



**Fakultät für  
Informatik und Mathematik**

# **Zulassungsarbeit**

über das Thema

## **Stationäre subdivision schemes und Konvergenz**

**Autor:** Andreas Datzmann

**Matrikelnummer:** 64589

**E-Mail:** andreas.datzmann@gmx.de

**Betreuer:** Prof. Dr. Tomas Sauer

**Abgabedatum:** 29.03.2016

## I. Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit stationären subdivision schemes mit nicht-negativer Maske und deren Konvergenz. Zu Beginn wird der Algorithmus von de Rham und Chaikin anschaulich erklärt. Mithilfe der Definition von B-splines und Cardinal splines wird anschließend der Algorithmus von Lane und Riesenfeld betrachtet und darauf aufbauend definiert, was man unter einem stationäres subdivision scheme mit Maske  $A$  versteht. Im Weiteren wird der Begriff der Konvergenz eines subdivision scheme eingeführt und untersucht, wann ein subdivision scheme konvergiert. Dabei wird der wichtige Begriff des Trägers  $I$  einer Maske  $A$  definiert. Anschließend wird gezeigt, dass die Konvergenz bis auf eine leicht zu prüfende Bedingung an die Maske nur vom Träger der Maske abhängt. Zum Schluss wird die Konvergenz des subdivision scheme für verschiedene Träger  $I$  gezeigt und dabei auch die Konvergenz des Algorithmus von Lane und Riesenfeld.

## II. Inhaltsverzeichnis

<b>I. Kurzfassung</b>	<b>I</b>
<b>II. Inhaltsverzeichnis</b>	<b>II</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Geometrische Hinführung</b>	<b>2</b>
2.1. de Rham-Chaikin Algorithmus . . . . .	2
2.2. B-splines . . . . .	6
<b>3. Subdivision schemes algebraisch betrachtet</b>	<b>10</b>
3.1. Cardinal splines . . . . .	10
3.2. Algorithmus von Lane und Riesenfeld . . . . .	12
3.3. Algebraische Definition eines subdivision scheme . . . . .	17
<b>4. Konvergenz eines subdivision scheme</b>	<b>26</b>
4.1. Definition der Konvergenz . . . . .	26
4.2. Eigenschaften konvergenter subdivision schemes und ihrer Grenzfunktion	27
<b>5. Wann konvergieren subdivision schemes?</b>	<b>30</b>
5.1. Lane-Riesenfeld subdivision . . . . .	35
5.2. $\{0, n\} \subsetneq I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ . . . . .	37
<b>6. Ausblick</b>	<b>50</b>
<b>7. Abbildungsverzeichnis</b>	<b>51</b>
<b>8. Quellenverzeichnis</b>	<b>52</b>
<b>Anhang</b>	<b>III</b>
<b>A. Java-Programm zur Berechnung der Minkowski-Summe</b>	<b>III</b>
<b>B. Die Menge <math>I_7</math></b>	<b>V</b>

## 1. Einleitung

Der englische Begriff „Subdivision“ heißt auf Deutsch übersetzt „Unterteilung“. Und genau das ist auch das Prinzip von subdivision schemes. Man möchte ein vorgegebenes Objekt nach einer bestimmten Regel unterteilen. Wir betrachten in dieser Arbeit nur stationäre subdivision schemes. Der Zusatz „stationär“ bedeutet dabei, dass in jedem Schritt die gleiche Unterteilungsregel angewendet wird. Subdivision schemes kann man z.B. verwenden, um aus einer vorgegebenen Punktemenge durch wiederholte Unterteilung eine glatte Oberfläche zu erzeugen. Sie werden deshalb unter anderem in den Bereichen computer-aided design, geometrische Modellierung und für Computergrafiken eingesetzt. Wir beschäftigen uns hier mit subdivision schemes im Eindimensionalen. Das bedeutet, wir beginnen mit einer Punktemenge und einer Unterteilungsregel und wir untersuchen, was bei wiederholtem Anwenden der Unterteilungsregel passiert, z.B. ob dieser Prozess konvergiert. Wir orientieren uns dabei hauptsächlich an Kapitel 2 aus dem Buch „Mathematical Aspects of Geometric Modeling“ von Charles A. Micchelli [9]. Kapitel 5.2 folgt dem von Avraham A. Melkman veröffentlichten Artikel „Subdivision schemes with non-negative masks converge always - unless they obviously cannot?“ [8]. Alle verwendeten Abbildungen wurden - soweit nicht anders angegeben - mit der Software GeoGebra<sup>®</sup> erstellt.

## 2. Geometrische Hinführung

Zu Beginn wollen wir ein einfaches Beispiel eines subdivision scheme betrachten. Wir untersuchen dazu den Subdivision-Algorithmus von de Rham und Chaikin und zeigen, dass dieser konvergiert. Der grundlegende Algorithmus wurde von de Rham [14] erarbeitet und Chaikin [3] hat sich erst später damit beschäftigt. Außerdem werden wir den Begriff der B-splines einführen und einige ihrer Eigenschaften geometrisch darstellen.

### 2.1. de Rham-Chaikin Algorithmus

Für den de Rham-Chaikin Algorithmus benötigt man zu Beginn eine unendliche, beschränkte Folge von Kontrollpunkten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , in der Ebene, kurz  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$ , und das zugehörige Kontrollpolygon, vgl. Abbildung 1.

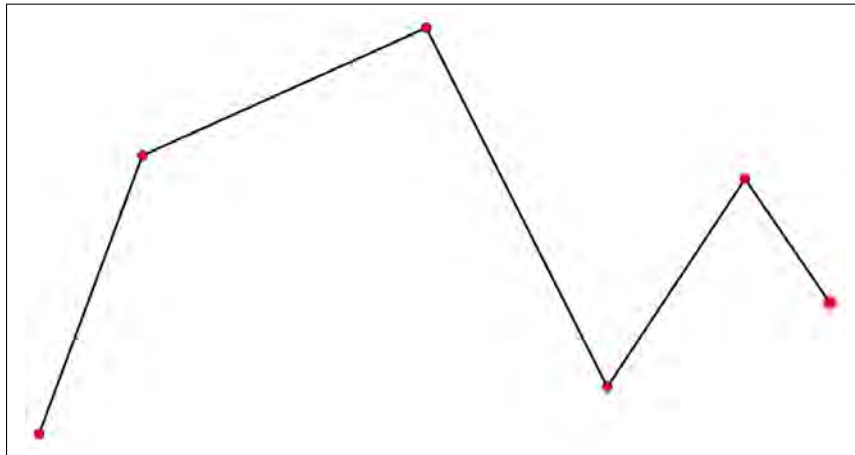


Abbildung 1: Kontrollpolygon durch die Kontrollpunkte  $c_j$  in der Ebene

Nun werden an jeder Ecke im Abstand von  $\frac{1}{4}$  der Streckenlänge neue Kontrollpunkte erzeugt. Diese neuen Kontrollpunkte definieren ein neues Kontrollpolygon, vgl. Abbildung 2.

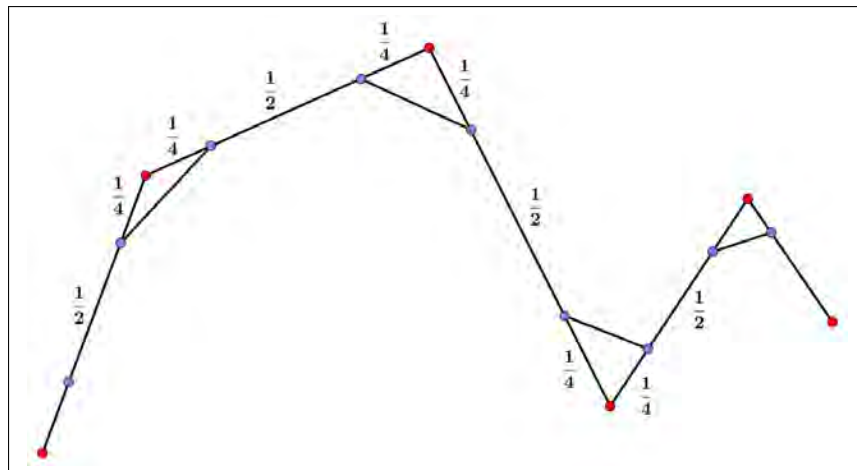


Abbildung 2: Unterteilung der ursprünglichen Strecken im Verhältnis  $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

Dieser Prozess wird nun wiederholt. Im Grenzfall ergibt sich dann eine Kurve, genauer eine Funktion aus  $C^1(\mathbb{R})$ .

Dass dieser Vorgang tatsächlich konvergiert, kann man sich verdeutlichen, wenn man eine Ecke des Kontrollpolygons näher betrachtet.

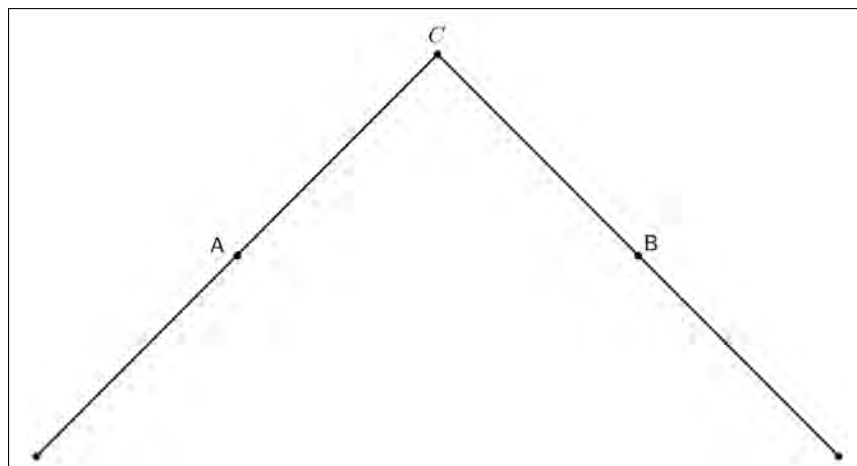


Abbildung 3: Eine Ecke des anfänglichen Kontrollpolygons

A und B seien dabei die Mittelpunkte der beiden Strecken des Kontrollpolygons. Zusätzlich betrachten wir die quadratische Kurve

$$Q(t) = A(1-t)^2 + 2Ct(1-t) + Bt^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Diese Kurve verläuft durch die Punkte A und B und ist Tangente zu AC im Punkt A bzw. zu BC im Punkt B. Außerdem berührt sie die Linie, die durch die Mittelpunkte von AC und BC verläuft im Punkt  $Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(A + 2C + B)$  und ist auch in diesem Punkt eine Tangente, vgl. Abbildung 4.

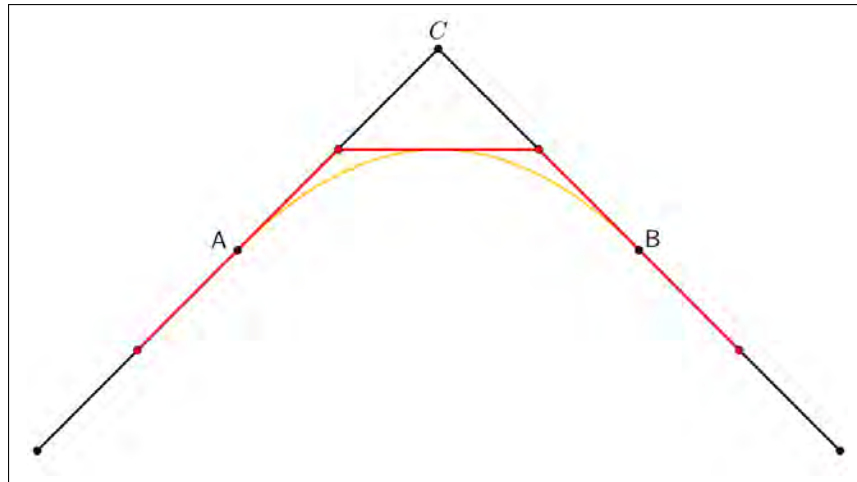


Abbildung 4: Quadratische Kurve und 1. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus

In Abbildung 4 ist das rote Polygon der erste Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus. Man sieht, dass bereits drei Punkte des Polygons und der quadratischen Kurve übereinstimmen. Betrachtet man nun den nächsten Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus, also die Unterteilung des roten Polygons im Verhältnis  $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ , so sieht man, dass das blaue Polygon bereits in fünf Punkten mit der quadratischen Kurve übereinstimmt, vgl. Abbildung 5.

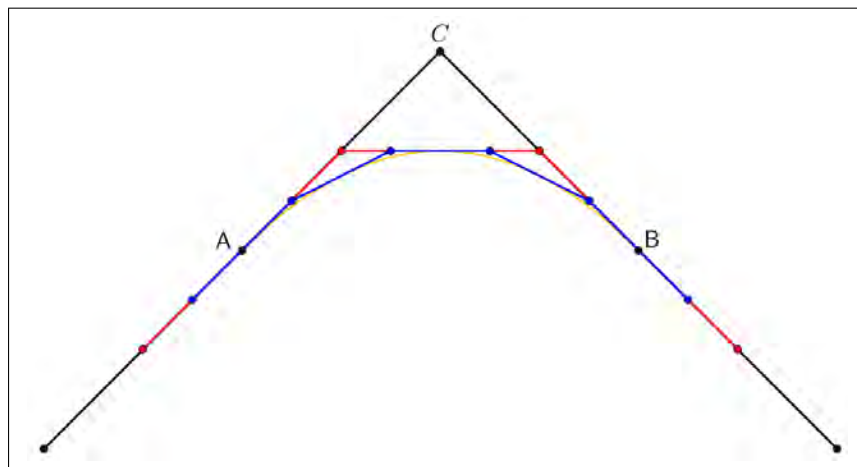


Abbildung 5: Quadratische Kurve und 2. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus

Unterteilt man nun immer weiter, so liegen jedes mal weitere Punkte des entstehenden Polygons auf der quadratischen Kurve, vgl. Abbildung 6. Außerdem verringert sich der maximale Abstand aufeinanderfolgender Kontrollpunkte bei jedem Schritt. Die quadratische Kurve ist also für jede Ecke des anfänglichen Kontrollpolygons die Grenzfunktion des de Rham-Chaikin Algorithmus. Und da die quadratische Kurve in den Mittelpunkten der Strecken des ursprünglichen Kontrollpolygons eine Tangente darstellt, ist die stückweise definierte Funktion, die aus den quadratischen Kurven aller Ecken besteht, eine  $C^1(\mathbb{R})$  Funktion.

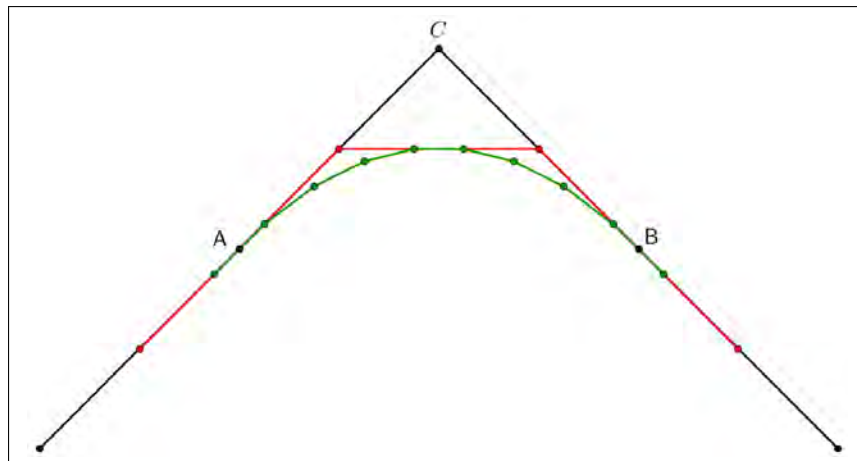


Abbildung 6: Quadratische Kurve und 3. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus

Eine dem de Rham-Chaikin Algorithmus ähnliche - wenn auch einfachere Methode - ist die Mittelpunkt-Methode. Hierbei wird in jedem Schritt zwischen zwei Kontrollpunkten in der Mitte ein neuer, dritter Kontrollpunkt eingefügt, siehe Abbildung 7. Wiederholt man diesen Prozess, so ergibt sich als Grenzfunktion das Kontrollpolygon selbst, also diesmal keine  $C^1(\mathbb{R})$  Funktion.

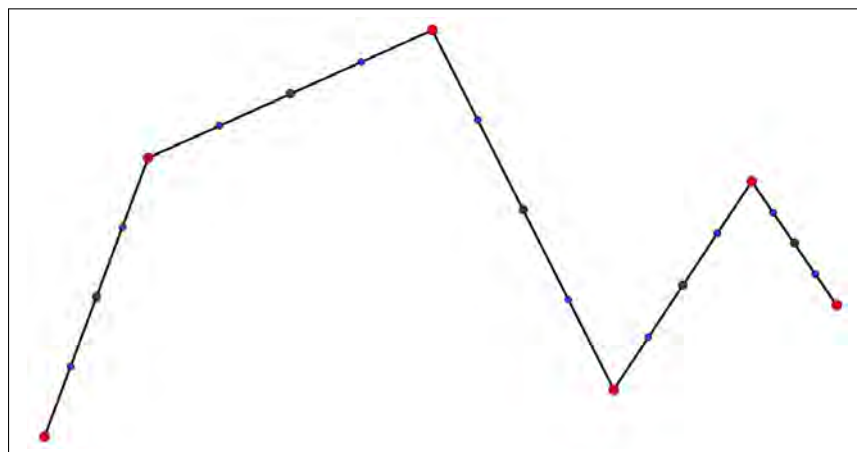


Abbildung 7: Mittelpunktmethode: Anfängliche Kontrollpunkte (rot), neue Kontrollpunkte nach 1. Schritt (grün), neue Kontrollpunkte nach 2. Schritt (blau)

Der de Rham-Chaikin Algorithmus und die Mittelpunkt-Methode sind beides Spezialfälle von stationären subdivision schemes zur Berechnung von Cardinal splines nach Lane und Riesenfeld [7]. Im zweiten Unterkapitel werden wir die Grundlagen für deren Algorithmus erarbeiten und in Kapitel 3 wird dann der Algorithmus selbst vorgestellt.



## 2.2. B-splines

In diesem Kapitel wollen wir das Konzept der B-splines einführen. Sei dazu  $\chi$  die Indikatorfunktion des Intervalls  $[0, 1[$ ,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

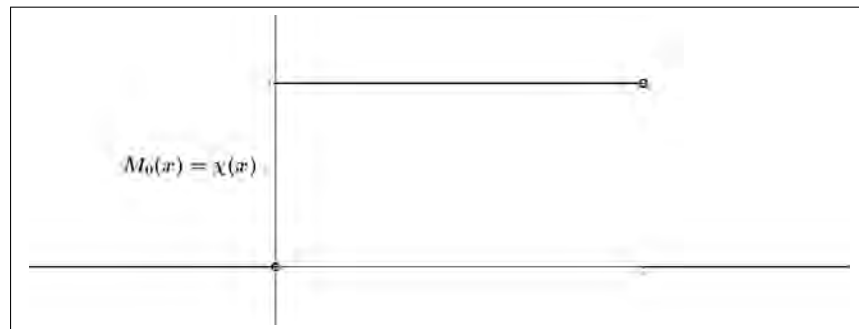


Abbildung 8: Indikatorfunktion auf  $[0, 1[$

Mithilfe der Indikatorfunktion  $\chi(x)$  können wir nun den B-spline vom Grad  $n$  nach Schoenberg [15] definieren.

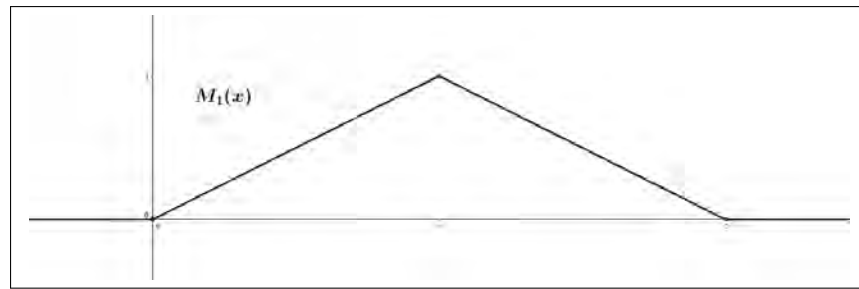
**Definition 2.1.** Der **B-spline  $M_n$  vom Grad  $n$**  ist rekursiv auf  $\mathbb{R}$  definiert durch

$$M_n(x) = \begin{cases} \chi(x), & n = 0, \\ \int_0^1 M_{n-1}(x-t)dt, & n \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Diese Funktionen bilden die Grundlage für das nächste Kapitel. Deshalb betrachten wir einige ihrer Eigenschaften genauer.

Wir berechnen zuerst den B-spline vom Grad 1, vgl. Abbildung 9.

$$M_1(x) = \int_0^1 M_0(x-t)dt = \int_0^1 \chi(x-t)dt = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abbildung 9:  $M_1(x)$ 

Für  $n \geq 2$  folgt aus der Definition des B-splines vom Grad  $n$  (1) die Formel

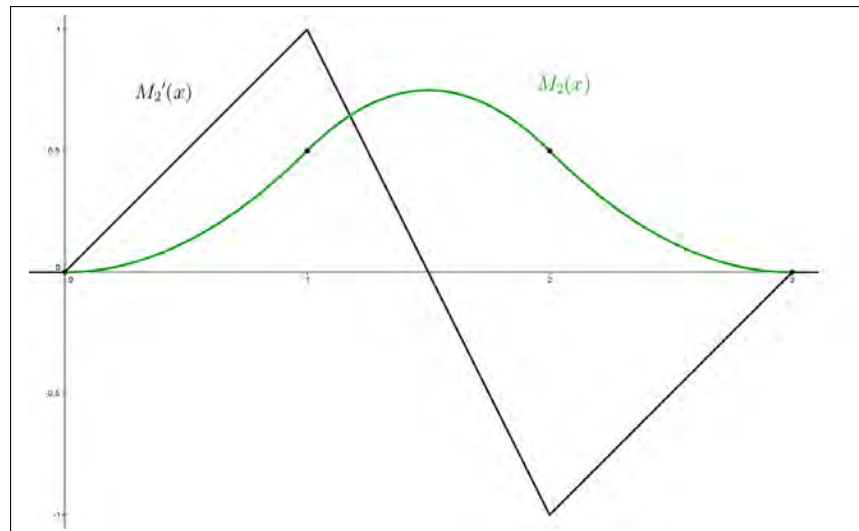
$$M'_n(x) = M_{n-1}(x) - M_{n-1}(x-1). \quad (2)$$

Mithilfe dieser Formel können wir uns Gedanken machen, wie z.B. der B-spline vom Grad 2 aussieht. Für  $M'_2(x)$  gilt

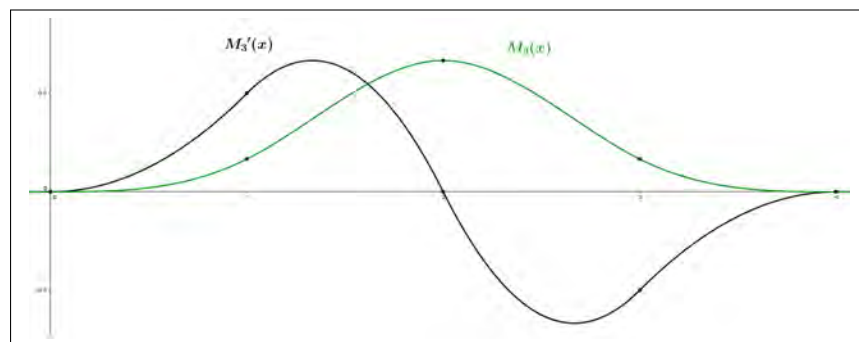
$$M'_2(x) = M_1(x) - M_1(x-1) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3 - 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ -3 + x, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun können wir daraus eine stückweise definierte Stammfunktion berechnen. Bestimmt man beim Integrieren die Konstante  $c$  jeweils so, dass der Endpunkt des linken Abschnitts mit dem Anfangspunkt des rechten Abschnitts zusammenfällt, so erhält man den B-spline vom Grad 2, vgl. Abbildung 10.

$$M_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abbildung 10:  $M_2'(x)$  und  $M_2(x)$ 

Da man nun den Funktionsterm von  $M_2(x)$  kennt, kann man wieder Formel (2) verwenden, um  $M_3'(x)$  zu berechnen. Durch Integration erhält man dann den B-spline vom Grad 3, vgl. Abbildung 11.

Abbildung 11:  $M_3'(x)$  und  $M_3(x)$ 

Nachdem wir uns bisher die ersten vier B-splines grafisch veranschaulicht haben, kommen wir nun zu den Eigenschaften des B-splines vom Grad  $n$ .

Aus der Definition (1) folgt, dass  $M_n$  außerhalb des Intervalls  $]0, n + 1[$  verschwindet und ansonsten strikt positiv ist,

$$M_n(x) > 0 \quad \forall x \in ]0, n + 1[,$$

$$M_n(x) = 0 \quad \forall x \notin ]0, n + 1[.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, dass die Summe über alle Funktionswerte, die jeweils Abstand 1 haben, immer 1 ergibt,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_n(x - j) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Wir beweisen dies induktiv. Der Induktionsanfang  $n = 0$  ist klar, da  $M_0(x) = \chi(x)$ . Angenommen, die Aussage gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt mit Definition (1) und Gleichung (3), dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \chi(x-t) dt = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \chi(x-t) M_n(t-j) dt = \sum_{j \in \mathbb{Z}} M_{n+1}(x-j).$$

Dies war zu zeigen.

Weiter folgern wir aus Gleichung (2), dass der B-spline vom Grad  $n$  eine  $(n-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf  $\mathbb{R}$  ist,  $M_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ . Außerdem ist  $M_n$  auf jedem Intervall  $[j, j+1[$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , ein Polynom vom Grad höchstens  $n$ .

Letzteres haben wir in unseren Beispielen bereits gesehen. Für  $M_2(x)$  haben wir explizit die einzelnen Polynome vom Grad 2 berechnet.

### 3. Subdivision schemes algebraisch betrachtet

Nachdem wir im letzten Kapitel B-splines vom Grad  $n$  eingeführt haben, wollen wir dieses Konzept nun verallgemeinern zu cardinal splines vom Grad  $n$ . Anschließend wird anhand der cardinal splines vom Grad  $n$  der Algorithmus von Lane und Riesenfeld [7] vorgestellt. Schließlich werden wir noch definieren, was wir algebraisch unter einem subdivision scheme verstehen.

#### 3.1. Cardinal splines

Die Eigenschaften des B-splines vom Grad  $n$  legen folgende, allgemeinere Definition nahe.

**Definition 3.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}_+$ . Wir bezeichnen mit  $S_n$  den Vektorraum aller Funktionen mit  $n - 1$  stetigen Ableitungen in  $\mathbb{R}$ , sodass deren Einschränkung auf ein Intervall  $[j, j + 1[$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$  ein Polynom vom Grad höchstens  $n$  ist.  $S_0$  sei die Menge aller Treppenfunktionen mit Unstetigkeitsstellen in  $\mathbb{Z}$ , die rechtsseitig stetig sind. Eine Funktion aus  $S_n$  heißt ein **cardinal spline vom Grad  $n$** .

Cardinal spline Funktionen haben in ihrer  $n$ -ten Ableitung nur an Punkten  $x \in \mathbb{Z}$  Unstetigkeitsstellen, ansonsten ist ihre  $n$ -te Ableitung stetig. Schoenberg [15] hat folgende Darstellung für cardinal spline Funktionen gefunden.

**Satz 3.1.** Eine Funktion  $f$  ist ein cardinal spline vom Grad  $n$ , genau dann wenn es eindeutige Konstanten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , gibt, sodass gilt

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \cdot M_n(x - j), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Beachte, dass in Darstellung (4) für alle  $x \in \mathbb{R}$  höchstens  $n + 1$  Summanden ungleich 0 sind, da  $M_n = 0$  außerhalb von  $]0, n + 1[$ .

**Beweis.** Wir zeigen diese Darstellung von  $f$  durch Induktion über  $n$ . Da der Fall  $n = 0$  klar ist, betrachten wir zunächst den Fall  $n = 1$ . Wir haben im vorherigen Kapitel bereits gesehen, dass

$$M_1(x) = \int_0^1 M_0(x - t) dt = \int_0^1 \chi(x - t) dt = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist für  $n = 1$  jede Summe der Form (4) ein Element von  $S_1$ . Umgekehrt kann eine gegebene stetige, stückweise lineare Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[j, j + 1]$  dargestellt werden als

$$\begin{aligned} f(x) &= f(j)(j + 1 - x) + f(j + 1)(x - j) \\ &= f(j)M_1(x - j + 1) + f(j + 1)M_1(x - j) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l + 1)M_1(x - l). \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass die Behauptung für ein  $n \geq 2$  wahr ist. Sei  $f \in S_{n+1}$ . Dann ist  $f' \in S_n$  und nach Induktionsannahme existieren eindeutige Konstanten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , sodass gilt

$$f'(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j M_n(x - j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen  $d_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , so, dass

$$d_j - d_{j-1} = c_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Alle Folgen  $d_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , sind eindeutig bestimmt, sobald  $d_0$  gegeben ist. Genauer gilt

$$d_j = d_0 + v_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

wobei

$$v_j = \begin{cases} \sum_{l=1}^j c_l, & j \geq 1, \\ 0, & j = 0, \\ -\sum_{l=j+1}^0 c_l, & j \leq -1. \end{cases}$$

Mit Gleichung (2) folgt nun

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j M_{n+1}(x - j) + a,$$

wobei  $a := f(0) - \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j M_{n+1}(-j)$ . Somit erhalten wir mit Gleichung (3)

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a + d_j) M_{n+1}(x - j).$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass diese Darstellung von  $f$  eindeutig ist. Seien dazu gewisse Konstanten  $y_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , gegeben, mit

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k M_{n+1}(x - k). \quad (5)$$

Differenziert man beide Seiten von Gleichung (5) und benutzt man die Induktionsannahme, so erhält man

$$y_k = v_k + y_0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

während man aus den Gleichungen (3) und (5) die Darstellung

$$f(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k M_{n+1}(-k) + y_0$$

erhält, was  $y_0$  eindeutig bestimmt. □

Nun haben wir cardinal splines und deren Darstellung als lineare Kombination von B-splines eingeführt. Als Nächstes sehen wir uns den Algorithmus von Lane und Riesenfeld an.

### 3.2. Algorithmus von Lane und Riesenfeld

Für den Algorithmus von Lane und Riesenfeld brauchen wir zuerst noch eine Definition. Sei

$$S_n^1 = \{g \mid g(x) = f(2x), x \in \mathbb{R}, f \in S_n\}.$$

Die Menge  $S_n^1$  besteht aus Splinefunktionen vom Grad  $n$  mit Knoten in  $\frac{\mathbb{Z}}{2} = \{\frac{j}{2} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ . Offensichtlich gilt  $S_n \subseteq S_n^1$ . Dies führt zu der Frage, wie man eine Funktion  $f \in S_n$  als Element von  $S_n^1$  schreiben kann. Seien also die Koeffizienten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , der Darstellung (4) gegeben. Was sind dann die  $d_k$ ,  $k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ , der Darstellung

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j M_n(x - j) = \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k M_n(2(x - k)), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Wir werden nun eine Rekursionsformel für die Koeffizienten  $d_k$  in obiger Darstellung herleiten. Da diese vom Grad  $n$  des B-splines abhängen, schreiben wir im Weiteren  $d_k^n$  statt  $d_k$ , um eben diese Abhängigkeit zu verdeutlichen. Die linke Seite von Gleichung (6) bezeichnen wir außerdem mit  $f_n(x)$ , also

$$f_n(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j M_n(x - j) = \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^n M_n(2(x - k)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Nach der Definition des B-splines vom Grad  $n$  (1) gilt dann

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 f_n(x-t) dt \\
&\stackrel{\text{auseinander-}}{\stackrel{=}{\text{ziehen}}} \frac{1}{2} \int_0^1 f_n\left(x - \frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n\left(x - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^n M_n(2(x-k) - t) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^n M_n(2(x-k) - t - 1) dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^n \int_0^1 M_n(2(x-k) - t) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^n \int_0^1 M_n(2(x-k) - t - 1) dt \\
&\stackrel{\text{Shift von } k \text{ um } -\frac{1}{2}}{\stackrel{=}{\text{in zweiter Summe}}} \frac{1}{2} \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^n \int_0^1 M_n(2(x-k) - t) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_{k-\frac{1}{2}}^n \int_0^1 M_n(2(x-k) - t) dt \\
&\stackrel{\text{zusammen-}}{\stackrel{=}{\text{fügen}}} \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} \frac{1}{2} \left( d_k^n + d_{k-\frac{1}{2}}^n \right) \int_0^1 M_n(2(x-k) - t) dt \\
&\stackrel{(1)}{=} \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} \frac{1}{2} \left( d_k^n + d_{k-\frac{1}{2}}^n \right) M_{n+1}(2(x-k)).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Rekursionsformel

$$d_k^{n+1} = \frac{1}{2} \left( d_k^n + d_{k-\frac{1}{2}}^n \right), \quad k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}, \quad (8)$$

zur Berechnung der Koeffizienten vom Grad  $n+1$  aus den Koeffizienten vom Grad  $n$ . Betrachten wir nun den Fall  $n=0$ . Aus der Darstellung von  $f_0$  als Element von  $S_0$  erhalten wir



$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j M_0(x - j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \chi(x - j) \\
&= c_l, \quad \text{für } l \leq x < l + 1.
\end{aligned}$$

Und aus der Darstellung von  $f_0$  als Element von  $S_0^1$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^0 M_0(2(x - k)) \\
&= \sum_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}} d_k^0 \chi(2(x - k)) \\
&= d_l^0, \quad \text{für } l \leq x < l + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert

$$d_l^0 = d_{l+\frac{1}{2}}^0 = c_l, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Aus den Formeln (8) und (9) erhält man iterativ alle  $d_k^n$ ,  $k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ . Zum Beispiel gilt

$$d_k^1 = \begin{cases} c_l, & k = l + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(c_l + c_{l+1}), & k = l + 1, \end{cases}$$

und

$$d_k^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}c_l + \frac{1}{4}c_{l-1}, & k = l + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}c_{l+1} + \frac{3}{4}c_l, & k = l + 1. \end{cases}$$

Interpretiert man die  $c_l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , als Kontrollpunkte in der Ebene, dann entsprechen die  $d_k^1$ ,  $k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ , den Kontrollpunkten der Mittelpunktmethode und die  $d_k^2$ ,  $k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ , den Kontrollpunkten des de Rham-Chaikin Algorithmus, vgl. Abbildungen 12 und 13.

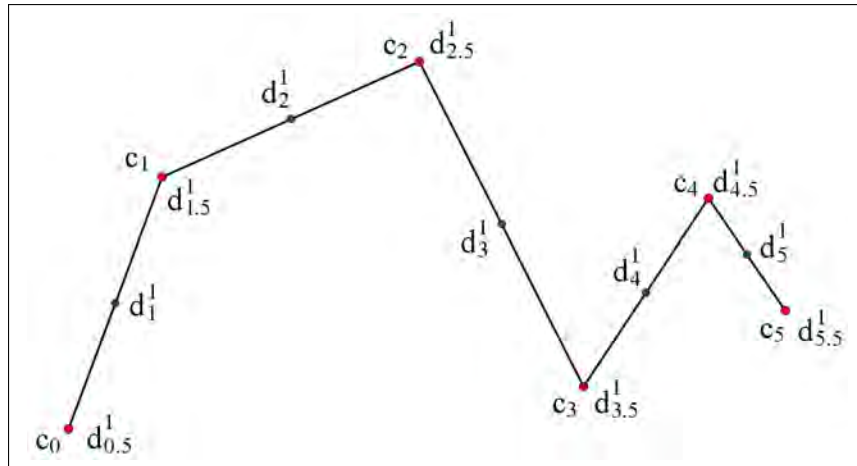


Abbildung 12: Mittelpunktmethode mit Kontrollpunkten  $d_k^1$

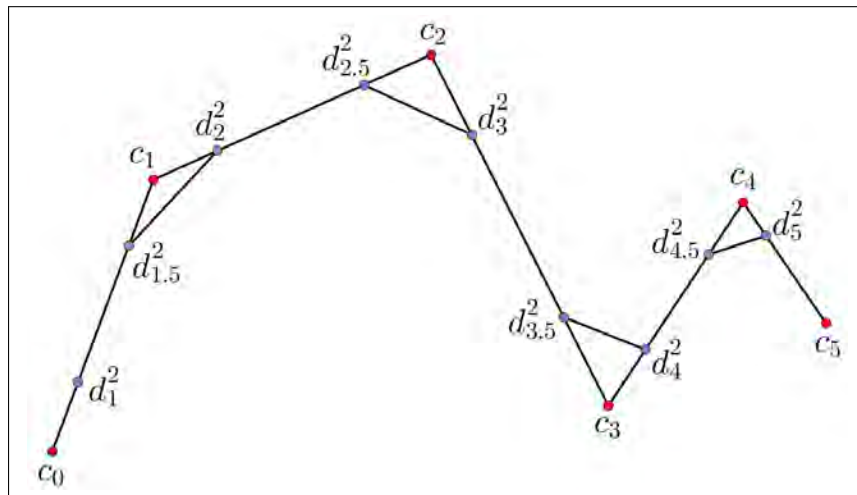


Abbildung 13: De Rham-Chaikin Algorithmus mit Kontrollpunkten  $d_k^2$

Nun haben wir die  $d_k^n$  der Darstellung einer Funktion  $f_n \in S_n$  als Element der Menge  $S_n^1$  bestimmt, vgl. Gleichung (7). Aufbauend auf der Definition von  $S_n^1$  definieren wir allgemein die Menge  $S_n^r$ ,

$$S_n^r = \{g \mid g(x) = f(2^r x), x \in \mathbb{R}, f \in S_n\}.$$

Die Menge  $S_n^r$  besteht aus Splinefunktionen vom Grad  $n$  mit Knoten in  $\frac{\mathbb{Z}}{2^r} = \{\frac{j}{2^r} \mid j \in \mathbb{Z}\}$ . Wir betrachten die Darstellung einer Funktion  $f_n \in S_n$  als Element der Menge  $S_n^r$ ,

$$f_n(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j M_n(x - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j^r M_n(2^r x - j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$c^r$  bezeichnet dabei die Koeffizienten der  $r$ -ten Iteration des Unterteilungsvorgangs. Beginnt man nun mit einer Funktion  $f_n \in S_n$  und stellt diese als Element von  $S_n^1, S_n^2, S_n^3, \dots$  dar, so stellt sich die Frage, ob die Folge  $(c^0, c^1, c^2, \dots)$  der entsprechenden

Koeffizienten  $c^r$  konvergiert. Diese Frage wird in Kapitel 5 beantwortet.

Wir wollen zum Abschluss dieses Kapitels noch den de Rham-Chaikin Algorithmus mit dem Lane-Riesenfeld Algorithmus vergleichen. Beim de Rham-Chaikin Algorithmus wird bei einem vorgegebenen Kontrollpolygon jede Strecke in der Mitte unterteilt und anschließend werden die neuen Strecken einmal gemittelt. Der Algorithmus von Lane und Riesenfeld unterscheidet sich dadurch, dass hier nach dem Unterteilen die neuen Strecken zweimal gemittelt werden. Martin Peternell hat dies in seinem Vortrag bei der 30. Fortbildungstagung für Geometrie 2009 sehr schön veranschaulicht [13]. Er begann jeweils mit dem gleichen Quadrat, wodurch der Unterschied in der Grenzkurve gut zu sehen ist, vgl. Abbildungen 14 und 15.

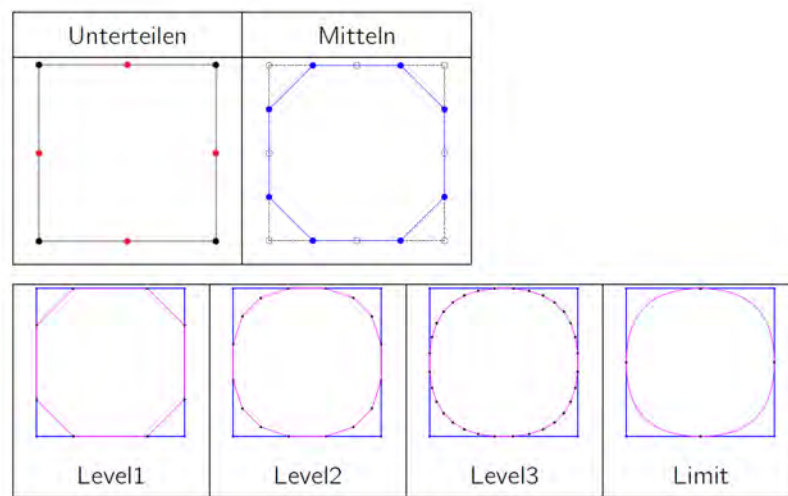


Abbildung 14: de Rham-Chaikin Algorithmus und Grenzkurve an einem Quadrat (Martin Peternell, „Unterteilungskurven und -flächen“, S.16<sup>1</sup>)

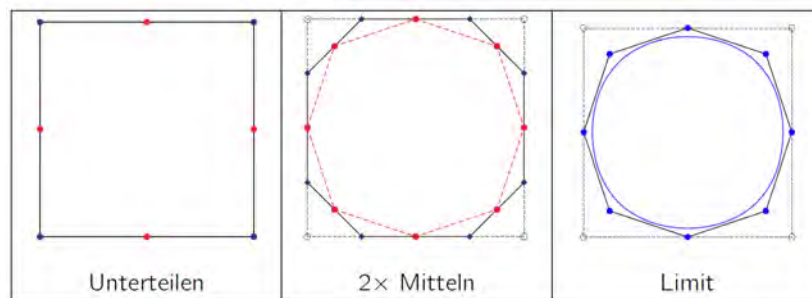


Abbildung 15: Lane-Riesenfeld Algorithmus und Grenzkurve an einem Quadrat (Martin Peternell, „Unterteilungskurven und -flächen“, S.17<sup>2</sup>)

<sup>1</sup>[http://www.geometry.at/strobl/strobl2009/vortrag09/peternell/peternell109\\_unterteilungskurven-flaechen.pdf](http://www.geometry.at/strobl/strobl2009/vortrag09/peternell/peternell109_unterteilungskurven-flaechen.pdf), Seite 16, abgerufen am 29.02.2016.

<sup>2</sup>[http://www.geometry.at/strobl/strobl2009/vortrag09/peternell/peternell109\\_unterteilungskurven-flaechen.pdf](http://www.geometry.at/strobl/strobl2009/vortrag09/peternell/peternell109_unterteilungskurven-flaechen.pdf), Seite 17, abgerufen am 29.02.2016.

### 3.3. Algebraische Definition eines subdivision scheme

Nach der geometrischen Veranschaulichung von subdivision schemes im letzten Kapitel, wollen wir in diesem Kapitel die algebraische Definition eines subdivision scheme herleiten. Dazu betrachten wir nochmals Formel (8),

$$d_k^{n+1} = \frac{1}{2} \left( d_k^n + d_{k-\frac{1}{2}}^n \right), \quad k \in \frac{\mathbb{Z}}{2},$$

die wir im vorherigen Kapitel hergeleitet haben. Dabei ging es uns um die Berechnung der Koeffizienten der Darstellung einer Funktion  $f \in S_n$  als Element von  $S_n^1$ . In Gleichung (8) wird dabei der Mittelwert zweier aufeinanderfolgender Koeffizienten von niedrigerem Grad gebildet, um den Koeffizienten von höherem Grad zu berechnen. Wir wollen dieses Prinzip nun verallgemeinern und werden anstatt der gleichen Gewichtung eine ungleiche, konvexe Gewichtung betrachten.

Dazu beginnen wir wieder mit Kontrollpunkten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , die wir auf das feine Gitter  $\frac{\mathbb{Z}}{2}$  erweitern. Sei also

$$g_j^0 = g_{j+\frac{1}{2}}^0 = c_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Als nächstes wählen wir feste Gewichtungen  $w_1, \dots, w_n \in ]0, 1[$  und berechnen rekursiv

$$g_k^l = w_l g_k^{l-1} + (1 - w_l) g_{k-\frac{1}{2}}^{l-1}, \quad k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}, \quad l = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Nach  $n$  rekursiven konvexen Kombinationen erhalten wir neue Kontrollpunkte  $c_j^1$ , definiert durch

$$c_{2k}^1 = g_k^n, \quad k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}. \quad (12)$$

Der Vorgang (10)-(12) wird nun  $r$ -mal wiederholt. Dieses subdivision scheme werden wir im Folgenden genauer untersuchen. Wir wollen die Frage beantworten, ob  $\{c_j^r | j \in \mathbb{Z}\}$  konvergiert und welche Eigenschaften die Grenzfunktion hat. Um den Algorithmus (10)-(12) besser zu verstehen, sehen wir uns zuerst ein Beispiel an.

**Beispiel 3.1.** Wir setzen  $n = 3$  und wählen eine Funktion  $f \in S_3$ ,

$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j M_3(x - j)$ , mit  $c_0 = 5$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 9$  und  $c_j = 0$ ,  $j \notin \{0, 1, 2, 3\}$ , also  $c = (\dots, 0, 0, 5, 1, 4, 9, 0, 0, \dots)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 M_3(x) + c_1 M_3(x - 1) + c_2 M_3(x - 2) + c_3 M_3(x - 3) \\ &= 5M_3(x) + 1M_3(x - 1) + 4M_3(x - 2) + 9M_3(x - 3). \end{aligned}$$

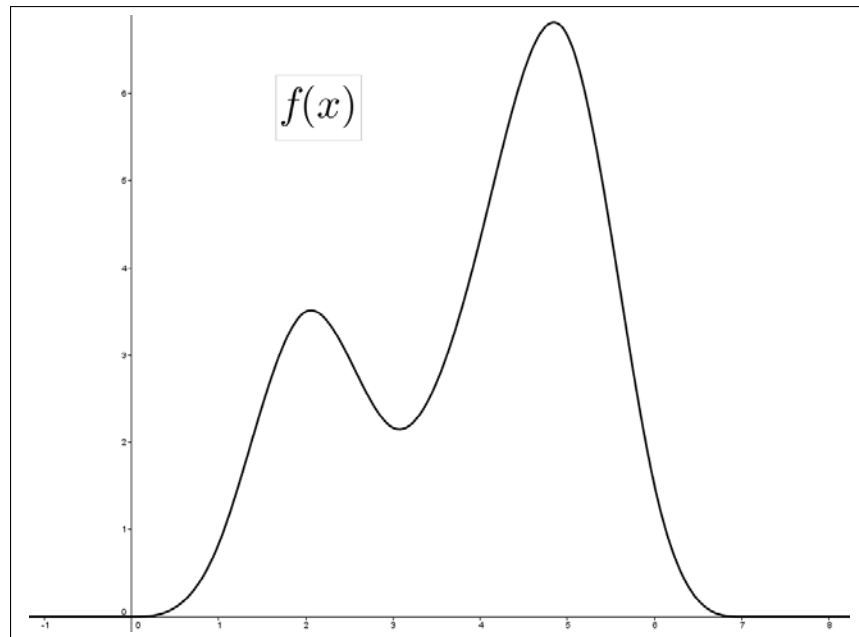


Abbildung 16:  $f(x) = 5M_3(x) + 1M_3(x-1) + 4M_3(x-2) + 9M_3(x-3)$

Als erstes müssen wir unsere Kontrollpunkte  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , auf das feine Gitter  $\frac{\mathbb{Z}}{2}$  erweitern, vgl. Gleichung (10). Wir erhalten  $g_0^0 = 5$ ,  $g_{0.5}^0 = 5$ ,  $g_1^0 = 1$ ,  $g_{1.5}^0 = 1$ , ...,  $g_{3.5}^0 = 9$ , also insgesamt

$$g^0 = (\dots, 0, 0, 5, 5, 1, 1, 4, 4, 9, 9, 0, 0, \dots).$$

Nun müssen wir feste Gewichtungen  $w_1, \dots, w_n \in ]0, 1[$  wählen. Wir setzen  $w_1 = 0.2$ ,  $w_2 = 0.5$ ,  $w_3 = 0.6$ . Anschließend müssen wir mit Formel (11) die Punkte  $g_k^1$ ,  $g_k^2$  und  $g_k^3$ ,  $k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ , berechnen. Wir beginnen mit  $g_k^1$ ,

$$g_k^1 = w_1 g_k^0 + (1 - w_1) g_{k-\frac{1}{2}}^0,$$

und erhalten

$$\begin{aligned} g_0^1 &= w_1 \cdot g_0^0 + (1 - w_1) \cdot g_{-0.5}^0 \\ &= 0.2 \cdot 5 + (1 - 0.2) \cdot 0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{0.5}^1 &= w_1 \cdot g_{0.5}^0 + (1 - w_1) \cdot g_0^0 \\ &= 0.2 \cdot 5 + (1 - 0.2) \cdot 5 \\ &= 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1^1 &= w_1 \cdot g_1^0 + (1 - w_1) \cdot g_{0.5}^0 \\
&= 0.2 \cdot 1 + (1 - 0.2) \cdot 5 \\
&= 4.2,
\end{aligned}$$

$g_{1.5}^1 = 1$ ,  $g_2^1 = 1.6$ ,  $g_{2.5}^1 = 4$ ,  $g_3^1 = 5$ ,  $g_{3.5}^1 = 9$ ,  $g_4^1 = 7.2$  und  $g_j^1 = 0$ , sonst. Insgesamt also

$$g_j^1 = (\dots, 0, 0, 1, 5, 4.2, 1, 1.6, 4, 5, 9, 7.2, 0, 0, \dots).$$

Nun können wir weitermachen und  $g_k^2$ ,

$$g_k^2 = w_2 g_k^1 + (1 - w_2) g_{k-\frac{1}{2}}^1,$$

berechnen. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
g_0^2 &= w_2 \cdot g_0^1 + (1 - w_2) \cdot g_{-0.5}^1 \\
&= 0.5 \cdot 1 + (1 - 0.5) \cdot 0 \\
&= 0.5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{0.5}^2 &= w_2 \cdot g_{0.5}^1 + (1 - w_2) \cdot g_0^1 \\
&= 0.5 \cdot 5 + (1 - 0.5) \cdot 1 \\
&= 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1^2 &= w_2 \cdot g_1^1 + (1 - w_2) \cdot g_{0.5}^1 \\
&= 0.5 \cdot 4.2 + (1 - 0.5) \cdot 5 \\
&= 4.6,
\end{aligned}$$

$g_{1.5}^2 = 2.6$ ,  $g_2^2 = 1.3$ ,  $g_{2.5}^2 = 2.8$ ,  $g_3^2 = 4.5$ ,  $g_{3.5}^2 = 7$ ,  $g_4^2 = 8.1$ ,  $g_{4.5}^2 = 3.6$  und  $g_j^2 = 0$ , sonst, also

$$g^2 = (\dots, 0, 0, 0.5, 3, 4.6, 2.6, 1.3, 2.8, 4.5, 7, 8.1, 3.6, 0, 0, \dots).$$

Schließlich berechnen wir noch  $g_k^3$ ,

$$g_k^3 = w_3 g_k^2 + (1 - w_3) g_{k-\frac{1}{2}}^2,$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
g_0^3 &= w_3 \cdot g_0^2 + (1 - w_3) \cdot g_{-0.5}^2 \\
&= 0.6 \cdot 0.5 + (1 - 0.6) \cdot 0 \\
&= 0.3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{0.5}^3 &= w_3 \cdot g_{0.5}^2 + (1 - w_3) \cdot g_0^2 \\
&= 0.6 \cdot 3 + (1 - 0.6) \cdot 0.5 \\
&= 2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1^3 &= w_3 \cdot g_1^2 + (1 - w_3) \cdot g_{0.5}^2 \\
&= 0.6 \cdot 4.6 + (1 - 0.6) \cdot 3 \\
&= 3.96,
\end{aligned}$$

$g_{1.5}^3 = 3.4$ ,  $g_2^3 = 1.82$ ,  $g_{2.5}^3 = 2.2$ ,  $g_3^3 = 3.82$ ,  $g_{3.5}^3 = 6$ ,  $g_4^3 = 7.66$ ,  $g_{4.5}^3 = 5.4$ ,  $g_5^3 = 1.44$  und  $g_j^3 = 0$ , sonst, also

$$g^3 = (\dots, 0, 0, 0.3, 2, 3.96, 3.4, 1.82, 2.2, 3.82, 6, 7.66, 5.4, 1.44, 0, 0, \dots).$$

Zum Schluss folgen wir noch Formel (12) und setzen

$$c_{2k}^1 = g_k^3, \quad k \in \frac{\mathbb{Z}}{2},$$

und erhalten  $c_0^1 = g_0^3 = 0.3$ ,  $c_1^1 = g_{0.5}^3 = 2$ ,  $c_2^1 = g_1^3 = 3.96$ , ...,  $c_9^1 = g_{4.5}^3 = 5.4$ ,  $c_{10}^1 = g_5^3 = 1.44$  und  $c_j^1 = 0$ , sonst, also

$$c^1 = (\dots, 0, 0, 0.3, 2, 3.96, 3.4, 1.82, 2.2, 3.82, 6, 7.66, 5.4, 1.44, 0, 0, \dots).$$

Wenn man die Punkte  $c_j$  und  $c_j^1$  als Punkte im Koordinatensystem betrachtet, so sieht man, dass die zugehörigen Kontrollpolygone eine gewisse Ähnlichkeit aufweisen, vgl. Abbildung 17. Man könnte also vermuten, dass der Algorithmus (10)-(12) konvergiert.

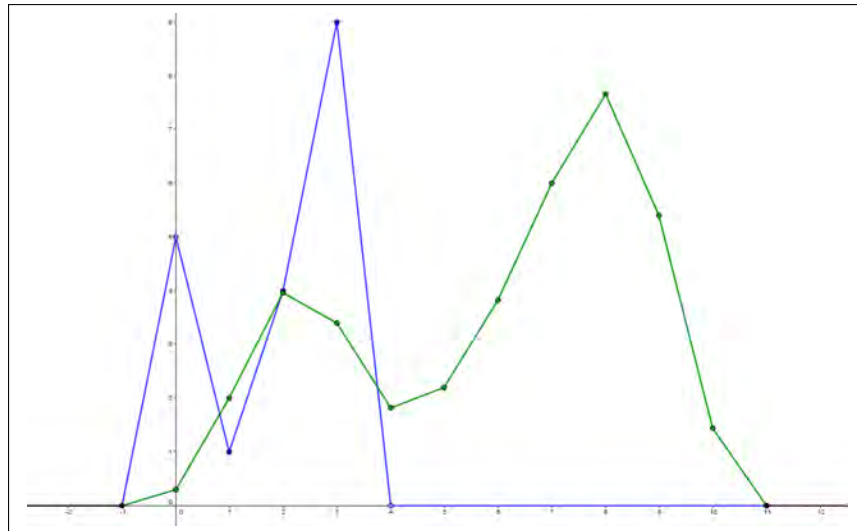


Abbildung 17: Die Punkte  $c_j$  (blau) und  $c_j^1$  (grün) im Koordinatensystem

Um die Konvergenz des subdivision scheme (10)-(12) algebraisch zu untersuchen, finden wir zuerst einen anderen Ausdruck für die neuen Kontrollpunkte  $c_j^1$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Dazu definieren wir die Polynome

$$D(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j z^j = \prod_{l=1}^n (w_l + (1 - w_l)z) \tag{13}$$

und

$$a(z) = (1 + z)D(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + z)d_j z^j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j. \tag{14}$$

Die  $w_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ , sind dabei die Gewichtungen, die man im Algorithmus (10)-(12) gewählt hat. Da das Produkt in Gleichung (13) von 1 bis  $n$  läuft und da  $w_l \in ]0, 1[$ ,  $l = 1, \dots, n$ , folgt, dass  $D(z)$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist, also  $d_j = 0$ , falls  $j \notin \{0, 1, \dots, n\}$ , und ebenso folgt  $d_j > 0$ , falls  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Für die Koeffizienten  $a_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , in Gleichung (14) gilt  $a_j = d_{j-1} + d_j$ , denn

$$\begin{aligned} a(z) &= (1 + z)D(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + z)d_j z^j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j z^j + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j z^{j+1} \\ &\stackrel{\text{Shift von } j \text{ um } -1}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j z^j + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{j-1} z^j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (d_{j-1} + d_j) z^j \\ &\stackrel{a_j := d_{j-1} + d_j}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j. \end{aligned}$$



Da  $d_j = 0$ , falls  $j \notin \{0, 1, \dots, n\}$  und  $d_j > 0$ , falls  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ , folgt somit  $a_j = 0$ , falls  $j \notin \{0, 1, \dots, n+1\}$  und  $a_j > 0$ , falls  $j \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ .

Wendet man nun den Backshift-Operator  $(Eg)_k := g_{k-\frac{1}{2}}$ ,  $k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ , für eine Folge  $(g_k)_{k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}}$  auf Formel (11) an, so erhält man

$$g^l = (w_l + (1 - w_l)E)g^{l-1}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (15)$$

wobei  $g^l = (g_k^l \mid k \in \frac{\mathbb{Z}}{2})$ . Somit ergibt sich für  $g^n$  die Darstellung

$$\begin{aligned} g^n &\stackrel{(15)}{=} (w_n + (1 - w_n)E)g^{n-1} \\ &\stackrel{(15) \text{ auf } g^{n-1} \text{ anwenden}}{=} (w_n + (1 - w_n)E)(w_{n-1} + (1 - w_{n-1})E)g^{n-2} \\ &\stackrel{\text{wiederholtes Anwenden von (15)}}{=} \dots = D(E)g^0, \end{aligned}$$

wobei  $D$  das Polynom aus Gleichung (13) ist. Für ein einzelnes Folgenglied  $g_k^n$  gilt also

$$g_k^n = d_0g_k^0 + d_1g_{k-\frac{1}{2}}^0 + d_2g_{k-1}^0 + \dots + d_n g_{k-\frac{n}{2}}^0, \quad k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}. \quad (16)$$

Aus den Gleichungen (10) und (16) folgt

$$g_k^n = \begin{cases} d_0c_j + (d_1 + d_2)c_{j-1} + \dots, & k = j, \\ (d_0 + d_1)c_j + (d_2 + d_3)c_{j-1} + \dots, & k = j + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Da  $a_j = d_j + d_{j-1}$ , können wir Formel (17) schreiben als

$$c_{\frac{1}{2}k}^1 = g_k^n = \begin{cases} a_0c_j + a_2c_{j-1} + \dots, & k = j, \\ a_1c_j + a_3c_{j-1} + \dots, & k = j + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

was wiederum kurz geschrieben werden kann als

$$c_i^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j}c_j, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Beachte, dass in Formel (18) nur endlich viele Koeffizienten  $a_k$  ungleich 0 sind, da  $a_k = 0$ , für  $k \notin \{0, 1, \dots, n+1\}$  und  $a_k > 0$ , für  $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ . Die Menge  $A = \{a_0, \dots, a_{n+1}\}$  enthält also alle Koeffizienten  $a_k$ , die ungleich 0 sind.

Außerdem zeigt Gleichung (18), dass der Algorithmus (10)-(12) stationär ist, d.h. die Formel, um  $g_{k+1}^n$  aus  $c_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , zu berechnen, ist die gleiche, wie die Formel zur Berechnung von  $g_k^n$  aus  $c_{i+1}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .

Aufbauend auf unseren Vorüberlegungen können wir jetzt den wichtigen Begriff der Maske eines subdivision scheme definieren und was wir algebraisch unter einem subdivision scheme verstehen.

**Definition 3.2.** Gegeben sei eine Folge von Zahlen,  $a_0, a_1, \dots$ , von denen nur endlich viele ungleich 0 sind. Sei  $n$  der größte Index, sodass  $a_n \neq 0$ . Die Menge  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  nennen wir die **Maske** des **stationären subdivision scheme**  $S_a$ ,

$$(S_a c)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} c_j, \quad (19)$$

mit Kontrollpunkten  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$ , und das Polynom

$$a(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (20)$$

sein **Symbol**.

Dabei ist  $S_a$  der zur Maske  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  zugehörige Operator,  $S_a : l^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$ , definiert durch Formel (19). Wir nennen  $S_a$  auch den subdivision-Operator.

Das stationäre subdivision scheme mit Kontrollpunkten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , und Maske  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  ist dann explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} c^0 &= c, \\ c^r &= S_a c^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Betrachten wir dazu wieder unser Beispiel von zuvor.

**Beispiel 3.2.** Sei  $n = 3$ . Die Gewichtungen  $w_1, w_2, w_3$  seien gegeben durch  $(w_1, w_2, w_3) = (0.2, 0.5, 0.6)$  und die Kontrollpunkte seien  $c = (\dots, 0, 5, 1, 4, 9, 0, \dots)$ . Wir berechnen zuerst das Polynom  $D(z)$ , vgl. (13).

$$\begin{aligned} D(z) &= \prod_{l=1}^3 (w_l + (1 - w_l)z) \\ &= (0.2 + 0.8z)(0.5 + 0.5z)(0.6 + 0.4z) \\ &= \frac{8}{50}z^3 + \frac{22}{50}z^2 + \frac{17}{50}z + \frac{3}{50}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Koeffizienten  $d_0 = \frac{3}{50}$ ,  $d_1 = \frac{17}{50}$ ,  $d_2 = \frac{22}{50}$ ,  $d_3 = \frac{8}{50}$  und  $d_j = 0$ , sonst. Nun können wir die Einträge der Maske dieses subdivision scheme berechnen. Da  $a_j = d_{j-1} + d_j$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 &= d_{-1} + d_0 = 0 + \frac{3}{50} = \frac{3}{50}, \\ a_1 &= d_0 + d_1 = \frac{3}{50} + \frac{17}{50} = \frac{20}{50}, \\ a_2 &= d_1 + d_2 = \frac{17}{50} + \frac{22}{50} = \frac{39}{50}, \\ a_3 &= d_2 + d_3 = \frac{22}{50} + \frac{8}{50} = \frac{30}{50}, \\ a_4 &= d_3 + d_4 = \frac{8}{50} + 0 = \frac{8}{50} \text{ und} \\ a_j &= 0, \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Die Maske ist dann  $A = \left\{ \frac{3}{50}, \frac{20}{50}, \frac{39}{50}, \frac{30}{50}, \frac{8}{50} \right\}$ . Nun können wir die neuen Kontrollpunkte  $c_j^1$  berechnen. Die ursprünglichen Kontrollpunkte  $c$  waren  $c_0 = 5$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = 9$  und  $c_j = 0$ , sonst. Wir benutzen Formel (21),

$$c_i^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} c_j, \quad i \in \mathbb{Z},$$

und erhalten somit

$$c_0^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{-2j} c_j = a_0 \cdot c_0 + a_{-2} \cdot c_1 + a_{-4} \cdot c_2 + \dots = \frac{3}{50} \cdot 5 + 0 + 0 = 0.3,$$

$$c_1^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{1-2j} \cdot c_j = a_1 \cdot c_0 + a_{-1} \cdot c_1 + \dots = \frac{20}{50} \cdot 5 + 0 = 2,$$

$$c_2^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2-2j} \cdot c_j = a_2 \cdot c_0 + a_0 \cdot c_1 + \dots = \frac{39}{50} \cdot 5 + \frac{3}{50} \cdot 1 = 3.96,$$

$$c_3^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{3-2j} \cdot c_j = a_3 \cdot c_0 + a_1 \cdot c_1 + \dots = \frac{30}{50} \cdot 5 + \frac{20}{50} \cdot 1 = 3.4,$$

$$c_4^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{4-2j} \cdot c_j = a_4 \cdot c_0 + a_2 \cdot c_1 + a_0 \cdot c_2 + \dots = \frac{8}{50} \cdot 5 + \frac{39}{50} \cdot 1 + \frac{3}{50} \cdot 4 = 1.82,$$

$$c_5^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{5-2j} \cdot c_j = a_5 \cdot c_0 + a_3 \cdot c_1 + a_1 \cdot c_2 + \dots = 0 + \frac{30}{50} \cdot 1 + \frac{20}{50} \cdot 4 = 2.2,$$

$$c_6^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{6-2j} \cdot c_j = a_4 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_0 \cdot c_3 + \dots = \frac{8}{50} \cdot 1 + \frac{39}{50} \cdot 4 + \frac{3}{50} \cdot 9 = 3.82,$$

$$c_7^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{7-2j} \cdot c_j = a_5 \cdot c_1 + a_3 \cdot c_2 + a_1 \cdot c_3 + \dots = 0 + \frac{30}{50} \cdot 4 + \frac{20}{50} \cdot 9 = 6,$$

$$c_8^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{8-2j} \cdot c_j = a_4 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_3 + a_0 \cdot c_4 + \dots = \frac{8}{50} \cdot 4 + \frac{39}{50} \cdot 9 + 0 = 7.66,$$

$$c_9^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{9-2j} \cdot c_j = a_5 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3 + a_1 \cdot c_4 + \dots = 0 + \frac{30}{50} \cdot 9 + 0 = 5.4,$$

$$c_{10}^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{10-2j} \cdot c_j = a_4 \cdot c_3 + a_2 \cdot c_4 + \dots = \frac{8}{50} \cdot 9 + 0 = 1.44,$$

$$c_j^1 = 0, \text{ sonst.}$$

Wie auch zuvor erhalten wir insgesamt

$$c^1 = (\dots, 0, 0.3, 2, 3.96, 3.4, 1.82, 2.2, 3.82, 6, 7.66, 5.4, 1.44, 0, \dots).$$

Um nun  $c^2$ ,  $c^3$ , ... zu berechnen, setzt man einfach wieder in Formel (21) ein,

$$c_i^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} c_j^{r-1}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Der Vorteil hierbei ist, dass man sich das Berechnen der Zwischenergebnisse  $d_k^n$  über die Gewichtungen  $w_1, w_2, \dots, w_n$  spart, sobald man die Maske des stationären subdivision scheme bestimmt hat.

Wir haben nun die nötige Vorarbeit geleistet, um den Begriff der Konvergenz eines stationären subdivision scheme zu definieren und zu untersuchen, wann ein stationäres subdivision scheme gemäß dieser Definition konvergiert und welche Eigenschaften ein konvergentes stationäres subdivision scheme hat. Diese Fragen werden in den nächsten beiden Kapiteln behandelt.

## 4. Konvergenz eines subdivision scheme

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Konvergenz eines stationären subdivision scheme definieren und untersuchen, welche Eigenschaften konvergente subdivision schemes und deren Grenzfunktion besitzen. Wir beginnen mit der Definition der Konvergenz.

### 4.1. Definition der Konvergenz

Wir betrachten das subdivision scheme  $S_a$ ,

$$(S_a c)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} c_j, \quad (22)$$

mit Kontrollpunkten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , genauer  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$ , und Maske  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ , wobei  $a_j \geq 0$  gelten soll. Wir betrachten also nur subdivision schemes mit nicht-negativer Maske.

**Definition 4.1.** Wir sagen, das subdivision scheme  $S_a$  (22) konvergiert für die Kontrollpunkte  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , wenn es eine auf  $\mathbb{R}$  stetige Funktion  $f_c \neq 0$  gibt, mit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| c^r - f_c \left( \frac{\cdot}{2^r} \right) \right\|_\infty = 0. \quad (23)$$

Die Funktion  $f_c$  heißt dann die Grenzfunktion des subdivision scheme.

Da  $c$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{Z}$  ist, muss auch die Funktion  $f_c$  beschränkt sein, da ansonsten der Grenzwert nicht 0 sein könnte. Wir können also die Definition der Supremumsnorm benutzen und Bedingung (23) umschreiben zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| c_j^r - f_c \left( \frac{j}{2^r} \right) \right| = 0.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu der Aussage, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $r_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $r > r_0$  und alle  $j \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\left| c_j^r - f_c \left( \frac{j}{2^r} \right) \right| < \epsilon. \quad (24)$$

Um die Konvergenz eines subdivision scheme  $S_a$  sicherzustellen, reicht es also zu zeigen, dass es eine stetige Funktion  $f_c$  auf  $\mathbb{R}$  gibt, sodass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $r_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $r > r_0$  und alle  $j \in \mathbb{Z}$  Bedingung (24) gilt.

## 4.2. Eigenschaften konvergenter subdivision schemes und ihrer Grenzfunktion

Nun wollen wir uns ansehen, was man über konvergente subdivision schemes aussagen kann. Daraus bestimmen wir dann hinreichende Bedingungen für die Konvergenz eines subdivision scheme. Wir beginnen mit folgendem Satz.

**Satz 4.1.** Angenommen, das subdivision scheme  $S_a$  (22) konvergiert für ein  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$  und  $f_c \neq 0$ . Dann erfüllt die Maske  $A$  des subdivision scheme die Gleichung

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j+1} = 1. \quad (25)$$

**Beweis.** Wir orientieren uns am Beweis von Cavaretta, Dahmen und Micchelli [1] und zeigen

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha-2j} = 1, \quad \alpha = 0 \text{ oder } 1,$$

was eine äquivalente Formulierung von Bedingung (25) ist. Nach der Annahme gibt es ein  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$ , für das das subdivision scheme zu  $f_c \neq 0$  konvergiert. Wähle  $x_0 \in \mathbb{R}$  so, dass  $f_c(x_0) \neq 0$  und wähle eine Folge  $\alpha_r \in \mathbb{Z}$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , so, dass  $\frac{\alpha_r}{2^r}$  gegen  $x_0$  konvergiert. Dann folgt aus der Stetigkeit der Funktion  $f_c$  und der Definition der Konvergenz eines subdivision scheme (23) die Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |f_c(x_0) - c_{\alpha_r}^r| = 0. \quad (26)$$

Aus der Definition eines subdivision scheme, vgl. (19) und (21), erhält man nun

$$c_{\alpha_r}^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_r-2j} c_j^{r-1}$$

und somit

$$c_{\alpha_r}^r = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_r-2j} (c_j^{r-1} - f_c(x_0)) + f_c(x_0) \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_r-2j}.$$

Subtrahiert man auf beiden Seiten  $f_c(x_0)$  und stellt die Gleichung um, so erhält man

$$|f_c(x_0)| \left| 1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_r-2j} \right| \leq |f_c(x_0) - c_{\alpha_r}^r| + D \sup_{\beta \in \frac{1}{2}]\alpha_r - \text{supp}(A)[} |c_\beta^{r-1} - f_c(x_0)|, \quad (27)$$

wobei  $\text{supp}(A) := \{j \in \mathbb{Z} \mid a_j \neq 0\}$  der Träger der Maske  $A$  und  $D := \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j|$  ist.

Der erste Term auf der rechten Seite von Ungleichung (27) geht nach Gleichung (26) gegen 0. Da  $\beta \in \frac{1}{2}]\alpha_r - \text{supp}(A)[$  und  $\text{supp}(A)$  eine endliche Menge ist, erfüllen die

unterschiedlichen  $\beta := \beta_{r-1}$ , die im zweiten Term das Supremum erreichen, die Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\beta_{r-1}}{2^{r-1}} = x_0.$$

Also läuft dieser Term auch gegen 0. Somit gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| 1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_r - 2j} \right| = 0, \quad (28)$$

da  $f_c(x_0) \neq 0$ . Offensichtlich können wir  $\alpha_r$  immer so wählen, dass  $\alpha_r = \alpha \pmod{2}$ , wobei  $\alpha = 0$  oder  $1$ . Somit ist die Summe in Gleichung (28) unabhängig von  $r$ , d.h. egal welches  $r$  man betrachtet, es wird immer über  $a_{1-2j}$  oder immer über  $a_{-2j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , also immer über die ungeraden oder immer über die geraden Indizes summiert. Gleichung (28) vereinfacht sich also zu unserer Behauptung

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{\alpha - 2j} = 1, \quad \alpha = 0 \text{ oder } 1.$$

□

Dieser Satz gibt uns mit Gleichung (25) ein einfaches Kriterium, um schnell zu entscheiden, ob ein subdivision scheme überhaupt konvergieren kann.

Sehen wir uns dazu unser Standardbeispiel an.

**Beispiel 4.1.** Die Maske unseres Standardbeispiels haben wir im letzten Kapitel bestimmt,  $A = \left\{ \frac{3}{50}, \frac{20}{50}, \frac{39}{50}, \frac{30}{50}, \frac{8}{50} \right\}$ . Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j} &= \frac{3}{50} + \frac{39}{50} + \frac{8}{50} = 1, \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j+1} &= \frac{20}{50} + \frac{30}{50} = 1. \end{aligned}$$

Somit könnte dieses subdivision scheme konvergieren. Um dies endgültig zu entscheiden, fehlen uns jedoch noch hinreichende Bedingungen für die Konvergenz.

Wir wollen uns zuerst aber noch Eigenschaften der Grenzfunktion eines konvergenten subdivision scheme ansehen. Dazu betrachten wir den nächsten Satz.

**Satz 4.2.** Angenommen, das subdivision scheme  $S_a$  (22) mit Maske  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  konvergiert für ein  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$  und  $f_c \neq 0$ . Dann hat die Grenzfunktion  $f_c$  die Form

$$f_c(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \Phi(x - j), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

wobei  $\Phi$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$  ist, die folgende Bedingungen erfüllt.

$$\Phi(x) = 0, \quad \text{für } x \leq 0 \text{ oder } x \geq n, \quad (30)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Phi(x - j) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

**Beweis.** Sei  $\delta = (\delta_j \mid j \in \mathbb{Z})$ , wobei  $\delta_j = 0$ , für  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , und  $\delta_0 = 1$ . Dann gibt es eine Funktion  $\Phi$ , sodass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $r_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $r > r_0$  und alle  $i \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\left| (S_a^r \delta)_i - \Phi\left(\frac{i}{2^r}\right) \right| < \epsilon. \quad (32)$$

Als nächstes benötigen wir die Formel

$$(S_a^r c)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2^r j}^r c_j, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (33)$$

wobei die Einträge des Vektors  $a^r = (a_j^r \mid j \in \mathbb{Z})$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , definiert werden durch die erzeugende Funktion

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^r z^j = \prod_{j=0}^{r-1} a(z^{2^j}), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (34)$$

und  $a(z)$  das Symbol des subdivision scheme ist, vgl. (20). Die Gültigkeit von Formel (33) folgt durch Induktion über  $r$ .

Aus den Formeln (33) und (34) folgt dann, dass  $(S_a^r \delta)_j = a_j^r = 0$ , für  $j < 0$  und  $j > 2^{r-1}n$ . Somit erhalten wir aus Gleichung (32), dass  $\Phi(x) = 0$ , für  $x \leq 0$  oder  $x \geq n$  und

$$f_c(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \Phi(x - j). \quad \square$$

Wir haben jetzt einige notwendige Bedingungen für die Konvergenz des stationären subdivision scheme  $S_a$  gefunden. Einerseits muss die Maske  $A$  Gleichung (25) erfüllen, andererseits muss es eine stetige Funktion  $\Phi$  geben, die die Bedingungen (29), (30) und (31) erfüllt.

Im nächsten Kapitel erarbeiten wir hinreichende Bedingungen für die Konvergenz von  $S_a$ . Dabei werden wir die Funktion  $\Phi$  noch näher betrachten.



## 5. Wann konvergieren subdivision schemes?

Wir beginnen dieses Kapitel gleich mit einem Satz, der hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des subdivision scheme  $S_a$  (22) liefert. Außerdem zeigt dieser Satz weitere Eigenschaften der für die Konvergenz nötigen Funktion  $\Phi$  auf. Auch hier sei nochmal erwähnt, dass wir implizit immer annehmen, dass die Maskeneinträge nicht-negativ sind.

**Satz 5.1.** Angenommen  $\{a_0, \dots, a_n\}$  ist eine Maske, sodass für gewisse natürliche Zahlen  $m, l \leq n$  mit  $m - l \geq 2$  gilt

$$a_j > 0, \text{ falls } l \leq j \leq m \text{ und } a_j = 0, \text{ sonst,} \quad (35)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j+1} = 1. \quad (36)$$

Dann gibt es eine eindeutige stetige Funktion  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}$  mit kompaktem Träger, sodass gilt

$$\Phi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \Phi(2x - j), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (37)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Phi(x - j) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

Außerdem konvergiert dann das stationäre subdivision scheme

$$(S_a c)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} c_j, \quad i \in \mathbb{Z},$$

gegen

$$f_c(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \Phi(x - j), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir ihn uns näher ansehen. Die einzigen Voraussetzungen dieses Satzes richten sich an die Maske eines subdivision scheme. Gleichung (36) ist uns wohlbekannt. Es wird gefordert, dass die Summe über die Maskeneinträge mit ungeradem Index und die Summe über die Maskeneinträge mit geradem Index 1 ergibt. Dies haben wir beispielsweise schon ganz am Anfang bei B-splines gesehen, vgl. Gleichung (3) auf Seite 8. Bedingung (35) fordert, dass mindestens drei Maskeneinträge ungleich 0 sind und alle Maskeneinträge ungleich 0 aufeinanderfolgende Indizes haben. Wir hatten bereits in einem Beweis im vorherigen Kapitel den Träger einer Maske benutzt. Diesen Begriff wollen wir jetzt nochmal formal definieren.

**Definition 5.1.** Gegeben sei eine Maske  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$ . Wir nennen die Menge  $I := \text{supp}(A) := \{j \in \mathbb{Z} \mid a_j > 0\} \subseteq \{0, \dots, n\}$  den **Träger** der Maske  $A$ .

Erfüllt eine Maske  $A$  die Bedingung (36), so hängt die Konvergenz des zugehörigen subdivision scheme  $S_a$  nur noch vom Träger der Maske und nicht von den Werten der Maskeneinträge  $a_j$  oder den Kontrollpunkten  $c_j$  ab. Konvergiert also ein subdivision scheme für gewisse Kontrollpunkte  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , so konvergiert es für alle Kontrollpunkte  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$ . Die Grenzfunktion selbst hängt jedoch schon von den Kontrollpunkten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , ab, wie Gleichung (39) zeigt. Da uns im Folgenden nur noch der Träger der Maske des subdivision scheme interessiert und die Konvergenz nicht von den Kontrollpunkten  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , abhängt, schreiben wir für die Grenzfunktion ab sofort  $f$  anstatt  $f_c$ .

Nun betrachten wir noch die Funktion  $\Phi$  genauer. Wir nennen die Funktionalgleichung (37) die zur Maske  $A$  zugehörige **Verfeinerungsgleichung**, da sie uns erlaubt, „feinere“ Werte von  $\Phi$  zu berechnen. Nehmen wir dazu an, wir kennen alle Werte  $\Phi(m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann können wir mit Gleichung (37) induktiv alle Werte von  $\Phi\left(\frac{m}{2^r}\right)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , berechnen. Zum Beispiel berechnet man  $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$  durch

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \Phi\left(2 \cdot \frac{1}{2} - j\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \Phi(1 - j),$$

wozu man nur die Funktionswerte von  $\Phi(m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , benötigt. Deshalb der Name Verfeinerungsgleichung. Die Funktion  $\Phi$  selbst nennen wir die **verfeinerbare Funktion**.

Kommen wir nun zum Beweis von Satz 5.1.

**Beweis.** Sei  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  eine Maske, die für gewisse natürliche Zahlen  $m, l \leq n$  mit  $m - l \geq 2$  die Bedingungen (35) und (36) erfüllt. Wir führen zunächst den linearen Operator

$$(F_a f)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j f(2x - j)$$

ein. Wegen den Bedingungen (35) und (36) ist  $F_a$  ein beschränkter linearer Operator mit Norm 2. Sei  $\Psi$  eine beliebige Funktion mit kompaktem Träger. Dann hat auch  $F_a \Psi$  kompakten Träger und falls  $\Psi(x) = 0$ , für  $x \notin ]l, m[$ , dann ist auch  $(F_a \Psi)(x) = 0$ , außerhalb von  $]l, m[$ . Somit gilt für jedes  $c_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , die Formel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (F_a \Psi)_j(x - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_a c)_j \Psi(2x - j),$$

bzw. für jedes  $r \in \mathbb{Z}_+$  die Formel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j (F_a^r \Psi)_j(x - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_a^r c)_j \Psi(2^r x - j).$$

Sei nun  $\Psi_0$  ein beliebiger B-spline mit Träger  $]l, m[$ , z.B.

$$\Psi_0(x) = M_{m-l-1}(x - l).$$

Wir werden zeigen, dass die Folge stetiger Funktionen

$$h_r := F_a^r \Psi_0, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (40)$$

gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$  konvergiert.

Ein wichtiger Teil für den Beweis dieser Behauptung ist die Halbnorm

$$\kappa(c) := \max\{|c_j - c_k| \mid |j - k| < m - l\}$$

von Cavaretta, Dahmen und Micchelli [1]. Wir wählen eine beliebige andere Maske  $b_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , mit

$$b_j \geq 0, \quad \{j \in \mathbb{Z} \mid b_j > 0\} \subseteq ]l, m[ \quad (41)$$

und

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} b_{i-2j} = 1, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (42)$$

Dann erhalten wir für jede Konstante  $p$  und jede Folge  $c = \{c_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$  die Gleichung

$$(S_a c - S_b c)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a_{i-2j} - b_{i-2j})(c_j - p).$$

Durch eine geschickte Wahl von  $p$  erhalten wir die Ungleichung

$$\|S_a c - S_b c\|_\infty \leq \kappa(c), \quad (43)$$

und ein ähnliches Argument liefert

$$\kappa(S_a c) \leq \tau(a) \kappa(c), \quad (44)$$

wobei

$$\tau = \tau(a) := \frac{1}{2} \sum_{|i-k| < m-l} |a_{i-2j} - a_{k-2j}|.$$

Als nächstes zeigen wir, dass

$$\tau < 1. \quad (45)$$

Dafür müssen wir beweisen, dass für alle Zahlen  $i, k$ , mit  $|i - k| < m - l$ , eine Zahl  $j$  existiert, mit

$$l \leq i - 2j \leq m \text{ und } l \leq k - 2j \leq m. \quad (46)$$

Dies würde die strikte Ungleichung

$$|a_{i-2j} - a_{k-2j}| < a_{i-2j} + a_{k-2j}$$

zeigen und somit Behauptung (45). O.B.d.A. sei dazu  $i < k$ , also

$$0 \leq k - i < m - l.$$

Dann enthält das Intervall  $[k - m, i - m]$  eine gerade Zahl, die wir mit  $2j$  bezeichnen. Die Zahl  $j$  erfüllt die Ungleichungen (46) und somit ist Behauptung (45) bewiesen. Wir können nun die Konvergenz der Folge  $h_r$  (40) zeigen. Seien dazu  $b = \{b_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$  die Koeffizienten in der Verfeinerungsgleichung von  $\Psi_0$ ,

$$\Psi_0(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j \Psi_0(2x - j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Koeffizienten  $b_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , erfüllen dann die Bedingungen (41) und (42) und somit gelten die Ungleichungen (43) und (44). Außerdem, da

$$h_r(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_a^r \delta)_j \Psi_0(2^r x - j),$$

erhalten wir

$$h_{r+1}(x) - h_r(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} ((S_a^{r+1} \delta)_j - S_b(S_a^{r+1} \delta)_j) \Psi_0(2^r x - j),$$

woraus für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $r \in \mathbb{Z}_+$  folgt, dass

$$\begin{aligned} |h_{r+1}(x) - h_r(x)| &\leq \|(S_a - S_b)(S_a^r \delta)\|_\infty \\ &\leq \kappa(S_a^r \delta) \leq \tau^r \kappa(\delta). \end{aligned}$$

Daraus schließen wir, dass  $h_r$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , eine Cauchy-Folge in  $C(\mathbb{R})$  ist. Somit gibt es eine stetige Funktion  $\Phi$ , sodass  $h_r$  auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $\Phi$  konvergiert,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r(x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist  $\Phi(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , und  $\Phi(x) = 0$ , für  $x \notin ]l, m[$ . Außerdem erfüllt  $\Phi$  die Verfeinerungsgleichung

$$\Phi(x) = (F_a\Phi)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \Phi(2x - j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Auch ist Bedingung (38) erfüllt, da für alle  $r \in \mathbb{Z}_+$  und für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{r+1}(x - j) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} F_a(h_r)(x - j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_a e)_j h_r(2x - j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_r(2x - j) \end{aligned}$$

gilt und daraus induktiv folgt, dass

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{r+1}(x - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_0(2^r x - j) = 1.$$

Es bleibt noch die Eindeutigkeit der Funktion  $\Phi$  und die Konvergenz des stationären subdivision scheme zu zeigen. Sei dazu  $\Psi$  eine beliebige andere Funktion mit kompaktem Träger, die die Bedingungen (37) und (38) erfüllt. Dann folgt für  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\Psi(x) - \Phi(x)| &\leq \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( (S_a^r \delta)_j - \Phi\left(\frac{j}{2^r}\right) \right) \Psi(2^r x - j) \right| \\ &\quad + \left| \Phi(x) - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{j}{2^r}\right) \Psi(2^r x - j) \right|. \end{aligned} \quad (47)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist beschränkt durch eine Konstante mal  $\omega_\Phi(2^{-r})$ , dem Stetigkeitsmodul von  $\Phi$ . Dies ist definiert als eine Abbildung  $\omega : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ . Eine Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt  $\omega$  als Stetigkeitsmodul an, wenn für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

Da  $\Phi$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist, ist  $\Phi$  gleichmäßig stetig. Somit gibt es eine Funktion  $\omega$ , sodass  $\Phi$   $\omega$  als Stetigkeitsmodul annimmt.

Um sicherzustellen, dass auch der erste Term auf der rechten Seite von Ungleichung (47) beschränkt ist, reicht es zu zeigen, dass das stationäre subdivision scheme konvergiert.

Dazu verfahren wir wie zuvor und stellen fest, dass

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \Phi(x - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (S_a^r c)_j \Phi(2^r x - j).$$

Daraus erhalten wir

$$f\left(\frac{j}{2^r}\right) = \sum_{k=l}^m (S_a^r c)_{j-k} \Phi(k)$$

und somit für jedes  $j \in \mathbb{Z}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{j}{2^r}\right) - (S_a^r c)_{j-l} \right| &\leq \kappa(S_a^r c) \\ &\leq \tau^r \kappa(c). \end{aligned}$$

Da  $\Phi$  kompakten Träger hat und  $c \in l^\infty(\mathbb{Z})$ , ist die Funktion  $f$  gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$ . Somit folgt Gleichung (24) auf Seite 26 und damit die Konvergenz des stationären subdivision scheme.  $\square$

Im Rest dieser Arbeit wollen wir uns ansehen, wie viele subdivision schemes wir mit diesem Satz abdecken können. Außerdem untersuchen wir noch andere Träger auf Konvergenz eines zugehörigen subdivision scheme.

## 5.1. Lane-Riesenfeld subdivision

Wir untersuchen zuerst den Algorithmus von Lane und Riesenfeld auf Konvergenz. Dazu betrachten wir wieder den Vorgang (10)-(12) auf Seite 17. Wir haben in den Rechnungen (13)-(18) gesehen, dass die Maskeneinträge dieses subdivision scheme gegeben sind durch die Formel  $a_j = d_j + d_{j-1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , wobei man die  $d_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , aus der Darstellung (13) erhält. Wenn wir zeigen können, dass

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j+1} = 1,$$

und

$$\begin{aligned} a_j &> 0, \quad j \in [0, \dots, n+1], \\ a_j &= 0, \quad j \notin [0, \dots, n+1], \end{aligned}$$

d.h., dass der Träger  $I$  der Maske des subdivision scheme gegeben ist durch  $I = \{0, \dots, n+1\}$ , dann liefert uns der zuvor bewiesene Satz 5.1 die Konvergenz des Algorithmus von Lane und Riesenfeld.

Wir sehen uns dazu zuerst die  $d_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , an. Diese sind gegeben durch Gleichung (13) auf Seite 21,

$$D(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j z^j = \prod_{l=1}^n (w_l + (1 - w_l)z).$$

Dabei sind  $w_1, \dots, w_n \in ]0, 1[$  die im Algorithmus von Lane und Riesenfeld gewählten Gewichtungen. Da diese echt größer als 0 und echt kleiner als 1 sind, folgt

$$d_j > 0, \quad j \in [0, \dots, n], \quad (48)$$

$$d_j = 0, \quad j \notin [0, \dots, n], \quad (49)$$

und

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j = 1. \quad (50)$$

Da man die Maskeneinträge  $a_j$  aus der Formel  $a_j = d_j + d_{j-1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , erhält, folgt aus den Aussagen (48) und (49), dass

$$a_j > 0, \quad j \in [0, \dots, n+1],$$

$$a_j = 0, \quad j \notin [0, \dots, n+1],$$

und mit Gleichung (50) folgt

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j+1} = 1.$$

Somit liefert der Satz die Konvergenz des Algorithmus von Lane und Riesenfeld.

## 5.2. $\{0, n\} \subsetneq I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$

Wir haben zuvor bereits gesehen, dass die Konvergenz eines nicht-negativen stationären subdivision scheme, dessen Maske die Bedingung (36) erfüllt, nur noch vom Träger  $I$  der Maske abhängt. Sei also im Folgenden  $A = \{a_0, \dots, a_n\}$  die Maske eines subdivision scheme, die (36) erfüllt. Wir untersuchen weiterhin, für welche Träger  $I$  der Maske  $A$  das subdivision scheme konvergiert. Dabei haben wir schon in Kapitel 5.1 gezeigt, dass Konvergenz vorliegt, wenn  $I = \{0, \dots, n\}$ . Gonsor [6] hat diese Bedingung vereinfacht zu  $\{0, 1, n-1, n\} \subseteq I$ . Wir wollen diese Voraussetzung nun noch weiter auflockern und stellen folgende Vermutung auf.

**Vermutung 5.1.** Ein nicht-negatives stationäres subdivision scheme, dessen Maske  $A$  den Träger  $I$ ,  $\{0, n\} \subsetneq I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , besitzt, konvergiert genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- i)* Entweder  $n$  ist gerade und  $I$  enthält mindestens eine ungerade Zahl oder  $I$  enthält mindestens zwei gerade und zwei ungerade Zahlen (inklusive 0).
- ii)* Der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von  $I$  ist 1.

**Bemerkung 5.1.** Da wir vorausgesetzt haben, dass die Maske  $A$  Gleichung (36) erfüllt, kann Bedingung *i)* von Vermutung 5.1 umformuliert werden zur Voraussetzung, dass  $a_0, a_n < 1$ .

**Beweis.** Wir müssen die Äquivalenz

$$\text{Bedingung } i) \text{ gilt} \Leftrightarrow a_0, a_n < 1$$

zeigen. Zuerst zeigen wir die Richtung von links nach rechts.

„ $\Rightarrow$ “:

1. Fall:  $n$  ist gerade und  $I$  enthält mindestens eine ungerade Zahl.

$I$  enthält mindestens 2 gerade Zahlen, 0 und  $n$ . Somit gilt  $a_0 > 0$  und  $a_n > 0$ . Aus Gleichung (36) folgt  $a_0 + a_n \leq 1$ . Insgesamt muss also  $a_0 < 1$  und  $a_n < 1$  gelten.

2. Fall:  $n$  ist ungerade und  $I$  enthält mindestens zwei gerade und ungerade Zahlen.

Bezeichnen wir die zweite gerade Zahl neben 0 mit  $2k$  und die zweite ungerade Zahl neben  $n$  mit  $2j+1$ . Es gilt  $a_0, a_{2k} > 0$  und  $a_{2j+1}, a_n > 0$ . Aus Gleichung (36) folgt  $a_0 + a_{2k} \leq 1$  und  $a_{2j+1} + a_n \leq 1$ . Also muss insbesondere  $a_0 < 1$  und  $a_n < 1$  gelten.



Es bleibt noch die Richtung von rechts nach links zu zeigen.

„ $\Leftarrow$ “:

Sei  $a_0 < 1$  und  $a_n < 1$ .

1. Fall:  $n$  ist gerade.

Wir müssen zeigen, dass  $I$  mindestens eine ungerade Zahl enthält. Dies folgt aus Gleichung (36), da die Summe über die Maskeneinträge mit ungeradem Index 1 ergeben muss.

2. Fall:  $n$  ist ungerade.

Wir müssen zeigen, dass  $I$  neben 0 mindestens eine weitere gerade Zahl und neben  $n$  mindestens eine weitere ungerade Zahl enthält. Dies folgt wieder aus Gleichung (36) und der Voraussetzung, dass  $a_0 < 1$  und  $a_n < 1$ .  $\square$

In Behauptung 5.2 werden wir sehen, dass die Bedingungen  $i_j$  und  $ii_j$  von Vermutung 5.1 notwendig sind für die Konvergenz des subdivision scheme und in Behauptung 5.4 betrachten wir Spezialfälle, bei denen  $i_j$  und  $ii_j$  erfüllt sind, und die konvergieren.

Behauptung 5.3 wird - aufbauend auf Gonsors Bedingung - zeigen, dass Konvergenz vorliegt, wenn  $\{0, p, q, p + q\} \subseteq I$ , mit  $p, q$  relativ prim.

Wir stützen uns im Weiteren auf die folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines subdivision scheme. Dazu benutzen wir die Standardnotation für die Minkowski-Summe zweier Teilmengen  $A, B$  eines Vektorraums,  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . Außerdem sei das Vielfache einer Menge  $B$  definiert durch  $kB := \{kb \mid b \in B\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Behauptung 5.1.** Gegeben sei ein nicht-negatives stationäres subdivision scheme mit Maske  $A$  und Träger  $I$ . Wir definieren

$$I_N := I + 2I + 4I + \dots + 2^{N-1}I, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Das subdivision scheme konvergiert genau dann, wenn ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass es für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt, mit

$$i + l - 2^N j \in I_N, \quad l = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Aufbauend auf diesem Satz machen wir die folgende Definition.

**Definition 5.2.** Eine Menge ganzer Zahlen  $I \subseteq \{m, m + 1, \dots, m + n\}$  hat die **Eigenschaft P**, wenn ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass es für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt,

mit

$$i + l - 2^N j \in I_N, \quad l = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (52)$$

Mithilfe dieser Definition können wir Vermutung 5.1 umformulieren. Es gilt, dass die Eigenschaften  $i_j$  und  $ii_j$  von Vermutung 5.1 genau dann erfüllt sind, wenn der Träger  $I$  die Eigenschaft P hat. Diese Form von Vermutung 5.1 werden wir im Folgenden untersuchen.

Wir haben zuvor gesehen, dass die zu einem konvergenten subdivision scheme zugehörige verfeinerbare Funktion  $\Phi$  kompakten Träger hat und die Gleichungen (37) und (38) erfüllt. Micchelli und Pinkus [10] haben die Vermutung von Micchelli und Prautzsch [11] gezeigt, dass wenn ein stationäres subdivision scheme eine Maske mit Träger  $I = \{0, 1, \dots, n\}$  besitzt, dann die zugehörige verfeinerbare Funktion  $\Phi$  positiv auf ihrem Träger,  $]0, n[$ , ist. Wir stellen jetzt folgende Vermutung auf.

**Vermutung 5.2.** Wenn ein nicht-negatives stationäres subdivision scheme konvergiert, dann ist die zugehörige verfeinerbare Funktion  $\Phi$  positiv auf ihrem Träger,  $]0, n[$ , außer das subdivision scheme interpoliert und  $n > 2$ .

Unter Interpolieren verstehen wir, dass der Träger genau eine gerade (oder ungerade) Zahl enthält. Sei  $l$  diese einzelne Zahl, so folgt mit Gleichung (36), dass  $a_l = 1$  und somit  $c_{2k+l}^r = c_{k+l}^{r-1}$ . Somit werden sich alle 0-Einträge in den anfänglichen Kontrollpunkten  $c = c^0$  bei jedem Schritt wiederholen, wenn auch mit anderem Index. Falls also  $n > 2$  ist und das subdivision scheme interpoliert, so muss die verfeinerbare Funktion 0-Einträge in ihrem Träger haben. Die Zusatzbedingung in Vermutung 5.2 ist also notwendig.

Für Vermutung 5.2 spricht, dass sich, falls  $I_N \supseteq \{a, \dots, n(2^N - 1) - b\}$  für gewisse  $a, b$  und für alle  $N \geq N_0$ , die Beweismethode von Micchelli und Pinkus [10] leicht erweitern lässt, um zu zeigen, dass die verfeinerbare Funktion  $\Phi$  tatsächlich positiv auf  $]0, n[$  ist. In Behauptung 5.3 werden wir sehen, dass dies der Fall ist, wenn  $n = p + q$  und  $I \supseteq \{0, p, q, p + q\}$ , mit  $p, q$  relativ prim. Melkman [8], auf den wir uns in diesem Kapitel beziehen, glaubt, dass auch Vermutung 5.2 gilt, konnte dies aber nicht beweisen.

Wir wollen uns nun am Beweis von Vermutung 5.1 versuchen. Dazu beweisen wir zuerst Behauptung 5.1.

**Behauptung 5.1.** Ein nicht-negatives subdivision scheme, dessen Maske den Träger  $I$  besitzt, konvergiert genau dann, wenn ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass es für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt, mit

$$i + l - 2^N j \in I_N, \quad l = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Der Beweis benutzt eine andere Darstellung des subdivision scheme, die äquivalent ist zu Gleichung (22) auf Seite 26. Wir berechnen die Kontrollpunkte  $c^r$  nun durch Multiplikation der ursprünglichen Kontrollpunkte  $c^0$  mit der  $r$ -ten Potenz der dem subdivision scheme zugehörigen Matrix

$$A = \{a_{i-2j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}. \quad (53)$$

Es gilt also  $c^r = A^r c^0$ .  $A$  ist eine zeilenstochastische Matrix, d.h. ihre Einträge sind nicht-negativ und die Summen der Zeileneinträge sind 1. Dies gilt wegen Gleichung (36). Außerdem können wir die Einträge von  $A$  bestimmen, die echt größer als 0 sind. Wir werden im Folgenden viele Eigenschaften dieser Matrix  $A$  ausnutzen, um Behauptung 5.1 zu beweisen. Dazu brauchen wir aber zuerst noch einen Hilfssatz.

**Satz 5.2.** Gegeben sei ein nicht-negatives subdivision scheme, dessen Maske den Träger  $I$  besitzt.  $A$  sei die zum subdivision scheme zugehörige Matrix. Dann gilt

$$(A^r)_{i,j} > 0 \Leftrightarrow i - 2^r j \in I_r.$$

**Beweis.** Wir beweisen diesen Satz per Induktion nach  $r$ . Nach der Definition der Matrix  $A$  (53) gilt der Fall  $r = 1$ ,

$$A_{i,j} > 0 \Leftrightarrow i - 2j \in I.$$

Induktionsschritt  $r \rightarrow r + 1$ :

Für jeden Eintrag von  $A^{r+1}$  gilt

$$(A^{r+1})_{i,j} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{i-2k} (A^r)_{k,j}.$$

Nach der Induktionsannahme ist ein Eintrag von  $A^r$  genau dann ungleich 0 bzw. echt größer 0, wenn es ein  $k$  gibt, mit  $i - 2k \in I$  und  $k - 2^r j \in I_r$ . Ist dies der Fall, dann gilt auch  $i - 2^{r+1} j \in I + 2I_r = I_{r+1}$ . Umgekehrt gilt, falls  $i - 2^{r+1} j \in I + 2I_r$ , also  $i - 2^{r+1} j = i_1 + 2i_2$  für gewisse  $i_1 \in I$  und  $i_2 \in I_r$ , dass  $k := 2^r j + i_2$  die Bedingungen  $i - 2k = i_1 \in I$  und  $k - 2^r j \in I_r$  erfüllt.  $\square$

Mithilfe von Satz 5.2 reduziert sich der Beweis von Behauptung 5.1 auf den Beweis der folgenden „positive Spalte“-Bedingung für eine Potenz von  $A$ .

**Satz 5.3.** Gegeben sei ein nicht-negatives subdivision scheme, dessen Maske den Träger  $I$ ,  $\{0, n\} \subsetneq I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , besitzt.  $A$  sei die zum subdivision scheme zugehörige Matrix. Das subdivision scheme konvergiert genau dann, wenn ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert,

sodass es für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt, mit

$$(A^N)_{i+l,j} > 0, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Beweis.** Dass diese Bedingung ausreicht, um die Konvergenz des subdivision scheme zu folgern, wurde allgemeiner auch von Cavaretta und Melkman [2] gezeigt. Wir benutzen für den Beweis die Äquivalenz des obigen subdivision scheme und des Matrix-Verfeinerungs-scheme von Micchelli und Prautzsch [12]. Diese Äquivalenz wurde von Micchelli und Prautzsch [11] gezeigt, vgl. auch Dyn, Gregory und Levin [5] und Cavaretta, Dahmen und Micchelli [1].

Für den Beweis bezeichnen wir mit  $W_i$  die  $n \times n$  Submatrix, die bei Zeile  $i$  und Spalte  $c_i = i \operatorname{div} 2$  endet.  $i \operatorname{div} 2$  und  $i \operatorname{mod} 2$  sind definiert durch

$$i = 2(i \operatorname{div} 2) + i \operatorname{mod} 2,$$

mit  $0 \leq i \operatorname{mod} 2 \leq 1$ .  $i \operatorname{div} 2$  ist also das Ergebnis der Ganzzahldivision von  $i$  durch 2 und  $i \operatorname{mod} 2$  ist der Rest bei der Ganzzahldivision von  $i$  durch 2. Wir stellen folgende Eigenschaften der Matrix  $W_i$  fest.

1. Alle Einträge ungleich 0 von  $A$  in den Zeilen  $i - n + 1$  bis  $i$  sind enthalten in der Submatrix  $W_i$ .
2.  $W_i = W_{i \operatorname{mod} 2}$ .
3. Alle Einträge ungleich 0 von  $A^r$  in den Zeilen  $k - n + 1$  bis  $k$  sind enthalten in der Submatrix  $W_k^r$  mit den Zeilen  $k_1 - n + 1$  bis  $k_1$ , wobei  $k_1$  definiert ist durch

$$k_{i-1} = k_i \operatorname{div} 2, \quad i = 2, 3, \dots, r, \quad k_r = k.$$

Um sich die Submatrizen  $W_i$  besser vorstellen zu können, betrachten wir ein kurzes Beispiel.

**Beispiel 5.1.** Sei dazu die Maske  $A = \{0.1, 0.5, 0.3, 0.2, 0.4, 0.3, 0.2\}$ . Der Träger ist  $I = \{0, 1, \dots, 6\}$ . Wir betrachten auszugswise die zugehörige Matrix  $A = \{a_{i-2j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ ,



existiert. Beachte dabei die Multiplikationsreihenfolge auf der rechten Seite.

Um den Beweis zu vervollständigen, muss noch gezeigt werden, dass die Bedingung (55) äquivalent ist zur Voraussetzung des Satzes, dass  $W_k^N$  für alle  $k$  eine positive Spalte hat. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Menge der Matrizen  $\{W_k^N\}_{k \in \mathbb{Z}}$  identisch ist mit der Menge der Matrizen, die durch Produkte der Form (55) gegeben sind. Für ein gegebenes  $k$  definiere dazu  $\epsilon_m = k_m \bmod 2$ , dann gilt wegen Eigenschaft 2 und Gleichung (54)

$$W_k^N = W_{\epsilon_N} \cdot \dots \cdot W_{\epsilon_1}. \quad (56)$$

Seien umgekehrt  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  gegeben. Betrachte  $W_k^N$  mit  $k$  definiert durch  $k = \sum_{i=0}^{N-1} \epsilon_{N-i} \cdot 2^i$ .

Dann gilt  $k_m = \sum_{i=0}^{m-1} \epsilon_{m-i} \cdot 2^i$  und  $k_m \bmod 2 = \epsilon_m$ ,  $1 \leq m \leq N$  und somit ist auch Gleichung (56) wieder erfüllt und Satz 5.3 ist bewiesen.  $\square$

Dies vervollständigt den Beweis von Behauptung 5.1.

Behauptung 5.1 hat uns gezeigt, dass ein subdivision scheme genau dann konvergiert, wenn der Träger die Eigenschaft P hat. Dies verwenden wir nun, um Vermutung 5.1 umzuformulieren.

**Vermutung 5.1'.** Eine Menge  $I$  ganzer Zahlen,  $\{0, n\} \subsetneq I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , hat Eigenschaft P, genau dann wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten.

- i) Entweder  $n$  ist gerade und  $I$  enthält mindestens eine ungerade Zahl oder  $I$  enthält mindestens zwei gerade und zwei ungerade Zahlen (inklusive 0).
- ii) Der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von  $I$  ist 1.

Wir zeigen zunächst, dass diese Bedingungen tatsächlich notwendig sind und danach, dass sie in einigen bestimmten Fällen auch hinreichend sind. Wir benutzen dazu die folgenden, leicht nachzuprüfenden Aussagen.

**Satz 5.4.** Für eine Menge  $I \subseteq \{m, m+1, \dots, m+n\}$  gelten folgende Aussagen.

1.  $I_N = \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} c_i 2^i \mid c_i \in I \right\}$ .
2. Hat  $I$  Eigenschaft P, dann auch  $-I$  und  $\{l\} + I$ , für ein beliebiges  $l \in \mathbb{Z}$ .
3.  $I$  hat nicht Eigenschaft P, wenn die Menge  $I_N$  für kein  $N \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl der Form  $2^N k$ ,  $k > 0$ , enthält.

4.  $I$  hat Eigenschaft P, wenn es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $I_N$  eine Folge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen der Länge  $2^N + m - 1$  enthält.

Nun können wir zeigen, dass die Voraussetzungen von Vermutung 5.1' tatsächlich notwendig sind.

**Behauptung 5.2.** Die Voraussetzungen von Vermutung 5.1' sind notwendig.

**Beweis.** Wir beginnen mit der Notwendigkeit von Voraussetzung  $ii)$ . Wir nehmen an, dass  $ggT(I) > 1$ . Dann folgt mit Satz 5.4, Aussage 1, dass  $I_N$  für alle  $N \in \mathbb{N}$  keine aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen enthält. Also hat  $I_N$  nicht die Eigenschaft P. Um die Notwendigkeit von  $i)$  zu zeigen, müssen wir nur ungerade  $n$  betrachten. Nehmen wir zuerst an, dass  $I$  nur ungerade positive Zahlen enthält. Wir zeigen per Induktion über  $N$ , dass dann  $I_N$  keine ganze Zahl der Form  $k \cdot 2^N$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , enthält und dass  $I_N$  damit nach Satz 5.4, Aussage 3, nicht die Eigenschaft P hat.

Dies ist offensichtlich der Fall für  $N = 1$ . Wir zeigen den Induktionsschritt per Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dies stimmt für  $N$ , aber nicht für  $N + 1$ . Nach Satz 5.4, Aussage 1, gilt dann für ein gewissen  $k > 0$

$$\sum_{i=0}^N c_i 2^i = k \cdot 2^{N+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i 2^i = \sum_{i=0}^N c_i 2^i - c_N 2^N = k \cdot 2^{N+1} - c_N 2^N = 2^N (2k - c_N).$$

Da  $k > 0$  und  $c_N$  entweder 0 oder ungerade ist, folgt  $2k - c_N > 0$ , was ein Widerspruch zur Induktionsannahme ist, dass  $I_N$  keine ganze Zahl der Form  $k \cdot 2^N$  enthält.

Jetzt nehmen wir an, dass  $I$  neben dem ungeraden  $n$  nur gerade positive Zahlen enthält. Nach Satz 5.4, Aussage 2, hat  $I$  Eigenschaft P, genau dann wenn  $\{1\} + I$  Eigenschaft P hat.  $\{1\} + I$  enthält außer dem geraden  $n + 1$  nur ungerade Zahlen. Dann hat  $\{1\} + I$  nicht die Eigenschaft P, also auch nicht  $I$ .  $\square$

Wir haben also gesehen, dass die Voraussetzungen von Vermutung 5.1' notwendig sind. Nun betrachten wir einen Spezialfall, in dem die Voraussetzungen von Vermutung 5.1' erfüllt sind und der Träger  $I$  tatsächlich die Eigenschaft P hat.

**Behauptung 5.3.** Ein Träger  $I$  hat die Eigenschaft P, falls  $\{0, p, q, p + q\} \subseteq I$ , mit

$p, q$  relativ prim. Genauer enthält  $I_N$  für  $N > \log_2(q)$  dann das Ganzzahlintervall

$$[(p-1) \cdot (q-1), (p+q) \cdot (2^N - 1) - (p-1) \cdot (q-1)].$$

**Beweis.** Gelte also  $I \supseteq \{0, p, q, p+q\}$ , mit  $p, q$  relativ prim. Zuerst stellen wir fest, dass

$$\{0, p, q, p+q\} = p \cdot \{0, 1\} + q \cdot \{0, 1\}.$$

Somit gilt

$$I_N \supseteq p \cdot \{0, 1, \dots, 2^N - 1\} + q \cdot \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}.$$

Also reicht es zu zeigen, dass jedes

$$l \in [(p-1) \cdot (q-1), (p+q) \cdot (2^N - 1) - (p-1) \cdot (q-1)]$$

dargestellt werden kann als  $l = ap + bq$ , mit  $0 \leq a, b \leq 2^N - 1$ . Als erstes zeigen wir, dass es für jedes  $l \in (p-1) \cdot (q-1) + [0, q-2]$  ein  $a_l$  und  $b_l$  gibt, mit  $a_l p + b_l q = l$  und  $0 \leq a_l \leq q-2, 0 \leq b_l \leq p-1$ . Da  $p$  und  $q$  relativ prim sind, gilt

$$\{(ip) \bmod q \mid 0 \leq i \leq q-1\} = \{0, 1, \dots, q-1\}.$$

Für ein gegebenes  $l \in (p-1) \cdot (q-1) + [0, q-1]$  sei also  $a_l, 0 \leq a_l \leq q-1$ , die eindeutige ganze Zahl, sodass gilt

$$(a_l p) \bmod q = l \bmod q.$$

Somit gilt  $a_l p = ((a_l p) \operatorname{div} q) \cdot q + l \bmod q$  und mit  $b_l = l \operatorname{div} q - (a_l p) \operatorname{div} q$  folgt dann

$$l = a_l p + b_l q.$$

Für  $l = (p-1) \cdot (q-1) + q-1 = p \cdot (q-1)$  erhalten wir  $a_l = q-1$ , sodass  $0 \leq a_l \leq q-2$  gilt, für  $(p-1) \cdot (q-1) \leq l < p \cdot (q-1)$  und  $b_l \leq l \operatorname{div} q \leq p-1$ . Wir zeigen als nächstes, dass  $b \geq 0$  gilt. Dies ist der Fall, wenn  $a_l p < (p-1) \cdot (q-1)$ , da dann  $b_l q = l - a_l p > 0$ . Und falls  $a_l p \in (p-1) \cdot (q-1) + [0, q-2]$ , dann ist es die eindeutige ganze Zahl  $j$  in diesem Intervall mit  $j \bmod q = l \bmod q$ , z.B.  $a_l p = l$  und  $b_l = 0$ .

Da  $(p-1) \cdot (q-1) + q-1 = p \cdot (q-1)$  trivialerweise dargestellt werden kann als  $ap + bq$ , folgt, dass  $l$  geschrieben werden kann als  $l = ap + bq$ , mit  $0 \leq a \leq 2^N - 1, 0 \leq b \leq 2^N - 1$ , falls  $l \in ip + jq + (p-1) \cdot (q-1) + [0, q-1]$  für gewisse  $i, j, 0 \leq i \leq 2^N - 1 - (q-1), 0 \leq j \leq 2^N - 1 - (p-1)$ , z.B.  $l \in [(p-1) \cdot (q-1), (2^N - 1) \cdot (p+q) - q \cdot (p-1)]$ . Außerdem kann  $l$  ebenfalls so geschrieben werden, falls  $l \in (2^N - 1 - (q-2)) \cdot p + (2^N - 1 - (p-1)) \cdot q + (p-1) \cdot (q-1) + [0, q-2]$ , was den Beweis vervollständigt.  $\square$



Leider war es Melkman [8] nicht möglich, die allgemeine Gültigkeit von Vermutung 5.1' zu zeigen. Jedoch konnte er die folgende Behauptung zeigen, die einen Spezialfall von Vermutung 5.1' darstellt.

**Behauptung 5.4.** Angenommen,  $I$  erfüllt die Voraussetzungen von Vermutung 5.1'. Dann hat  $I$  in beiden folgenden Fällen die Eigenschaft P.

1.  $I$  enthält zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
2.  $I$  enthält zwei ungerade Zahlen und zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, oder zwei gerade Zahlen und zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen.

**Beweis.** Der Beweis benutzt wiederholt die Tatsache, dass für jedes  $a \notin I_N$  und für jedes  $b \in I$  die Bedingung  $\frac{1}{2}(a - b) \notin I_{N-1}$  gilt, da  $I_N = I + 2I_{N-1}$ .

1. Seien  $l$  und  $l+1$  zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Wegen Satz 5.4, Aussage 2, reicht es zu zeigen, dass  $\hat{I}$  die Eigenschaft P hat, wobei  $\hat{I} := I - \{l\}$ , falls  $l$  gerade ist und  $l \leq m - 2$  und ansonsten  $\hat{I} := \{l+1\} - I$ . Im ersten Fall, falls  $l = 2q > 0$ , erhalten wir  $\hat{I} \supseteq \{-2q, 0, 1, n - 2q\}$ . Im zweiten Fall, falls  $l = 2p - 1 < n - 2$ , erhalten wir  $\hat{I} \supseteq \{0, 1, 2p\}$ . Schließlich, falls  $l = 0$  oder  $l = n - 1$ , erhalten wir  $\hat{I} \supseteq \{0, 1, 2p\}$ , da die Voraussetzungen von Vermutung 5.1' erfüllt sind. Insgesamt unterscheiden wir zwischen zwei Fällen. Entweder  $\hat{I} \supseteq \{0, 1, 2p\}$ , für ein gewisses  $p > 0$ , oder  $\hat{I} \supseteq \{-2q, 0, 1, 2r + 1\}$ , für ein gewisses  $r \geq q > 0$ . In beiden Fällen gilt  $\hat{I}_N \supseteq \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ , da  $\hat{I} \supseteq \{0, 1\}$ . Die Schwierigkeit des Beweises besteht darin, dass man unter den gegebenen Voraussetzungen sicherstellen muss, dass  $2^M \in \hat{I}_M$ , für ein gewisses  $M \geq 1$ . Aus

$$\hat{I}_N = \hat{I}_{N-M} + 2^{N-M} \cdot \hat{I}_M$$

folgt, dass

$$\hat{I}_N \supseteq \{0, 1, \dots, 2^{N-M} - 1\} + \{2^N\} = \{2^N, 2^N + 1, \dots, 2^N + 2^{N-M} - 1\}.$$

Somit gilt also  $\hat{I}_N \supseteq \{0, 1, \dots, 2^N + 2^{N-M} - 1\}$ . Die Behauptung folgt dann aus Satz 5.4, Aussage 4, indem man  $N$  so groß wählt, dass  $2^{N-M} \geq n$ . Nun müssen wir noch zeigen, dass  $2^M \in \hat{I}_M$ , für ein gewisses  $M \geq 1$ . Dazu betrachten wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall:  $\hat{I} \supseteq \{0, 1, 2p\}$ .

Sei  $M$  so gewählt, dass  $2^M \geq 2p$ . Angenommen,  $2^M \notin \hat{I}_M$ . Dann folgt

$2^{M-1} - p \notin \hat{I}_{M-1}$ , was ein Widerspruch ist zu  $\hat{I}_{M-1} \supseteq \{0, 1, \dots, 2^{M-1} - 1\}$ . Also folgt  $2^M \in \hat{I}_M$ .

2. Fall:  $\hat{I} \supseteq \{-2q, 0, 1, 2r + 1\}$ , für ein gewisses  $r \geq q > 0$ .

Sei  $q = 2^k(2s + 1)$  und sei  $M$  so gewählt, dass  $2^{M-k-2} \geq r - s$ . Angenommen,  $2^M \notin \hat{I}_M$ . Dann gilt  $2^{M-1} + q \notin \hat{I}_{M-1}$  und somit auch  $2^{-k}(2^{M-1} + q) \notin \hat{I}_{M-k-1}$ . Da letzteres eine ungerade Zahl ist, können wir folgern, dass  $2^{M-k-2} + s - r \notin \hat{I}_{M-k-2}$  ist, was ein Widerspruch ist zu  $0 \leq 2^{M-k-2} + s - r \leq 2^{M-k-2} - 1$ . Also folgt  $2^M \in \hat{I}_M$ .

2. Betrachtet man entweder  $\hat{I} = I - \{l\}$  oder  $\hat{I} = \{l + 2\} - I$ , so reicht es zu zeigen, dass  $\hat{I}$  die Eigenschaft P hat, für  $\hat{I} \supseteq \{0, 2, 2q + 1, 2p + 1\}$ , mit  $p > |q| \geq 0$ .

Wir werden zeigen, dass  $\hat{I}_N$  ein Ganzzahlintervall der Länge mindestens  $2^N + 2^N - c$ , für ein gewisses festes  $c$ , enthält. Daraus folgt mit Satz 5.4, Aussage 4, dass  $\hat{I}$  die Eigenschaft P hat.

Sei dazu  $p - q = 2^k(2s + 1)$  und sei  $l$  eine beliebige ganze Zahl, mit  $(2p + 1) \cdot (2^{k+1} - 1) \leq l \leq 2^{N+1} - 4 - |2q + 1|$ . Falls  $l$  gerade ist, ist  $l$  auf jeden Fall in  $\hat{I}_N$  enthalten, da  $\hat{I}_N$  alle geraden natürlichen Zahlen bis  $2^{N+1} - 2$  enthält. Sei also  $l$  ungerade. Angenommen,  $l$  ist nicht in  $\hat{I}_N$  enthalten. Dann definieren wir  $l_1 = \frac{1}{2}(l - 2p - 1)$ ,  $m_1 = \frac{1}{2}(l - 2q - 1)$  und

$$l_j = \frac{1}{2}(l_{j-1} - 2p - 1), \quad m_j = \frac{1}{2}(m_{j-1} - 2p - 1), \quad 2 \leq j \leq k + 1.$$

Somit gilt

$$0 \leq (2p + 1) \cdot (2^{k+1-j} - 1) \leq l_j \leq m_j \leq 2^{N+1-j} - 2, \quad 1 \leq j \leq k + 1,$$

und

$$m_j - l_j = \frac{1}{2}(m_{j-1} - l_{j-1}) = \frac{1}{4}(m_{j-2} - l_{j-2}) = \dots = \frac{1}{2^{j-1}}(p - q).$$

Da  $l$  ungerade ist, sind sowohl  $l_1$  als auch  $m_1$  ganze Zahlen, die nicht in  $\hat{I}_{N-1}$  enthalten sind. Somit müssen  $l_1$  und  $m_1$  ungerade sein. Auf ähnliche Weise kann man schließen, dass  $l_{k+1}$  und  $m_{k+1}$  ganze Zahlen sind, die nicht in  $\hat{I}_{N-k-1}$  enthalten sind. Also müssen  $l_{k+1}$  und  $m_{k+1}$  auch ungerade sein. Dies ist ein Widerspruch, da ihre Differenz,  $m_{k+1} - l_{k+1} = 2s + 1$ , eine ungerade Zahl ist.  $\square$

Wir haben mit Behauptung 5.4 also gezeigt, dass ein nicht-negatives subdivision scheme, dessen Maske den Träger  $I$ ,  $\{0, n\} \subsetneq I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ , besitzt, konvergiert, wenn  $I$  folgende drei Bedingungen erfüllt.

1. Der größte gemeinsame Teiler aller Elemente von  $I$  ist 1.
2. Entweder  $n$  ist gerade und  $I$  enthält mindestens eine ungerade Zahl, oder  $I$  enthält mindestens zwei ungerade und gerade Zahlen (inklusive 0).
3.  $I$  erfüllt eine der beiden folgenden Bedingungen.
  - 3.1.  $I$  enthält zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
  - 3.2.  $I$  enthält zwei ungerade Zahlen und zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen, oder zwei gerade Zahlen und zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel, für das wir die Konvergenz des subdivision scheme mithilfe von Behauptung 5.4 folgern können.

**Beispiel 5.2.** Gegeben sei ein subdivision scheme mit Maske  $A = \{0.2, 0, 0, 1, 0.8\}$ . Der Träger ist  $I = \{0, 3, 4\}$ . Offensichtlich erfüllt die Maske Gleichung (36),

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2j+1} = 1.$$

Außerdem ist der größte gemeinsame Teiler von 0, 3 und 4 gleich 1 (Bedingung 1),  $n = 4$  ist gerade und  $I$  enthält mit 3 eine ungerade Zahl (Bedingung 2) und  $I$  enthält mit 3 und 4 zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen (Bedingung 3.1). Somit liefert Behauptung 5.4 die Konvergenz dieses subdivision scheme.

Wie schon erwähnt, war es Melkman [8] nicht möglich, die Gültigkeit von Vermutung 5.2 zu zeigen. Auch ließ sich Vermutung 5.1' nicht ohne die in Behauptung 5.4 gemachten Einschränkungen beweisen, da die hier benutzte Beweismethode nicht auf den Fall eines interpolierenden subdivision scheme angewendet werden kann. Die einzigen Ausnahmen sind die Fälle, wenn die ungerade Zahl  $2p + 1$  entweder 1 oder  $n - 1$  ist, da diese von Behauptung 5.4 abgedeckt werden. Der Grund hierfür ist, dass  $I_N$  bei einem interpolierenden subdivision scheme kein einzelnes Intervall der Länge mindestens  $2^N + m - 1$  enthalten kann. Um dies zu zeigen, sei  $2p + 1$  die ungerade Zahl. Wir betrachten dann  $\hat{I} := \{2p + 1\} - I$ . Außer 0 enthält  $\hat{I}$  nur ungerade Zahlen. Mithilfe der Beweismethode von Behauptung 5.2 kann dann gezeigt werden, dass  $\hat{I}_N$  keine ganze Zahl der Form  $k \cdot 2^N$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , und keine der Zahlen  $\pm \frac{1}{2} \cdot 2^N$  enthält.

Nichtsdestotrotz legen numerische Versuche den Schluss nahe, dass  $I$  auch in diesem Fall die Eigenschaft P hat. Betrachten wir dazu noch ein Beispiel.

**Beispiel 5.3.** Wir betrachten den Träger  $I = \{0, 3, 8\}$  und wählen  $N = 7$ . Im Sinne von Definition 5.2 ist also  $m = 0$  und  $n = 8$ . Satz 5.4, Aussage 4, sagt, dass  $I$  die

Eigenschaft P hätte, wenn  $I_7$  eine Folge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen der Länge  $2^7 + m - 1 = 128 + 0 - 1 = 127$  enthalten würde. Gerade haben wir aber gezeigt, dass dies bei einem interpolierenden subdivision scheme nicht möglich ist. Trotzdem wollen wir uns ansehen, welche Intervalle  $I_7$  enthält. Die Definition von  $I_N$  liefert

$$\begin{aligned} I_7 &= I + 2I + 4I + 8I + 16I + 32I + 64I \\ &= \{0, 3, 8\} + \{0, 6, 16\} + \{0, 12, 32\} + \{0, 24, 64\} \\ &\quad + \{0, 48, 128\} + \{0, 96, 256\} + \{0, 192, 512\}. \end{aligned}$$

Wir berechnen dies mithilfe eines Java<sup>TM</sup>-Programms zur Berechnung der Minkowski-Summe, siehe Anhang A. Das komplette, etwas längliche Ergebnis findet sich in Anhang B. Die drei längsten Ganzzahlintervalle, die  $I_7$  enthält, sind  $[254, 292]$ ,  $[318, 396]$  und  $[670, 708]$ . Betrachten wir diese Intervalle mod  $2^N$ , also mod 128, so erhalten wir  $[126, 164]$ ,  $[62, 140]$  und  $[30, 68]$ .  $I_7$  enthält also nicht ein Intervall der Länge mindestens 127, sondern 3 größere Intervalle, die gemeinsam Länge mindestens 127 haben. Nach Definition 5.2 hat unsere Menge  $I$  die Eigenschaft P, wenn es für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  ein  $j \in \mathbb{Z}$  gibt, mit

$$i + l - 128j \in I_7, \quad l = 0, 1, \dots, 7.$$

Dies können wir auch schreiben als

$$(i + l) \bmod 128 \in \{x \bmod 128 \mid x \in I_7\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad l = 0, \dots, 7.$$

Wir sehen also, dass die Menge  $I_7$  diese Bedingung erfüllt und somit die Menge  $I$  tatsächlich die Eigenschaft P hat.

## 6. Ausblick

Leider war es nicht möglich, die anfangs von Kapitel 5.2 formulierte Vermutung 5.1 zu beweisen. Konvergenz konnte nur gezeigt werden, wenn man strengere Bedingungen an den Träger der Maske stellt, siehe Behauptung 5.4 und den Spezialfall am Ende von Kapitel 5.2. Trotzdem können wir mit der hier entwickelten Theorie für viele Masken entscheiden, ob Konvergenz vorliegt oder nicht. Auch die Konvergenz der bekannten Algorithmen von de Rham und Chaikin bzw. von Lane und Riesenfeld konnte gezeigt werden.

Unsere Definition von subdivision beschränkte sich auf das Eindimensionale, da dies für unsere Zwecke völlig ausreichte. Jedoch lässt sich für eine beliebige Dimension die gleiche Theorie entwickeln. Wer dazu mehr wissen möchte, oder wer allgemein mehr über das Thema subdivision und dessen Anwendungen erfahren möchte, wird in dem Standardwerk „Stationary Subdivision“ von Cavaretta, Dahmen und Micchelli [1] fündig.

## 7. Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.	Kontrollpolygon für den de Rham-Chaikin Algorithmus . . . . .	2
Abb. 2.	1. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus . . . . .	3
Abb. 3.	Eine Ecke des Kontrollpolygons . . . . .	3
Abb. 4.	Quadratische Kurve und 1. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus	4
Abb. 5.	Quadratische Kurve und 2. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus	4
Abb. 6.	Quadratische Kurve und 3. Schritt des de Rham-Chaikin Algorithmus	5
Abb. 7.	Mittelpunktmethode an einem Kontrollpolygon . . . . .	5
Abb. 8.	Indikatorfunktion auf $[0, 1[$ . . . . .	6
Abb. 9.	B-spline vom Grad 1 . . . . .	7
Abb. 10.	B-spline vom Grad 2 und seine Ableitung . . . . .	8
Abb. 11.	B-spline vom Grad 3 und seine Ableitung . . . . .	8
Abb. 12.	Mittelpunktmethode am Kontrollpolygon . . . . .	15
Abb. 13.	De Rham-Chaikin Algorithmus am Kontrollpolygon . . . . .	15
Abb. 14.	de Rham-Chaikin Algorithmus an einem Quadrat . . . . .	16
Abb. 15.	Lane-Riesenfeld Algorithmus an einem Quadrat . . . . .	16
Abb. 16.	Beispiel: Die Funktion $f(x)$ . . . . .	18
Abb. 17.	Beispiel: Vergleich der Punkte $c$ und $c^1$ . . . . .	21

## 8. Quellenverzeichnis

- [1] CAVARETTA, Alfred S. ; DAHMEN, Wolfgang ; MICCHELLI, Charles A.: *Stationary subdivision*. Bd. 453 of Memoirs. American Mathematical Society, 1991
- [2] CAVARETTA, Alfred S. ; MELKMAN, Avraham A.: *Parametrization of subdivision schemes*. 1995
- [3] CHAIKIN, George M.: An algorithm for high speed curve generation. In: *Computer Graphics and Image Processing* 3 (1974), S. 346–349
- [4] DAUBECHIES, Ingrid ; LAGARIAS, Jeffrey C.: Sets of matrices all infinite products of which converge. In: *Linear Algebra and its Applications* 161 (1992), S. 227–263
- [5] DYN, Nira ; GREGORY, John A. ; LEVIN, David: Analysis of linear binary subdivision schemes for curve design. In: *Constructive Approximation* 7 (1991), S. 127–147
- [6] GONSOR, Daniel E.: Subdivision algorithms with nonnegative masks generally converge. In: *Advances in Computational Mathematics* 1 (1993), S. 215–221
- [7] LANE, Jeffrey M. ; RIESENFELD, Richard F.: A theoretical development for the computer generation of piecewise polynomial surfaces. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 2 (1980), S. 35–46
- [8] MELKMAN, Avraham A.: Subdivision schemes with non-negative masks converge always - unless they obviously cannot? In: *Baltzer Journals* (31. März 1996)
- [9] MICCHELLI, Charles A.: *Mathematical Aspects of Geometric Modeling*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995
- [10] MICCHELLI, Charles A. ; PINKUS, Allan: Descartes systems from corner cutting. In: *Constructive Approximation* 7 (1991), S. 161–194
- [11] MICCHELLI, Charles A. ; PRAUTZSCH, Hartmut: Refinement and subdivision for spaces of integer translates of a compactly supported function. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 7 (1987), S. 192–222
- [12] MICCHELLI, Charles A. ; PRAUTZSCH, Hartmut: Uniform refinement of curves. In: *Linear Algebra and its Applications* 114-115 (1989), S. 841–870
- [13] PETERNELL, Martin: *Unterteilungskurven und -flächen*. [http://www.geometry.at/strobl/strobl2009/vortrag09/peternell/peternell109\\_unterteilungskurven-flaechen.pdf](http://www.geometry.at/strobl/strobl2009/vortrag09/peternell/peternell109_unterteilungskurven-flaechen.pdf). – Zugriff: 29.02.2016

- [14] RHAM, Georges de: Sur une courbe plane. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 35 (1956), S. 25–42
- [15] SCHOENBERG, Isaac J.: Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions. In: *Quarterly Of Applied Mathematics* 4 (1946), S. 45–99 und 112–141



## Anhang

### A. Java-Programm zur Berechnung der Minkowski-Summe

```
1 import java.util.HashSet;
2 import java.util.Set;
3
4 public class MinkowskiSumme {
5
6     static int [] Menge1 = {0,3,8};    // 1. Menge für Minkowski-Summe
7     static int [] Menge2 = {0,6,16};  // 2. Menge für Minkowski-Summe
8
9
10    // main-Methode
11    public static void main(String [] args){
12
13        int N1 = Menge1.length;
14        int N2 = Menge2.length;
15        int laenge = N1 * N2;
16        int [] Minkowski1d = new int [laenge];
17        int [][] Minkowski2d = new int [N1] [N2];
18
19        // Berechne Minkowski-Summe als 2-dimensionales Array
20        for(int i = 0; i < N1; i++){
21            for(int j=0; j < N2; j++) {
22                Minkowski2d[i][j] = Menge1[i] + Menge2[j];
23            }
24        }
25
26        // Wandle 2-dimensionales Array in 1-dimensionales Array um
27        int counter = 0;
28        for (int i = 0; i < Minkowski2d.length; i++) {
29            for (int j = 0; j < Minkowski2d[i].length; j++) {
30                Minkowski1d[counter] = Minkowski2d[i][j];
31                counter++;
32            }
33        }
34
35        // Einträge der Größe nach sortieren
36        java.util.Arrays.sort(Minkowski1d);
37
38        // Doppelte Einträge entfernen
39        Minkowski1d = entferneDoppelte(Minkowski1d);
40
```

```
41     // Konsolenausgabe
42     for (int i = 0; i < Minkowskild.length; i++) {
43         System.out.print(Minkowskild[i] + ", ");
44     }
45
46 }
47
48
49 // Methode, um doppelte Einträge zu entfernen
50 public static int [] entferneDoppelte(int [] array) {
51     int [] array1 = new int [array.length];
52     System.arraycopy(array, 0, array1, 0, array.length);
53     int position = 0;
54     Set<Integer> set = new HashSet<Integer>();
55     for (int i = 0; i < array.length; i++) {
56         if (!set.contains(array[i])) {
57             set.add(array[i]);
58             array1[position] = array[i];
59             position++;
60         }
61     }
62     int [] fertigesArray = new int [position];
63     System.arraycopy(array1, 0, fertigesArray, 0, position);
64     return fertigesArray;
65 }
66
67 }
```

## B. Die Menge $I_7$

{0, 3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 105, 107, 108, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 198, 199, 200, 201, 203, 204, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 218, 219, 220, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 408, 409, 410, 411, 412, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 446, 447, 448, 449, 451, 452, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 466, 467, 468, 469, 471, 472, 474, 475, 476, 478, 479, 480, 481, 483, 484, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 560, 561, 562, 563, 564, 566, 567, 568, 569, 571, 572, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 584, 585, 586, 587, 588, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 710, 711, 712, 713, 715, 716, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 728, 729, 730, 731, 732, 734, 735, 736, 738,

739, 740, 741, 742, 744, 745, 746, 748, 750, 751, 752, 754, 755, 756, 757, 758, 760, 761, 762, 763, 764, 766, 767, 768, 769, 771, 772, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 786, 787, 788, 789, 791, 792, 794, 795, 796, 798, 799, 800, 801, 803, 804, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 840, 841, 842, 843, 844, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 866, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 875, 876, 878, 880, 881, 883, 886, 888, 889, 891, 892, 894, 895, 896, 898, 899, 900, 901, 902, 904, 905, 906, 908, 910, 911, 912, 914, 915, 916, 917, 918, 920, 921, 922, 923, 924, 926, 927, 928, 929, 931, 932, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 944, 946, 947, 948, 951, 952, 955, 956, 958, 960, 961, 963, 966, 968, 969, 971, 972, 974, 975, 976, 978, 979, 980, 981, 984, 986, 988, 991, 992, 995, 996, 998, 1000, 1001, 1006, 1008, 1011, 1016}

# Erklärung zur Hausarbeit gemäß § 29 (Abs. 6) LPO I

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Dies gilt auch für die in der Arbeit enthaltenen Zeichnungen, Skizzen und graphischen Darstellungen.

.....

Ort, Datum

Unterschrift