie. Der Einfachheit halber ist ein Notenschlüssel weggelassen.

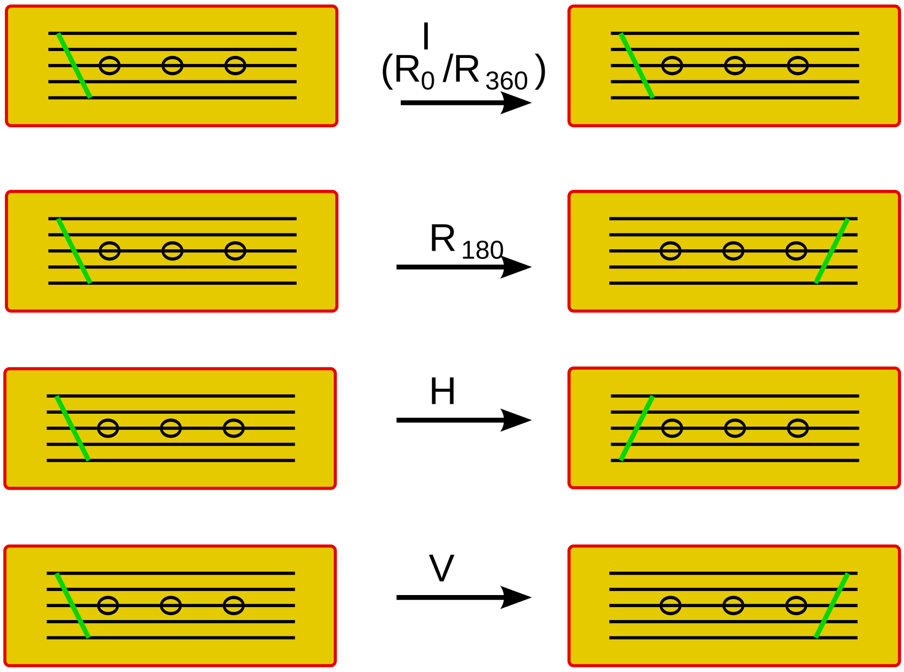


Abb. 2.6: Die Diedergruppe eines Rechtecks bzw. eines Motivs mit zwei Rotationen und zwei Spiegelungen.

Nachfolgend steht die Beschreibung von Permutationen als eine Verarbeitungsform der Symmetriestrukturen im Vordergrund.

2.2.2 Permutationen als motivische Verarbeitung

Wir betrachten ein Motiv als eine in *2.1.2 Permutation* beschriebene Gruppe G mit n Elementen bzw. Noten. In musikalischen Kompositionen sind Permutationen als motivische Verarbeitung oder eine Variation von Motiven, Themen oder Formen bekannt.
Im Folgenden werden einige Beispiele mit Motiven bestehend aus zwei, drei oder vier Noten gezeigt.

Motiv mit zwei Noten

Wir nehmen zunächst ein Motiv bestehend aus zwei Tönen. Das entspricht einer Permutationsgruppe $\mathbf{P}_2$ mit der Ordnung von *2!*. Es gibt also zwei verschiedene Permutationen.

Beispiel 2.22. Das Motiv aus Anton Bruckners *Sinfonie Nr. 3, d-Moll*, 1. Satz (Takte 361-363) in *Abbildung 2.7* ist ein Beispiel dafür. Das Motiv, analog zum *Ausgangswort* in *2.1.2 Komposition von Permutationsgruppen*, besteht aus den Tönen *d'* und *a"*. Lassen wir die Tonlage außer Acht, so heißt das Motiv *da*. Als Permutationen ergeben sich *da* und *ad*. In *Abbildung 2.7* sind die einzelnen Permutationen in Klammern unter der Notenlinie gekennzeichnet. Dabei entsprechen *1* und *2* den Positionen der Töne, die römischen Zahlen *I* und *II* den Permutation der Permutationsgruppe.

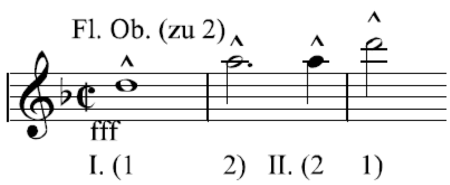


Abb. 2.7: Eine Permutationsgruppe $\mathbf{P}_2$. Anton Bruckner: *III. Sinfonie, d-Moll*, 1. Satz, Takte 361-363 [17, S.11].

Beispiel 2.23. Permutationsgruppen können symmetrisch verarbeitet werden. In der *Abbildung 2.8* von Ludwig van Beethoven ist die Permutationsgruppe $\mathbf{P}_2$ ebenfalls vorhanden und symmetrisch verarbeitet. In der oberen Zeile bedeuten die Ziffern **1** und **2** die einzelnen Permutationensgruppen. Die Gruppe **2** ist ein Krebs von Gruppe **1**. Die Folge **1 2** ist darauffolgend wiederum gespiegelt. In der mittleren Zeile sind die einzelnen Permutationen **I** und **II** notiert. In Klammern stehen die einzelnen Töne des Motivs. Die dritte Zeile stellt dar, in welcher Stufe die Harmonie des Klanges steht. **T** ist die Tonika, **D** die Dominante.

1	**2**	**2**	**1**
I.(1 2) II.(2 1)	II.(2 1) I.(1 2)	II.(2 1) I.(1 2)	I.(1 2) II.(2 1)
T D D T	D T T D	D T T D	T D D T

Abb. 2.8: Spiegelsymmetrie einer Permutationsgruppe bzw. eines Motivs: Ludwig van Beethoven, *Sinfonie Nr. 9, d-Moll*, 1. Satz, Takte 36-42 [17, S.14].

Beispiel 2.24. Auch die Form eines Themas kann eine Permutationsgruppe darstellen, beispielsweise *Figaros Hochzeit* von Wolfgang Amadeus Mozart. In der *Abbildung 2.9* sind die Motive als *a* und *b* gekennzeichnet. Sie sind die Elemente einer Permutation. Die Gruppe bilden demnach die Permutationen **I** mit *ab* und **II** mit *ba*.

Motiv mit drei Noten

Wie in *2.1.2 Komposition von Permutationsgruppen* beschrieben, gibt es für eine Permutationsgruppe mit *3* Elementen sechs Permutationen. Die drei Elemente können die

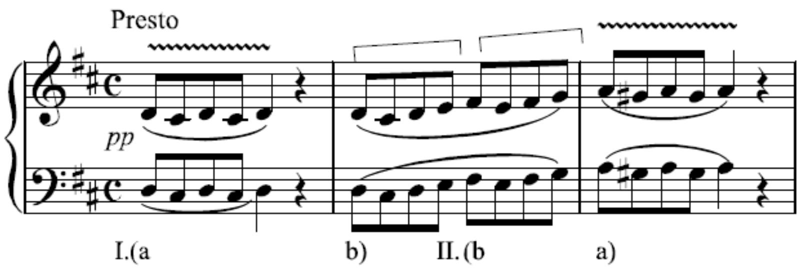


Abb. 2.9: Konstruktion des Themas. W.A.Mozart, *Figaros Hochzeit*, KV 492, Ouvertüre [17, S.15]. Das Motiv von Takt eins in der Oberstimme wird dabei in Takt drei um eine Quinte nach oben transponiert (siehe *Transposition*).

Töne eines Dreiklang sein, wie z.B. c, e, g. Das Element **1** enspricht **c**, **2** = **e**, **3** = **g**. Die Permutationen sind demnach:

$$\mathbf{P}_3 = \{\mathbf{123, 132, 213, 231, 312, 321}\} = \{\mathbf{ceg, cge, ecg, egc, gce, gec}\}$$

In der Musikliteratur finden sich viele Beispiele, in denen sich häufig lediglich ein Teil der möglichen Permutationen Verwendung findet, seltener alle aus der Permutationsgruppe.

Beispiel 2.25. Der ersten beiden Takte der *Kantate Nr. 80* von Johann Sebastian Bach, siehe *Abbildung 2.10*, zeigt die Verwendung von Permutationen. Die Akkorde sind von unten nach oben gelesen. **egc** ist die vierte Permutation, **gce** die fünfte und **ceg** die erste dieser Permutationsgruppe.

Abb. 2.10: Permutationen einer Permutationsgruppe $\mathbf{P}_3$. J.S.Bach, *Kantante Nr. 80*, Trompeten 1,2,3 [18].

Beispiel 2.26. In der polyphonen Kompositionstechnik zur Epoche des Barock können lediglich durch Vertauschen von Stimmabschnitten Permutationen angewendet werden. Vier von diesen sechs möglichen Permutationen erscheinen in J.S.Bachs *Dreistimmigen Invention Nr.9, f-Moll* (**123, 231, 312, 213** in den Takten 1 - 23) [17, S.25].

Motiv mit vier Noten

Eine Permutationsgruppe mit 4 Elementen bietet $4! = 24$ Permutationen.
Das wohl bekannteste Motiv bestehend aus vier Tönen ist **B-A-C-H**. Dieses Kreuzmotiv an sich hat eine weitergehende symbolische, philosophische Bedeutung, die im Rahmen dieser Arbeit nicht näher beschrieben wird. Sie wurde von vielen Komponisten verwendet und variiert, u.a. von Alban Berg, Arnold Schönberg, Franz Liszt.

Beispiel 2.27. Als Beispiel verwenden wir dafür eine Bildung einer Reihe (nähere Beschreibung siehe *4.3 Zwölftontechnik*) des *Streichquartetts Op. 28* von Anton Webern, welche aus zwei Permutationen des **B-A-C-H**-Motivs besteht, nämlich die Töne **1234, 4321** (**1 = B, 2 = A, 3 = C, 4 = H**). Die Zwölftonreihe ist in der *Abbildung 2.11* dargestellt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Zwölftontechnik sich von der bis dahin gängigen motivischen Verarbeitung wie in einer Fuge unterscheidet. Die erste Permutation mit der Reihenfolge **1234** bildet das Ausgangswort. Die zweite ist stellt die Umkehrung des Motivs dar, die um eine große Terz transponiert ist. Den Schluss der Reihe bildet die Wiederholung des BACH-Motivs eine kleine Sext höher.
In diesem Werk wird die Reihe durch Transpositionen verarbeitet [17, S.30], sodass von der Gruppe $\mathbf{P}_4$ lediglich zwei Permutationen verwendet werden.

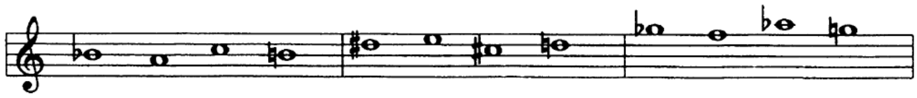


Abb. 2.11: Zwölftonreihe in A.Weberns *Streichquartett op. 28* bestehend aus zwei Permutationen (Takt 1 und 2). Die Permutation von Takt 1 erscheint in Takt 3 transponiert [19, S.256].

2.2.3 Zusammenfassung

Motive aus zwei Tönen

Bei einem Motiv bestehend aus zwei Tönen entsprechen Variationen bzw. die symmetrische Verarbeitung des Motivs aus mathematischer Sicht Permutationen. Vollständige Permutationsgruppen kommen in $\mathbf{P}_2$ in musikalischen Kompositionen oft vor. Die Einfachheit dieser Gruppe bietet mit Transpositionen, Spiegelungen viele Kombinationsmöglichkeiten. Dadurch, dass innerhalb einer Permutationsgruppe die Hälfte aller Permutationen zur anderen in der Mathematik spiegelsymmetrisch ist, lassen sich musikalische Themen, Motive und sogar formale Strukturen von Werken mathematisch analysieren. Nimmt man die Komponente der Dynamik hinzu, erweitert sich die Menge der Kombinationsmöglichkeiten.

Motive aus drei oder mehr Tönen

Besteht ein Motiv aus drei oder vier Tönen, so finden sich viele Beispiele in musikalischen Kompositionen, jedoch werden nicht alle Permutationen der jeweiligen Permutationsgruppe vollständig repräsentiert. Das läßt sich auch leicht nachvollziehen, da eine Permutationsgruppe mit drei Elementen bzw. Tönen sechs, eine mit vier Elementen 24 Variationen bzw. Permutationen beinhaltet. Wird ein Motiv aus fünf Tönen gebildet, so ergeben sich

120 Permutationen (*5!*). Davon ergeben die vier Symmetrieformen Identität, Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung einen geringen Anteil. Man kann behaupten, dass für den Zuhörer einige dieser Permutationen nicht mit dem ausgehenden Motiv in Zusammenhang gebracht werden können. In einer Analyse wäre das sicher nachzuweisen, jedoch nicht im Moment des Hörens. In der Definition der Symmetrie nach Riethmüller (siehe *3.3.1 Definition*) ist der Begriff der Harmonie auf Symmetrie begründet und ist nicht nur in der Musik, sondern auch ein Strukturierungsprinzip in der Natur und Kunst, sodass etwas als *schön* empfunden wird. Bei 120 Kombinationsmöglichkeiten wird der Zuhörer kaum die einzelnen Variationen bzw. Permutationen als eine Symmetrie erkennen und auch nicht als harmonisch oder schön empfinden.
Aus rein analytischer Sicht bietet die Teilung einer Gruppe eine mögliche Verarbeitung in musikalischen Kompositionen mit einem Motiv aus vielen Tönen ($n > 4$). Dadurch werden die Kombinationsmöglichkeiten verringert. Nehmen wir als Beispiel ein Motiv aus sechs Tönen, teilen dieses in zwei Gruppen bestehend aus jeweils drei Tönen. Die gesamte Anzahl an Möglichkeiten ist in diesem Fall: *3! * 3!* gleich 36 Möglichkeiten und nicht *6!* gleich 720. Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass in der Musik das Motiv als kleinste Einheit des Werkes definiert ist. Die maximale Anzahl der Töne ist dabei nicht festgelegt, jedoch bildet eine längere Notensequenz ein Thema.

2.3 Tabellarischer Überblick

In diesem Kapitel wurde verdeutlicht, dass gewisse gruppentheoretische Strukturen in musikalischen Werken verwendet werden. Abschließend soll eine tabellarische Darstellung von gruppentheoretischen und musikalischen Analogien in *Tabelle 2.1* einen Überblick über Symmetriestrukturen geben.

Gruppentheorie	**Musikalische Symmetriestrukturen**
Symmetriegruppe	
Diedergruppe	Im Ausnahmefall, siehe *Abbildung 2.5*.
Zyklische Gruppe	Wiederholung von Formen / Teilen wie bei Strophenliedern, Zyklen.
Untergruppe	Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung einer Notensequenz (vertikale bzw. horizontale Spiegelungen).
Restklasse modulo m	Beispiel: Zwölftonmusik (siehe *4.3 Zwölftontechnik*)
Permutation	Die Verarbeitung eines Motivs durch Vertauschen von Tönen.
Permutationsgruppe	Alle Permutationen eines Motivs. Oft: P_2-vollständig, P_3 und P_4 unvollständig.

Tabelle 2.1: Symmetriestrukturen in der Mathematik und Musik im Überblick

3 Symmetrie

3.1 Bedeutung von Symmetrien

Das Vorhandensein von Symmetrie ist für uns selbstverständlich. Zunächst wird der Begriff aus naturwissenschaftlicher Sicht angenähert und Symmetrien als *Bauplan der Natur* [9] betrachtet.
Henning Genz sieht Symmetrien als die Naturgesetze selbst an. Das bedeutet, dass sich sowohl Naturgesetze als auch Symmetrien verschieben, drehen und wenden lassen, und dabei das Verhalten des Objektes oder Systems gleich bleibt. Nehmen wir das Pendelgesetz. Sie ist nur symmetrisch bei Bewegungen parallel zur Erdoberfläche. Verschiebt man das Pendel in die Höhe, ist dort die Erdanziehung schwächer und das Verhalten des Pendels ist nicht gleich, es schwingt langsamer. Demnach ist das Pendelgesetz auch kein Naturgesetz. Dafür müssten Pendel *und* Erde im gleichen Abstand verschoben werden [9, S.29f.].
Naturgesetze sind essentiell, da wir ohne sie weniger Kenntnisse über die Welt hätten. Ihre Symmetrien sind nicht nur ästhetisch, sondern auch praktisch, da wir nicht alle Gesetzmäßigkeiten kennen oder kennen können [9, S.38].
Schönheit ist sicher nicht der Zweck der Symmetrien von Lebewesen. Daß diese so sind, wie sie sind, ist die entwicklungsgeschichtliche Antwort auf ihre Lebensbedingungen [9, S.17]. Bei Tieren bietet Spiegelsymmetrie Vorteile bei der Fortbewegung. Je schneller sie sind, desto wesentlicher ist die Spiegelsymmetrie [9, S.17,19]. Symmetrie und Schönheit ist jedoch nicht voneinander zu trennen. *Sichtbare Symmetrie bedeutet Schönheit* [9, S.120]. Allgemeiner gefasst wird Symmetrie als Synonym für Ausgewogenheit, Ordnung, Schönheit, Vollkommenheit und Zweckmäßigkeit verstanden [4, S.17].
Die Symmetrie ist in der Musik ein kompositorisches, strukturelles Prinzip, durch das der Zuhörer *etwas Schönes, Interessantes, Wichtiges, Substantielles* [17, S.159] erleben möchte. Symmetrien sind nicht immer beim Hören erkennbar, sie verleihen einem musikalischen Werk aber eine architektonische Form, Zusammenhang zwischen einzelnen Motiven und eine bestimmte Dichte [16]. Unter Dichte ist zu verstehen, wie intensiv ein Motiv in einem musikalischen Werk mit Symmetrien verarbeitet ist. Die Anzahl des Vorkommens und die verschiedenen Formen sind dabei ausschlaggebend. Ein musikalisches Stück, welches nur aus Symmetrien besteht, ist aber nicht lebendig, sie sind immer wieder unterbrochen. Erst durch Abweichung, Variationen von Motiven, Themen und Sätzen und durch Unregelmäßigkeiten wird ein musikalisches Werk geschaffen. Auch in der Natur werden Symmetrien gebrochen und dadurch wird Vielfalt vermehrt [9, S.34]. Beispielsweise wird ein Gesicht als schön empfunden, wenn es ein hohes Maß an Symmetrie aufweist. Asymmetrische Aspekte sind jedoch natürlich und auch ein Schönheits- und Attraktivitätsmerkmal, wie z.B. das Muttermal von Merilyn Monroe.
Zusammenfassend halten wir über Symmetrie fest, dass sie nicht der einzige Bestandteil in Kunst, Musik und Naturwissenschaften sind. Sie erscheinen oft als gebrochene oder versteckte Symmetrien, die nicht immer sichtbar oder hörbar sind und daher oft nur mit

Analyse herausgearbeitet werden können. Wenn wir die Symmetrie in Form und Inhalt gliedern, so stellt sie sie in eine komplexe Beziehung zueinander.
Im Folgenden wird Symmetrie aus mathematischer und musikalischer Sicht definiert und mit Beispielen dargestellt. Eine tiefgehende Analyse ihrer Bedeutung und Wahrnehmung findet nicht statt. Symmetrie wird als strukturelles, kompositorisches Prinzip in der Mathematik und in der Musik repräsentiert und es wird zum Ausdruck gebracht, dass sie einen bedeutsamen Platz in Musik und Wissenschaft einnimmt.

3.2 Symmetrie in der Mathematik

Die Bildung von Symmetrieformen werden in diesem Kapitel detailliert aus geometrischer Sicht betrachtet. Neben den bereits erwähnten Rotationen und Spiegelungen werden zusätzlich weitere Transformationen beschrieben.
Eine symmetrische Abbildung eines Objekts ist ein Teil einer Untergruppe, im Speziellen der Symmetriegruppe oder der Permutationsgruppe zugehörig.
Eine abgeschlossene Gruppe G mit n Elementen charakterisiert ein geometrisches Objekt im zweidimensionalen Raum bzw. Koordinatensystem. Alle Punkte des Objektes sind dabei Elemente von G. Jeder Punkt wird eindeutig definiert durch das Koordinatenpaar der Abszisse und der Ordinate.

3.2.1 Terminus

Definition 3.1. Wir betrachten ein geometrisches Objekt im zweidimensionalen Raum. Ein Objekt ist symmetrisch [4, S.17] [1, S.3], wenn es transformiert wird und das Objekt dadurch unverändert bleibt. Mit anderen Worten kann ein Objekt auf sich selbst durch eine Bewegung oder Umpositionierung des zweidimensionalen Raumes abgebildet werden, sodass es unverändert erscheint.

Bemerkung 3.2. Besteht ein Objekt aus n Punkten, so können sie aus gruppentheoretischer Sicht betrachtet und algebraische Operationen durchgeführt werden, siehe *2.1.2 Gruppe*.

3.2.2 Symmetrieformen

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Symmetrieformen – definiert durch die unterschiedlichen Bewegungen – dargestellt.

Identität

Definition 3.3. Sei $\mathbb{M}$ eine Menge von Punkten eines Objektes $\mathbf{O}$. Die Identität $\mathbf{I}$ [1, S.6] auf $\mathbb{M}$ ist definiert durch:

$\mathbf{I}$: $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$, $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{M}$

Bemerkung 3.4. Die Identität $\mathbf{I}$ ist die Abbildung jeden Punktes $\mathbf{X}$ des Objektes $\mathbf{O}$ an der identischen Stelle. Sie stellt eine Rotation um 0° oder eine Translation mit der Länge 0 dar.

Rotationsymmetrie

Definition 3.5. Eine Rotation [6, S.101][24, S.16][1] $\mathbf{R}_{\mathbf{M},\alpha}$ um den Punkt **M** mit dem Winkel α ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jeden Punkt **X** eindeutig auf den Bildpunkt **X'** abbildet. Es gilt:

1. Ist $\mathbf{M} = \mathbf{X}$, so ist auch $\mathbf{X'} = \mathbf{X}$ (= Identität)
2. Sei $\overrightarrow{\mathbf{MX}}$ der Verbindungsvektor zwischen **M** und **X**, $\overrightarrow{\mathbf{MX'}}$ der Verbindungsvektor zwischen **M** und **X'**, und $\mid \mathbf{MX} \mid$, $\mid \mathbf{MX'} \mid$ die Strecke zwischen diesen Punkten. Es gilt: $\mathbf{X} \neq \mathbf{M} \rightarrow \mid \measuredangle\, (\overrightarrow{\mathbf{MX}}, \overrightarrow{\mathbf{MX'}}) \mid = \alpha$ und $\mid \mathbf{MX} \mid = \mid \mathbf{MX'} \mid$

Bemerkung 3.6. Der Bildpunkt **X'** des Punktes **X** wird bei der Rotation im Winkel α $(0° \leq \alpha < 360°)$ dabei so berechnet, dass die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{\mathbf{MX}}$ und $\overrightarrow{\mathbf{MX'}}$ den Winkel α einschließen und der Abstand von **M** zu **X** und **X'** gleich groß sind [24, S.16] (siehe *Abbildung 3.1*).

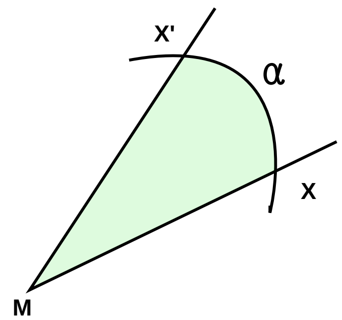


Abb. 3.1: Eine Rotation im Winkel α [24, nach: S.16]

Die Umkehrabbildung entspricht $\mathbf{R}_{\mathbf{M},\mathbf{360°}-\alpha}$ (Abbildung **X'** auf **X**) (siehe *Abbildung 3.2*).

Spiegelsymmetrie

Spiegelung an einer Geraden

Definition 3.7. Eine Spiegelung $\mathbf{S_g}$ an einer Geraden **g** [6, S.96][24, S.17] ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt **X** eindeutig seinen Bildpunkt **X'** zuordnet. Es gilt:

1. $\mathbf{X} \in \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X'}$ (= Identität)
2. Seien $\mid \mathbf{XS} \mid$ und $\mid \mathbf{X'S} \mid$ die Strecke zwischen diesen Punkten und **XX'** die Strecke durch **X** und **X'**. Es gilt: $\mathbf{X} \notin \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g} \perp \mathbf{XX'}$ und $\mid \mathbf{XS} \mid = \mid \mathbf{X'S} \mid$

[1] Mit freundlicher Genehmigung des Vorlesungsskripts „Mathematisches Denken in Arithmetik und Geometrie 2“ von Dr. Reimund Albers an der Universiät Bremen.

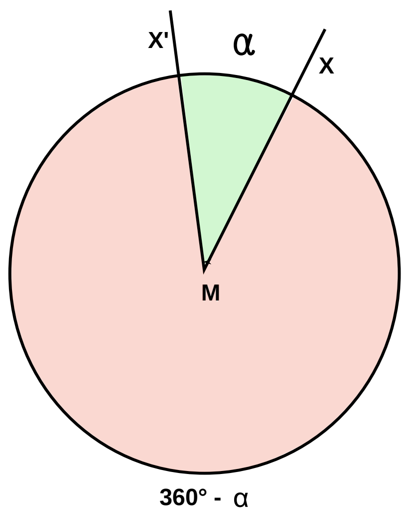


Abb. 3.2: Eine Umkehrabbildung im Winkel $360° - \alpha$ [24, nach: S.16]

Beispiel 3.8. [24, S.17] In *Abbildung 3.3* wird ein Dreieck **ABC** an der Geraden **g** gespiegelt. Die dazwischenliegenden Winkel sind deckungsgleich, sodass Kongruenz gilt:

Seien | **AB** |, | **A'B'** |, | **BC** |, | **B'C'** |, | **CA** |, | **C'A'** | Strecke zwischen den angegebenen Punkten. Es gelten:
| **AB** | = | **A'B'** |, | **BC** | = | **B'C'** |, | **CA** | = | **C'A'** |

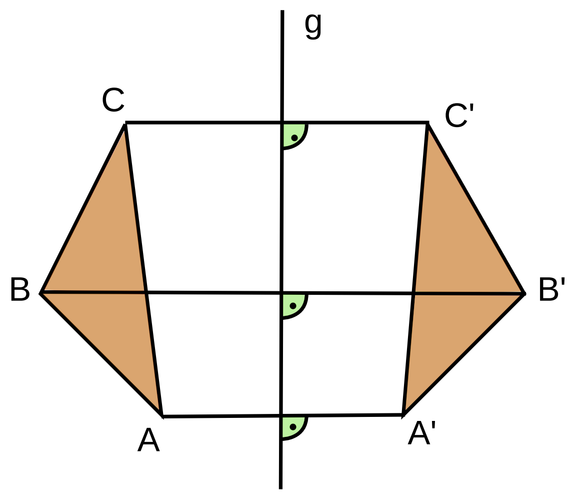


Abb. 3.3: Eine Spiegelung an einer Gerade **g** [24, nach: S.17]

Spiegelung an einem Punkt

Definition 3.9. Eine Spiegelung $\mathbf{S}_Z$ an einem Punkt **Z** [6, S.88f.][24, S.18] ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt **X** eindeutig seinen Bildpunkt **X'** zuordnet. Es gilt für alle Punkte der Ebene:

1. $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X'} = \mathbf{X}$ (= Identität)

2. Sei $\overrightarrow{\mathbf{ZX'}}$ der Verbindungsvektor zwischen **X'** und **Z** und $\overrightarrow{\mathbf{ZX}}$ der Verbindungsvektor zwischen **X** und **Z**. Es gilt: $\overrightarrow{\mathbf{ZX'}} = \boldsymbol{k}\overrightarrow{\mathbf{ZX}}$, $\boldsymbol{k} = \textbf{-1}$
   Sei $\overrightarrow{\mathbf{XZ}}$ der Verbindungsvektor zwischen **X** und **Z** und $\mid \mathbf{ZX} \mid$, $\mid \mathbf{ZX'} \mid$ die Strecke zwischen diesen Punkten.
   Weiterhin gilt: $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X'} \in \overrightarrow{\mathbf{XZ}}$ und $\mid \mathbf{ZX} \mid = \mid \mathbf{ZX'} \mid$

Beispiel 3.10. [24, S.18] Der Punkt **Z** ist dabei das Zentrum der Punktspiegelung.
$\mathbf{S}_Z = \mathbf{R}_{M,180°}$ (Beispiel siehe in *Abbildung 3.4*).

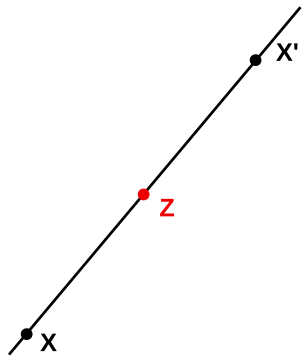


Abb. 3.4: Eine Spiegelung des Punktes **X** am Punkt **Z** [24, nach: S.18]

Translationssymmetrie

Definition 3.11. Eine Translation [6, S.88f.][24, S.18] $\mathbf{T}_{\overrightarrow{\mathbf{L}}}$ um den Vektor $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt **X** eindeutig seinen Bildpunkt **X'** zuordnet. Das Objekt **O** wird um die Länge **L** verschoben. Es gilt:

1. $\overrightarrow{\mathbf{XX'}} = \boldsymbol{k}\overrightarrow{\mathbf{SS'}}$, $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$

2. Sei $\overrightarrow{\mathbf{XX'}}$ der Verbindungsvektor zwischen **X** und **X'**, $\overrightarrow{\mathbf{SS'}}$ der Verbindungsvektor zwischen **S** und **S'** (siehe *Abbildung 3.5*) und $\mid \mathbf{XX'} \mid$, $\mid \mathbf{SS'} \mid$ die Strecke zwischen diesen Punkten. Es gilt: $\overrightarrow{\mathbf{XX'}}$ ist richtungsgleich zu $\overrightarrow{\mathbf{SS'}}$ und $|\mathbf{XX'}| = |\mathbf{SS'}|$

Echte und unechte Bewegungen bzw. Symmetrien

Bemerkung 3.12. Es wird unterschieden zwischen *echten* und *unechten starren Bewegungen* und *echten* und *unechten Symmetrien* [1, S.13].
Zu echten Bewegungen gehören Rotation, Translation oder eine Komposition aus Rotation gefolgt von einer Translation. Zu unechten sind Spiegelungen zu zählen.

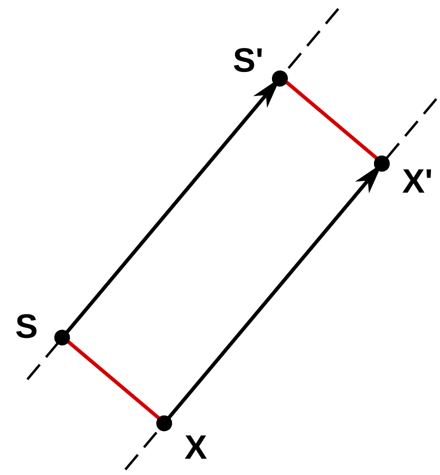


Abb. 3.5: Eine Translation [24, nach: S.18]

Beispiel 3.13. Bei einer echten Bewegung wird die Orientierung des Betrachters erhalten, beispielsweise bleibt eine Abbildung der rechten Hand nach der Bewegung weiterhin die rechte Hand (im zweidimensionalen Raum). Jede echte Symmetrie ist eine Rotation um einen Punkt.

Beispiel 3.14. Spiegelungen oder die Komposition aus einer Translation nach einer Spiegelung zählen zu unechten Bewegungen. Die Orientierung wird umgedreht, das Bild einer rechten Hand wandelt sich in dem Fall zu einer linken Hand um. Jede unechte Symmetrie ist eine Spiegelung zu einer Geraden.

Verknüpfung von Symmetrieformen

Definition 3.15. Die Komposition von symmetrischen Abbildungen eines geometrischen Objekts wird ausgedrückt durch $\circ$. Sie stellt eine Hintereinanderausführung von Symmetrieformen [6, S.97][24, S.19f.] dar. Dabei ist die Ausführung der Reihenfolge entscheidend. Mögliche Kompositionen sind: Translation mit Spiegelung und Drehung, Translation und eine Drehung um einen Winkel α [6, S.97].

Beispiel 3.16. [24, S.20] Als Beispiel nehmen wir *Abbildung 3.6*. Betrachten wir die linke Abbildung, so wird zunächst der Punkt **P** an der Geraden **a** gespiegelt und danach im Winkel $\mathbf{20}^\circ$ gedreht, also $\mathbf{D_{M,20^\circ}} \circ \mathbf{S_a}$.
In der rechten Abbildung wird als erstes die Drehung und danach die Spiegelung an der Geraden **a** ausgeführt, also $\mathbf{S_a} \circ \mathbf{D_{M,20^\circ}}$. Es ist deutlich zu erkennen, dass **P”** in der linken Abbildung nicht **P”** in der rechten entspricht. Es gilt:
$\mathbf{D_{M,20^\circ}} \circ \mathbf{S_a} \neq \mathbf{S_a} \circ \mathbf{D_{M,20^\circ}}$
Die Kommutativität ist demnach nicht gegeben.

Caley-Tabelle

Definition 3.17. Sei G eine endliche Gruppe. Die Verknüpfungen der Addition und Multiplikation entsprechend aller Symmetrieformen können in einer Verknüpfungs- bzw. Caley Tabelle eingetragen werden [1, S.19].

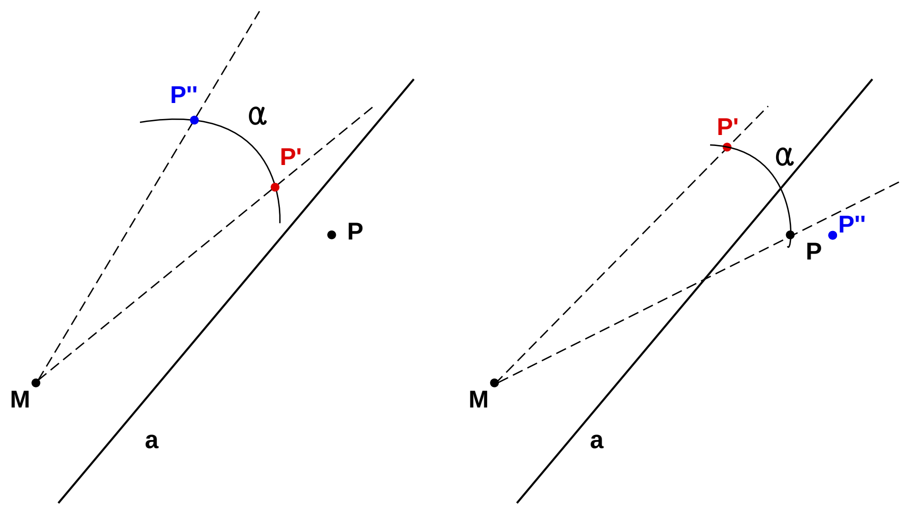


Abb. 3.6: Eine Komposition von Symmetrieformen (Rotation und Spiegelung an einer Geraden) [24, nach: S.20]

Eine vertikale Spiegelung wird im Folgenden mit **V**, eine horizontale mit **H** und eine diagonale mit **D** bzw. **D'** dargestellt. In einem Quadrat ist **D** die Gerade von der oberen linken zur unteren rechten Ecke, **D'** die von der oberen rechten zur unteren linken Ecke. Das Objekt **O** und seine Abbildung **A** sind dabei deckungsgleich, also kongruent.

·	**I**	$\mathbf{R}_{90}$	$\mathbf{R}_{180}$	$\mathbf{R}_{270}$	**H**	**V**	**D**	**D'**
I	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}	H	V	D	D'
$\mathbf{R}_{90}$	R_{90}	R_{180}	R_{270}	I	D'	D	H	V
$\mathbf{R}_{180}$	R_{180}	R_{270}	I	R_{90}	V	H	D'	D
$\mathbf{R}_{270}$	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}	D	D'	V	H
H	H	D	V	D'	I	R_{180}	R_{90}	R_{270}
V	V	D'	H	D	R_{180}	I	R_{270}	R_{90}
D	D	V	D'	H	R_{270}	R_{90}	I	R_{180}
D'	D'	H	D	V	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

Tabelle 3.1: Eine Caley Tabelle der Symmetrien eines Quadrats. Das rot markierte **D** z.B. ist eine Komposition aus $\mathbf{H} \circ \mathbf{R}_{90}$. Dabei wird **H** nach $\mathbf{R}_{90}$ ausgeführt [1, nach: S.19].

3.3 Symmetrie in der Musik

In diesem Abschnitt werden neben einer Begriffsdefinition der *Symmetrie* die unterschiedlichen, musikalischen Symmetrieformen dargestellt, die mit geometrischen Symmetrieformen zu vergleichen sind. Die motivische Verarbeitung ist der Untergruppe zuzuordnen.
In *2.2 Gruppentheorie in der Musik* wurde bereits darauf hingewiesen, inwieweit Symmetriegruppen und Permutationen eines Motivs in musikalischen Werken verwendet werden.

3.3.1 Definition

Der bedeutende Musikwissenschaftler Albrecht Riethmüller umfasst den Begriff der Symmetrie folgendermaßen:

Definition 3.18. *Symmetrie ist ein in der Natur, in der Kunst und besonders auch in der Musik erkennbares Strukturierungsprinzip, auf dem alle Rede von der Musik als Harmonie bzw. als rational begründeter, auf Proportionen beruhender Ordnung basiert und das seit der Antike sowohl die Konstruktion der Tonsysteme als auch die Erklärung der zeitlichen Gestalt, mithin die Form der Musik überhaupt, betrifft und leitet* [16].

Die Symmetrieformen in der Musik beruhen auf *rational begründeter Ordnung*, die mit Symmetrieformen aus der Sicht der Geometrie vergleichbar sind. Auch dort ist eine Symmetrie definiert, bei der eine Ordnung beobachtet wird [4, S.17]. Symmetrien befinden sich in Satzformen, Formteilen und in ganzen Werken als ein Strukturierungsprinzip. Diese globale Sicht wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingehender beleuchtet. Der Fokus liegt nachfolgend auf der Betrachtung von motivischer Verarbeitung durch Symmetrieformen als ein lokales Kompositionsprinzip.

Die mathematischen *3.2.2 Symmetrieformen* finden wir in der Musik wieder. Dabei stellt die Ebene die des Notenbildes dar. Ein Objekt kann symmetrisch verarbeitet werden, wenn es abgeschlossen ist. Dies muss auch für eine Notensequenz gelten, sodass sie eine endliche Anzahl von Noten besitzt. Ein geometrisches Objekt wird im Rahmen dieser Arbeit mit einem Motiv gleichgesetzt.

Zunächst wird auf die zeitliche Komponente in musikalischen Werken eingegangen. Danach folgen die Darstellung von Symmetrien mit Notenbeispielen.

3.3.2 Allgemeines zum zeitlichen Verlauf

Die Formen wie in *3.2 Symmetrie in der Mathematik* sind analog auch in der Musik vorhanden. Wir betrachten Abbildungen (aus geometrischer Sicht) und musikalische Kompositionen. Dabei hat das musikalische Werk einen zeitlichen, dynamischen Verlauf [17, S.161]: Kompositions-Teile, Motive, Sätze oder Phasen des Formverlaufs sind zeitlich – entsprechend dem Verlauf der Komposition im Notensystem – angeordnet. Dass auch mit der zeitlichen Komponente die allgemeinen, mathematischen Gesetze gelten, hat Albert Einstein in seiner Relativitätstheorie gezeigt. Es gilt:
Sei *K* ein Objekt und *K'* die eindeutige Abbildung von *K. Ist K' ein in Bezug auf K gleichförmig und drehungsfrei bewegtes Koordinatensystem, so verläuft das Naturgeschehen in bezug auf K' nach genau denselben allgemeinen Gesetzten wie in Bezug auf K.* [8, S.15] Das Koordinatensystem in diesem Fall stellt das Notenliniensystem dar, welches nicht rotiert und geradlinig verläuft. Betrachtet man ein Motiv als das Objekt, so bewegen sich das Objekt und die Zeit relativ zueinander geradlinig und gleichförmig [4, S.97f.] und es gelten die allgemeinen Gesetze.

3.3.3 Symmetrieformen

Spiegelung

Die nachstehenden Spiegelungen mit Identität, Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung sind für musikalische Kompositionen ausschlaggebend und entsprechen aus geometrischer Sicht *Spiegelungen an einer Geraden* an einer vertikalen bzw. horizontalen Achse.

Definition 3.19. Bei einer Spiegelung wird eine Abfolge von Tönen – wie in *3.2.2 Spiegelsymmetrie* – an einer vertikalen oder horizontalen Achse projiziert.

Formen 3.20. Formen der Spiegelsymmetrie in der Musik sind *Umkehrung, Krebs* und *Krebsumkehrung*. Bei der Umkehrung wird beispielsweise ein Motiv an einer horizontalen, bei einem Krebs an einer vertikalen und bei einer Krebsumkehrung an einer vertikalen *und* horizontalen Geraden reflektiert.

Beispiel 3.21 (Krebs)**.** Durch Projezierung an einer Vertikalachse erhält man die Krebsform des Motivs (KV 545) (siehe *Abbildung 3.7*).

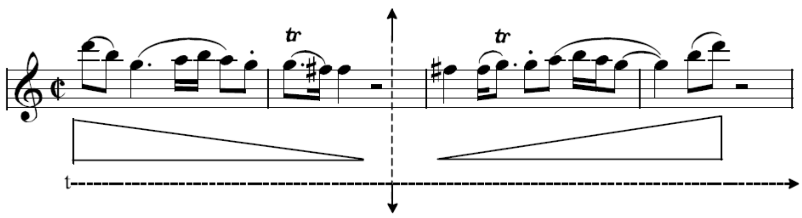


Abb. 3.7: W.A.Mozart: Klaviersonate C-Dur (KV 545), 1.Satz, 2. Thema [17, S.163]

Beispiel 3.22 (Umkehrung)**.** Die *Abbildung 3.8* ist ein Beispiel aus dem *Graduale triplex* [27] für eine Umkehrung.

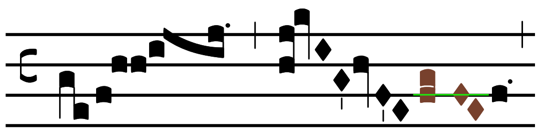


Abb. 3.8: Beispiel einer Umkehrung [27, nach: S.27]: sechste Abschnitt unter *Caeli enarrant*: der Tonabstand der ersten beiden braun markierten Noten wird darauf folgend umgekehrt. Die grüne horizontale Linie deutet die Spiegelungsachse an.

Beispiel 3.23 (Krebsumkehrung)**.** Ein weiteres Mal wird die Reihe von Webers Streichquartett Nr. 28 in *Abbildung 3.9* betrachtet. Im Werk erscheint die Originalreihe zwölf Mal und der Krebs neun Mal auf unterschiedlichen Tonhöhen [17, S.30]. Wenn man die Originalreihe genau analysiert, so ist sie nicht nur identisch mit der Krebsumkehrung der Reihe, sondern auch mit dem Krebs. In der Abbildung sind zwar einige Töne enharmonisch verwechselt, dennoch ist dies erkenntlich.

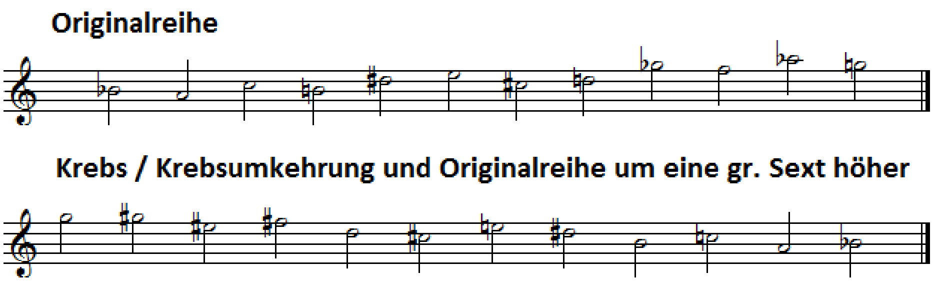


Abb. 3.9: Beispiel einer Krebsumkehrung aus Weberns *Streichquartett op 28.*

Des weiteren ist die Reihe in der Diagonale symmetrisch aufgebaut, wie in *Abbildung 3.10* zu erkennen. Die x-Achse stellt dabei die „abstrakte“ Einsatzzeit dar. In der y-Achse sind die einzelnen Töne der chromatischen Tonleiter abgebildet, analog zur *Abbildung 2.11.* Auch die zwei verschiedenen Permutationen sind in der Darstellung erkennbar[2].

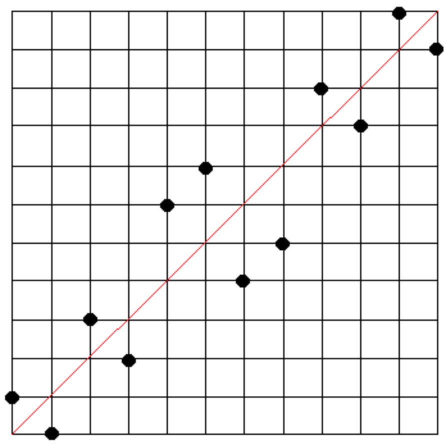


Abb. 3.10: Symmetrie in A.Weberns *Streichquartett op. 28.* Die x-Achse stellt abstrakt die (Einsatz-)Zeit dar, die y-Achse die Tonhöhe.[3]

Verknüpfen von Spiegelungen

Die *Caley-Tabelle* zeigt am Beispiel eines Quadrates vorkommende Symmetrieformen. Dieses Prinzip wird auf ein musikalisches Motiv angewendet und zusammenfassend betrachtet. Die untenstehende *Tabelle 3.3* repräsentiert die Spiegelungsformen in musikalischen Kompositionen. Dabei werden die Formen der Identität, des Krebs, der Umkehrung und der Krebsumkehrung studiert.
Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

[2]Erster Takt (Punkte 1 - 4) und dritter Takt (Punkte 9 - 12 entlang der x-Achse) entsprechen der gleichen Permutation (1234) wie oben beschrieben.
[3]Diese Abbildung ist eine korrigierte Fassung von [14, S.149]. Die Korrektur ist mit dem Autor Guerino Mazzola abgesprochen.

Identität	**I**
Krebs	**K**
Umkehrung	**U**
Krebsumkehrung	**KU**

Tabelle 3.2: Abkürzungen

·	**I**	**K**	**U**	**KU**
I	I	K	U	KU
K	K	I	KU	U
U	U	KU	I	K
KU	KU	U	K	I

Tabelle 3.3: Verknüpfungen von Spiegelsymmetrien in musikalischen Kompositionen

Wie bei *3.2.2 Verknüpfung von Symmetrieformen* ist die Reihenfolge der Ausführung entscheidend. Die rot markierte Krebsumkehrung KU ist eine Komposition aus $\mathbf{U} \circ \mathbf{K}$. Dabei wird **U** nach **K** erstellt. Mit **I, K, U, KU** sind die Symmetrieformen endlich, sodass pro Zeile und Spalte jede Symmetrie genau einmal erscheint [1, S.26].

Transposition

Definition 3.24. Die Translation aus mathematischer Sicht (siehe *Translationssymmetrie in der Mathematik*) entspricht in der Musik einer Transposition. Dabei wird in einer musikalischen Komposition eine endliche Abfolge von Noten um ein Vektor $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ in der Tonhöhe verschoben.

Bemerkung 3.25. Sie bildet eine wichtige Kompositionstechnik im Verlauf der historischen Kompositionsentwicklung. Sowohl beim Formaufbau, als auch in der Verknüpfung von Motiven ist die Transposition ein Grundprinzip. Beispielsweise wird sie in *rhythmischen, melodischen, polyphonen, harmonischen, homophonen Strukturen, in mikro- und makroformalen Bereichen* [17, S.222] umgesetzt.

Formen 3.26. Transpositionen in den musikalischen Stücken sind Wiederholung, Da capo, Kanon und Verarbeitung eines Rhythmus. Bei Wiederholungen und einem Da capo handelt es sich um eine translative Symmetrie in der physikalischen Zeitachse, bei dem Teile von einem musikalischen Stück wiederholt werden. Im Kanon wird eine Melodie zeitlich versetzt verschoben wiederholt und auf diese Weise zu sich selber in Beziehung gesetzt. Ein Rhythmus kann eine Tondauer periodisch wiederholt werden und bildet dadurch auch eine Transposition [13, S.87].

Beispiel 3.27. *Abbildung 3.11* zeigt eine Wiederholung eines Themas in Wolfgang Amadeus Mozarts Klaviersonate C-Dur, KV 545. Der erste Takt der Darstellung wird im nächsten identisch abgebildet.

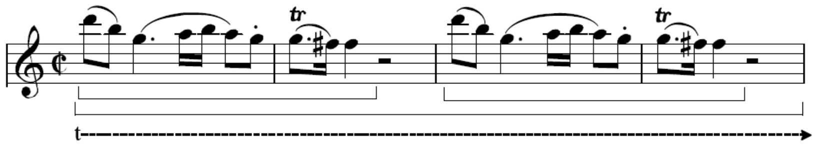


Abb. 3.11: W.A.Mozart: Klaviersonate C-Dur (KV 545), 1.Satz, 2. Thema [17, S.162]

Ein weiteres Beispiel ist in *Abbildung 2.9* dargestellt. Das Motiv in der Oberstimme von Takt eins erscheint in Takt drei um eine Quinte (sieben Halbtöne) höher.

Kombination aus Translations- und Spiegelsymmetrie

Eine Kombination von unterschiedlichen Symmetrien ist ein gängiges Kompositionsprinzip. Im Beispiel des Kopfmotivs von Bachs in *Präludium und Fuge in D-Dur* (siehe *Abbildung 3.12*) deuten die vertikalen Pfeile die vertikalen Spiegelungen an, die horizontalen Pfeile die translativen Symmetrien dieses Motivs.

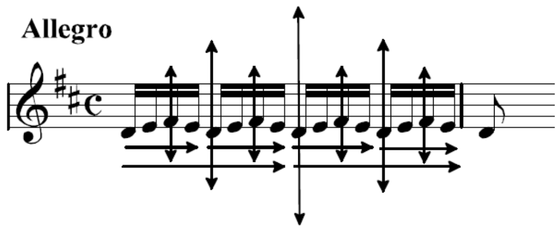


Abb. 3.12: J.S.Bach, *Präludium und Fuge in D-Dur* (BWV 532), Kopfmotiv. Beispiel einer Kombination aus Transposition und Spiegelung [17, S.201].

Translationen können *eigentliche* oder *uneigentliche Kongruenzen* sein. Die Spiegelsymmetrie ist dabei ein Beispiel für uneigentliche Kongruenz. Als eine eigentliche bezeichnet man in der Musik eine zeitliche Verschiebung bzw. Wiederholung eines Motivs. Das 2. Thema aus Mozarts Klaviersonate C-Dur in *Abbildung 3.11* repräsentiert eine eigentliche Kongruenz [17, S.199]. Die *eigentlichen* und *uneigentlichen Kongruenzabbildungen* in einem Werk sind mit *echten* und *unechten Bewegungen* eines Objektes zu vergleichen. Eine Bewegung eines Objektes wird dabei abgebildet und läßt sich auf Deckungsgleichheit prüfen.

Rotationssymmetrie

Die Verwendung und Bildung von Rotationen kann man in musikalischen Kompositionen aus zwei unterschiedlichen Sichtweisen betrachten:

1. Die rotative und translative Symmetrie kann man nicht voneinander trennen [17, S.204]. Entsprechend der Translation ist die Transposition dabei ein Mittel, um

Rotation in der Musik zu assoziieren. Sei die Oper *Der Barbier von Sevilla* von *Gioacchino Rossini* ein Beispiel dafür. Formale Abschnitte wie Sätze, Themen und Motive werden dabei immer wieder zerteilt, sodass der Eindruck einer Rotation entsteht [17, S.204].

2. Wird eine Spiegelung des Krebs, der Umkehrung oder der Krebsumkehrung eines Motivs aus geometrischer Sicht betrachtet, so stellt sie eine Komposition aus einer Rotation, einer Spiegelung an einer Vertikalachse und einer Translation dar. Als Beispiel wird das Ausgangsmotiv *e', g', c"* verwendet. Der Violinschlüssel wird hier zu Illustrationszwecken weggelassen. Es sei betont, dass bei der Bildung der Symmetrieformen die Gruppe der Noten und nicht das Notensystem transformiert wird. Sonst widerspricht es der Forderung nach einem gleichförmig und drehungsfrei bewegtem Koordinatensystem der Notenlinien. Im Folgenden bedeutet $\mathbf{V}$ die vertikale Spiegelung, $\mathbf{R_n}$ eine Rotation um n Grad und $\mathbf{T}$ eine Translation. Bei der Verschiebung $\mathbf{T}$ kann es sein, dass für die musikalische Darstellung im Notenliniensystem das zusätzliche Einzeichnen von Hilfslinien notwendig ist.

   - Die Umkehrung des Beispielmotivs – wie in *Abbildung 3.13* – kann als eine Komposition aus $\mathbf{R_{180}}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T}$ angesehen werden.

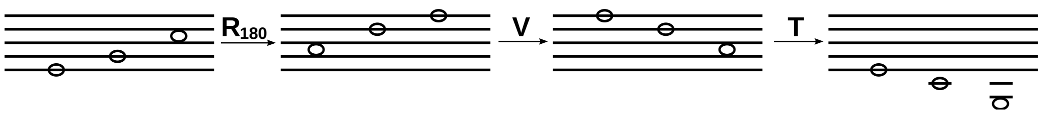


Abb. 3.13: Umkehrung als eine geometrische Komposition aus $\mathbf{R_{180}}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T}$.

   - Der Krebs stellt ebenfalls eine Komposition aus $\mathbf{R_{360}}$ oder $\mathbf{R_0}$ und $\mathbf{V}$ dar, siehe *Abbildung 3.14*.

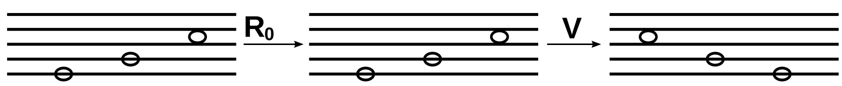


Abb. 3.14: Ein Krebs als eine geometrische Komposition aus $\mathbf{R_0}$ und $\mathbf{V}$.

   - Die Krebsumkehrung in *Abbildung 3.15* verknüpft die zwei oben genannten Spiegelungsformen und beinhaltet die Komposition aus $\mathbf{V}$, $\mathbf{R_{180}}$, $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T}$. Die Rotationen $\mathbf{R_{360}}$ bzw. $\mathbf{R_0}$ werden bei der Umformung des Krebs der Übersichtlichkeit halber gespart.

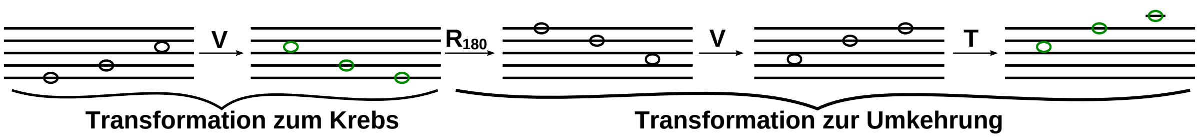


Abb. 3.15: Eine Krebsumkehrung, wobei die oben beschriebenen geometrische Transformationen zum Krebs und zur Umkehrung durchgeführt werden.

3.4 Gegenüberstellung der Symmetrieformen

Die nachfolgende Tabelle stellt dar, welche geometrischen Symmetrieformen in musikalischen Kompositionen Verwendung finden.

Symmetrieform Mathematik	**Symmetrieform Musik**
Identität	Die Sequenz einer Notenfolge selbst, wie die eines Motives.
Spiegelung	Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung
Translation	Transposition, Wiederholung, Da capo, Kanon
Rotation	• Assoziation einer Rotation durch Zerteilen von Themen, Motiven und ihren Transpositionen. • Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung als geometrische Komposition aus Rotation, vertikaler Spiegelung und Translation.
Verknüpfung von Spiegelungen	Identität des Motivs, Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung (siehe *Tabelle 3.3*)
Verknüpfung Translation und Spiegelung	Eine Transposition einer Spiegelung.

Tabelle 3.4: Gegenüberstellung von Symmetrieformen in Mathematik und Musik

4 Komposition und Methodik

4.1 Algorithmus versus Kompositionsmethodik

Wir haben in einigen Beispielen die motivische Verarbeitung mit Symmetrien und Variationen bzw. Permutationen in *2.2.2 Permutationen als motivische Verarbeitung* kennengelernt. In der musikalischen Kompositionsentwicklung gibt es aber auch vollständig strukturierte Kompositionstechniken.

Zunächst wird in diesem Kapitel die *Kompositionsmethode* im Sinne eines algorithmischen Verfahrens definiert. Vor allem in der *Seriellen Musik* (ab Mitte des 20. Jahrhunderts) werden strukturelle Kompositionstechniken, die von *rationaler Kontrolle* [22, S. 1329] nach einer vordefinierten Methode geprägt sind, verwendet. Exemplarisch werden zwei Methoden dargestellt: *4.2 Methode nach Guido von Arezzo* und *4.3 Zwölftontechnik*. Es wird kurz erörtert, ob eine algorithmische Umsetzung in Form einer Anwendung möglich ist. Inwieweit die jeweilige Methode mit Symmetrien arbeitet, wird in groben Zügen aufgegriffen.

Eigenschaften eines Algorithmus bzw. einer Kompositionsmethode

Um eine Kompositionsmethodik (KM) in einer Anwendung zu verwirklichen, muss sie algorithmisch umsetzbar sein. Für diese Zwecke werden die Hauptmerkmale eines Algorithmus in Bezug auf eine *KM* dargestellt [12, S.288].

1. Eine *KM* muss **endlich** sein.

2. Jeder ihrer Schritte ist **ausführbar**.

3. Eine *KM* erhält eine **Eingabe** und die *Anwendung* verarbeitet diese.

4. Sie produziert **eine Ausgabe** bzw. ein Ergebnis, der durch die Eingabe bestimmt ist.

5. Dieselbe Eingabe erzeugt dieselbe Ausgabe, sie ist also **eindeutig**.

Sowohl eine kompositorische Methode als auch ein Algorithmus werden in diesem Zusammenhang als ein deterministisches Verfahren betrachtet.

4.2 Methode nach Guido von Arezzo

Der Benediktinermönch, Musiktheoretiker und Lehrer Guido von Arezzo hat um ca. 1026 eine Kompositionsmethodik entwickelt, um lateinische liturgische Texte in Choralgesänge umsetzt hat [12, S.285ff.]. Die Methode baut auf Hexachorde auf, einer Gruppe von sechs diatonischen Tönen mit einem Halbton in der Mitte, wie C D E F G A. Zwischen E und F ist der Halbton. Er hat für diese Töne die Solmisationssilben *ut (do), re, mi, fa, sol, la* eingeführt. Die Töne von *g* bis *a"* hat er auf die Guidonische Hand abgebildet und seine Schüler mit dieser Art unterrichtet. Dabei werden die Töne von **??** werden auf bestimmte Positionen einer Handinnenfläche projiziert. In *Abbildung 4.1* sieht man den Ambitus der Vokalmusik der Zeit. Es sind vier Hexachorde enthalten:

1. Γ *A H C D E*
2. *C D E F G a*
3. *G a h c d e*
4. *c d e f g a'*

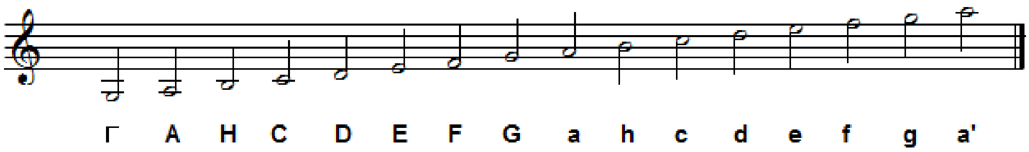


Abb. 4.1: Standardambitus der Vokalmusik im Mittelalter [12, nach: S.287]

Diese Töne hat er mit mit Vokalen der lateinischen Sprache verknüpft (siehe *Abbildung 4.2*). Da es für jeden Vokal drei Möglichkeiten gibt, existieren mehrere Lösungen für jeden lateinischen Text. Wir sehen in *Abbildung 4.3* eine mögliche Übersetzung eines lateinischen Textes in eine musikalische Komposition. In der Mitte sieht man die drei verschiedenen Blöcke. Jedes Block enthält die Vokale *a, e, i, o, u*.

Γ A B C D E F G a b c d e f g a'

a e i o u a e i o u a e i o u a

Abb. 4.2: Guido von Arezzo: Zuordnung der Vokale zu den Tönen [12, nach: S.287]

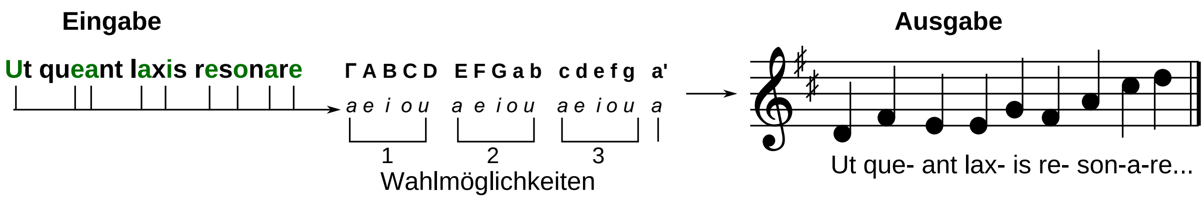


Abb. 4.3: Guido von Arezzo: Beispiel einer Komposition nach Vokalen [12, nach: S.287]

Nach der Methode von Guido von Arezzo gibt es also mehrere Varianten, einen Text in eine musikalische Komposition zu verwandeln. Sie erfüllt die Eigenschaften eines Algorithmus nicht, da nicht immer das gleiche Ergebnis herauskommt. Es sei hier aber noch erwähnt,

dass der Ambitus eines gregorianischen Werkes auf einer Oktave – bei Guido von Arezzo bis zu einer Dezime – beschränkt ist [23, S.161]. Außerdem ist die Aufführungspraxis nach dem Wort-Ton-Verhältnis orientiert[S.162ff.] [23]. Daraus kann gefolgert werden, dass keine großen Sprünge zwischen aufeinanderfolgenden Noten bestehen. Diese Tatsache grenzt die Kompositionsprinzipien ein. Werden diese Bedingungen bei der Implementierung berücksichtigt, so wird die Kompositionsmethode von Guido von Arezzo angenähert. Es existiert bereits ein Ansatz mit der Programmiersprache *MUSIMAT* [12, S.291].
Symmetriestrukturen sind im *Gregorianianischen Choral* vorhanden: in der Gattung des Responsoriums war der Wechselgesang zwischen Chor und Solo eine typische Vortragweise [21, S.1611]. Die Form der Proprium-Gesänge wie *Graduale, Alleluia, Offertorium* ist dadurch symmetrisch. Die *Abbildung 4.4* zeigt beispielhaft das Schema eines gregorianischen *Alleluja.*

a	**b**	**a**
Alleluia –	*Vers* –	*Alleluia*
Chor	Solo	Chor

Abb. 4.4: Gregorianischer Choral: Symmetrie im Wechselgesang [17, S.325]

4.3 Zwölftontechnik

Nach dem atonalen, disharmonischen Kompositionsstil zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde der Kontrapunkt von Arnold Schönberg und seinen Anhängern wiederentdeckt. Schönbergs Botschaft war, mit zusammenhängenden lokalen Kompositionen in einem fließenden Ablauf auf Basis **einer** gegebenen Reihe eine Komposition zu erzeugen. Die Zwölftontechnik ist ein schönes Beispiel für die *Restklassen modulo m* mit $m = 12$ Tönen. Im Gegensatz zum barocken Gebrauch der Permutationen werden die Permutationen in der Komposition der Zwölftonmusik als Bestandteile bzw. Elemente der lokalen Kompositionen angesehen, die erst durch methodisches Zusammenfügen eine syntagmatische Komposition, also die konkrete, zusammenhängende Aussage des Stückes ergeben [12, S.243]. Um dies nochmal deutlich vom Gebrauch in der barocken Fuge abzugrenzen: Permutationen in einer Fuge sind zwar Bestandteile eines Werkes, sind allerdings nicht spezifisch genug, um sie als Teil der Kompositionstechnik zu bezeichnen. Vielmehr füllen sie die musikalische Struktur auf [14, S.243].
Die Reihe **R** wird im Folgenden durch **1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12** repräsentiert. Jede Zahl entsprecht einer Note. Ist die Position einer Note im Werk bekannt, so läßt sich durch die *Restklasse modulo 12* bestimmen, die wievielte Note von **R** gerade erklingt. Die möglichen, vorkommenden Permutationen sind:

Identität	**1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12**
Krebs	**12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1**
Umkehrung	Sei der Abstand zwischen zwei Tönen **a, b** mit den Tonhöhen $\mathbf{H_a}$ und $\mathbf{H_b}$ definiert durch: $\mid \mathbf{H_a} - \mathbf{H_b} \mid, \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}$. Es gilt: **1 |1-2| |1-3| |1-4| |1-5| |1-6| |1-7| |1-8| |1-9| |1-10| |1-11| |1-12|**
Krebsumkehrung	**|1-12| |1-11| |1-10| |1-9| |1-8| |1-7| |1-6| |1-5| |1-4| |1-3| |1-2| 1**

Wie in *Verknüpfen von Spiegelungen* dargestellt, erscheinen durch Verknüpfungen keine weiteren Symmetrieformen.
Die Identität, der Krebs, die Umkehrung und die Krebsumkehrung der Reihe **R** als Permutationen erscheinen in Werken der Zwölftonmusik. Mit zwölf möglichen Transpositionen existieren 48 Möglichkeiten der Darstellung von **R** (4 Symmetrieformen · 12 Transpositionen = 48 Möglichkeiten). Diese zwölf ergeben sich daraus, dass eine Oktave zwölf Halbtöne enthält und dadurch alle Möglichkeiten, **R** darzustellen, abgedeckt sind. Die Reihe **R** taucht in keiner weiteren Permutation auf, da die Grundlage der Komposition eine einzige Reihe bildet, die nicht verändert werden oder unvollständig sein darf. Sie selbst soll als das strukturelle Element sein [20, S.2511.]. Bei mehrstimmigen Werken sind die Regelungen erweitert.

Abgrenzung der Reihe von Motiv und Thema

Die Einführung und Definition der *Reihe*, die aus zwölf unterschiedlichen Halbtönen einer Oktave nach wohltemperierter Stimmung besteht [20, 2505f.], grenzt sich vom *Motiv* ab. In der Wohltemperierung haben die zwölf Töne einer Tonleiter den gleichen Abstand untereinander. Jede Note der Reihe ist gleichberechtigt. Bei einem Motiv werden Töne wiederholt oder es findet sich eine Form der Symmetrie wieder, wie z.B. in der *Abbildung 2.9*. Dabei enthält das Motiv **a** bestehend aus d' und cis' eine Translation in Form einer Wiederholung. Die Reihe beinhaltet keine Symmetrien auf den ersten Blick, wie wir jedoch in *Abbildung 3.10* gesehen haben, kann eine Reihe selbst symmetrisch gestaltet sein.
Weiterhin ist die Reihe nicht mit einem Thema gleichzusetzen oder zu vergleichen, da ein Thema im Allgemeinen eine motivische Verarbeitung beinhaltet. In *Abbildung 2.11* ist Takt drei als eine Transposition anzusehen, doch steht bei der Bildung einer Reihe die Gleichberechtigung bzw. Emanzipation der Töne im Vordergrund [20, S.2509f.]. Sie legt Tonqualitäten fest und stellt Beziehungen der Töne dar. Die absolute Tonhöhe ist nicht fixiert, sodass beispielsweise ein c gleichberechtigt mit c'. Ein Intervall wie *e - c* kann demnach als große Terz oder eine kleine Sext oder eine beliebige Oktaverweiterung angesehen werden [20, S.2508f.].

Die Zwölftontechnik ist als eine algorithmische Kompositionsmethodik anzusehen. Das betrifft allerdings nur die Melodieführung, die rhythmischen und dynamischen Aspekte sind dabei nicht streng geregelt und lassen dem Komponisten Freiraum.

5 Die Anwendung MUSYmmetry

5.1 Allgemein

Die Anwendung *MUSYmmetry* generiert eine musikalische Komposition durch Anwendung von Symmetriestrukturen.
MUSYmmetry bietet dazu zwei unterschiedliche Formen an: zum einen *Symmetriestrukturen*, bei der ein Motiv mit Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung, Transpositionen und Permutationen verarbeitet wird. Weiterhin steht die *Kadenzart* zur Auswahl. Dabei erklingt das Motiv nach Art einer erweiterten Kadenz mit Transpositionen auf unterschiedlichen Stufen. Die *Kadenzart* weist dadurch symmetrische Eigenschaften auf.

Komposition der Symmetriestrukturen

Hat der Benutzer die Form der *Symmetriestrukturen* selektiert, kann er ein Motiv auf der Benutzungsoberfläche zusammenstellen und die Taktart bestimmen. Das Motiv wird folgendermaßen verarbeitet:
Die Form des generierten Stücks ergibt **A B B' A' C**, wobei **A'** die vertikale Spiegelung - also den Krebs - von **A** und analog **B'** die vertikale Spiegelung von **B** entspricht. Der Teil **C** bildet eine Art *Coda*. Im Teil **A** wird zunächst ein Thema – bestehend aus dem Motiv als „Frage“ und einer generierten Antwort – und danach Krebs, Umkehrung und die Krebsumkehrung des Motivs gebildet. Bei einer Umkehrung werden die Abstände des Motivs ausgehend vom ersten Ton des Motivs horizontal gespiegelt. Anschließend folgen die Permutationen des Motivs. Die Hälfte davon ergibt den Teil **B**, der Krebs von Teil **B** die zweite Hälfte als **B'**. Dadurch sind selbst die Permutationen symmetrisch dargestellt. Besteht ein Motiv aus mehr als drei aufeinanderfolgenden Tönen bzw. Pausen, so werden lediglich die ersten drei zur Bildung der Permutationsgruppe verwendet. Der Schluss **C** wird vom Motiv und von fünf Transpositionen des Motivs und einer Wiederholung des Themas repräsentiert und bildet eine Art Überraschungsmoment zum Finale. Die Transpositionen stellen an dieser Stelle aus musikalischer Sicht eine Sequenz [10, S.107] dar. Bei der Implementierung allerdings wird eine Transposition immer von der Ausgangslage des Motivs gebildet und der Abstand manuell dazu angegeben. Es existiert keine Iteration, die diese Transpositionen bildet, sodass sie aus Implementierungssicht keine Sequenz bilden. Bei dieser Form der *Symmetriestrukturen* werden die Tonarten aus musiktheoretischer Sicht nicht betrachtet, da ein Motiv mit Formen der Symmetrie verarbeitet wird.

Komposition nach Art einer Kadenz

Bei der Auswahl der *Kadenzart* wird die erste Note des Motivs als Grundton einer Tonart interpretiert. Der Benutzer hat auch hier die Möglichkeit die Taktart festzulegen. Die Komposition besteht durch Transponieren des Motivs auf folgenden Stufen einer erweiterten Kadenz einer Tonart: erste, fünfte, sechste, dritte, vierte, erste, vierte, fünfte und erste Stufe. Auf der fünften Stufe wird der Krebs des Motivs gebildet, auf der dritten die

Umkehrung.

Im Folgenden wird die Software *MUSYmmetry* im Detail beschrieben.

5.2 Software-Charkteristika

5.2.1 Zielbestimmung

Die Anwendung *MUSYmmetry* bietet dem Benutzer eine Generierung eines musikalischen Werkes an, welches in einer audio-Dateiform abgespielt werden kann.

Kriterien

- **/K1/** Der Benutzer kann zwischen den Formen der *Symmetriestrukturen* und der *Kadenzform* selektieren.
- **/K2/** Der Benutzer kann ein musikalisches Motiv zusammenstellen.
- **/K3/** Er kann zwischen geradem und ungeradem Takt wählen.
- **/K4/** Es gibt die Alternative zwischen Voll- und Auftakt.
- **/K5/** Generierte Kompositionen werden temporär in einer Liste gespeichert und können ausgewählt und abgespielt und gelöscht werden. Des Weiteren kann das Motiv der selektierten Komposition angezeigt werden.

5.2.2 Produktinformationen

Produkteinsatz

Die Zielgruppe sind Personen, die sich eine musikalische Komposition erstellen lassen und anhören wollen, welche Symmetriestrukturen enthält.
Das Programm muss für den Betrieb auf der Festplatte des Rechners gespeichert werden. Für ein Update ist eine Installation einer neuen Version notwendig.

Produktumgebung

- Hardware:
  Es ist ein Rechner mit einem Bildschirm notwendig, der eine Auflösung 1000 x 600 Bildpunkte darstellen kann. Zusätzlich werden Maus und Tastatur benötigt.
- Software: Jedes Java SE 8 unterstützende System.

Entwicklungsumgebung

Software: IntelliJ-Idea, LaTeX, Inkscape, Rational Software Architect (RSA)

Produktdaten

Die Applikation speichert oder benutzt keine persistenten Daten. Generierte Stücke sind temporär gespeichert.

Produktfunktion

- **/F1/** Der Benutzer kann das Programm mit vorhergehender Bestätigungsnachfrage schließen.
- **/F2/** Der Benutzer kann zwischen den Formen „Symmetriestrukturen“ und „Kadenzform“ wählen.
- **/F3/** Für eine Komposition kann ein selbst gewählter Name vergeben werden.
- **/F4/** Der Benutzer kann ein Motiv aus Tonhöhen und Pausen zusammenstellen.
- **/F5/** Die Tonlänge einer Note ist auszuwählen.
- **/F6/** Er kann die Taktart (ungerade oder gerade) bestimmen.
- **/F7/** Der Benutzer hat die Möglichkeit zwischen Voll- und Auftakt zu selektieren.
- **/F8/** Ein ausgewähltes Motiv kann gelöscht werden.
- **/F9/** Der Benutzer kann die Generierung eines musikalischen Werkes mit einem ausgewählten Motiv veranlassen.
- **/F10/** Er kann das generierte Stück abspielen lassen.
- **/F11/** Wird ein ausgewähltes Werk abgespielt, kann es gestoppt werden.
- **/F12/** Die Benutzung des Programms kann sich der Benutzer anzeigen lassen.
- **/F13/** Bereits generierte Kompositionen kann er in einer Liste auswählen und abspielen lassen.
- **/F14/** Bereits generierte Kompositionen kann der Benutzer aus der Liste der Kompositionen löschen.
- **/F15/** Der Benutzer kann eine Komposition in der Kompositionsliste auswählen und sich das Motiv anzeigen lassen.

Produktleistungen

- **/L1/** Bei Programmstart erscheint der Bildschirm der Anwendung.
- **/L2/** Der Bildschirm hat eine Größe von 1024 x 768 Bildpunkten.
- **/L3/** Bei Erstellung einer neuen Komposition wird ein neues Fenster angezeigt mit einem Textfeld für einen selbst auszuwählenden Namen für die Komposition und einem Drop-Down-Menü zur Auswahl der Kompositionsform.
- **/L4/** Die Benutzung des Programms und Informationen zur aktuell ausgewählten Kompositionsform werden angezeigt.
- **/L5/** Bereits generierte Kompositionen und die zuletzt erstellte werden in einer Liste anzeigt.

5.2.3 Benutzungsoberfläche

Allgemein

- Der Benutzer kann mit Klick auf das Symbol x in der Ecke des Anwendung-Fensters das Programm schließen. Dabei erscheint ein Pop-up-Fenster mit der Bestätigungsnachfrage: „Wollen Sie das Programm wirklich beenden?“. Mit Klick auf den Button „Ja“ wird das Programm geschlossen, mit „Nein“ kehrt er zur Anzeige zurück (siehe /F1/).
- Das Fenster hat eine Größe von 1024 x 768 Bildpunkten (siehe /L2/).
- Die Pop-up-Fenster (außer dem Hilfefenster) sind alle im Vordergrund und müssen erst geschlossen werden, um die Funktionen des Hauptfensters nutzen zu können.

Anwendung *MUSYmmetry*

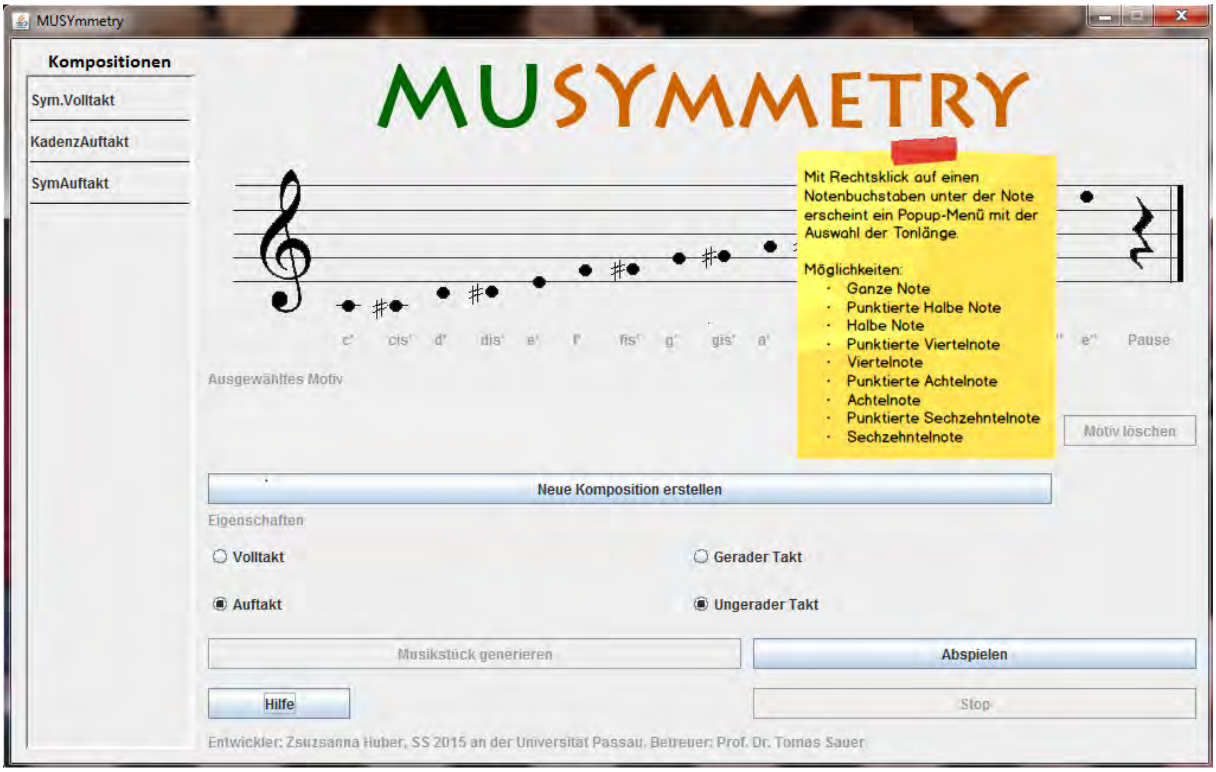


Abb. 5.1: Die Anwendung *MUSYmmetry*

- Mit Start der Anwendung *MUSYmmetry* erscheint das Hauptfenster wie in *Abbildung 5.1* dargestellt. Auf der linken Seite werden bereits erstellte Kompositionen gelistet. Unter dem Notensystem mit den Notennamen erscheint ein Feld, indem die ausgewählten Noten des Motivs erscheinen. Es befinden sich die Buttons „Neue Komposition erstellen“, „Musikstück generieren“, „Abspielen“, „Stopp“ und „Hilfe“ im unteren Bereich des Hauptfensters. Außerdem kann zwischen *Voll-* und *Auftakt* und *Gerader* und *Ungerader Taktart* gewählt werden (siehe /L1/).

- Ist die Applikation neu geöffnet, kann der Benutzer die Buttons „Hilfe“ und „Neue Komposition erstellen“ mit Mausklick benutzen, die weiteren Buttons sind nicht selektierbar.

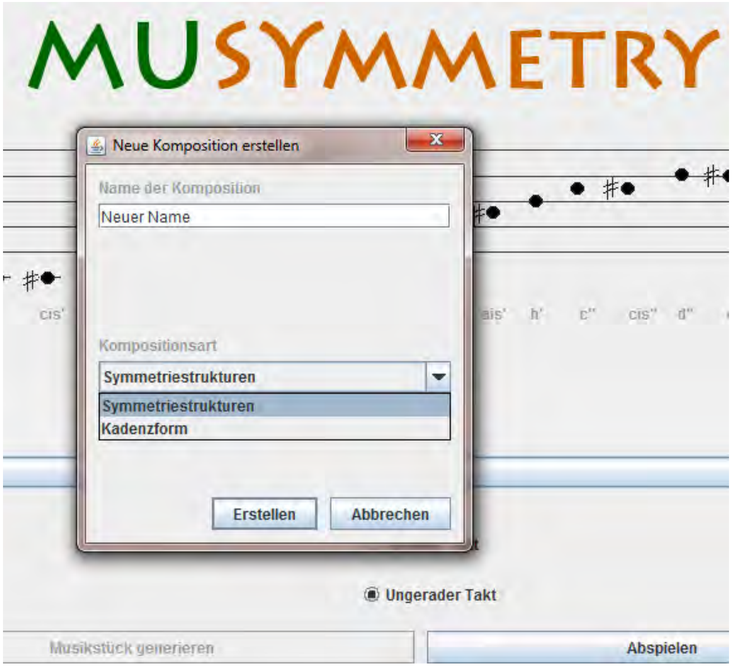


Abb. 5.2: Das Fenster „Neue Komposition erstellen“. *MUSYmmetry*

- Mit Klick auf den „Neue Komposition erstellen“-Button erscheint ein neues Fenster, siehe *Abbildung 5.2*. Das Hauptfenster im Hintergrund ist aktiv nicht nutzbar. Ein selbst gewählter Name kann in das Textfeld eingetippt werden. Ist der Name zu kurz, zu lang oder ist der Name bereits vergeben, erscheint ein Pop-up-Fenster mit dem Hinweis. Weiterhin kann der Benutzer im Drop-Down-Menü zwischen den Kompositionsformen „Symmetriestrukturen“ und „Kadenzform“ wählen (siehe /L3/). Mit Betätigen des „Erstellen“-Buttons wird die Komposition erstellt, dieses Fenster geschlossen und der selbst gewählte Name der Komposition erscheint im Hauptfenster der Anwendung. Mit dem „Abbrechen“-Button wird das Fenster der Kompositionserstellung geschlossen und das Hauptfenster wird angezeigt.

- Ist eine Komposition erstellt, sind die Notennamen unter dem Notensystem, das „Neue Komposition erstellen“-, „Musikstück generieren“- und das „Motiv löschen“-Button aktiv benutzbar.

- Der Benutzer kann mit Rechtsklick auf eine der Notenbuchstaben unter dem Notensystem klicken und damit eine Note auswählen. Es erscheint ein Pop-up-Menü mit einer Auswahl der Tonlänge. Möglich sind eine *Ganze Note*, eine punktierte *Halbe Note*, eine *Halbe Note*, eine punktierte *Viertelnote*, eine *Viertelnote*, eine punktierte *Achtelnote*, eine *Achtelnote* und eine *Sechzehntelnote* (siehe /F4/).

- Die ausgesuchte Note wird weiter unten in einem Textfeld eingetragen. In dieses Textfeld kann der Benutzer nicht tippen. Sie dient lediglich als Kontrolle.

- Mit Klick auf den Button „Motiv löschen“ wird ein zusammengestelltes Motiv gelöscht (siehe /F8/).
- Der Benutzer kann die Taktart mit Klick in die Box von „Gerader Takt“ oder „Ungerader Takt“ auswählen (siehe /F6/).
- Mit Klick in die Box von „Volltakt“ oder „Auftakt“ wird die Zählart der Komposition definiert (siehe /F7/).
- Ist ein Motiv ausgewählt, so kann der Benutzer mit Klick auf den Button „Musikstück generieren“ aktiv das Werk generieren lassen (siehe /F7/).
- Ist die Generierung eines Musikstückes beendet, so ist der Button „Abspielen“ aktiv und der Benutzer kann mit Klick darauf die aktuelle Komposition abspielen lassen (siehe /F13/).
- Wurde das „Abspielen“-Button betätigt oder läßt der Benutzer eines der Kompositionen in der Liste abspielen, so ist der „Stopp“-Button aktiv und das Abspielen des Stückes kann frühzeitig beendet werden (siehe /F11/).
- Zur Hilfestellung gibt ein Button „Hilfe“. Der Benutzer kann ihn anklicken und sich in einem Pop-up-Fenster eine Anleitung und die Benutzung der Anwendung und die Beschreibung der aktuell gewählten Kompositionsform anzeigen lassen (siehe /F12/ und /L4/). Das Hauptfenster im Hintergrund ist weiterhin aktiv und der Benutzer kann zwischen beiden Fenstern wechseln.
- In der Kompositionsliste werden generierte Kompositionen angezeigt (siehe /L5/). Ist eine Komposition neu erstellt, ist der Name der Komposition ebenfalls in der Liste angezeigt, aber noch nicht aktiv benutzbar.
- Mit Rechtsklick auf eines der Kompositionen in der Liste erscheint ein Pop-up-Menü, siehe *Abbildung 5.3*.

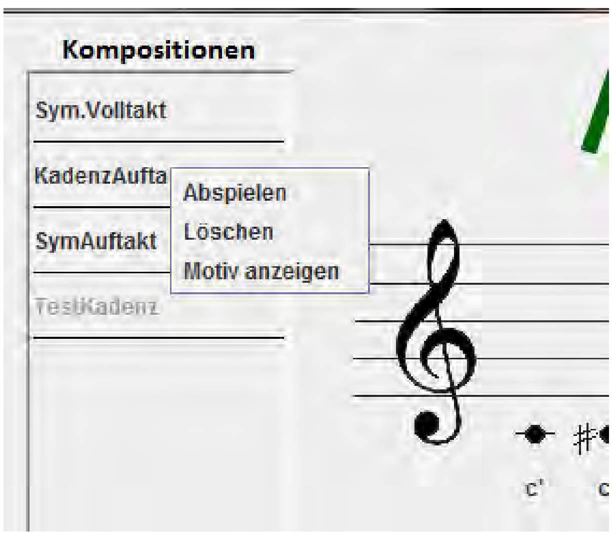


Abb. 5.3: Das Pop-up-Fenster beim Rechtsklick auf eines der Kompositionen.

– Wählt der Benutzer mit Linksklick den „Abspielen“-Button bei einem der Stücke aus, kann er dieses anhören (siehe /F12/).
– Hat der Benutzer eine der generierten Kompositionen selektiert, kann er mit Klick auf „Löschen“ im angezeigten Pop-up diese aus der Liste entfernen (siehe /F14/).
– Ist eines der generierten Stücke in der Liste ausgewählt, kann sich der Benutzer mit Klick auf „Motiv anzeigen“ das Motiv in einem Pop-up-Fenster – wie in *Abbildung 5.4* – darstellen lassen (siehe /F15/).

Abb. 5.4: Ein Pop-up-Fenster zeigt das Motiv einer ausgewählten Komposition an.

5.2.4 Systemarchitektur

Der Benutzer kommuniziert mit dem System über eine definierte Schnittstelle zum System nach dem *Model-View-Controller (MVC)*-Pattern. Er hat keinen direkten Zugriff auf Komponenten des Systems. Der Benutzer führt in der Anwendung Aktionen aus, die über das Model an das System weitergeschickt werden. Das System gibt die geforderte Information zurück. Mit dem MVC ist eine erweiterbare Schnittstelle geschaffen und das System kann auch für weitere Ansichten verwendet werden. In dieses MVC ist das *Observer*-Pattern integriert. Die Anzeige wird dadurch immer automatisch aktualisiert.
In *Abbildung 5.5* ist die Kommunikation zwischen der *Graphical user interface*(GUI) und dem System dargestellt.

5.2.5 Qualitätsbestimmungen

Erweiterbarkeit

Neue Features wie eine Erweiterung zur Mehrstimmigkeit oder Auswahl zwischen weiteren Musikformen sollen ohne größeren Aufwand in die Anwendung eingepflegt werden können. Die Verwendung von Interfaces werden Komponenten austauschbar und erweiterbar gemacht. Durch die Verwendung des MVC können auch weitere Anzeigen leicht hinzugefügt werden.

Stabilität

Die Applikation soll stabil laufen und bei normaler Benutzung keine Fehler erzeugen und nicht abstürzen. Dies wird durch eine saubere Implementierung und durch Testen sichergestellt.

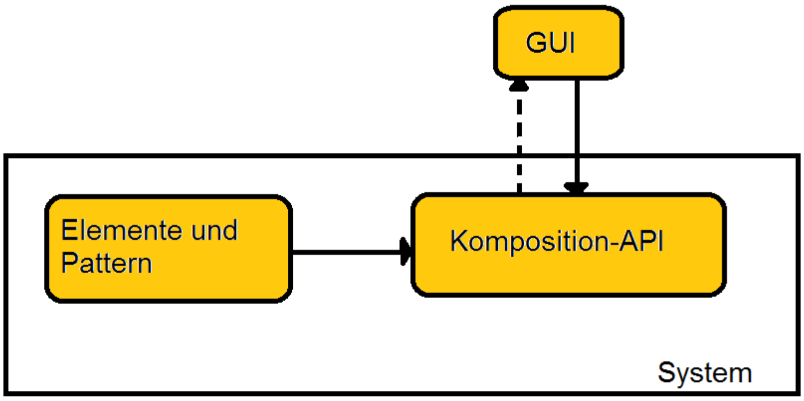


Abb. 5.5: Die Kommunikation des Benutzers über die GUI mit dem System. Die durchgezogenen Linien stellen den Zugriff auf eine Komponente, die gestrichelte Linie die Benachrichtigung einer Komponente dar.

Sicherheit

Die Anwendung lässt dem Benutzer keinen Zugriff auf das darunterliegende System zu.

Benutzerfreundlichkeit

Das Programm soll für den Endbenutzer einfach und intuitiv zu bedienen sein. Ein Oberflächen-Prototyp zu Beginn der Entwicklung soll die Benutzerfreundlichkeit gewährleisten.

5.3 Klassenbeschreibungen und -diagramme

Die package-Aufteilung der Anwendung *MUSYmmetry* besteht aus **client, musySystem, test** und **util**.

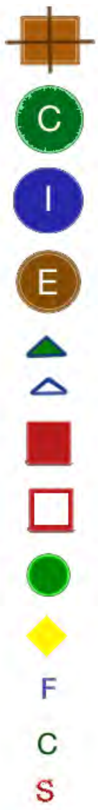
5.3.1 Package musySystem

Das package *musySystem* stellt das System der Anwendung dar. Es beinhaltet die packages *audio, composition, element, pattern* und *exception.*

package musySystem.element

In diesem package, wie in *Abbildung 5.7* dargestellt, sind die Klassen *Note, Motif, Bar, Theme* und die Enumeration-Klassen *BarType* und *Parity* enthalten. Dabei setzt sich ein Motiv aus einer Sequenz von Noten zusammen. Je nach Taktart wird das Motiv zu einem Takt verarbeitet. Das Thema ist eine Kombination aus dem Motiv und seinem Krebs.
In der Legende in *Abbildung Legende* sind die Bezeichnungen der Klassendiagramme erklärt.

Class Note ***Package: musySystem.element***
Eine Note ist spezifiziert durch die Tonhöhe und die Tondauer.



- package
- class
- interface
- enum
- Override method
- Override method
- private method
- private field
- public method
- protected
- final
- constructor
- static

Abb. 5.6: Legende

Class Motif ***Package: musySystem.element***
Ein Motiv setzt sich aus mehreren Noten zusammen und ist auf die Kardinalität von zehn Noten begrenzt.

Class Bar ***Package: musySystem.element***
Ein Takt ist bestimmt durch ein Motiv. Je nach Taktart (siehe Enumerationsklasse *BarType*) und Zählart (siehe Enumerationsklasse *Parity*) wird ein Motiv mit Pausen vor und hinter dem Motiv ergänzt.

Class Theme ***Package: musySystem.element***
Ein Thema setzt sich zusammen aus dem Motiv als Frage und dem Krebs als Antwort. Das Motiv ist hierbei schon in einen Takt verpackt und entspricht der gewünschten Zählart.

Enumeration BarType ***Package: musySystem.element***
Es gibt zwei unterschiedliche Taktarten: Auftakt und Volltakt: BarType.FULLBEAT und BarType.OFFBEAT. Beim Volltakt enthält der erste Takt alle Zähleinheiten, beim Auftakt führen ein oder mehrere Noten zum ersten vollen Takt hin.

Enumeration Parity ***Package: musySystem.element***
In einem Musikstück gibt es gerade oder ungerade Zähleinheiten: Parity.EVEN und Parity.ODD. Dabei stellt ein Bruch die Zählweise dar. Im Zähler steht die Anzahl der Einheiten, im Nenner die Zählart. Beispielsweise bedeutet $\mathbf{\frac{3}{4}}$, dass die Zähleinheit

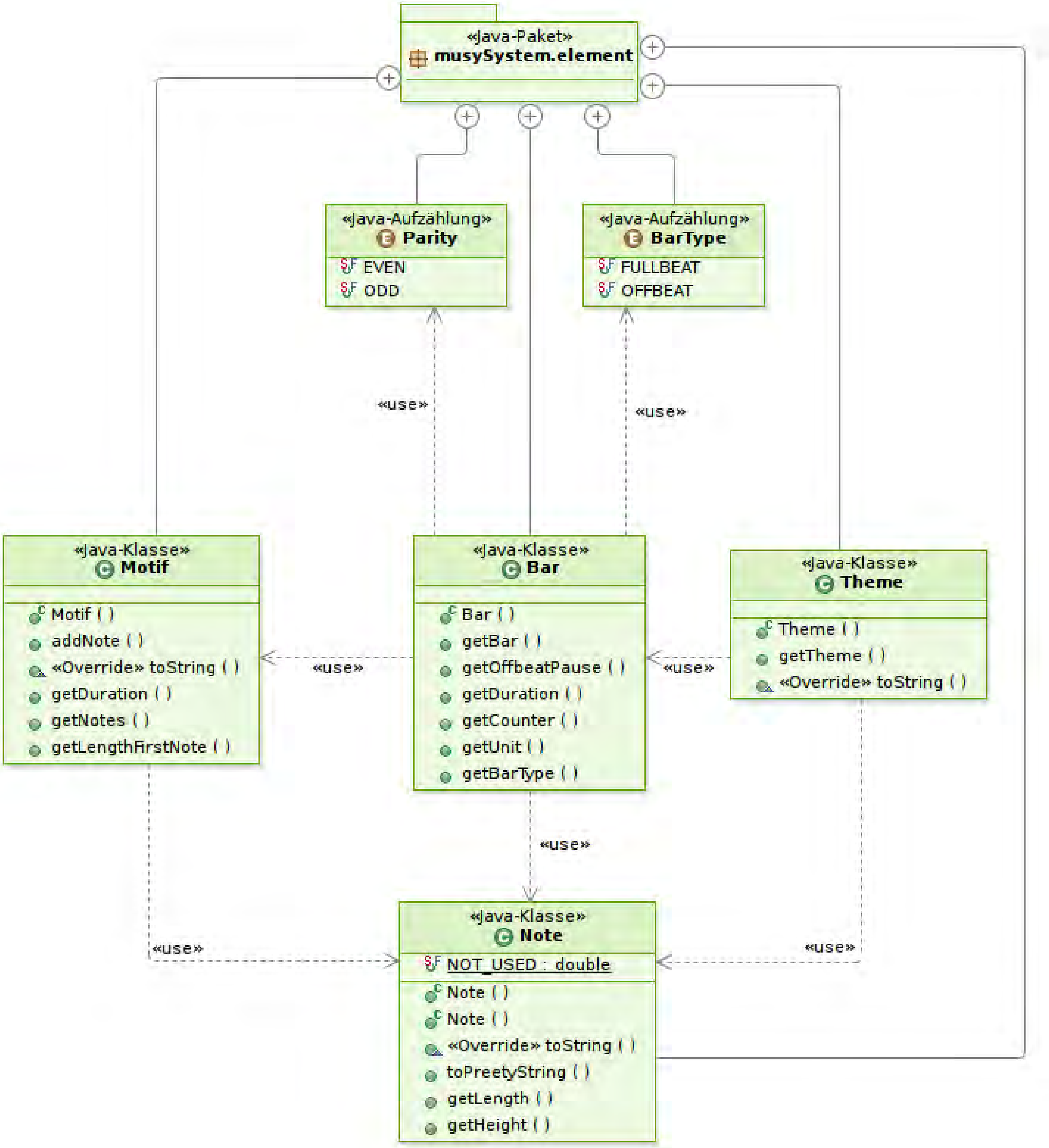


Abb. 5.7: Klassendiagramm vom package *musySystem.element*

Viertelnoten darstellen (Nenner) und dass in einem Takt drei Viertelnoten vorkommen. Diese Taktart ist ein ungerader Takt, da der Zähler eine ungerade Zahl darstellt.

package musySystem.pattern

Dieses Paket stellt die unterschiedlichen Symmetriestrukturen *Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung, Transposition* und *Permutation* bereit, siehe *Abbildung 5.8*. Das package läßt sich ohne viel Aufwand mit einem Interface erweitern, sodass auch weitere Kompositionsformen implementiert werden können.

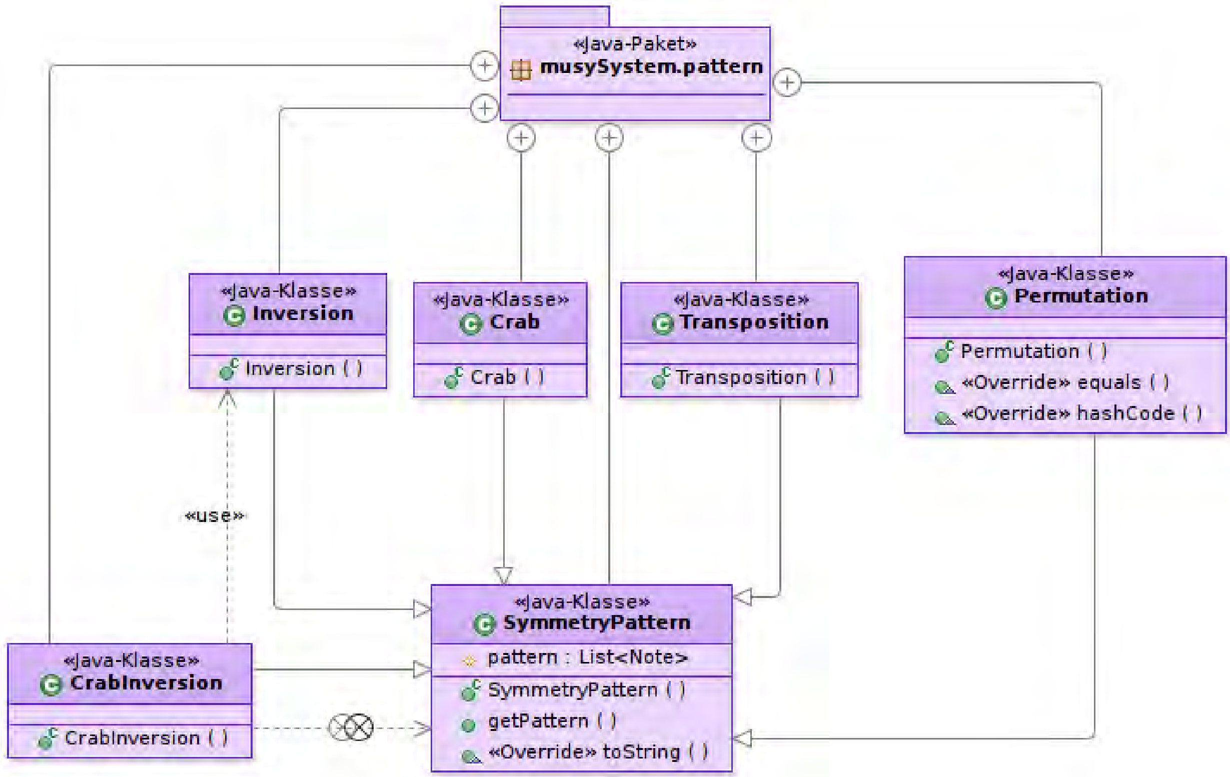


Abb. 5.8: Das package *musySystem.pattern* mit seinen Abhängigkeiten.

Abstract class SymmetryPattern ***Package: musySystem.pattern***
Die Klasse stellt eine Symmetriestruktur bereit.

Class Crab ***Package: musySystem.pattern***
Extends: SymmetryPattern
Die Krebs-Klasse verarbeitet eine Liste von Noten. Die Sequenz der Noten ist nicht festgelegt auf beispielsweise ein Motiv, sodass jede beliebige Liste von Noten verarbeitet werden kann.

Class Inversion ***Package: musySystem.pattern***
Extends: SymmetryPattern
In dieser Klasse wird die Umkehrung von einer Sequenz von Noten erstellt. Dabei bildet der Anfangston den Spiegelungspunkt.

Class CrabInversion ***Package: musySystem.pattern***
Extends: SymmetryPattern
Es wird die Umkehrung der Krebses gebildet.

Class Transposition ***Package: musySystem.pattern***
Extends: SymmetryPattern
Eine Liste von Noten wird transponiert. Dabei ist die Höhe des Motiv-Anfangstones entscheidend. Ist er tiefer oder gleich dem *gis'*, so wird halbtonschrittweise nach oben transponiert, ansonsten nach unten.

Class Permutation ***Package: musySystem.pattern***
Extends: SymmetryPattern
Ein Motiv wird durch Permutationen verarbeitet. Da die Hälfte der Permutationen zur anderen ihr Spiegelbild darstellt, sind sie spiegelbildlich angeordnet.

package musySystem.composition

Das Paket enthält ein weiteres package musySystem.composition.type. Darin sind die Kompositionsformen und der Kompositionsform-Manager zu finden. Weiterhin verwaltet ein Kompositionsmanager alle erstellten und generierten Kompositionen, siehe *Abbildung 5.9*.

Class CompositionTypeManager ***Package: musySystem.composition.type***
In dieser Klasse werden alle unterschiedlichen Kompositionsformen verwaltet.

Interface Composition ***Package: musySystem.composition.type***
Die Klasse Composition definiert eine Schnittstelle für die konkrete Implementierung der unterschiedlichen Kompositionsformen.

Class SymmetryStructures ***Package: musySystem.composition.type***
Implements: Composition
Die Kompositionsform der Symmetriestrukturen wird in dieser Klasse implementiert. Diese beinhaltet die Verarbeitung eines Motivs mit den Patterns Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung, Transposition und Permutationen.

Class CompositionInfo ***Package: musySystem.composition***
Eine Komposition wird in dieser Klasse mit seinen Eigenschaften definiert.

Class CompositionManager ***Package: musySystem.composition***
Die erstellten und generierten Kompositionen werden verwaltet. In der Anwendung wird zwischen diesen beiden Arten unterschieden, da zunächst eine leere Komposition mit einem Namen angelegt wird. Dies entspricht einer erstellten Komposition. Anschließend wird ein Motiv zusammengestellt und damit eine Komposition generiert.

package musySystem.audio

Das package musySystem.audio, siehe *Abbildung 5.10* bringt die generierte Komposition in das benötigte audio-Format und stellt sie zum Abspielen bereit.

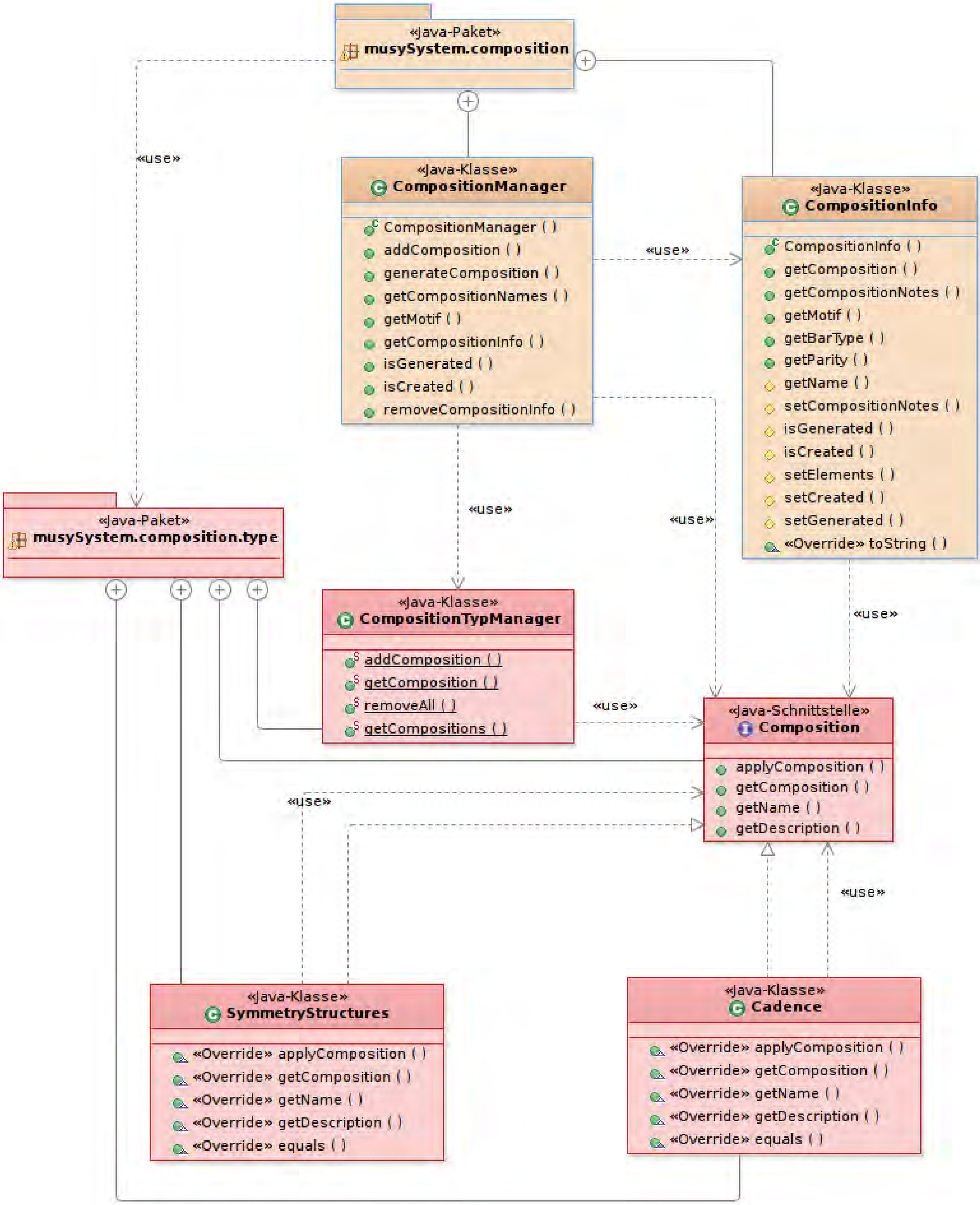


Abb. 5.9: Das package *musySystem.composition* mit seinen Abhängigkeiten.

Class AudioComposition ***Package: musySystem.audio***
Die generierten Kompositionen werden in ein Audio-Format konvertiert.

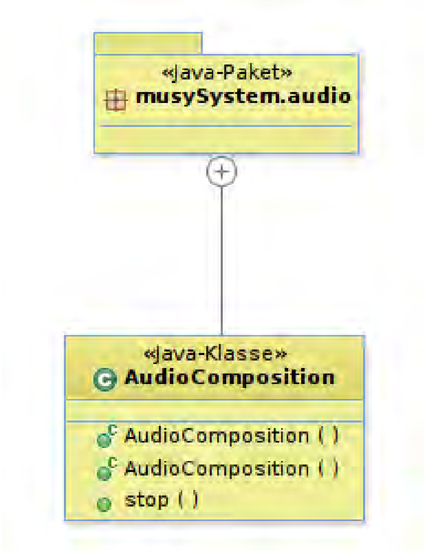


Abb. 5.10: Das package *musySystem.audio*.

package musySystem.exception

Das package beinhaltet die Exception-Klassen des Systems, siehe *Abbildung 5.11*. Mögliche Fehler treten in den Klassen Bar, und CompositionManager auf.

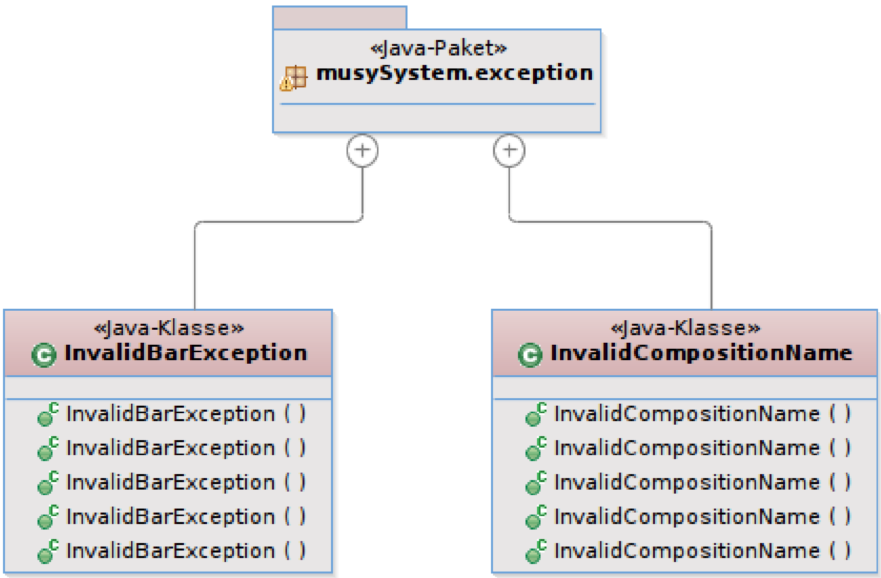


Abb. 5.11: Das package *musySystem.exception*.

Class InvalidBarException ***Package: musySystem.exception***
Extends: Exception
Diese Klasse ist bestimmt für Fehler bei der Erstellung eines Taktes. Dabei kann es vorkommen, dass keine gültige Taktart gefunden werden kann. Besteht das Motif aus mehr wie zehn Noten oder Pausen oder wird ein leeres Motiv übergeben, so ist

dies ebenfalls ein Fehler bei der Erstellung eines Taktes.

Class InvalidNameException ***Package: musySystem.exception***
Extends: Exception
Diese Klasse ist bestimmt für Fehler bei der Erstellung eines Namens einer Komposition: der Name ist zu lang, zu kurz oder der Name ist bereits vergeben.

5.3.2 Package client

Im Paket *client* wird die Ansicht und das System durch das *MusyModel* verwaltet, wie in *Abbildung 5.12* dargestellt. Es beinhaltet das package *panel* mit den Klassen *NotePanel, CompositionListPanel, CreateCompositionPanel* und *HelpPanel.* Die Hauptansicht stellt *MusyView* dar.

Class MusyView ***Package: client***
Implements: Observer
Extends: JFrame
Die Ansicht des Hauptfensters der Anwendung mit den restlichen Komponeneten wird dargestellt. Die Steuerung übernehmen Listener, die an den Komponenten registriert sind. Sie leiten Anforderungen an das Model der Anwendung weiter. Die Klasse ist als Observer registriert und wird bei Änderungen aktualisiert.

Class MusyModel ***Package: client***
Extends: Observable
Die Klasse MusyModel übernimmt die Verarbeitung von Anforderungen des Benutzers. Die Aktualsierung der Anwendung erfolgt durch Observer-Pattern automatisch. Das MusyModel interagiert mit der Klasse CompositionManager.

package client.panel

Die Hauptansicht der Klasse *MusyView* beinhaltet die Panels *Help Panel, CreateCompositionPanel, CompositionListPanel* und *NotePanel.* Eigene Listener sind für die Benutzereingaben zuständig.

Class HelpPanel ***Package: client.panel***
Extends: JFrame
Die Ansicht der Benutzerführung wird hier dargestellt. Bei Start der Anwendung wird die Benutzung erklärt, nach der Erstellung einer Komposition wird die aktuell ausgewählte Kompositionsform zusätzlich beschrieben.

Class CreateCompositionPanel ***Package: client.panel***
Extends: JDialog
Die Ansicht der Erstellung einer neuen Komposition wird erstellt. Dabei kann der Benutzer einen Namen und die Kompositionsform auswählen.

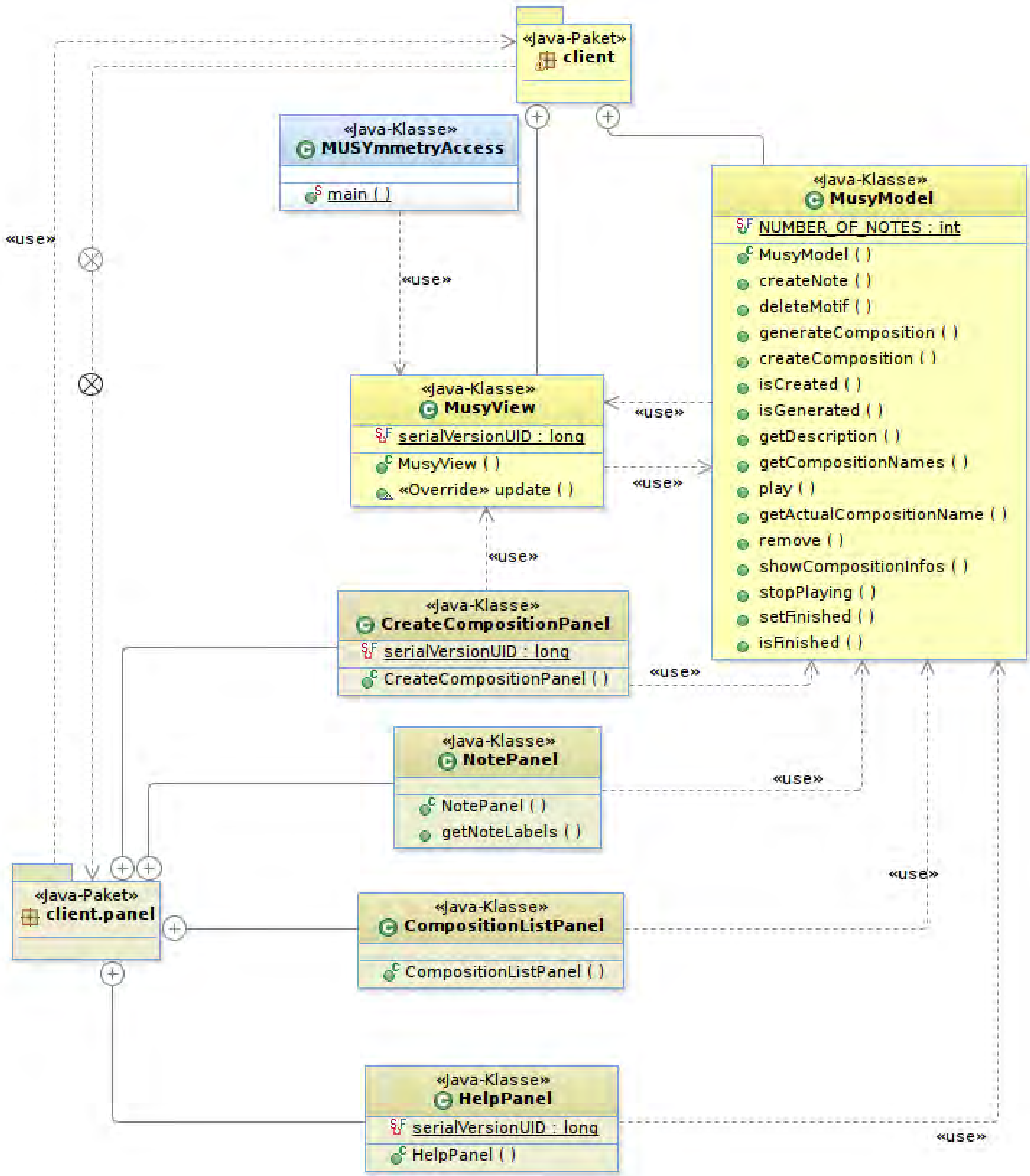


Abb. 5.12: Das package *client* mit seinen Abhängigkeiten.

Class CompositionListPanel *Package: client.panel*

Die Kompositions-Liste wird hier gehandhabt. Ist eine Komposition generiert, kann der Benutzer diese abspielen lassen, löschen oder sich das Motiv anzeigen lassen. Listener behandeln die Eingaben des Benutzers.

Class NotePanel *Package: client.panel*

Die Notennamen unter dem Notensystem werden erstellt. Entsprechende Listener verwalten die Eingaben des Benutzers und er kann eine Note mit der gewünschten Länge für sein Motiv auswählen.

5.3.3 Package util

Dieses Paket stellt die *Assert*-Klasse bereit, siehe *Abbildung 5.13*, die die übergebenen Parameter auf *null*-Werte überprüft. Sie wird sowohl vom System *musySystem* als auch vom *client* verwendet.

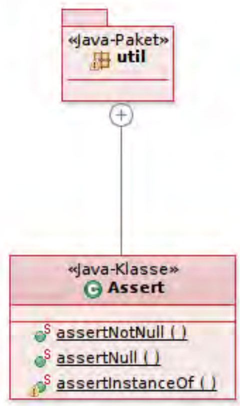


Abb. 5.13: Das package *util*.

Class Assert ***Package: util***
Die Klasse *Assert* besitzt eine Sammlung von Hilfsmethoden zur Validierung von Parametern der Objekte.

5.3.4 Package test

Das Testpaket beinhaltet JUnit-und Integration-Tests. Außer der GUI mit der Hauptklasse *MusyView* wurden – soweit möglich – sämtliche Methoden und Klassen validiert. In *Abbildung 5.14* sind die einzelnen Tests dargestellt.

Class ElementTest ***Package: test***
Die Klasse *ElementTest* prüft in JUnit-Tests die korrekte Erstellung von Noten, Motiven, Taktarten und Themen. Es werden fünf unterschiedliche Motive verwendet, um alle möglichen Ausnahmefälle abzudecken.

Class PatternTest ***Package: test***
Hier werden die Patterns durch Integration-Test validiert. Dabei werden alle Kombinationsmöglichkeiten zwischen *Volltakt, Auftakt* und *geradem, ungeradem Takt* behandelt.

Class CompositionManagerTest ***Package: test***
In dieser Klasse wird in JUnit-Tests überprüft, ob die Klassen *CompositionManager* und *CompositionInfo* die erstellten Kompositionen die korrekten Eigenschaften beinhalten und ob die Kompositionen der erwarteten entsprechen.

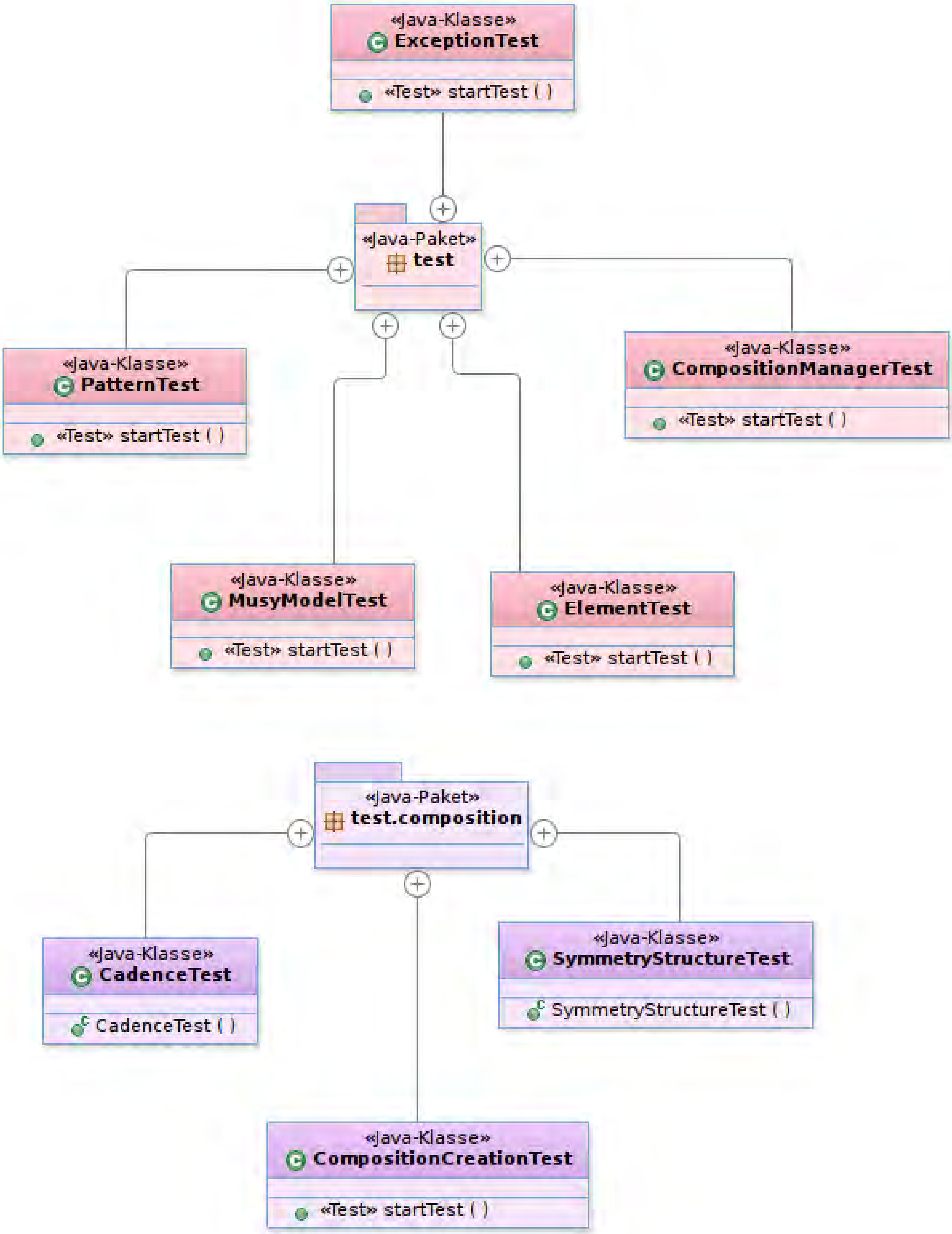


Abb. 5.14: Das package *test*.

Class MusyModelTest ***Package: test***
In dieser Klasse wird in JUnit-Tests überprüft, ob die Methoden des *MusyModel* die Eingaben des Benutzers korrekt behandeln.

Package test.composition

Das Testpaket beinhaltet Integration-Tests zur Validierung der Kompositionsformen. Es wird geprüft, ob die einzelnen Patterns in der Komposition an der richtigen Stelle sind und ob diese korrekt gebildet sind.

Class CompositionCreationTest ***Package: test.composition***
Die Klasse *CompositionCreationTest* prüft in Integration-Test die korrekte Erstellung von SymmetryStructures und Cadence. Die einzelnen Tests werden jeweils in einer eigenen Klasse betrachtet.

Class SymmetryStructureTest ***Package: test.composition***
In einem Integration-Test wird die korrekte Erstellung von SymmetryStructures validiert. Dabei wird jede mögliche Taktart (siehe *BarType* und *Parity*) und jedes *Pattern* anhand eines gegebenen Motivs überprüft.

Class CadenceTest ***Package: test.composition***
Die korrekte Erstellung der Form Cadence wird geprüft. Es wird sichergestellt, dass die Stufen der Kadenz mit einem gegebenen Motiv richtig berechnet werden.

5.4 Validierung

5.4.1 Tests

Die Anwendung *MUSYmmetry* wurde auf unterschiedliche Weise validiert. Zunächst steht die korrekte Implementierung und eine fehlerfreie Ausführung des Programms ohne Systemabsturz im Vordergrund. Die JUnit-und Integration-Tests des packages *test* stellen die korrekte Erstellung von Objekten und die korrekten Abläufe sicher. Die GUI wurde gewissenhaft auf die Funktionalität aller Komponenten geprüft. Es wurde darauf geachtet, dass die Komponenten zu jeder Zeit korrekt aktiv benutzbar oder deaktiviert sind.
Weiterhin stellt die Software-Qualität einen wichtigen Bestandteil der Validierung dar. Sie ist durch Zuverlässigkeit, Effizienz, Benutzerfreundlichkeit, Wartbarkeit und Portabilität des Systems gekennzeichnet[25, Folie Nr.8]. Es sei erwähnt, dass im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Überprüfung dieser Aspekte zu umfangreich ist. Vor einer Inbetriebnahme der Anwendung sind sie jedoch gewissehaft zu validieren:
Die Zuverlässigkeit der Anwendung *MUSYmmetry* soll über eine längere Zeit mit Benutzern in einer Art *Beta-Phase* getestet werden.
Die Validierung der Performanz ist für dieses System geringfügig relevant, da das Programm nicht online über das Internet bedient wird, sondern lokal am Rechner installiert ist. In geringem Maße hat die Generierung einer Komposition eine Auswirkung auf die Performanz, die mit den leistungsfähigen Rechnern von heute jedoch vernachlässigt werden kann.
Beim Design wurde darauf geachtet, dass mit sauberen Schnittstellen wie Interface und abstrakten Klassen und der Benutzung des *MVC*-Patterns die Anwendung wartbar ist.
Das System ist mit *Java* als Programmiersprache portabel. Es werden Windows, Mac OS X und Linux-Betriebssysteme wie Ubuntu unterstützt. Außerdem muss lediglich die Java Standard Edition 8 (Java SE 8) installiert sein.

Die Benutzerfreundlichkeit kann durch einen Fragebogen validiert werden. Dabei können Test-Teilnehmer einen Fragebogen ausfüllen und beispielsweise den (subjektiven) Eindruck der Performanz und der Benutzerfreundlichkeit des Systems bewerten.

5.4.2 Code Coverage

Zur Darstellung des Code Coverage wurden die Module *musySystem, client* und *util* verwendet. Die *Tabelle 5.1* zeigt, inwieweit die Tests diese packages abdecken.

Package	**Line Coverage**		
	Class %	***Method %***	***Line %***
musySystem	87% (21 / 24)	83% (108 / 130)	90% (666 / 739)
client	38% (5 / 13)	38% (32 / 83)	45% (231 / 509)
util	100% (1 / 1)	25% (1 /4)	20% (2/10)

Tabelle 5.1: Line Coverage der Module *client, musySystem* und *util* (Stand 27.05.2015)

Werden die *Main*-Klasse und die Klassen des packages *client* und *musySystem.exception* und *musySystem.audio* nicht mitberechnet, so ergibt sich im package *musySystem* eine Line Coverage von 96%, wobei 94% der Klassen validiert werden. Das Testen der GUI (package client) ist durch JUnit-und Integration-Tests nicht abdeckbar und wurde – wie oben beschrieben – durch manuelles Testen der Komponenten durchgeführt.
Im Folgenden zeigt die *Tabelle 5.2* die genau Zusammenstellung der Line Coverage des Systems. Das *musySystem.exception*-package beinhaltet eine Vielzahl an Konstruktoren, von denen nicht alle verwendet werden. Deswegen ist der Coverage an der Stelle niedrig. Im *musySystem.audio*-package wird von dem zu implentierenden *ManagedPlayerListener* lediglich eine von fünf Methoden genutzt, sodass auch hier der Coverage geringen Anteil hat.

Package	**Line Coverage**		
	Class %	***Method %***	***Line %***
musySystem.element	87% (7 / 8)	100% (39 / 39)	97% (266 / 273)
musySystem.pattern	100% (6 / 6)	89% (25 / 28)	96% (191 / 199)
musySystem.composition	100% (5 / 5)	95% (41 / 43)	96% (194 / 202)
musySystem.audio	33% (1 / 3)	10% (1 / 10)	24% (11 / 45)
musySystem.exception	100% (2 / 2)	20% (2 / 10)	20% (4 / 20)

Tabelle 5.2: Line Coverage des packages *musySystem* (Stand 27.05.2015)

6 Ausblick

Im Bereich eines analytischen Vergleichs lassen sich musikalische Strukturierungsprinzipien aus globaler Sicht einer Komposition mit mathematischen Strukturen vergleichen. Weiterhin könnte man einen Zusammenhang herstellen zwischen der Häufigkeit des Vorkommens von Symmetriestrukturen in musikalischen Kompositionen und inwieweit diese vom Zuhörer als *schön* empfunden werden. Dazu wäre zunächst notwendig musikalische Werke nach der Anzahl von Symmetriestrukturen zu analysieren. Im nächsten Schritt wäre eine empirische Studie mit Probanden durchzuführen und mit der vorhergehenden Analyse in Beziehung zu setzen.

Die Anwendung *MUSYmmetry* bietet an vielen Stellen die Möglichkeit zu Erweiterungen an: Es können weitere Kompositionsformen hinzugefügt werden. Für die Benutzersicht ist eine Darstellung mit einem Notensystem nach der Generierung eines Werkes denkbar, sodass es auch mit „echten“ Instrumenten gespielt werden kann. Außerdem ist die Erweiterung zur Mehrstimmigkeit, die Hinzunahme der dynamischen Komponente und Verwendung von Tonarten möglich. Zur Validierung können zusätzlich die Performanz und die Benutzerfreundlichkeit konkret überprüft werden.

7 Zusammenfassung

Symmetriestrukturen und Musik können nicht voneinander getrennt werden. Sie bilden einen Teil der musikalischen Kompositionen durch einen symmetrischen Aufbau ihrer Form oder durch symmetrische Kompositionsprinzipien. Symmetrien in der Musik sind notwendig um ein harmonisches und für den Zuhörer „schönes“ Werk zu schaffen.
Die vorliegende Arbeit betrachtet zunächst aus der Sicht der Gruppentheorie die relevanten mathematischen Definition und die musikalische, gruppentheoretische Verarbeitung eines Motivs. Die Bildung von Permutationen ist als Kompositionsprinzip erkennbar, wobei nicht alle einer Permutationsgruppe stets verwendet werden.
Die Symmetrieformen bilden einen Bestandteil der Untergruppe, im Speziellen Permutationen oder einen Teil der Symmetriegruppe. Die Symmetrieformen werden in der Mathematik als geometrische Transformationen betrachtet. Diese sind: Identität, Rotation, Spiegelung, Translation und deren Verknüpfungen. In musikalischen Werken entspricht die Identität einer Abbildung dem Motiv selbst, die Spiegelung wird mit Krebs, Umkehrung und Krebsumkehrung und die Translation mit einer Transposition umgesetzt. Auch in musikalischen Kompositionen sind Verknüpfungen von Symmetrieformen üblich.
Die dargestellten musikalischen Symmetriestrukturen sind die Grundlage für die Anwendung *MUSYmmetry*. Der Benutzer kann sich ein Motiv zusammenstellen, die Taktart bestimmen und sich das generierte Werk nach den Symmetriestrukturen im audio-Format anhören.
Diese Arbeit zeigt, dass die komplexen, musikalischen Strukturen aus mathematischer Sicht analysiert werden können. Es hilft zum Verständnis von Ordnung, Schönheit und Harmonie in der Musik. In der Musiktheorie sind Strukturanalyse eines Werkes und die Analyse nach vorkommenden Symmetrieformen ein gängiges Mittel, um die Komposition zu begreifen und darin enthaltene, komplexe Zusammenhänge anschaulich darzustellen.

Glossar

Abelsche Gruppe Eine kommutative Gruppe G ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$). 8–10, 58

Caley Tabelle Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen. Die Verknüpfungen der Elemente durch *Addition* und *Multiplikation* sind in einer *Caley Tabelle* (oder Verknüpfungstabelle) dargestellt. 23, 24, 58

Cluster Ein Klang in der Musik, der als *Tontraube* bezeichnet werden kann. Es werden auf einem Instrument viele nah beieinander liegende Töne gleichzeitig gespielt. 5, 58

Coda Der Schluss einer musikalischen Komposition, vor allem in der Sonatenhauptsatzform ab Mitte des 16. Jahrhunderts verwendet. 36, 58

Da capo Der Begriff stammt aus dem Italienischen und besagt, dass in einer Komposition an einer definierten Stelle mit *Da capo* ein Teil des Werkes wiederholt wird. Das Ende dieser Phrase wird meist mit *al fine* (bis zur Markierung *al fine* (bis zum Schluss)) angezeigt. 28, 31, 58

Diedergruppe Eine Symmetriegruppe von einem regulären n-gon, $\mathbf{D}_n$. n gibt dabei die Anzahl der Ecken eines Polygons an. Die Ordnung beträgt 2n (n Rotationen und n Spiegelungen) [1, S.IX]. 9, 12, 58

Dominante In der Harmonielehre der Musik bezeichnet die Dominante die fünfte Stufe einer Tonart und besteht aus einem Dreiklang darauf. 14, 58

Experimentelle Musik Kompositionen im 20. Jahrhundert, die von traditioneller Kompositionsweise abweichen und Klänge mit neuen (evtl. elektronischen) Mitteln und Instrumenten erzeugen. 5, 58

Fuge Kompositionstechnik der Polyphonie geprägt von motivischer Verarbeitung und Imitation. Dabei werden Themen unterschiedlicher Stimmen zeitlich und in der Höhenlage versetzt. 16, 29, 58

Globale Komposition Eine musikalische Komposition wird im Ganzen betrachtet, welche aus lokalen Kompositionen besteht. 25, 56, 58

Gruppe Eine Gruppe G zusammen mit einer Verknüpfung (Addition, Multiplikation) $\cdot$ heißt Gruppe, wenn die Axiome der Assoziativität, des Inversen und der Identität erfüllt werden. Details in *2.1.2 Gruppe*. 5, 7–9, 11–14, 17, 19, 23, 58–61

Gruppentheorie Beinhaltet die algebraische, zahlentheoretische oder geometrische Analyse von Gruppen. Details in *2.1.1 Geschichtliches*. 5, 7, 12, 57, 58

Homophonie Eine mehrstimmige Kompositionstechnik in der Musik. Die Stimmen sind rhythmisch (mit kleinen Abweichungen) gleich. Es existiert eine Melodiestimme, die von den restlichen Stimmen zu einer Harmonie bzw. zu einem Akkord ergänzt werden. 4, 5, 58

Identität Die Abbildung jeden Punktes eines Objektes an der identischen Stelle. Sie stellt eine Rotation um 0° oder eine Translation mit der Länge 0 dar [1, S.6]. Details in *3.2.2 Identität*. 9, 11–13, 17, 19, 20, 22, 26, 27, 31, 35, 57, 58

Inverses Wird ein Element $\mathbf{a} \in$ Gruppe $\mathbf{G}$ mit seinem Inversem verknüpft, so erhält man ein neutrales Element. **-a** bildet das additive und $\frac{1}{a}$ das multiplikative Inverse von **a**. Ist **a** Element einer Gruppe G, so muss auch das Inverse von **a** Teil der Gruppe sein. Details unter *Inverses*. 9, 12, 58, 59

Kadenz (Musik) Eine Kadenz beschreibt die Abfolge von Akkorden bezogen auf die erste Stufe der Tonart. Die Stufen ensprechen der Reihenfolge der Töne einer Tonart. C-Dur beispielsweise besteht aus den Tönen: *c', d', e', f', g', a', h', c"*. Die erste Stufe entspricht einem Akkord auf c', die zweite auf d', die dritte auf e. Analog werden die restlichen Stufen der Tonart gebildet. 36, 58

Kanon Ein mehrstimmiges, musikalisches Stück, bei dem eine Stimme nach strenger Regelung zeitlich versetzt wiederholt wird. 28, 31, 58

Komposition (Mathematik) Verkettung von Funktionen. 8, 11, 12, 23, 24, 28, 58, 59

Komposition (Musik) Von einem Urheber komponiertes, erarbeitetes musikalisches Werk. 4, 5, 7, 13, 16, 18, 25–27, 33–36, 58, 59

Kongruenz Zwei geometrische Objekte sind deckungsgleich, wenn sie durch eine Bewegung wie Rotation, Spiegelung, Translation oder einer Komposition ineinander überführt werden können. Dabei sind die Abbildungen die Geraden, die Längen und die Winkel gleich [24, S.15]. 8, 21, 24, 29, 58, 60

Krebs Eine Spiegelung eines Motivs an einer vertikalen Achse. 14, 17, 26, 27, 30, 31, 35, 36, 57, 58, 60

Krebsumkehrung Eine Spiegelung eines Motivs an einer horizontalen und vertikalen Achse. 17, 26, 27, 30, 31, 35, 36, 57, 58, 60

Lokale Komposition Es wird ein kleiner Ausschnitt einer musikalischen Komposition betrachtet. 25, 34, 58

Motiv Ein Motiv in der Musik ist die kleinste Einheit einer Komposition. Es besteht aus einer Tonfolge und einem bestimmten Rhythmus. Objekt aus der mathematischen Sicht und Motiv aus der musikalischen sind in diesem Kontext analog. 5, 13, 14, 16–18, 25–32, 35, 36, 57–59, 61

Objekt Ein Objekt stellt einen geometrischen Körper mit einer Menge $\mathbf{M}$ von Punkten dar. Objekt aus der mathematischen Sicht und Motiv aus der musikalischen sind in diesem Kontext analog. 8, 19, 22–25, 29, 58–60

Ordnung Die Anzahl der Elemente bzw. Permutationen einer Gruppe. 8, 9, 11, 14, 58, 60, 61

Permutation Sei G eine endliche Gruppe mit n Elementen. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer gegebenen Menge auf sich selbt wird Permutation genannt. 7, 11–17, 24, 27, 32, 34–36, 57, 58, 60, 61

Permutationsgruppe Alle möglichen Permutationen einer Gruppe G bilden die Permutationsgruppe. Die Ordnung der Permutationen beträgt $n!$ [1, S.IX]. 11, 14–16, 19, 36, 57, 58

Polygon Ein Polygon ist ein Objekt bestehend aus n Ecken und n gleich langen Kanten. Alle n Winkel sind gleich groß[1, S.8]. 9, 58, 61

Polyphonie Eine mehrstimmige Kompositionstechnik in der Musik, bei der die einzelnen Stimmen selbständig und gleichwertig sind. Vor allem in der Epoche der Renaissance war sie in Form des Kontrapunktes ein gängiges Kompositionsprinzip. 4, 5, 15, 58

Produkt Das Kreuzprodukt von zwei *Gruppen* G_1 und G_2, notiert als $G_1 \times G_2$. 8, 58, 60

Produktgruppe Die Gruppe aus dem Kreuzprodukt von zwei Gruppen G_1 und G_2 ($G_1 \times G_2$). Die neu entstandene Gruppe beinhaltet alle Möglichkeiten der paarweisen Anordnung bzw. des Produktes eines Elementes aus der Gruppe G_1 mit einem Element aus Gruppe G_2 [1, S.69-73]. 8, 58

Reihe Eine Reihe der Zwölftontechnik besteht aus zwölf Tönen einer Oktave [20, 2505f.]. Die Tonhöhe spielt dabei keine Rolle. 16, 34, 35, 58

Rhythmus In der Musik definiert als eine zeitliche Abfolge von Tönen und Pausen. 28, 35, 58

Rotation Eine Rotation $\mathbf{R}_{\mathbf{M},\alpha}$ eines Objekts um den Punkt **M** mit dem Winkel α ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jeden Punkt **X** auf den Bildpunkt **X'** abbildet. Details in Abschnitt *Rotationssymmetrie*. 8, 9, 13, 19, 20, 22–24, 29–31, 57–59, 61

Spiegelung Ein Objekt wird an einer Geraden oder an einem Punkt abgebildet. Dabei wird jedem Punkt des Objektes genau ein Bildpunkt zugeordnet. Details in Abschnitt *Spiegelsymmetrie*. In der musikalischen Komposition entspricht sie einer Umkehrung, eines Krebs oder einer Krebsumkehrung. 8, 9, 12–14, 16, 19, 22–24, 29–31, 57–59, 61

Symmetrie (Mathematik) Ein Objekt ist symmetrisch [4, S.17] [1, S.3], wenn es transformiert wird und das Objekt unveränderlich bleibt. 5, 11, 22, 23, 28, 58

Symmetrie (Musik) Ein Strukturierungsprinzip eines musikalischen Werkes. Sie wird durch Krebs, Umkehrung, Krebsumkehrung oder Transposition gebildet. 5, 14, 16–18, 25, 29, 32, 35, 36, 58

Symmetriegruppe Eine Symmetriegruppe $\mathbf{S_n}$ bildet eine Gruppe eines Objekts, die aus der Menge aller Kongruenzabbildungen besteht, die das Objekt auf sich selbst durch die Verknüpfung $\cdot$ abbildet. Besteht die Gruppe aus $\mathbf{n \geq 3}$ Elementen, so ist sie nicht kommutativ [5, S.44]. Die Ordnung beträgt $n!$ [3, S.13]. 8, 9, 19, 24, 57, 58, 61

Thema Ein Thema ist abhängig von der Gattung und Form eines musikalischen Werkes. Allgemein kann man es als einen *musikalischen Gedanken* beschreiben, wobei ein Motiv verarbeitet wird. 14, 15, 17, 26, 29, 31, 35, 36, 58, 61

Tonika In der Harmonielehre der Musik bezeichnet die Tonika die erste Stufe einer Tonart und besteht aus einem Dreiklang darauf. 14, 58

Translation Die Verschiebung einer Gruppe. Sie kann mit einer Spiegelung oder Rotation kombiniert sein. 9, 19, 22, 23, 28–31, 35, 57–59

Transposition Ein Motiv, Thema oder ähnliches wird um ein bestimmtes Intervall versetzt wiederholt. Innerhalb einer Oktave gibt es zwölf mögliche Transpositionen. 15, 16, 28, 29, 31, 35, 36, 47, 57, 58, 60

Umkehrung Die Spiegelung eines Motivs an einer horizontalen Achse. 17, 26, 27, 30, 31, 35, 36, 57, 58, 60

Untergruppe Sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung · und $G' \subset G$ (nichtleer). G' bildet die Untergruppe, wenn für a, b $\in G'$ auch a · b $\in G'$ und $a^{-1} \in G'$. [5, S.47]. 5, 7, 19, 24, 57, 58

Zwölftontechnik auch Dodekaphonie. Ein kompositorisches Verfahren im 20. Jahrhundert (Wiener Schule). Sie wurde von Arnold Schönberg entwickelt, bei der zwölf (unterschiedliche) Töne geordnet sind. Die Oktavlage und die enharmonische Verwechslung der einzelnen Töne ist frei. Das musikalisches Werk ist nach bestimmten Regeln komponiert, siehe in *4.3 Zwölftontechnik*. 5, 16, 34, 35, 58, 60

Zyklische Gruppe Eine Symmetriegruppe von einem gerichteten regulären n-gon, $\mathbf{C}_n$. n gibt dabei die Anzahl der Ecken eines Polygons an. Die Ordnung beträgt n (n Rotationen) [1, S.IX]. Die Gruppe wird erzeugt durch ein Element **a** und besteht aus den Potenzen $\mathbf{a}, a^2, \ldots, a^n = \mathbf{e}$ (e als neutrales Element) [3, S.27]. 7, 9, 10, 12, 58

Zyklische Notation Eine Permutation kann mit Ziffern notiert werden. Sie beschreibt die Aktionen, die notwendig sind, um ein neues Wort aus dem Ausgangswort zu bilden. Beispielsweise erhält man mit (132) aus dem Ausgangswort *ABC* das Wort *CAB*. Die Ziffern der zyklischen Notation beschreiben das Vertauschen der Positionen. 11, 58

Literaturverzeichnis

[1] Tapp, Kristopher: Symmetry. A Mathematical Exploration. New York u.a.: Springer (2012)
`http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4614-0299-2`

[2] Zassenhaus, Hans: Lehrbuch der Gruppentheorie. Bd.1. Leipzig und Berlin: B.G.Teubner (1937).

[3] Stiefel, Eduard / Fässler, Albert: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung. Görtler, H. (Hg.): Leitfäden der angewandten Mathematik & Mechanik LAMM. Bd.46. Stuttgart: B.G.Teubner. (1979).

[4] Tarassow, Lev V.: Symmetrie, Symmetrie! Strukturprinzipien in Natur und Technik. Heidelberg: Spectrum, Akademischer Verlag. (1993).

[5] Fischer, Gerd: Lineare Algebra. 12. Auflage. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Verlagsgesellschaft mbH. (2000).

[6] Agricola, Ilka / Friedrich, Thomas: Elementargeometrie. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. 2. überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner. (2009).

[7] Scholz, Erhard: Symmetrie, Gruppe, Dualität: zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik. Berlin / Boston / Basel: Birkhäuser Verlag. (1989).

[8] Einstein, Albert: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Berlin / Oxford / Braunschweig: Akademie-Verlag / Pergamon, Press /Vieweg & Sohn. (1969).

[9] Genz, Henning: Symmetrie - Bauplan der Natur. 2. Auflage. München u.a.: Piper. (1992).

[10] Ulrich, Michels: Musik. Systematischer Teil Musikgeschichte von den Anfängen bis zur Renaissance. 18. Auflage. Band 1. München: Deutscher Taschenbuch Verlag. (1977).

[11] Ulrich, Michels: Musik. Musikgeschichte vom Barock bis zur Gegenwart. 10. Auflage. Band 2. München: Deutscher Taschenbuch Verlag. (1985).

[12] Loy, Gareth: Musimathics. The Mathematical Foundations of Music. Volume 1. Cambrige u.a.: The MIT Press (2006).

[13] Mazzola, Guerino: Geometrie der Töne. Elemente der Mathematischen Musiktheorie. Basel u.a.: Birkhäuser Verlag (1990).

[14] Mazzola, Guerino: The Topos of Music. Geometric Logic of Concepts, Theory and Performance. Basel u.a.: Birkhäuser Verlag (2002).

[15] Benson, Dave: Music: A Mathematical Offering. `https://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/music.pdf` (Stand: 14. Dezember 2008).

[16] Riethmüller, Albrecht: Symmetrie. In: Honegger, Marc / Massenkeil, Günther (Hg.): Das große Lexikon der Musik in acht Bänden. Bd. 8.Freiburg im Breisgau: Herder Verlag (1982). S. 55-56.

[17] Kempf, Davorin: Symmetrie und Variation als kompositorische Prinzipien. Interdisziplinäre Aspekte. Berlin (2006) `http://www.diss.fu-berlin.de/diss/servlets/MCRFileNodeServlet/FUDISS_derivate_000000004812/davorin_kempf_diss.pdf?hosts=`.

[18] Bach, Johann Sebastian: Kantate Nr. 80: Eine feste Burg ist unser Gott. `http://conquest.imslp.info/files/imglnks/usimg/8/83/IMSLP01235-BWV0080.pdf`.

[19] Schick, Hartmut: Musikalische Konstruktion als musikhistorische Reflexion in der Postmoderne. In: Riehtmüller, Albrecht (Hg.): Archiv für Musikwissenschaft. Band 59. Wiesbaden / Stuttgart: Franz Steiner Verlag. (2002). S. 245-266. `http://epub.ub.uni-muenchen.de/17257/1/17257.pdf`

[20] Stephan, Rudolf: Zwölftonmusik. In: Finscher, Ludwig (Hg.): Die Musik in Geschichte und Gegenwart. Allgemeine Enzyklopädie der Musik begründet von Friedrich Blume. Sachteil Bd. 9. 2. Auflage. Kassel u.a.: Bärenreiter. Stuttgart / Weimar: Metzler (1998). S. 2506-2528.

[21] Hucke, Helmut / Möller, Hartmut: Gregorianischer Gesang: In: Finscher, Ludwig (Hg.): Die Musik in Geschichte und Gegenwart. Allgemeine Enzyklopädie der Musik begründet von Friedrich Blum. Sachteil Bd. 3. 2. Auflage. Kassel u.a.: Bärenreiter. Stuttgart / Weimar: Metzler (1995). S. 1609-1621.

[22] Friscus, Rudolf: Serielle Musik. In: Finscher, Ludwig (Hg.): Die Musik in Geschichte und Gegenwart. Allgemeine Enzyklopädie der Musik begründet von Friedrich Blum. Sachteil Bd. 8. 2. Auflage. Kassel u.a.: Bärenreiter. Stuttgart / Weimar: Metzler (1998). S. 1328-1354.

[23] Kohlhaas, Emmanuela: Musik und Sprache im Gregorianischen Gesang. Beihefte zum Archiv für Musikwissenschaft. Band 49. Stuttgart: Franz Steiner Verlag. (2001).

[24] Albers, Reimund / Husmann, Dörthe: Skript zur Vorlesung „Mathematisches Denken in Arithmetik und Geometrie 2“, Kapitel 2: „Verknüpfen von Spiegelungen“. Sommersemester 2015 an der Universität Bremen. `http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/MaDenken1313/Material/Kap2KonAbb.pdf`. (2015).

[25] Beyer, Dirk: Skript *Software Engineering* WS 13/14 an der Universität Passau, se09_Quality.pdf (Stand Wintersemester 2013/14). (2014).

[26] Scharlau, Rudolf: Skript zur Vorlesung „Diskrete Geometrie“, Kapitel 2.1: „Symmetriegruppen: Grundbegriffe“. Wintersemester 2006/07. `http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/~scharlau/WiSe0607/Diskrete_Geometrie/dg_kap2_1.pdf`. (2007).

[27] Imprimatur: Tornaci, die 24 decembris 1973: Graduale Triplex. Paris-Tournai: Abbaye Saint-Pierre de Solesmes. (1979)

Erklärung

Name, Vorname: Huber, Zsuzsanna

Universität Passau,
Fakultät für Informatik und Mathematik

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt habe. Des Weiteren habe ich keine anderen als die angegebenen Quellenangaben oder Hilfsmittel benutzt. Wörtliche und sinngemäße Zitate sind auch als solche gekennzeichnet.

....
Datum

....
Unterschrift des Studierenden