UNIVERSITÄT PASSAU

Stetige aber nicht differenzierbare Funktionen konstruieren

Bachelorarbeit

von

Daqian Zhang
100302
Studienfach: Informatik

Universität Passau
Fakultät für Informatik und Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik mit Schwerpunkt Digitale Bildverarbeitung

Gutachter:	Prof. Dr. Tomas Sauer
Betreuender Assistent:	Prof. Dr. Tomas Sauer

31. 03 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen **2**

2.1 Die Stetigkeit einer Funktionen 2

2.2 Die Differenzierbarkeit einer Funktionen 4

2.3 Stetige aber nicht-differenzierbare Funktionen 5

3 Die Methode zur Konstruktion der stetigen aber nicht differenzierbaren Funktionen **6**

3.1 Die Konstruktion einer Funktion mithilfe einer abzählbaren Menge 6

3.2 Die Stetigkeit der Funktion f 9

3.3 Die (Nicht-)Differenzierbarkeit der Funktion f 11

3.4 Konstruktion einer stetigen aber nicht-differenzierbaren Funktion 13

4 Beispiele stetiger aber nicht-differenzierbarer Funktionen **15**

4.1 Die Folge δ mit der Form $\frac{1}{x^p}$ mit $p > 1$ 16

4.2 Die Folge δ mit der Form e^{-px} mit $0 < p < \ln 2$ 18

4.3 Die Folge δ mit der Form $\frac{x^p}{2^x}$ 21

4.4 Die Folge δ mit der Formm $\frac{|\sin x|}{x^p}$ mit $p > 1$ 24

5 Zusammenfassung **26**

Literaturverzeichnis **26**

1 Einleitung

Stetige und differenzierbare Funktionen sind zwei wichtige Konzepte der Analyse. Der deutscher Mathematiker Georg Faber hat in seiner Arbeit (Faber (1909)) die Unterschiede zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht und eine Methode zur Konstruktion stetiger, aber nicht differenzierbarer Funktionen vorgestellt. Die Konzepte Stetigkeit und Differenzierbarkeit sind nicht gleichzusetzen und benötigen daher eine strenge Unterscheidung. Diese Arbeit basiert auf dem Werk von (Faber (1909)). Zuerst werden wir eine kurze Übersicht über die Stetigkeit der Funktionen geben und anschließend werden wir die Kriterien der Differenzierbarkeit kurz erläuten. Zuletzt werden wir zeigen: Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns anschließend mit einer Methode aus der Arbeit (Faber (1909)), mit der wir die stetige aber nicht-differenzierbare Funktionen konstruieren können. Dies wird an ausgewählten Beispielen demonstriert. Dazu erfolgte eine eigene Implementierung dieser Methode.

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

Dieses Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt. Zunächst stellen wir das Konzept der Stetigkeit vor. Darauf folgend geben wir eine Einleitung in die Differenzierbarkeit von Funktionen. Der letzte Abschnitt widmet sich den stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktionen.

2.1 Die Stetigkeit einer Funktionen

Definition 2.1.1. *Sei I ein Intervall. Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in I$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ und ein δ gilt*

$$x' \in I, \quad \left|x' - x\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x'\right) - f(x)\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Wir nennen die Funktion f *stetig* auf I, falls sie an jeder Stelle $x \in I$ stetig ist. Dies bedeutet informell, dass die Funktion in der Umgebung eines Punktes "keinen Sprung"macht.

Definition 2.1.2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, wenn gilt:*
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in D$

$$\left|x - x'\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon \tag{2}$$

folgt.

Die gleichmäßige Stetigkeit ist eine stärkere Bedingung als die Stetigkeit einer Funktion.

Definition 2.1.3. *Sei $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig auf I, falls sie auf dem Intervall I gleichmäßig stetig ist.*

Durch die Stetigkeit der Funktion erhalten wir auch einige bekannte Theoreme, z.B:

1. (**Zwischenwertsatz**) Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf dem Intervall $[a,b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an (WINKLER (o. J.)).
2. (**Satz vom Minimum und Maximum**) Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum auf dem Intervall $[a,b]$. Die Funktion f ist in dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ beschränkt (Passon und Paffrath (o. J.)).

Die folgende Abbildung 1 zeigt den Graphen der stetigen Funktion $f(n) = \frac{1}{n}sin(\frac{1}{n})$ im Intervall $[0.01, 0.1]$

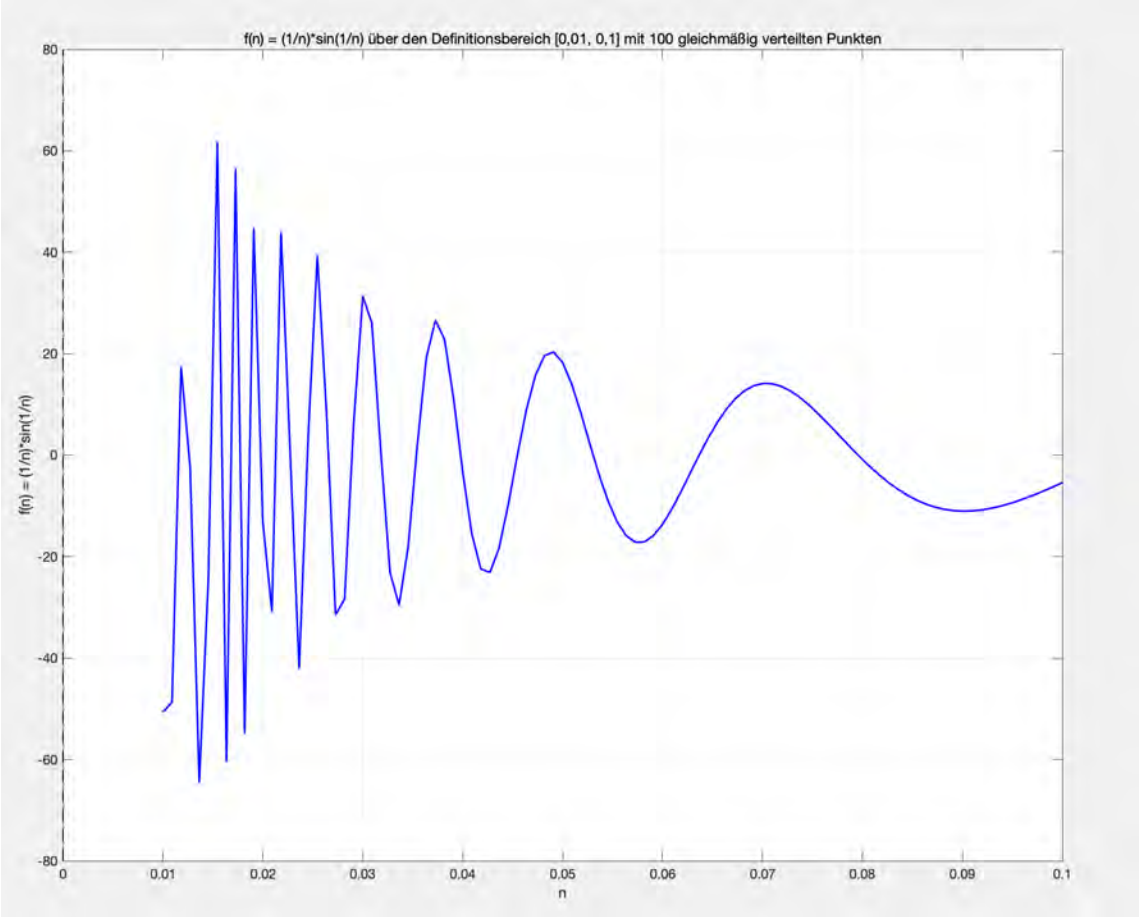

Abbildung 1: Die Funktion $f(n) = \frac{1}{n}sin(\frac{1}{n})$ über den Definitionsbereich [0.01, 0.1] mit 100 gleichmäßig verteilten Punkten.

2.2 Die Differenzierbarkeit einer Funktionen

Definition 2.2.1. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x \in D$, falls der folgende Grenzwert existiert:*

$$f'(x) := \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}, \quad x' \neq x \tag{3}$$

Der Wert $f'(x)$ wird als **Differentialquotient** oder als **Ableitung** von f an der Stelle x bezeichnet. Ist f an jeder Stelle $x \in D$ differenzierbar, so nennt man die Funktion f' die Ableitungsfunktion von f und schreibt alternativ $\frac{df}{dx}$ dafür. Auf der Grundlage der Differenzierbarkeit gibt es viele bekannte Theoreme, wie den Satz von Rolle und den Mittelwertsatz der Differenzialrechung.

1. **Satz von Rolle** Sei f auf dem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ definiert und stetig, und auf (a,b) differenzierbar. Außerdem sei $f(a) = f(b)$. So findet sich mindestens ein Punkt c mit $f'(c) = 0$.

2. **Mittelwertsatz der Differenzialrechnung** Sei f auf dem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ definiert und stetig, und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein c, sodass $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Die folgende Abbildung (2) zeigt den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f(n) = \frac{1}{n} sin(\frac{1}{n})$ im Intervall $(0, 10)$.

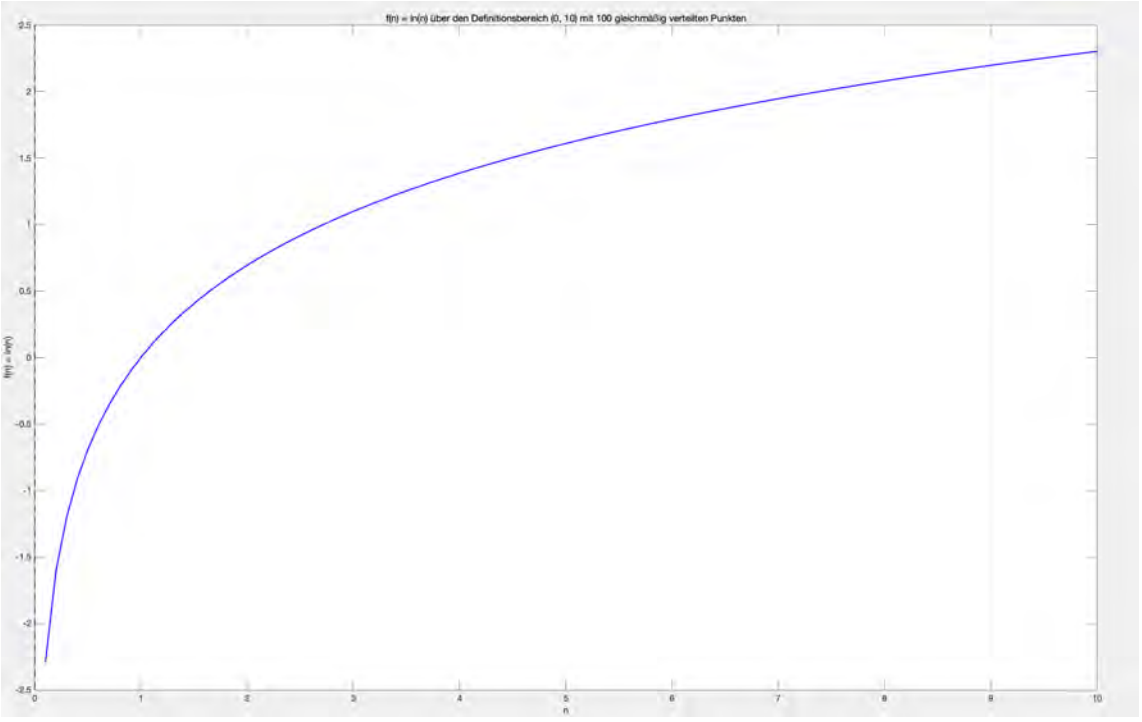

Abbildung 2: $f(n) = \frac{1}{n} sin(\frac{1}{n})$ über den Definitionsbereich (0, 10) mit 100 gleichmäßig verteilten Punkten.

2.3 Stetige aber nicht-differenzierbare Funktionen

Obwohl viele stetige Funktionen, etwa die Polynomfunktionen, auch differenzierbar sind, gibt es doch Funktionen, die überall stetig, jedoch an keiner Stelle differenzierbar sind. Zum Beispiel:

1. **Weierstraß-Funktion** Die Weierstraß-Funktion ist definiert als

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \text{ mit } 0 < a < 1,\ b \in \mathbb{N} \text{ ungerade},\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,\ x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Die Funktion (4) ist an jeder Stelle stetig, aber niergendwo differenzierbar (Prof. Harald Upmeier (2009)). Solche Funktionen zeigen die Diskrepanz zwischen dem Konzept der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit auf und beweisen, dass die Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft darstellt.

Die folgende Abbildung (3) zeigt den Graph der stetigen aber nicht-differenzierbaren Weierstraß-Funktion.

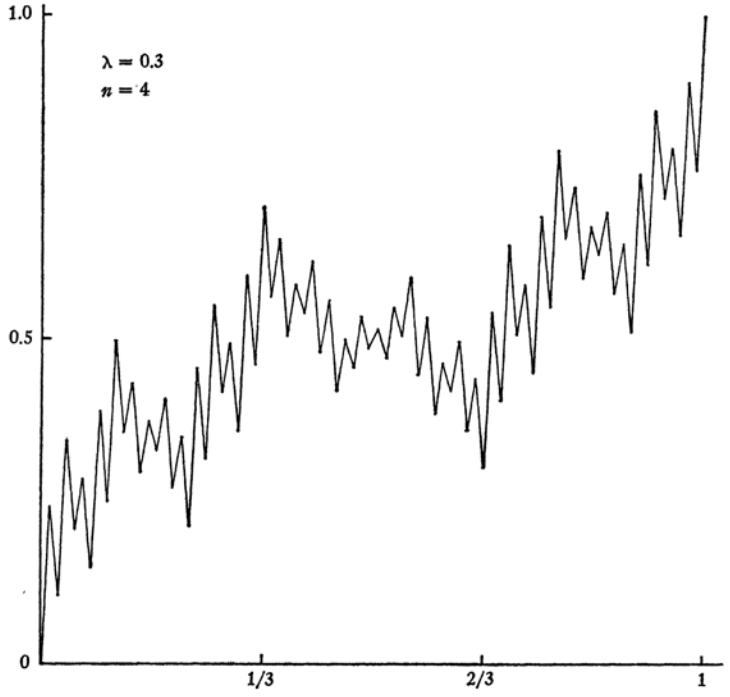

Abbildung 3: Weierstraß-Funktion (Blank, 1966, p.517).

3 Die Methode zur Konstruktion der stetigen aber nicht differenzierbaren Funktionen

In diesem Kapitel werde ich eine von Faber vorgeschlagene Methode zur Konstruktion einer stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion vorstellen und erläutern.

3.1 Die Konstruktion einer Funktion mithilfe einer abzählbaren Menge

Wir bestimmen eine stetige Funtkion f durch eine abzählbare Menge. Betrachte das Interval $[0,1]$.

Definiere eine Folge $\delta := (\delta_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}_{>0},k\leq 2^n}$ durch

$$\delta_{\left(\frac{k}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right) - \frac{f\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)+f\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right)}{2} & \text{falls } k = 2m+1,\ m\in\mathbb{N} \end{cases},$$

wobei $f : \mathbb{Q}_0^+ \cap [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(1) := \delta_0$. Dies ergibt folgende Struktur der Folge:

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$\dots$
$k=0$	δ_0	δ_0	δ_0	
$k=1$	$\delta_{\frac{1}{2}}$	$\delta_{\frac{1}{4}}$	$\delta_{\frac{1}{8}}$	
$k=2$	$\delta_{\frac{2}{2}} = \delta_1 = 0$	$\delta_{\frac{2}{4}} = \delta_{\frac{1}{2}} = 0$	$\delta_{\frac{2}{8}} = \delta_{\frac{1}{4}} = 0$	
$k=3$		$\delta_{\frac{3}{4}}$	$\delta_{\frac{3}{8}}$	
$k=4$		$\delta_{\frac{4}{4}} = \delta_1 = 0$	$\delta_{\frac{4}{8}} = \delta_{\frac{1}{2}} = 0$	
$k=5$			$\delta_{\frac{5}{8}}$	
$k=6$			$\delta_{\frac{6}{8}} = \delta_{\frac{3}{4}} = 0$	
$k=7$			$\delta_{\frac{7}{8}}$	
$k=8$			$\delta_{\frac{8}{8}} = \delta_1 = 0$	
$\vdots$				

Zuerst erkläre ich die abzählbare Menge von Daten δ.
Die Folge δ ist mit der Form $\delta_{\left(\frac{k}{2^n}\right)}$ mit $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $k \leq 2^n$. Für gerade k ist $\delta_{\left(\frac{k}{2^n}\right)} = 0$. $\delta_{\left(\frac{k}{2^n}\right)} > 0$, falls k ungerade ist, und in dem Fall kann k ausgedrückt werden durch $2m+1$ mit $m \in N$. Die δs sind in Schichten nach n geordnet. Besonderes, für $n = 0$

gibt es nur 1 δ, die δ_0 mit dem Wert 0 ist. Insgesamt gibt es $n+1$ Schichten von δ für gegebenes n. Die erste Schicht besteht nur aus einem nicht-null δ, die δ_0 ist, wie vorher gesprochen. Die nachfolgenden Schichten bestehen jeweils aus $2^{1-1}, 2^{2-1}, 2^{3-1}, \ldots, 2^{n-1}$ mal nicht-null δ. Und $\bar{\delta}_n$ bedeutet das größte δ innerhalb derselben Schicht, zum Beispiel $\bar{\delta}_a$ ist das größte δ in a-Schicht. Analog, $\underline{\delta}_n$ bedeutet das kleineste δ innerhalb derselben Schicht. Die Abkürzung δ_n bedeutet ein beliebiges nicht-null δ von der Schicht n. Beispielsweise bedeutet δ_2 kann $\delta_{(\frac{1}{4})}$ oder $\delta_{(\frac{3}{4})}$ sein.
Wir definieren die Zahlen δ durch folgende Gleichungen:
Dabei seien $f(0) = 0$, $f(1) = \delta_{(0)}$.

$$
\begin{aligned}
\delta_{(0)} &= f(1) \\
\delta_{(\frac{1}{2})} &= f\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{f(0)+f(1)}{2} \\
\delta_{(\frac{1}{4})} &= f\left(\tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \\
\delta_{(\frac{3}{4})} &= f\left(\tfrac{3}{4}\right) - \tfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)}{2} \\
\delta_{(\frac{1}{8})} &= f\left(\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{2} \\
\delta_{(\frac{3}{8})} &= f\left(\tfrac{3}{8}\right) - \tfrac{f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)}{2} \\
\delta_{(\frac{5}{8})} &= f\left(\tfrac{5}{8}\right) - \tfrac{f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)}{2} \\
\delta_{(\frac{7}{8})} &= f\left(\tfrac{7}{8}\right) - \tfrac{f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)}{2} \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Abbildung 4 veranschaulicht dies.

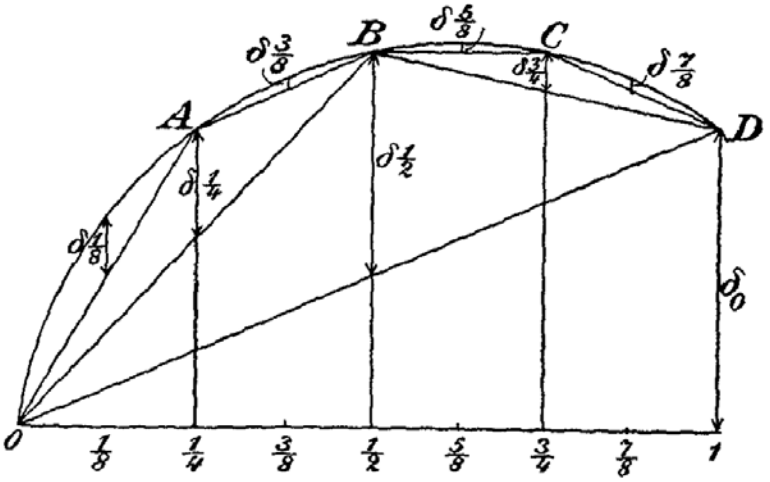

Abbildung 4: (Faber (1909)) Siehe S. 83 Fig. 1.

Durch der Rekursion erhalten wir mit $m \in \mathbb{N}$ und $2m+1 \leq 2^n$:

$$\delta_{\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)} = f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right) - \frac{f\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right) + f\left(\frac{m+1}{2^{n-1}}\right)}{2} \tag{6}$$

Wir können durch die Rekursion (6) die Gleichungen (5) auflösen und damit den Funktionswert $f(x_i)$ für x_i eine dyadische rationale Zahl berechnen. Zum Beispiel:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \delta_{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \delta_{\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 \cdot \delta_{\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{7}$$

und

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot \delta_{(0)} + \frac{1}{4} \cdot \delta_{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \delta_{\left(\frac{1}{4}\right)} + 1 \cdot \delta_{\left(\frac{1}{8}\right)} \tag{8}$$

Nun wollen wir eine geschlossene Form für f erhalten. Wir folgen dem Vorschlag von Farber und nutzen eine geometrische Methode. Wir konstruieren eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{>}0}$. Wir führen eine lineare Interpolation durch: Verbinde den Punkt $(0,0)$ mit $(1,\delta_0)$ und bezeichne das Geradenstück mit f_0. Den Linienzug, den wir mit f_1 bezeichnen, erhalten wir, wenn wir die Punkte $(0,0)$, $(\frac{2}{2},\delta_{\frac{1}{2}})$ und $(1,0)$ linear verbinden. Wir verfahren in der selben Weise weiter und bezeichnen den Linienzug, der durch das Verbinden der Punkte $(0,0),(\frac{1}{4},\delta_{\frac{1}{4}}),(\frac{2}{4},0),(\frac{3}{4},\delta_{\frac{3}{4}})$ und $(1,0)$ erhalten wird, mit f_2. Mit anderen Worten: Der Linienzug f_n schneidet die x-Achse (gegeben durch die Strecke $(0,1)$) in den Werten $0, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-2}{2^n}, 1$.

Siehe dazu Figure 5.

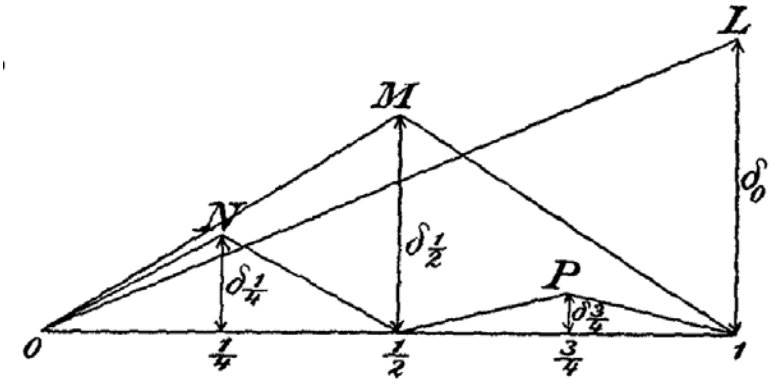

Abbildung 5: (Faber (1909)) Sehe die Seite 83 Fig.2.

Der Linienzug f_n ist gegeben durch $f_n(\frac{2m+1}{2^n}) = \delta_{\left(\frac{2m+1}{2^m}\right)}$ und $f_n(\frac{2m}{2^n}) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $2m+1 < 2^n$.
Nun erhalten wir die Funktion f durch die folgende Abbildungsvorschrift:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x), x\in\{\frac{2m+1}{2^n}|n\in\mathbb{N}_{>0},\quad m\in\mathbb{N},\quad 2m+1<2^n\} \tag{9}$$

Die Gleichung (9) enthählt nur endliche viele $f_\nu(x)\neq 0$,da $f_\nu(x)=0$ für $\nu>n$. Falls $\nu>n$, so ist $\frac{(2m+1)\cdot 2^{\nu-n}}{2^\nu}=0$, da $(2m+1)\cdot 2^{\nu-n}$ gerade ist. Durch Auflösung der Gleichung (5) erhalten wir:

$$f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)=\alpha_0\delta_0+\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2+\cdots+\alpha_n\delta_n,\quad a_i\in(0,1],\quad i\in\mathbb{N} \tag{10}$$

Bezüglich δ_n erkläre ich hier Folgendes:
Je nach n wird die Funktion $f_n(x)$ auf der Basis von 2^{n-1} mal nicht-null δs definiert. Zum Beispiel, falls $n=2$ ist, dann enthält die Funktion $f_2(x)$ nur $\delta_{\left(\frac{1}{4}\right)}$ und $\delta_{\left(\frac{3}{4}\right)}$. In (10) wird die Abkürzung δ_n verwendet. Dazu δ_n hängt davon ab, in welchem Intervall $\frac{2m+1}{2^n}$ liegt. Zum Beispiel, in (7) ist δ_2 $\delta_{\frac{3}{4}}$, weil $\frac{3}{4}$ im Intervall $(\frac{2}{4},1)$ liegt. Und in (8) ist δ_2 $\delta_{\frac{1}{4}}$, weil $\frac{1}{8}$ im Intervall $(0,\frac{2}{4})$ liegt. a_n ist nur ein Koeffizient.
Diese Koeffizienten lassen sich einfach berechnen. Setzt man beispielsweise $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_{n-1}=\delta_n=0$, erhält man $f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)=\alpha_0\delta_0$ und $f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)=f_0(\frac{2m+1}{2^n})$. Analog, setzt man $\delta_0=\delta_2=\ldots\delta_{n-1}=\delta_n=0$, dann erhält man $f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)=\alpha_1\delta_1$ und $f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)=f_1(\frac{2m+1}{2^n})$, usw ...

3.2 Die Stetigkeit der Funktion f

Wir wollen uns damit befassen, welche Bedingungen δ erfüllen muss, damit die zugehörigen Werte $f(\frac{2m+1}{2^n})$ einer stetigen Funktion f angehören. Zunächst jedoch gehen wir den umgekehrten Weg und nehmen an, es existiert eine solche gleichmäßig stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit zugehörigen Summanden f_ν, $\nu\in\mathbb{N}$.

Wir behaupten nun: Für alle $x\in[0,1]$ konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Da die Funktion $f(x)$ nach Voraussetzung gleichmäßig stetig ist, existiert eine Zahl n', sodass für alle x in $[0,1]$ gilt:

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

wenn $|h|\leq\frac{1}{2^n}$ und $n\geq n'$.
Definiere nun $x_i=\frac{m}{2^n}$ und $x_j=\frac{m+1}{2^n}$ mit $x_i<x<x_j$, dann erhalten wir aus (11):

$$-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)-f(x_i)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

Damit gibt es keinen Wendepunkt zwischen x_i und x_j auf dem Linienzug $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$, also ist entweder monoton fallend oder monoton steigend. Dann erhalten wir:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x_i) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) \right| \leq \left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x_i) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x_j) \right| \tag{13}$$

Die rechte Seite von (13) kann durch $\left| f(x_i) - f(x_j) \right|$ ausgedrückt werden.
Wegen (11) erhalten wir:

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

und damit:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x_i) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

Somit kann $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x_i)$ durch $f(x_i)$ genähert werden und wir erhalten:

$$\left| f(x_i) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < f(x_i) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

Jetzt addieren wir (12) und (17) und erhalten:

$$-\varepsilon < f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) < \varepsilon \tag{18}$$

Die Gleichung (18) gilt für alle n $\geq n'$ und alle $x \in [0,1]$.

Aufgrund der mathematischen Analyse ist uns schon klar, dass die gleichmäßige Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ gegen $f(x)$ die hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion $f(x)$ ist.
Aus den obigen Annahmen und dem Beweis folgt:
Sei $x \in [0,1]$ beliebig. Falls $f(x)$ gleichmäßig stetig ist, muss $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ gleichmäßig konvergieren, deswegen ist die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ die notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$.

Somit ist die gleichmäßige Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ eine hinreichende und notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$.

Als Nächstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den Werten von δ und der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$. Mit anderen Worten, wir untersuchen, welche Bedingungen δ erfüllen muss, damit f gleichmäßig stetig ist.

Gemäß dem vorherigen Beweis haben wir erhalten, dass die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ die hinreichende und notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$ ist.
Wegen

$$|f_\nu(x)| \leq \bar{\delta}_\nu, \tag{19}$$

falls $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_\nu$ konvergiert, dann ist $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ gleichmäßig konvergiert. Daher ist die Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_\nu$ die hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$, somit ist die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_\nu$ auch die hinreichende Bedingung für die Stetigkeit von $f(x)$.
Falls $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_\nu$ nicht konvergiert, kann $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ trotzdem gleichmäßig konvergieren (Zum Beispiel, es existiert ein paar Glieder von $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$, die sich gegenseitig aufheben).
Somit ist die Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_\nu$ die hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit der $f(x)$.

Zusammenfassung:

1. **Die gleichmäßige Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ ist die hinreichende und notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$.**
2. **Die Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_\nu$ ist die hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit der $f(x)$.**

3.3 Die (Nicht-)Differenzierbarkeit der Funktion f

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Differenzierbarkeit bzw. (Nicht-)Differenzierbarkeit der Funktion f. Für die Differenzierbarkeit bzw. Nicht-Differenzierbarkeit verwenden wir den Differenzenquotienten.

Existiert an jeder Stelle eine endliche Ableitung, dann müssen sowohl die Differenzenquotienten

$$D(n,m+1) = \frac{f\left(\frac{2m+2}{2^n}\right) - f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)}{2^{-n}} \text{ und}$$

$$D(n,m) = \frac{f\left(\frac{2m}{2^n}\right) - f\left(\frac{2m+1}{2^n}\right)}{2^{-n}},$$

sowie deren Summe endlich beschränkt sein (Definition 2.2.1).

Die Summe von $D(n,m+1)$ und $D(n,m)$ mit der Hilfe von (6) ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
S &= D(n,m+1)+D(n,m) \\
&= \frac{-2f(\frac{2m+1}{2^n})+f(\frac{2m+2}{2^n})+f(\frac{2m}{2^n})}{2^{-n}} \\
&= \frac{-2f(\frac{2m+1}{2^n})+f(\frac{m+1}{2^{n-1}})+f(\frac{m}{2^{n-1}})}{2^{-n}} \\
&= -2^{n+1}[f(\frac{2m+1}{2^n})-\frac{f(\frac{m+1}{2^{n-1}})+f(\frac{m}{2^{n-1}})}{2}] \\
&\overset{(6)}{=} -2^{n+1}\delta_{(\frac{2m+1}{2^n})}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Damit erhalten wir:

Falls $2^n\bar{\delta}_n$ unter einer endlichen Schranke bleibt, d.h

$$\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu \bar{\delta}_{(\nu)} < \infty, \tag{21}$$

dann existieren sowohl die Differenzenquotienten $D(n,m+1)$ und $D(n,m)$ als auch deren Summe S. Das heißt, an jeder Stelle existiert eine endliche Ableitung.
Somit ist $\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu \bar{\delta}_{(\nu)} < \infty$ ***die notwendige Bedingung dafür, dass an jeder Stelle eine endliche Ableitung existiert.***

Falls $2^n\bar{\delta}_n$ unter einer endlichen Schranke bleibt, dann existieren sowohl die Differenzenquotienten $D(n,m+1)$ und $D(n,m)$ als auch deren Summe, das heißt, an jeder Stelle existiert eine endliche Ableitung.
Somit ist $\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu \bar{\delta}_{(\nu)} < \infty$ ***die notwendige Bedingung dafür, dass an jeder Stelle eine endliche Ableitung existiert.***

Desweiteren gilt, falls

$$\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu \underline{\delta}_{(\nu)} = \infty, \tag{22}$$

dann erhalten wir für jede Stelle x

$$\lim_{h\to\infty} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| = \infty. \tag{23}$$

Mit anderen Worten, an den Stellen x an denen der Differentialquotient nicht existiert, ist die Funktion f nicht differenzierbar.
Somit ist $\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu \underline{\delta}_{(\nu)} = \infty$ ***die hinreichende Bedingung dafür, dass in jedem noch so kleinem Interval mindestens eine nicht differenzierbare Stelle existiert.***

Zusammenfassung:

1. $\lim_{\nu\to\infty} 2^{\nu}\bar{\delta}_{(\nu)} < \infty$ **ist die notwendige Bedingung dafür, dass an jeder Stelle eine endliche Ableitung existiert**.

2. $\lim_{\nu\to\infty} 2^{\nu}\underline{\delta}_{(\nu)} = \infty$ **ist die hinreichende Bedingung dafür, dass in jedem noch so kleinem Interval mindestens eine nicht differenzierbare Stelle existiert.**.

3.4 Konstruktion einer stetigen aber nicht-differenzierbaren Funktion

In den beiden vorherigen Kapiteln (3.2, 3.3) haben wir bereits gesehen, welche Bedingungen δ erfüllen muss, damit die Funktion stetig, unstetig, differenzierbar oder nicht differenzierbar ist. Da unser Ziel die Konstruktion einer stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktion ist, benötigen wir:

1. **Die gleichmäßige Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{n} f_{\nu}(x)$ ist die hinreichende und notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$.**

2. **Die Konvergenz der $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_{\nu}$ ist die hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit der $f(x)$.**

3. $\lim_{\nu\to\infty} 2^{\nu}\bar{\delta}_{(\nu)} < \infty$ **ist die notwendige Bedingung dafür, dass an jeder Stelle eine endliche Ableitung existiert**.

4. $\lim_{\nu\to\infty} 2^{\nu}\underline{\delta}_{(\nu)} = \infty$ **ist die hinreichende Bedingung dafür, dass in jedem kleinesten Interval am mindestens eine nicht differenzierbare Stell existiert**.

Die Folge δ muss daher folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. $\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\delta}_{\nu}$ konvergiert,

2. $\lim_{\nu\to\infty} 2^{\nu}\underline{\delta}_{(\nu)} = \infty$

Wähle $0 \leq a < 2^n, 0 < b < 2^n, a, x \in \mathbb{R}, b, n \in \mathbb{N}$.
Für $n = 0$ ist δ die Einsfolge.
Für $n > 0$ erhält man:

$$\delta_{\left(\frac{b}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } b \text{ gerade ist,} \\ f_{\delta}\left(n - 1 + \frac{b+1}{2^n}\right)^{1}, & \text{wenn } b \text{ ungerade ist} \end{cases} \tag{24}$$

Betrachte folgende Abbildung (6).

[1] f_{δ} ist eine selbst zu definierende Funktion

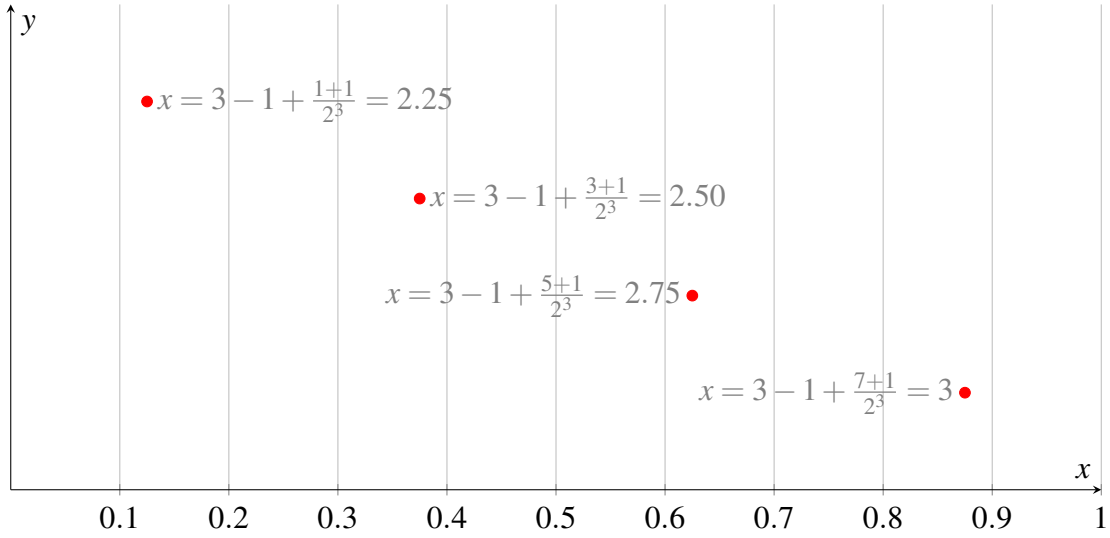

Abbildung 6: Ein Beispiel für δ mit $n = 3$

Nun konstruieren wir auf der Basis von δ_n die Funktion f_n, wie es zuvor beschrieben wurde (3.1). Betrachte Abbildung (7).

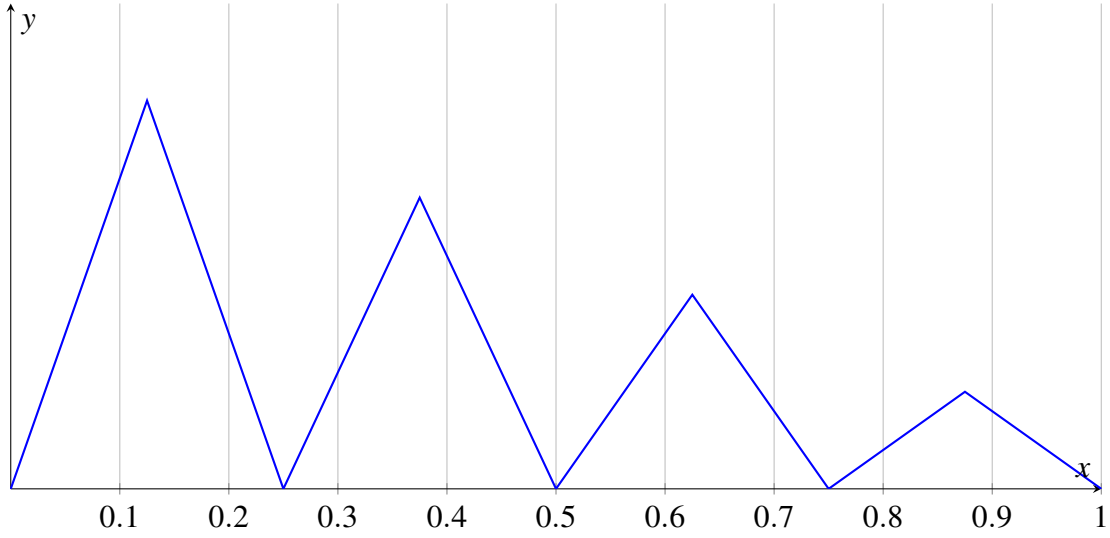

Abbildung 7: Ein Beispiel für $f_3(x)$

Wir stellen die Funktion f als eine Summe mehrerer Teilfunktionen dar, nämlich:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) \tag{25}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$0 \leq a < 2^n, 0 < b < 2^n, a, x \in \mathbb{R}, b, n \in \mathbb{N} \tag{26}$$

$$\delta_{\left(\frac{b}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } b \text{ gerade ist,} \\ f_\delta\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)^2, & \text{wenn } b \text{ ungerade ist} \end{cases} \tag{27}$$

$$f_n\left(\frac{a}{2^n}\right) = \begin{cases} 0, \text{falls } a = 0 \\ \delta_{\left(\frac{a}{2^n}\right)}, a \in N \\ \delta_{\left(\frac{\lceil a \rceil}{2^n}\right)} \cdot (a - (\lceil a \rceil - 1)), \lceil a \rceil \text{ungerade} \\ \delta_{\left(\frac{\lceil a \rceil - 1}{2^n}\right)} \cdot (\lceil a \rceil - a), \lceil a \rceil \text{gerade} \end{cases} \tag{28}$$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x), \; x \in [0,1] \tag{29}$$

4 Beispiele stetiger aber nicht-differenzierbarer Funktionen

Im letzten Kapitel(3) haben wir bereits diskutiert und bewiesen, welche Bedingungen δ erfüllen muss, um Stetigkeit, Unstetigkeit, Differenzierbarkeit oder Nicht-Differenzierbarkeit der konstruierten Funktion sicherzustellen. Zudem haben wir die Form von δ sowie die Form der Zielfunktion untersucht.

Zur Erinnerung:

1) **Die Konvergenz der $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n$ ist die hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit der $f(x)$.**
2) $\lim_{n\to\infty} 2^n \underline{\delta}_{(n)} = \infty$ **ist die hinreichende Bedingung dafür, dass in jedem kleinesten Interval am mindestens eine nicht differenzierbare Stell existiert**.
3) $\bar{\delta}_{(n)} = f_\delta\left(n-1+\frac{1+1}{2^n}\right)$
4) $\underline{\delta}_{(n)} = f_\delta(n)$

Im Folgenden gebe ich Beispiele für stetige aber nicht differenzierbare Funktionen. Über die Form von f_n (28) und f (29) haben wir bereits in dem Kapital(3.4) diskutiert. Für jede der folgenden Funktionen bleiben f_n und f in derselben Form. Nur δ unterscheidet sich. Daher werde ich im Folgenden nur die Form von δ angeben.

[2] f_δ ist eine selbst zu definierende Funktion

4.1 Die Folge δ mit der Form $\frac{1}{x^p}$ mit $p > 1$

Sei $p > 1$. Wir untersuchen die Folge δ gegeben durch

$$\delta_{\left(\frac{b}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{falls b gerade} \\ \frac{1}{\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)^p}, & \text{falls b ungerade} \end{cases} \tag{30}$$

i) Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n &= \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}_n \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{\delta}_k \\ &= 1 + \frac{1}{1^p} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \bar{\delta}_k \\ &= 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1+\frac{1+1}{2^k})^p} \\ &< 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^p} \\ &= 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \\ &< 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\ &\overset{\text{Riemennsche zeta-Funktion mit p > 1}}{=} 2 + \zeta(p) \end{aligned} \tag{31}$$

$\zeta(p)$mit p > 1 konvergiert , zum Beispiel $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n$.

Damit ist die Funktion mit δ in der Form von $\frac{1}{n^p}$ mit $p > 1$ stetig.

ii) Nicht-Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} 2^n \underline{\delta}_{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^p} = ? \\ &\text{wir untersuchen zuerst } \ln \frac{2^n}{n^p}. \\ &\ln \frac{2^n}{n^p} = n \ln 2 - p \ln n \end{aligned} \tag{32}$$

Mit dem Wachstum von n streben $n \ln 2$ als auch $p \ln n$ gegen $+\infty$. Allerdings wächst n offensichtlich schneller als $\ln n$, damit kann $p \ln n$ vernachlässigt werden.
Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2^n}{n^p} = +\infty \\ \Leftrightarrow\ &\lim_{n\to\infty} e^{\ln \frac{2^n}{n^p}} = +\infty \\ \Leftrightarrow\ &\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^p} = +\infty \end{aligned} \tag{33}$$

Daher ist die Funktion mit δ in der Form von $\frac{1}{n^p}$ mit $p > 1$ nicht-differenzierbar.

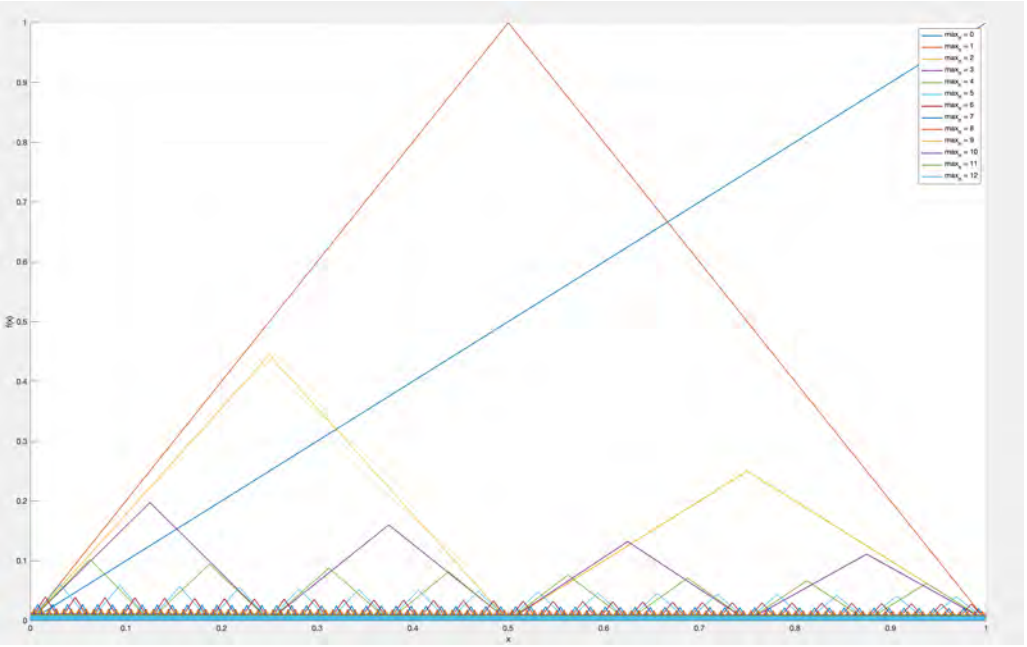

Abbildung 8: $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{12}(x)$

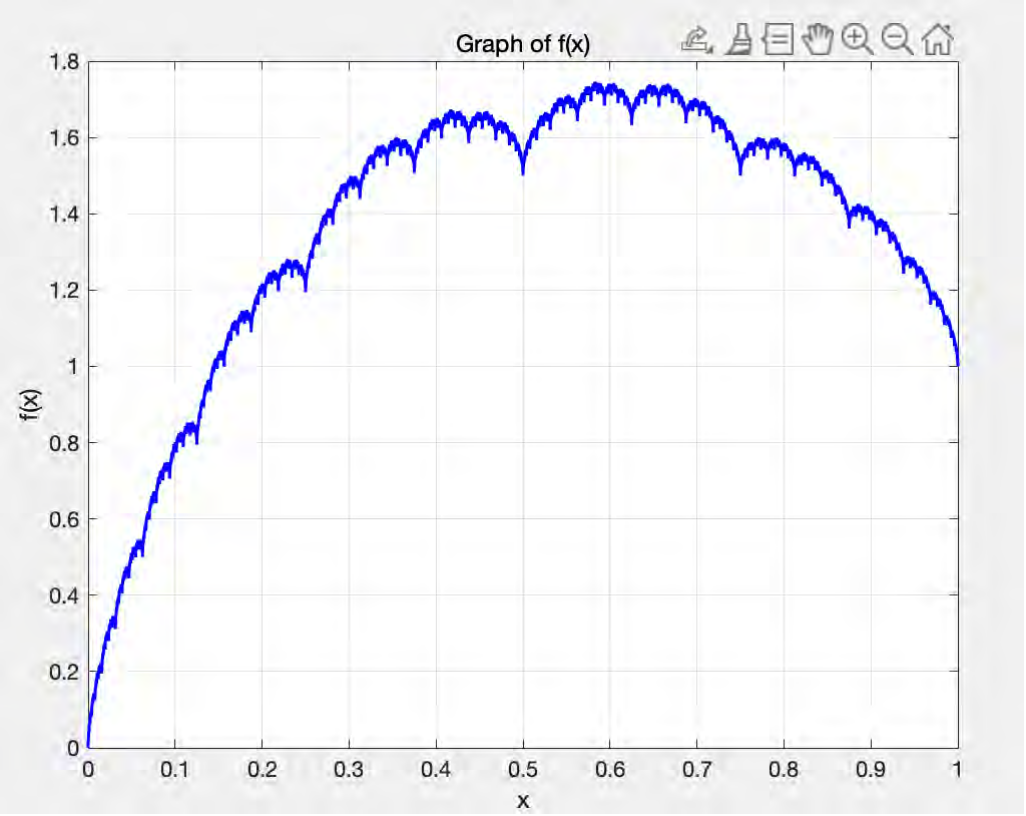

Abbildung 9: δ ist in der Form $\frac{1}{n^p}$ mit $p > 1$ und $f(x) = \sum_{\nu=0}^{12} f_\nu(x)$

4.2 Die Folge δ mit der Form e^{-px} mit $0 < p < \ln 2$

Sei $0 < p < \ln 2$. Wir untersuchen die Folge δ gegeben durch

$$\delta_{\left(\frac{b}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0, \text{falls b gerade} \\ \frac{1}{e^{\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)p}}, \text{falls b ungerade} \end{cases} \tag{34}$$

i) Stetigkeit:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n &= \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}_n \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{\delta}_k \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{\delta}_k \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{(k-1+\frac{1+1}{2^k})p}} \\
&< 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{(k-1)p}} \\
&\overset{\text{Partialsumme der geometrischen Folge}}{=} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{e^0 - e^{-pn}}{1 - e^{-p}} \\
&= 1 + \frac{e^0}{1 - e^{-p}} \\
&\overset{p=\frac{1}{2}}{\approx} 3.54 < +\infty
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Wir erhalten, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n$ konvergiert.

Daher ist die Funktion δ in der Form von $e^{-p\cdot n}$ mit $p = \frac{1}{2}$ stetig.

ii) Nicht-Differenzierbarkeit:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 2^n \underline{\delta}_{(n)} &= \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot e^{-pn} \\
&\overset{2=e^{\ln 2}}{=} \lim_{n\to\infty} (e^{\ln 2})^n \cdot e^{-pn} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln 2} \cdot e^{-pn} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln 2 - pn} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n(\ln 2 - p)} \\
&\overset{p=\frac{1}{2}}{=} +\infty
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Daher ist die Funktion mit δ in der Form von $e^{-p\cdot n}$ mit $p = \frac{1}{2}$ nicht-differenzierbar.

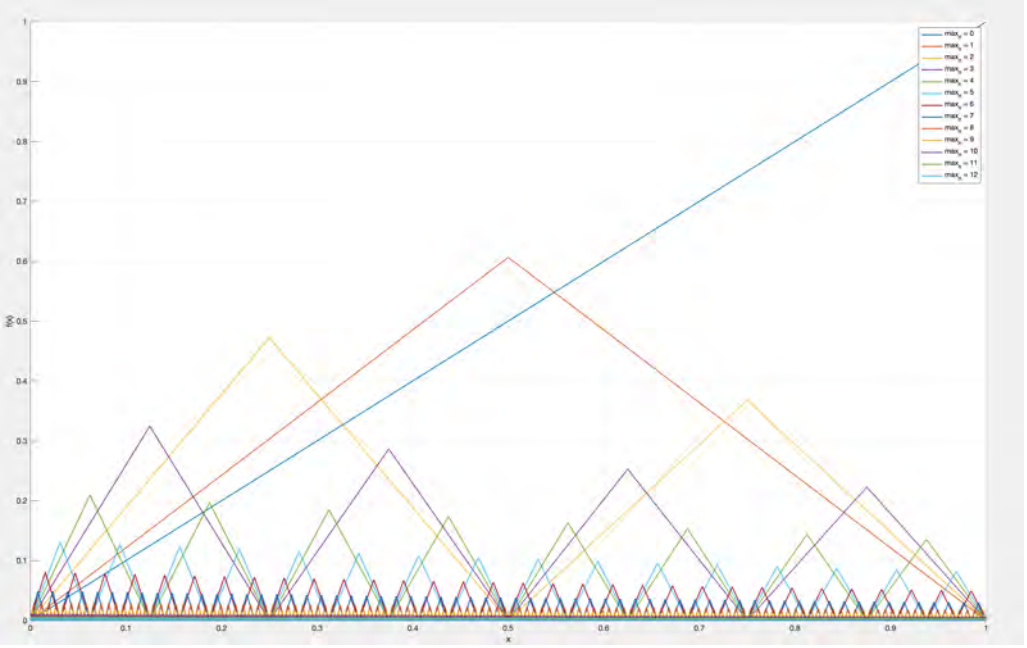

Abbildung 10: $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_{12}(x)$

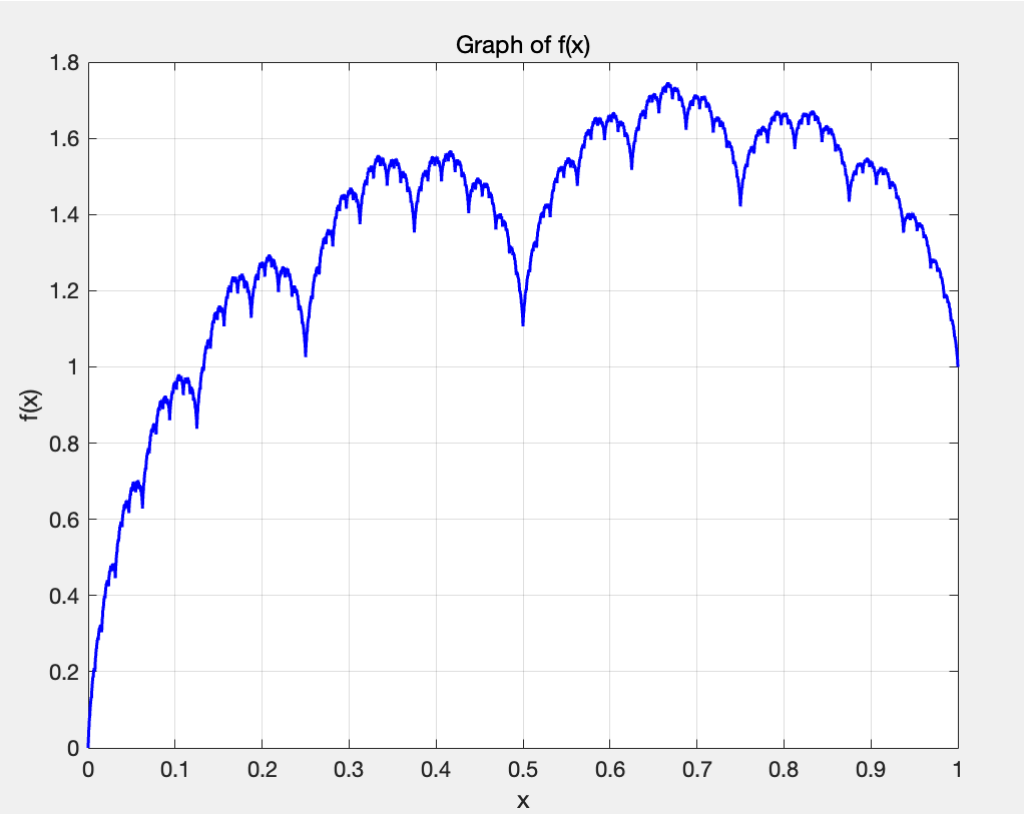

Abbildung 11: δ ist in der Form e^{-pn} mit $0 < p < \ln 2$ und $f(x) = \sum_{\nu=0}^{12} f_\nu(x)$

4.3 Die Folge δ mit der Form $\frac{x^p}{2^x}$

Die Ableitung von $\frac{x^p}{2^x}$ ist

$$\frac{2^x \cdot x^{k-1} \cdot (k - x \cdot \ln 2)}{2^{2x}}, \tag{37}$$

dann gilt:

1. $\frac{n^p}{2^n}$ ist monoton wachsend in $(0, \frac{p}{\ln 2})$;
2. $\frac{n^p}{2^n}$ ist monoton fallend in $(\frac{p}{\ln 2}, +\infty)$.

Wir müssen sicherstellen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\delta_{\left(\frac{1}{2^i}\right)} > \delta_{\left(\frac{3}{2^i}\right)} > \cdots > \delta_{\left(\frac{2^i-1}{2^i}\right)} \tag{38}$$

gilt, dies impliziert

$$\frac{p}{\ln 2} \leq n - 1 + \frac{b+1}{2^n} \text{ für } n = 2 \text{ und } b = 1, \tag{39}$$

d.h

$$\frac{p}{\ln 2} \leq 1.5. \tag{40}$$

Dann erhalten wir

$$p \leq 1.5 \cdot \ln 2 \approx 1.039. \tag{41}$$

Setze daher $p = 1$.
Wir untersuchen die Folge δ gegeben durch

$$\delta_{\left(\frac{b}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0, \text{falls b gerade} \\ \frac{\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)}{2^{\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)}}, \text{falls b ungerade} \end{cases} \tag{42}$$

i) Stetigkeit:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n &= \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}_n \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{\delta}_k \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)}{2^{\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)}} \\
&< 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{2^{\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)}} \\
&< 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{2^{(k-1)}}
\end{aligned}
$$

Wir untersuchen mit Quotientenkriterium ob $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)}{2^{(n-1)}}$ konvergiert.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)+1}{2^{(n+1)-1}}}{\frac{n+1}{2^{n-1}}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{n+1} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \right| \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}
$$

Damit folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)}{2^{(n-1)}}$ konvergiert.

Und somit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n$.

(43)

Daher ist die Funktion mit δ in der Form von $\frac{n^p}{2^n}$ stetig.

ii) Nicht-Differenzierbarkeit:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 2^n \underline{\delta}_{(n)} &= \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{n}{2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n = +\infty
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Daher ist die Funktion mit δ in der Form von $\frac{n^p}{2^n}$ mit $p = 1$ nicht-differenzierbar.

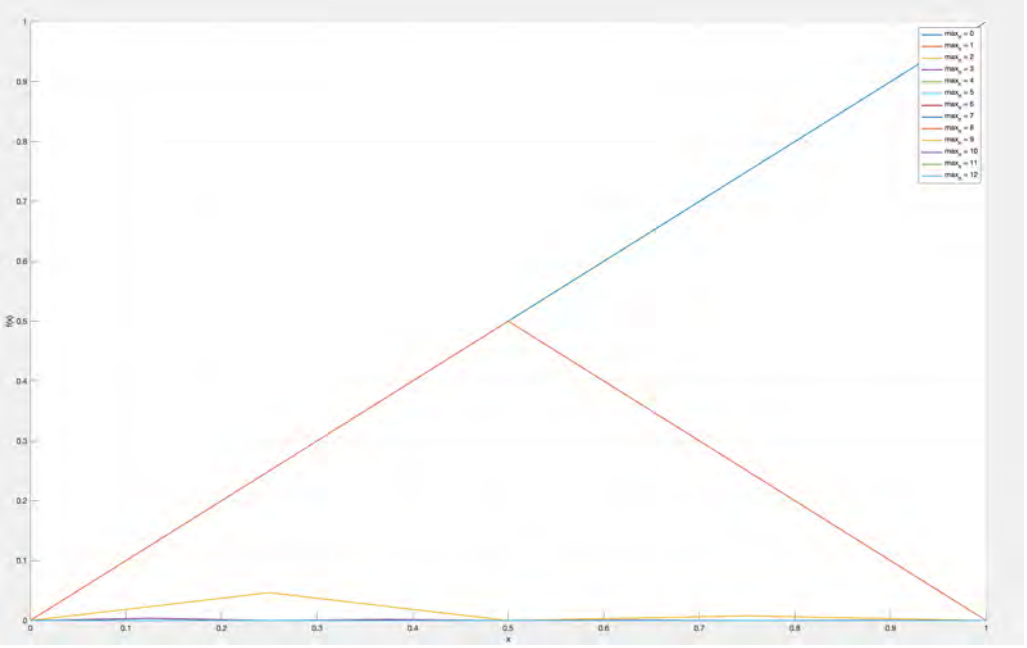

Abbildung 12: $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{12}(x)$

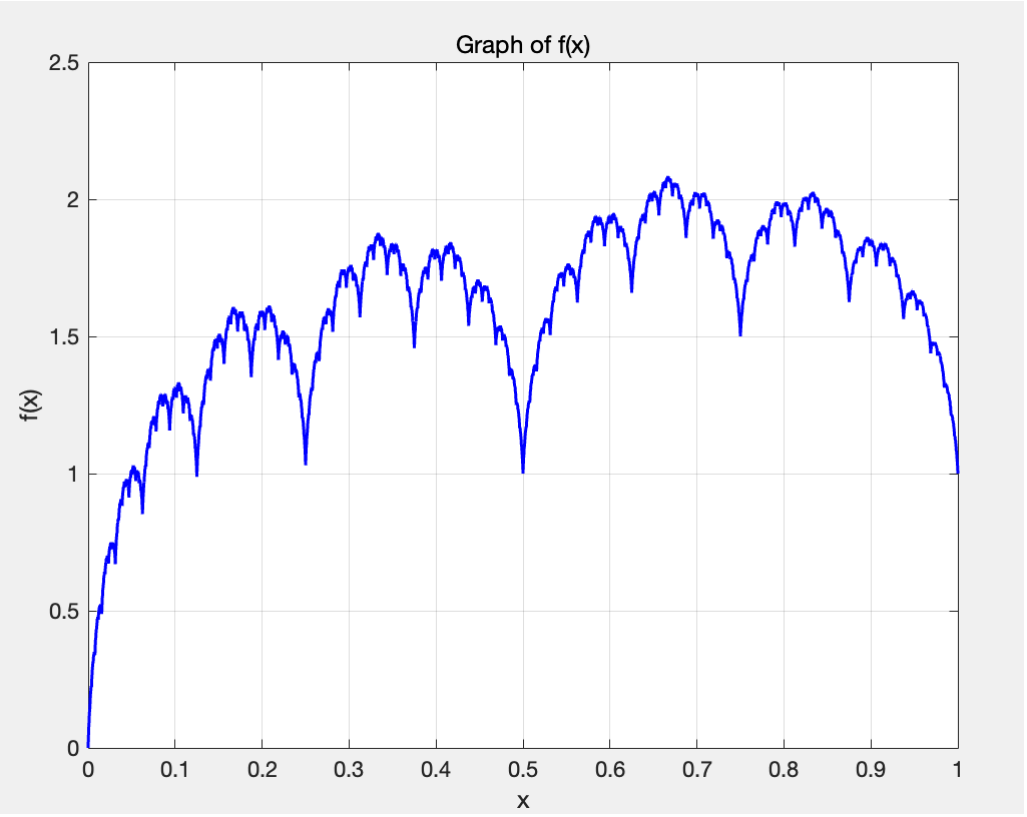

Abbildung 13: δ ist in der Form $\frac{n^p}{2^n}$ mit $p = 1$ und $f(x) = \sum_{v=0}^{12} f_v(x)$

4.4 Die Folge δ mit der Formm $\frac{|\sin x|}{x^p}$ mit $p > 1$

Sei $1 < p$. Wir untersuchen die Folge δ gegeben durch

$$\delta_{\left(\frac{b}{2^n}\right)} = \begin{cases} 0, \text{falls b gerade} \\ \frac{\left|\sin\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)\right|}{\left(n-1+\frac{b+1}{2^n}\right)^p}, \text{falls b ungerade} \end{cases} \tag{45}$$

i) Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n &= \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}_n \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{\delta}_k \\ &= 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\sin\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)\right|}{\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)^p} \\ &< 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)^p} \\ &= 1 + 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\left(k-1+\frac{1+1}{2^k}\right)^2} \\ &< 2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^p} \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^p} \end{aligned} \tag{46}$$

Analog zu (31) erhalten wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\delta}_n$ konvergiert.
Daher ist die Funktion f mit δ in der Form von $\frac{|\sin n|}{n^p}$ mit $p > 1$ stetig.

ii) Nicht-Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} 2^n \underline{\delta}_{(n)} = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{|\sin n|}{n^p} \leq \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{1}{n^p} \\ &\text{analoge wie (32), } \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{1}{n^p} = +\infty \end{aligned} \tag{47}$$

Daher ist die Funktion f mit δ in der Form von $\frac{|\sin n|}{n^p}$ mit $p > 1$ nicht-differenzierbar.

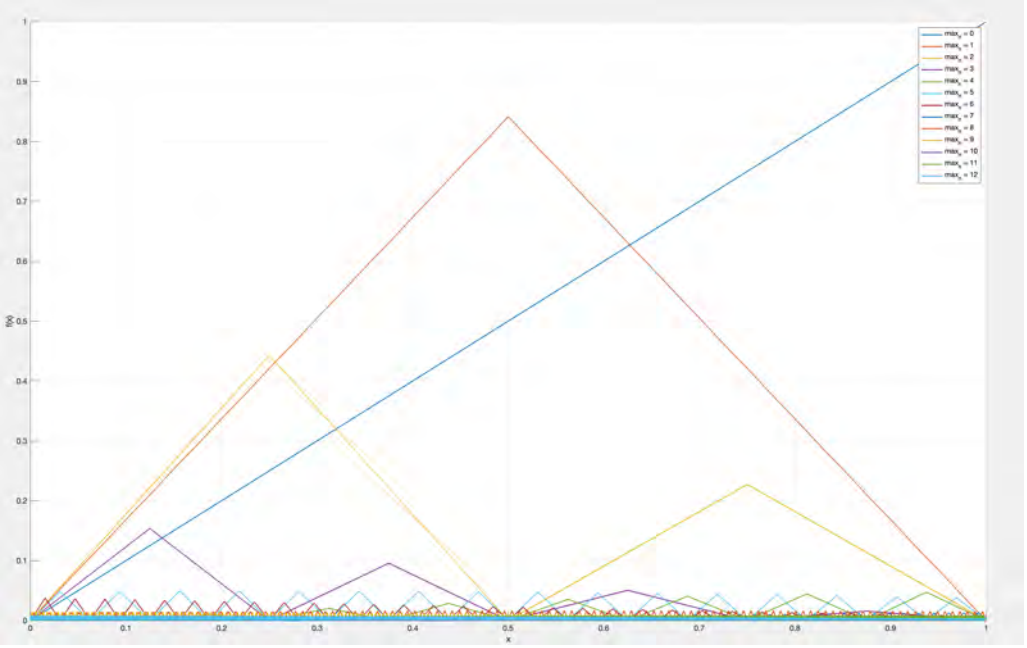

Abbildung 14: $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{12}(x)$

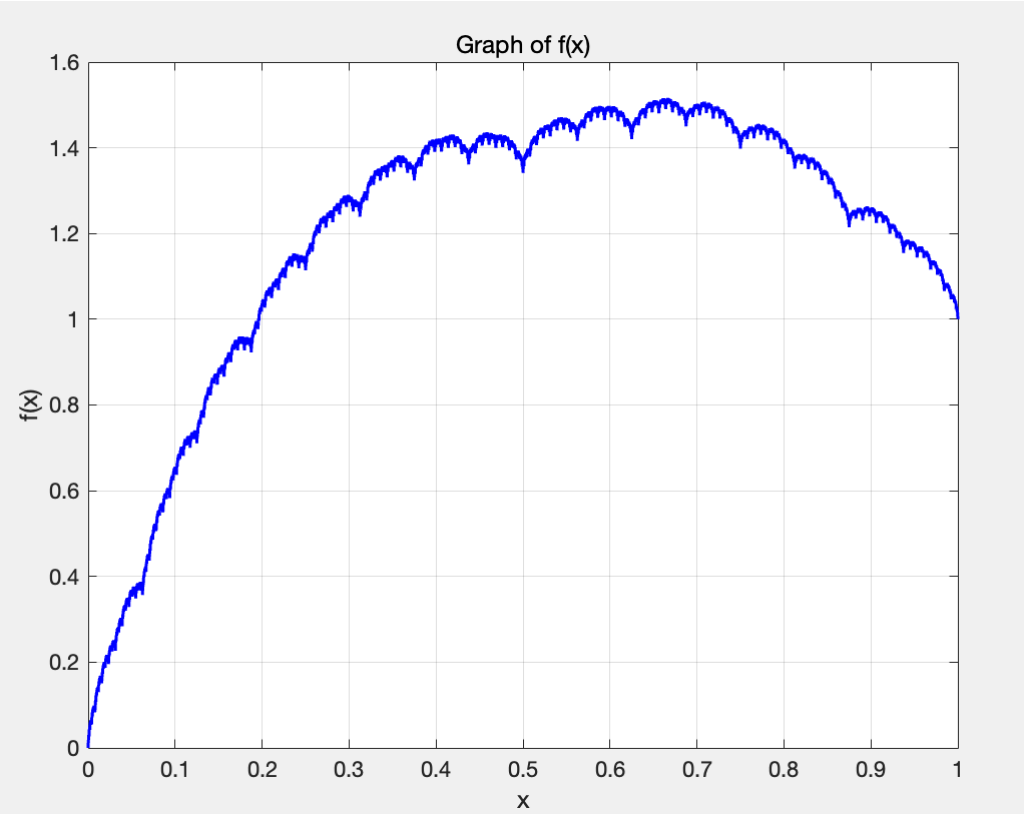

Abbildung 15: δ ist in der Form $\frac{|\sin n|}{n^p}$ mit $p > 1$ und $f(x) = \sum_{v=0}^{12} f_v(x)$

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir uns mit der Konstruktion stetiger, aber nicht-differenzierbarer Funktionen beschäftigt. Dazu erfolgt zunächst eine theoretische Einführung in die Konzepte der Stetigkeit und Differenzierbarkeit in Kapitel 2.
Der Hauptteil in Kapitel 3 der Arbeit stellt eine Methode zur Konstruktion einer stetigen aber nicht-differenzierbaren Funktion vor. Diese Methode beginnt mit einer abzählbaren Menge, mithilfe derer man Funktionen $f_i, i \in \mathbb{N}$ erhält. Diese werden dann zu einer Funktion $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x),\ x \in [0,1]$ aufsummiert. Anschließend untersuchen wir welche Bedingungen für die Stetigkeit und die (Nicht-)Differenzierbarbeit von f erfüllt sein müssen.
Wir haben die vorgestellte Methode implementiert und verschiedene Beispiele für stetige aber nicht differenzierbare Funktionen erstellt. Kapitel 4 stellt die erhaltenen Ergebnisse vor. In dieser Arbeit behandeln wir nur Funktionen im Definitionsbereich $[0,1]$. Für die Erweiterung des Definitionsbereichs, kann man eine periodische Funktion konstruieren.

Literaturverzeichnis

Blank, A. A. (1966). A simple example of a weierstrass function. *The American Mathematical Monthly*, *73* (5), 515–519.

Faber, G. (1909). Über stetige funktionen. (mit 2 figuren im text). *Mathematische Annalen*, *66*, 81-94. Zugriff auf `http://eudml.org/doc/158367`

Passon, H. & Paffrath, A. (o. J.). Fachbereich c–mathematik. , 7.

Prof. Harald Upmeier, B. S. (2009). Das weierstraßsche monster. *Philipps- Universit ¨at Marburg*.

WINKLER, R. (o. J.). Der grenzwert–zentralbegriff der analysis (langversion). , 7.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung der Universität Passau zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben. Die Arbeit ist weder von mir noch von einer anderen Person an der Universität Passau oder an einer anderen Hochschule zur Erlangung eines akademischen Grades bereits eingereicht worden.

Passau, den 31.03.2025 _____

Daqian Zhang

Ich versichere hiermit wahrheitsgemäß, dass

- ❑ die Arbeit ohne Zuhilfenahme von ChatGPT oder anderen generativen KI-Werkzeugen erstellt wurde, oder
- ❑ ich in der nachfolgenden Tabelle vollständig dokumentiert habe, wie solche Systeme bei der Entwicklung der Arbeit verwendet wurden.

Passau, den 31.03.2025 _____

Daqian Zhang