Erschienen in Math. Ann. 216, 51–66 (1975)

Konstruktion von Operatoren und Kernen mit Hilfe von Absorptionsmengen

G. Ritter

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Erweiterung der Kapitel 1–4 von [11]. Seit der grundlegenden Arbeit von Hunt [7] kennt man Sätze, die zu einem vorgegebenen Kern V auf einem lokalkompakten Raume die Existenz einer Resolvente $(V_p)_{p\geq 0}$ von Kernen aufzeigen, falls V neben einigen technischen Bedingungen dem vollständigen Maximum–Prinzip genügt. Verallgemeinerungen stammen von Lion [8, 9], Mokobodzki u. Sibony [10], Hirsch [4] und Taylor [15].

Die wichtigsten Beispiele solcher Kerne V sind Potentialkerne elliptischer und parabolischer Differentialoperatoren. Neben diesen gibt es nun andere Kerne, auf die die genannten Sätze nicht anwendbar sind. Typische Beispiele sind zu gewissen Fundamentallösungen hyperbolischer Differentialoperatoren gehörige Faltungskerne (vgl. 4.). Es zeigt sich, dass hier das Auftreten vieler Absorptionsmengen in einem Sinne, der in 2. präzisiert wird, eine entscheidende Rolle spielt. Der Begriff der Absorptionsmenge stammt aus der Potentialtheorie und wurde dort, allerdings in einem anderen Zusammenhang, von Bauer eingeführt (vgl. [1]). Die Absorptionsmengen haben ihre Parallele im Begriff des Abhängigkeitsbereiches (siehe [2]) in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Sie spielen in der vorliegenden Arbeit eine zwiefache Rolle: Einmal ermöglichen sie es, komplexe Kerne miteinander zu verknüpfen, zum anderen garantieren sie die Existenz einer Resolvente $(V_p)_{p\in\mathbb{C}}$ mit $V_0 = V$, falls die Bedingung (A_0) (siehe 2.) erfüllt ist.

Als natürlicher Hintergrund für die Theorie bietet sich ein bornologischer Vektorraum E (im Sinne von [5] und [16]) an, der den Banach–Raum C_0 in den anfangs genannten Theorien ersetzt. Ein einfaches Kriterium (Proposition 8) gestattet es zu sehen, ob ein beschränkter Operator auf E durch einen Kern induziert wird.

Den Herren H. Bauer, J. Bliedtner, J.M. Bony, G. Choquet, F. Hirsch, K. Janßen, D.O. Koehler, G. Lumer und G. Mokobodzki danke ich für mehrere nützliche Gespräche während der Entstehung der Arbeit. Herrn L. Waelbroeck verdanke ich den Hinweis auf [5, 14] und [16], durch den die Arbeit entscheidend beeinflußt wurde.

1. Notationen und Definitionen

Sei X eine Menge und E ein $\mathbb{K}$–Unterraum von $\mathbb{K}^X$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Wir setzen $E^+ := \{f \in E/f(X) \subseteq \mathbb{R}^+\}$. Falls $B \subseteq E$, so bezeichne $\langle B\rangle$ den von B aufgespannten $\mathbb{K}$–Vektorraum. $L(E)$ ist der $\mathbb{K}$–Vektorraum der $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen $E \to E$.

Ist X speziell ein lokalkompakter Raum und L eine kompakte Teilmenge von X, so bezeichnet $CK(X, L, \mathbb{K})$ den $\mathbb{K}$–Vektorraum der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf X mit Träger in L, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. $CK(X, \mathbb{K})$ sei der $\mathbb{K}$–Vektorraum der stetigen, $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger. Wir versehen ihn in der üblichen Weise mit der durch die Räume $CK(X, L, \mathbb{K})$ induzierten Topologie des induktiven Limes. Ferner setzen wir $CK(X, L, t) := \{\varphi \in CK(X, L, \mathbb{C})/|\varphi| \leq t\}$ für $t \geq 0$. $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X)$ ($\mathcal{M}^+(X)$) sei der $\mathbb{K}$–Vektorraum (Kegel) der $\mathbb{K}$–wertigen (positiven) Radon–Maße auf X.

Sei $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der borelschen Mengen von X. $\mathfrak{B}(X,\mathbb{K})$ sei der $\mathbb{K}$–Vektorraum der $\mathfrak{B}$–meßbaren Funktionen $X \to \mathbb{K}$, $\mathfrak{B}_b(X,\mathbb{K})$ der Unterraum der beschränkten Elemente daraus. Unter einem (komplexen) Kern auf X verstehen wir eine Abbildung $V : X \times CK(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ mit den zwei Eigenschaften

i) $V(x,\cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$ für alle $x \in X$.

ii) $V(\cdot,\varphi) \in \mathfrak{B}(X,\mathbb{C})$ für alle $\varphi \in CK(X,\mathbb{C})$.

Ein Kern heißt reell (positiv), wenn seine Einschränkung auf $X \times CK(X,\mathbb{R})$ [auf $X \times CK(X,\mathbb{R})^+$] reell ($\geq 0$) ist.

Den $\mathbb{K}$–Vektorraum (Kegel) der $\mathbb{K}$–wertigen (positiven) Kerne auf X schreiben wir $\mathfrak{K}_{\mathbb{K}}(X)$ ($\mathfrak{K}^+(X)$). $\mathfrak{K}_{\mathbb{K}}(X)$ läßt sich mit dem $\mathbb{K}$–Vektorraum aller vag meßbaren Abbildungen $X \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(X)$ identifizieren. Für $V \in \mathfrak{K}_{\mathbb{C}}(X)$ heißt $\overline{V} \in \mathfrak{K}_{\mathbb{C}}(X)$ definiert durch $\overline{V}(x,\cdot) := \overline{(V(x,\cdot)}$ [= das zu $V(x,\cdot)$ konjugierte Maß] der zu V *konjugierte Kern*. $\mathfrak{K}_{\mathbb{R}}(X)$ ist ein geordneter $\mathbb{R}$–Vektorraum (sogar ein Verband, falls X eine abzählbare Basis hat; Lemma 1).

Für $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X)$ sei $L^1(\mu) := \{f \in \mathfrak{B}(X,\mathbb{C}) / \int |f| d|\mu| < \infty\}$. Analog sei für $V \in \mathfrak{K}_{\mathbb{C}}(X)$ $L^1(V) := \bigcap_{x \in X} L^1(V(x,\cdot))$.

Ein bornologischer Vektorraum (E,b) ist ein Vektorraum E zusammen mit einem Teilmengensystem $b \subseteq 2^E$, genannt System der beschränkten Mengen von (E,b), welches die üblichen Eigenschaften beschränkter Mengen besitzt. Eine genaue Definition und alle Einzelheiten über Bornologien findet der Leser in [5] und [16].

Sei A eine $\mathbb{C}$–Algebra und $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Familie $(V_p)_{p \in D}$ von Elementen aus A heißt eine *Resolvente* in A, wenn sie der Resolventengleichung $V_p - V_q = (q-p)V_pV_q$ für alle $p,q \in D$ genügt. Manche Autoren nennen derartige Familien Pseudo–Resolventen.

Sei X wie oben. Eine Familie $(V_p)_{p \in D}$ von komplexen Kernen auf X heißt eine *Resolvente von Kernen* auf X, falls für alle $p,q \in D$ und alle $\varphi \in CK(X,\mathbb{C})$ gilt

i) $V_q(\cdot,\varphi) \in L^1(V_p)$.

ii) $V_p(x,\varphi) - V_q(x,\varphi) = (q-p)V_p(x, V_q(\cdot,\varphi))$ für alle $x \in X$.

2. Konstruktion von Operatoren und Kernen

Wir benötigen einige einfache Eigenschaften komplexer Kerne. Sei im folgenden X ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis, $\mathfrak{B}$ die σ–Algebra seiner borelschen Mengen und $V \in \mathfrak{K}_{\mathbb{C}}(X)$.

Lemma 1. *Für jeden Kern V auf einem lokalkompakten Raum X mit abzählbarer Basis ist*

$$|V| := X \times CK(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

definiert durch $|V|(x,\cdot) := |V(x,\cdot)|$ (= Absolutbetrag des Maßes $V(x,\cdot)$) ein positiver Kern auf X.

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, dass für jedes $\varphi \in CK(X,\mathbb{R})$ mit $\varphi \geq 0$ $|V|(\cdot,\varphi)$ $\mathfrak{B}$–meßbar ist. Zunächst ist

$$|V|(x,\varphi) = \sup_{\substack{\psi \in CK(X,\mathbb{C}) \\ |\psi| \leq \varphi}} |V(x,\psi)|$$

für alle $x \in X$. Da X eine abzählbare Basis hat, besitzt $CK(X,\mathbb{C})$ und damit auch $M := \{\psi \in CK(X,\mathbb{C})/|\psi| \leq \varphi\}$ eine abzählbare Basis. Somit gibt es eine abzählbare, bezüglich gleichmäßiger Konvergenz dichte Teilmenge $D \subseteq M$ und es gilt

$$|V|(x,\varphi) = \sup_{\psi \in D} |V(x,\psi)|$$

für alle $x \in X$. Damit ist $|V|(\cdot,\varphi)$ $\mathfrak{B}$–meßbar.

Das Lemma zeigt insbesondere, dass der geordnete Vektorraum aller reellen Kerne ein Vektorverband ist. Dabei ist $|V|$ der Absolutbetrag von V. Es gilt $L^1(|V|) = L^1(V)$.

Als Real– und Imaginärteil eines Kernes V definieren wir Re $V := \frac{1}{2}(V + \overline{V})$, Im$V := \frac{1}{2i}(V - \overline{V})$. Beides sind reelle Kerne mit $V = \text{Re } V + i\text{Im } V$. Damit läßt sich jeder Kern $V \in \mathfrak{K}_{\mathbb{C}}(X)$ in der Form $V = \sum_{l=0}^{3} i^l V_1$ mit Kernen $V_0, \ldots, V_3$ schreiben, wobei gilt $0 \leq V_1 \leq |V|$ $(0 \leq l \leq 3)$.

Für jede $\mathfrak{B}$–meßbare Funktion $g \geq 0$ auf X ist $|V|\quad g$ meßbar, wobei $|V|g(x) := |V|(x,g)$ $(x \in X)$. Wir definieren in der üblichen Weise durch Induktion $|V|^0 g := g$, $|V|^n g := |V||V|^{n-1}g$ $(n \in \mathbb{N})$ und $L^1(|V|^n) := \{f \in \mathfrak{B}(X,\mathbb{C})/|V|^k|f| < \infty$ für alle k mit $0 \leq k \leq n\}$. Wegen der Darstellbarkeit $V = \sum_{l=0}^{3} i^l V_l$ $(0 \leq V_l \leq |V|)$ kann man für $f \in L^1(|V|^n)$ durch Induktion definieren

$$V^0 f := f, \quad V^k f := V(\cdot, V^{k-1} f) \qquad (1 \leq k \leq n)$$

und beweisen

$$V^k f \in \mathfrak{B}(X,\mathbb{C}), \quad |V^k f| \leq |V|^k |f| \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Lemma 2. *Es sei $CK(X,\mathbb{C}) \subseteq L^1(|V|^n)$. Dann ist*

$$(x,\varphi) \to V^n \varphi(x) \qquad (\varphi \in CK(X,\mathbb{C}),\ x \in X)$$

ein Kern, der vermöge Integration den Operator $V^n : L^1(|V|^n) \to \mathfrak{B}(X,\mathbb{C})$ induziert.

Beweis. Sei $V = \sum_{l=0}^{3} i^l V_l$ wie oben. Dann ist

$$V^n \varphi = \sum_{0 \leq l_k \leq 3} i^{l_1 + \cdots + l_n} V_{l_n} \ldots V_{l_1} \varphi \quad (\varphi \in CK(X,\mathbb{R})^+).$$

Jede Abbildung $(x,\varphi) \to V_{l_n} \ldots V_{l_1}\varphi(x)$ ist aber ein positiver Kern W für den gilt $W(x,f) = V_{l_n} \ldots V_{l_1} f(x)$ $(f \in L^1(|V|^n))$.

Anders als bei positiven Kernen ist für $V \in \mathfrak{K}_{\mathbb{C}}(X)$ der Ausdruck $V^n\varphi$ für $\varphi \in CK(X,\mathbb{R})^+$ nicht immer definiert. Wir zeichnen nun eine Klasse von Kernen V aus, für die $CK(X,\mathbb{C}) \subseteq L^1(|V|)^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt eine *Absorptionsmenge* für den Kern V auf X, wenn gilt:

i) A ist abgeschlossen.

ii) $\operatorname{supp} V(x,\cdot) \subseteq A$ für alle $x \in A$.

Es ist klar, dass das System der Absorptionsmengen für einen Kern V gegen die Bildung von beliebigen Durchschnitten und beliebigen abgeschlossenen Vereinigungen stabil ist.

Definition. a) Ein Paar (A_0, A_1) von Absorptionsmengen für V heißt ein *A–Paar* (für V), wenn $A_0 \subseteq A_1$.

b) Sei (A_0, A_1) ein A–Paar für V und $s > 0$. Eine Folge $(A^0, \ldots, A^N)$ von Absorptionsmengen für V heißt eine *s–Verfeinerung* von (A_0, A_1), wenn gilt

i) $A_0 = A^0 \subseteq A^1 \subseteq \dots A^N = A_1$.

ii) $|V|(x, A^i \setminus A^{i-1}) \leq s$ für alle $x \in A_1$ und alle i mit $1 \leq i \leq N$.

Wir sagen in diesem Falle auch, (A_0, A_1) sei s–verfeinerbar.

c) Sei $r \geq 0$. Wir sagen, der Kern V genügt der *Bedingung* (A_r), wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ und jedes $s > r$ ein A–Paar (A_0, A_1) für V gibt mit den Eigenschaften

i) $K \cap A_0 = \emptyset$, $K \subseteq A_1$.

ii) (A_0, A_1) ist s–verfeinerbar.

Bevor wir zu den angenkündigten Sätzen kommen zunächst einige Beispiele:

Beispiel 1. Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokal Lebesgue–integrabel und

$$V(x, dy) := 1_{]-\infty, x[}(y) e^{\int_y^x c(t)dt} dy \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Dann ist V ein zu $-\frac{d}{dx} + c$ gehöriger Potentialkern. Die Halbgeraden $H_a := \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ sind Absorptionsmengen und die Bedingung (A_0) ist erfüllt.

Beispiel 2 (elliptischer Fall). Sei $n \geq 1$, $d \geq 0$, $\Delta_n := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplace–Operator und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Fundamentallösung

$$g(y) := \int_0^\infty dt\ e^{-dt} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}$$

zu $-\Delta_n + d$. Dann ist $V := g*$ ein zu $\Delta_n - d$ gehöriger Potentialkern. Da hier $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ die einzigen Absorptionsmengen sind, genügt V nur der Bedingung $\left(A_{\frac{1}{d}}\right)$, denn $\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy = \frac{1}{d}$.

Beispiel 3 (parabolischer Fall). Sei $n \geq 1$, $\frown_n := -\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ der Wärmeleitungsoperator und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Fundamentallösung

$$g(y) := \begin{cases} (4\pi y_1)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{y_2^2 + \dots + y_n^2}{4y_1}} & \text{falls } y_1 > 0 (y = (y_1, \dots, y_n)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu $-\frown_n$. Dann ist $V := g*$ ein zu $\frown_n$ gehöriger Potentialkern. Hier sind alle Halbräume der Form $H_a := \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n / y_1 \leq a\}$ $(a \in \mathbb{R})$ Absorptionsmengen.

Für $a \leq b$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $V(x, H_b \setminus H_a) \leq b - a$. Somit genügt V der Bedingung (A_0).

Beispiel 4 (hyperbolischer Fall). Dieser Fall wird in 4. näher untersucht. Hier seien nur zwei einfache Beispiele angeführt. Sei $\Box_2 := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

$$\left(\Box_3 := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right)$$

der Wellenoperator und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ die Fundamentallösung

$$g(y) := \begin{cases} \frac{1}{2} & y_1 > |y_2| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(h(y) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi \sqrt{y_1^2 - (y_2^2 + y_3^2)}} & y_1 > \sqrt{y_2^2 + x_3^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

zu $-\Box_2$ ($-\Box_3$) (siehe [13], Formel II, 3; 31). Dann ist $V := g*$ ($W := h*$) ein zu $\Box_2$ ($\Box_3$) gehöriger Potentialkern. V und W genügen der Bedingung (A_0). Zum Nachweis kann man wieder die Halbräume $H_a := \{y/y_1 \leq a\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $\subseteq \mathbb{R}^3$) mit $a \in \mathbb{R}$ nehmen. g und h sind lokal–integrabel nach dem Lebesgue–Maß in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Hieraus folgt die Behauptung.

Die gestellte Frage wird nun durch das folgende Lemma beantwortet:

Lemma 3. *Der Kern V genüge der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$. Dann gilt für alle $n \geq 0$:*

i) $CK(X, \mathbb{C}) \subseteq L^1(|V|^n)$.

ii) *Durch $(x, \varphi) \mapsto V^n\varphi(x)$ $(\varphi \in CK(X, \mathbb{C}), x \in X)$ wird ein Kern V^n auf X definiert, der den Operator $V^n : L^1(|V|^n) \to \mathfrak{B}(X, \mathbb{C})$ induziert.*

iii) *Der Kern V^n hat mindestens dieselben Absorptionsmengen wie V.*

Beweis. Sei $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge offener, relativ kompakter Teilmengen von X mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = X$. Wegen (A_r) gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein A–Paar (A_0^k, A_1^k) und eine reelle Zahl $M_k \geq 0$ mit den Eigenschaften $A_0^k \cap \overline{U}_k = \emptyset$, $\overline{U}_k \subseteq A_1^k$ und $|V|(x, A_1^k \setminus A_0^k) \leq M_k$ für alle $x \in A_1^k$.

Durch Induktion über $n \geq 0$ weist man leicht nach, dass $\{|V|^n\varphi \neq 0\} \subseteq \complement A_0^k$, falls $\varphi \in CK(X, \mathbb{R})^+$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{U}_k$. Dann gilt für diese φ und k sowie alle $n \geq 0$

$$|V|^n\varphi(x) \leq M_k^n\|\varphi\| \qquad (x \in A_1^k).$$

Für $n = 0$ ist diese Aussage trivial. Gelte sie für $n-1$. Dann hat man für $x \in A_1^k$

$$\begin{aligned} |V|^n\varphi(x) &= \int_X |V|(x, dy) \\ |V|^{n-1}\varphi(y) &= \int_{A_1^k\setminus A_0^k} |V|(x, dy)|V|^{n-1}\varphi(y) \leq M_k^n\|\varphi\|. \end{aligned}$$

Damit ist i) bewiesen. ii) folgt aus Lemma 2 und iii) ist trivial.

Bevor wir mit der Untersuchung von Kernen fortfahren, zunächst eine Abschätzung:

Lemma 4. *Seien $(F_i, \|\cdot\|_i)$ $(0 \leq i \leq N-1)$ normierte Räume. $F := \bigoplus_{i=0}^{N-1} F_i$ wird durch die Norm $\left\|\bigoplus_{i=0}^{N-1} f_i\right\| := \sup_{0\leq i\leq N-1}\|f_i\|_i$ $(f_i \in F_i)$ zu einem normierten Raum. Sei $s \geq 0$. $V \in BL(F)$ habe bezüglich der direkten Summe die Darstellung*

$$\dot{V} = \begin{pmatrix} V_{00} & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ V_{N-1,0} & \dots & \dots & V_{N-1,N-1} \end{pmatrix},$$

mit Operatoren $V_{ij} \in BL(F_j, F_i)$ der Norm $\leq s$ $(0 \leq j \leq i \leq N-1)$.

Dann gilt die Abschätzung

$$\|V^n\| \leq \binom{n+N}{N} s^n.$$

Beweis. V^n hat bzgl. der direkten Summe eine Darstellung

$$V^n = \begin{pmatrix} V_{00}^{(n)} & & & \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ V_{N-1,0}^{(n)} & \dots & \dots & V_{N-1,N-1}^{(n)} \end{pmatrix}$$

mit Operatoren $V_{i,j}^{(n)} \in BL(F_j, F_i)$.

Wir zeigen durch Induktion über $n \geq 0$ und l $(0 \leq l \leq N-1)$ die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{l} \|V_{l,i}^{(n)}\| \leq \binom{n+l}{l} s^n.$$

Wegen $\binom{n+l}{l} \leq \binom{n+N}{N}$ gilt dann

$$\sum_{i=0}^{l} \|V_{l,i}^{(n)}\| \leq \binom{n+N}{N} s^n \qquad (0 \leq l \leq N-1)$$

und damit die Behauptung.

Die Ungleichung gilt für $l = 0$ und $n \in \mathbb{N}$ wegen $V_{0,0}^{(n)} = V_{0,0}^n$. Sei nun $l \geq 1$. Dann ist die Ungleichung für $n = 0$ trivial. Für $n \geq 1$ gilt dann unter Berücksichtigung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} \|V_{j,i}^{(n-1)}\| &\leq \binom{n-1+j}{j} s^{n-1} \quad (0 \leq j \leq l) \\
\sum_{i=0}^{l} \|V_{l,i}^{(n)}\| &= \sum_{i=0}^{l} \left\| \sum_{j=i}^{l} V_{l,j} V_{j,i}^{(n-1)} \right\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{l} \sum_{i=0}^{j} \|V_{l,j}\| \|V_{j,i}^{(n-1)}\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{l} \binom{n-1+j}{j} s^n = \binom{n+l}{l} s^n.
\end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Als Folgerung haben wir folgendes

Lemma 5. *Sei V ein Kern auf X und (A_0, A_1) ein s–verfeinerbares Absorptionspaar für V. Sei ferner $A_0 = A^0 \subseteq \ldots \subseteq A^N = A_1$ eine s–Verfeinerung von (A_0, A_1) für V. Dann gilt*

$$|V|^n(y, f) \leq \binom{n-N}{N} s^n \sup_{x \in A_1} |f(x)|$$

für jedes $f \in \mathfrak{B}_b^+(A_1, \mathbb{C})$ mit $f|A_0 = 0$ und alle $y \in A_1$.

Beweis. Um das vorhergehende Lemma anzuwenden, setzen wir

$$\begin{aligned}
F_i &:= \{f \in \mathfrak{B}_b(A_1, \mathbb{C}) / f = 0 \text{ auf } A^i \cup \complement A^{i+1}\} \\
\|f\|_i &:= \sup_{x \in A_1} |f(x)| \quad (f \in F_i, 0 \leq i \leq N-1).
\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen von Lemma 4 ergibt sich dann

$$F = \{f \in \mathfrak{B}_b(A_1, \mathbb{C}) / f = 0 \text{ auf } A_0\}$$

und

$$\|f\| = \sup_{x \in A_1} |f(x)| \quad (f \in F).$$

Der Kern $|V|$ induziert einen Operator $|V| \in BL(F)$, der die in Lemma 4 geforderte Darstellung hat. Hieraus folgt die Behauptung.

Es scheint schwierig zu sein, einen geeigneten vollständigen lokalkonvexen Raum zu konstruieren, auf dem sowohl V als auch die zu konstruierenden Kerne stetige Endomorphismen induzieren. Deswegen werden wir die folgende Theorie mit bornologischen Räumen anstelle von lokalkonvexen Räumen durchführen.

Sei V ein Kern auf X, der der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$ genügt. Wir wählen eine gegen X aufsteigende Folge $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von offenen, relativ kompakten Teilmengen von X. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $\left(r + \frac{1}{k}\right)$– verfeinerbares A–Paar (A_0^k, A_1^k) mit den Eigenschaften $\overline{U}_k \cap A_0^k = \emptyset$, $\overline{U}_k \subseteq A_1^k$ und setzen

$$E_k := \{f \in \mathfrak{B}(X, \mathbb{C}) \;/\; f|A_0^k = 0 \text{ und } f|A_1^k \text{ ist beschränkt}\}$$
$$E := \bigcup_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq k_0} E_k.$$

Die Räume E_k und E sind $\mathbb{C}$–Vektorräume. E wird durch die folgende Festsetzung zu einem bornologischen konvexen $\mathbb{C}$–Vektorraum: Eine Teilmenge $B \subseteq E$ heißt beschränkt, wenn es $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $B|A_0^k = 0$ für alle $k \geq k_0$ ist, und so dass $B|A_1^k$ gleichmäßig beschränkt ist für alle $k \geq k_0$. Sei b das System aller beschränkten Teilmengen von E. Dann ist b eine konvexe Vektorraum–Bornologie auf E. [Falls das System der Absorptionsmengen für V bzgl. $\subseteq$ totalgeordnet ist, hängt (E, b) nicht von der speziellen Wahl von $((A_0^k, A_1^k))_{k\in\mathbb{N}}$ ab. Im allgemeinen Fall ist (E, b) jedoch dem Kern V nicht kanonisch zugeordnet.]

Für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$ und jede nichtnegative Zahlenfolge $a := (a_k)_{k\geq k_0}$ sei

$$B_a := \{f \in \mathfrak{B}(X, \mathbb{C}) \;/\; f|A_0^k = 0 \text{ und } |f||A_1^k \leq a_k (k \geq k_0)\}.$$

Dann ist $\langle B_a \rangle$ ein Banachraum mit B_a als Einheitskugel. Jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E$ ist in einem B_a enthalten. (E, b) hat folgende Eigenschaften:

1) (E, b) ist separiert und vollständig*

2) $CK(X, \mathbb{C}) \subseteq E$.

3) Die Mengen $CK(X, K, t)$ sind beschränkt in (E, b).

4) Für jedes $x \in X$ ist die Auswertungsabbildung $E \to \mathbb{C}$ definiert durch $f \mapsto f(x)$ beschränkt.

5) $E \subseteq L^1(|V|)$ und für jedes $f \in E$ gilt $V(\cdot, f) \in E$. V induziert auf diese Weise eine beschränkte lineare Abildung von E in sich, die wir auch mit V bezeichnen.

Wir werden im folgenden für einen Operator $W : E \to E$ die Schreibweise $Wf(x)$ und für einen Kern W auf X die Schreibweise $W(x, f)$ verwenden. Nun kommen wir zu den angekündigten Sätzen. Für $h \in \mathfrak{B}_b(X, \mathbb{C})$ sei $M_h : E \to E$ der Operator der Multiplikation mit h.

Satz 6. *Der Kern V auf X genüge der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$. Ferner sei $h \in \mathfrak{B}_b(X, \mathbb{C})$ mit $c := \sup_{x\in X} |h(x)| < \frac{1}{r}$. Dann gibt es einen Operator $V_k \in BL(E)$ mit den Eigenschaften*

*(E, b) heißt bekanntlich *separiert*, falls keine Gerade beschränkt ist. Falls darüberhinaus jede beschränkte Menge in einer konvexen, kreisförmigen, beschränkten Menge B enthalten ist, so dass $\langle B \rangle$ im Banachraum mit B als Einheitskugel ist, so heißt (E, b) *vollständig*.

i) $V_h + VM_hV_h = V = V_h + V_hM_hV$.

ii) *Für jede aufsteigende Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* E^+ *mit* $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E$ *und für jedes* $x \in X$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} V_h f_n(x) = V_h f(x).$$

Beweis. Wir zeigen, dass $(I + VM_h)$ in $BL(E)$ invertierbar ist ($I :=$ Identität auf E). Dazu genügt es zu zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(-VM_h)^n$ eine Cauchy–Reihe in $BL(E)$ ist: Sei zunächst für $k \in \mathbb{N}$ $A_0^k = A^{0,k} \subseteq \ldots \subseteq A^{N_k,k} = A_1^k$ eine $\left(r + \frac{1}{k}\right)$–Verfeinerung von (A_0^k, A_1^k) für V. $U := VM_h$ definiert einen Kern auf X. Die angegebene Verfeinerung von (A_0^k, A_1^k) ist eine $c\left(r + \frac{1}{k}\right)$–Verfeinerung für U.

Für k_0 mit

$$c < \frac{1}{r + \frac{1}{k_0}}$$

und jede nichtnegative reelle Zahlenfolge $a = (a_k)_{k\geq k_0}$ setzen wir $t(a) := (b_k)_{k\geq k_0}$, wobei

$$b_k := k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+N_k}{N_k}c^n\left(r+\frac{1}{k}\right)^n a_k \quad (\in \mathbb{R}^+).$$

Die folgende Menge B ist beschränkt in $BL(E)$

$$B := \{W \in BL(E)/W(B_a) \subseteq B_{t(a)} \text{ für alle Zahlenfolgen } a \text{ wie oben}\}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, $f \in B_a$ und $x \in A_1^k$. Nach Lemma 5 angewandt auf U gilt

$$|U|^n(x, |f|) \leq \binom{n+N_k}{N_k}c^n\left(r+\frac{1}{k}\right)^n a_k.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{m}(-VM_h)^n f(x)\right| &\leq \sum_{n=1}^{m}|U|^n(x,|f|) \\
&\leq \sum_{n=1}^{m}\binom{n+N_k}{N_k}c^n\left(r+\frac{1}{k}\right)^n a_k \\
&\leq \frac{b_k}{k} \qquad (l \in \mathbb{N}, m \geq l).
\end{aligned}$$

Deshalb gilt $|\sum_{n=1}^{m}(-VM_h)^n f(x)| \leq \varepsilon b_k$ zunächst für alle $k \geq \max\left\{\frac{1}{\varepsilon}, k_0\right\}$ und alle $l \in \mathbb{N}$ und $m \geq l$. Die obige Abschätzung zeigt darüber hinaus, dass die letzte Ungleichung für alle $k \geq k_0$, $f \in B_a$ und $x \in A_1^k$ gilt, falls l hinreichend groß gewählt wird. Somit hat man

$$\sum_{n=1}^{m}(-VM_h)^n f \in \varepsilon B$$

für alle hinreichend großen $l \in \mathbb{N}$ und $m \geq l$. Damit ist gezeigt, dass $\sum_{n=0}^{m}(-VM_h)^n$ eine Cauchy–Reihe in $BL(E)$ ist.

Wir setzen

$$V_h := (I + VM_h)^{-1}V \qquad (\in BL(E)).$$

i) Der erste Teil der Gleichung ist trivial. Der zweite Teil ergibt sich so:

$$\begin{aligned} V_h + V_h M_h V &= V_h(I + M_h V) = (I + VM_h)^{-1}V(I + M_h V) \\ &= (I + VM_h)^{-1}(I + VM_h)V = V. \end{aligned}$$

ii) Man betrachte die Doppelfolge $(a_{mn})_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}}$ komplexer Zahlen definiert durch

$$a_{mn} := \sum_{k=0}^{m} (-VM_h)^k V f_n(x).$$

Die Folgen $(a_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren für jedes $m \in \mathbb{N}$, da die Operatoren $(-VM_h)^k V$ vermöge Integration durch Kerne induziert werden (Lemma 3 angewandt auf $-U$). Wegen

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=0}^{m}(-VM_h)^k V f_n(x) - \sum_{k=0}^{\infty}(-VM_h)^k V f_n(x)\right| \\ \leq &\sum_{k=m+1}^{\infty} |VM_h|^k |V| f(x) \end{aligned}$$

konvergieren die Folgen $(a_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_h f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = V_h f(x).$$

Bemerkung. Falls V der Bedingung (A_0) genügt, so existiert V_h für jedes $h \in \mathfrak{B}_b(X, \mathbb{C})$.

Korollar 7. *Sei V wie in Satz 6 und seien $h, k \in \mathfrak{B}_b(X, \mathbb{C})$ mit $\sup_{x\in X} |h(x)| < \frac{1}{r}$ und $\sup_{x\in X} |k(x)| < \frac{1}{r}$. Dann gelten für die Operatoren V_h und V_k die "Resolventengleichungen"*

$$\begin{aligned} V_h + V_h M_{h-k} V_k &= V_k, \\ V_h + V_k M_{h-k} V_h &= V_k. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} V_k - V_h &= (V - V_h) - (V - V_k) = V_h M_h V - V M_k V_k \\ &= V_h M_h (V_k + V M_k V_k) - (V_h + V_h M_h V) M_k V_k \\ &= V_h M_{h-k} V_k. \end{aligned}$$

Vertauschen von h und k liefert die zweite Gleichung.

Die V_h sind zunächst beschränkte Operatoren auf E. Den Zusammenhang mit Kernen liefert

Proposition 8. *Sei $W : (E, b) \to (E, b)$ ein beschränkter linearer Operator. Dann gilt:*

i) *Die Abbildung $X \times CK(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert durch $(x, \varphi) \mapsto W\varphi(x)$ ist ein Kern auf X (geschrieben W).*

ii) $E \subseteq L^1(W)$.

iii) *Gilt zusätzlich*

$$\lim_{n\to\infty} W f_n(x) = W f(x)$$

für jede aufsteigende Folge (f_n) aus E^+ mit $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in E$ und alle $x \in X$, so gilt für jedes $g \in E$ und $x \in X$ $\quad Wg(x) = W(x, g)$.

Beweis. i) Es ist zu zeigen, dass für jedes $x \in X$ $\varphi \mapsto W\varphi(x)$ stetig auf $CK(X,\mathbb{C})$ (in der Topologie des induktiven Limes) ist. Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ ist $CK(X,K,1)$ beschränkt in E. Somit ist die Abbildung $CK(X,K,\mathbb{C}) \to E$ definiert durch $\varphi \mapsto W\varphi$ beschränkt und nach Eigenschaft 4 von (E,b) folgt die Behauptung.

ii) Sei $g \in E$, etwa $g \in \bigcap_{k \geq k_0} E_k$. Dann gibt es eine nach unten halbstetige Funktion $u \in E^+$, die $|g|$ majorisiert: Sei dazu $A := \bigcup_{k \geq k_0} A_0^k$. A ist eine Absorptionsmenge. Wir setzen

$$u(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in A \\ \sup |g| \bigcup_{j=0}^{i} A_1^{k_0+j} & \text{falls } x \in A_1^{k_0+i} \setminus \left(A \cup \bigcup_{j=0}^{i-1} A_1^{k_0+j} \right), \ (i \geq 0). \end{cases}$$

Wegen

$$|W|(x,u) = \sup_{\substack{\varphi \in CK(X,\mathbb{C}) \\ |\varphi| \leq u}} |W(x,\varphi)| = \sup_{\substack{\varphi \in CK(X,\mathbb{C}) \\ |\varphi| \leq u}} |W\varphi(x)| < \infty$$

(die Menge $\{\varphi \in CK(X,\mathbb{C}) / |\varphi| \leq u\}$ ist in E beschränkt) ist u und damit g $W(x,\cdot)$–integrabel für alle $x \in X$.

iii) Sei $x \in X$, $k_0 \in \mathbb{N}$ und A wie unter ii). Für jedes $h \in \mathfrak{B}_b(X,\mathbb{C})$ sei $h_0 := h \cdot 1_{\complement A}$ $(\in E)$. Wir setzen

$$H := \{h \in \mathfrak{B}_b(X,\mathbb{C}) / W(x,h_0) = Wh_0(x)\}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung und ii) $u_0 \in H$ für jede nach unten halbstetige Funktion $u \in \mathfrak{B}_b(X)^+$. Wieder nach Voraussetzung und ii) gilt $\lim_{n\to\infty} h_n \in H$ für eine aufsteigende und gleichmäßig beschränkte Folge (h_n) aus H^+. Da H gegen gleichmäßige Konvergenz abgeschlossen ist, gilt nach dem Satz von der monotonen Klasse $H = \mathfrak{B}_b(X,\mathbb{C})$. Somit ist iii) für beschränkte Funktionen $g \in E$ bewiesen. Für $g \in E^+$ gilt dann nach Voraussetzung und wegen ii)

$$W(x,g) = \lim_{n\to\infty} W(x, g \wedge n) = \lim_{n\to\infty} W(g \wedge n)(x) = Wg(x).$$

Als Folgerung erhalten wir nunmehr den

Satz 9. *Der Kern V auf X genüge der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$. Sei ferner $h \in \mathfrak{B}_b(X,\mathbb{C})$ mit $c := \sup_{x \in X} |h(x)| < \frac{1}{r}$. Dann gibt es einen Kern V_h auf X mit den folgenden Eigenschaften:*

i) $E \subseteq L^1(V_h)$.

ii) $V_h(\cdot, f) \in E$ *für alle* $f \in E$.

iii) $V_h + VM_hV_h = V = V_h + V_hM_hV$
[d.h. $V_h(x,\varphi) + V(x, hV_h(\cdot,\varphi)) = V(x,\varphi) = V_h(x,\varphi) + V_h(x, hV(\cdot,\varphi))$ *für alle* $x \in X$, $\varphi \in CK(X,\mathbb{C})$].

Beweis. Nach Satz 6 gibt es einen Operator $V_h \in BL(E)$ mit der Eigenschaft ii) von Satz 6. Dieser wird nach Proposition 8 durch einen Kern V_h induziert, der die Eigenschaften i) und ii) besitzt. Dabei ist insbesondere die Integration einer Funktion $f \in E$ nach dem Kern V_h gleichbedeutend mit der Anwendung des Operators V_h auf f. Hieraus folgt iii).

Bemerkung. Auch für Kerne gilt die zu Korollar 7 analoge Aussage. Es folgt eine Eindeutigkeitsaussage über den in Satz 6 konstruierten Operator. Wir zeigen, dass er sogar als Operator in $L(E)$ eindeutig bestimmt ist.

Proposition 10. *V genüge der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$ und für $h \in \mathfrak{B}_b(X, \mathbb{C})$ gelte $\sup_{x \in X} |h(x)| < \frac{1}{r}$. Dann gibt es genau einen Operator $V_h \in L(E)$ mit der Eigenschaft $V_h + VM_hV_h = V \quad (V_h + V_hM_hV = V)$.*

Beweis. Die Existenzaussage folgt aus Satz 6. Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei zunächst $V_h \in L(E)$ mit $V_h + VM_hV_h = V$. Wegen der Invertierbarkeit von $(I + VM_h)$ (siehe Beweis von Satz 6) folgt hieraus $V_h = (I + VM_h)^{-1}V$. Wie im Beweis von Satz 6 zeigt man, dass auch $(I + M_hV)$ in $BL(E)$ invertierbar ist. Dies liefert die Eindeutigkeit eines Operators $V_h \in L(E)$ mit $V_h + V_hM_hV = V$.

Einen zu Satz 9 gehörigen Eindeutigkeitssatz bringen wir nur im Rahmen des nächsten Kapitels.

3. Existenz und Eindeutigkeit von Resolventen

Satz 11. *Der Kern V auf X genüge der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$. Dann existiert eine Resolvente $(V_p)_{|p|<\frac{1}{r}}$ in $BL(E)$ mit den Eigenschaften*

i) $V_0 = V$.

ii) *Die Abbildung $K\left(0, \frac{1}{r}\right) \to BL(E)$ definiert durch $p \mapsto V_p$ ist holomorph.*

Diese Resolvente ist die einzige in $L(E)$ mit der Eigenschaft i).

Beweis. Sei 1_X die konstante Funktion Eins auf X. Wir setzen

$$V_p := V_{p1_X} \in BL(E) \qquad \left(p \in \mathbb{C}, |p| < \frac{1}{r}\right)$$

(siehe Satz 6). Es ist klar, dass $(V_p)_{|p|<\frac{1}{r}}$ eine Resolvente in $BL(E)$ mit den Eigenschaften i) und ii) ist. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus Proposition 10.

Auf diese Resolvente kann der Operatorenkalkül in bornologischen Vektorräumen von Sebastião e Silva angewandt werden (vgl. [14]). Wir werden dies hier nicht weiter verfolgen.

Für die im folgenden Satz enthaltene Eindeutigkeitsaussage ist folgende Begriffsbildung zweckmäßig:

Definition. Sei $0 \in D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Resolvente $(V_p)_{p \in D}$ von Kernen auf X heißt eine *Absorptionsresolvente von Kernen* auf X für V, wenn gilt:

a) $V_0 = V$.

b) Für jedes $p \in D$ gibt es eine reelle Zahl s mit $0 < s < \frac{1}{|p|}$ und eine Folge $((B_0^k, B_1^k))_{k \in \mathbb{N}}$ von s–verfeinerbaren A–Paaren für V mit den Eigenschaften

i) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_0^k = \emptyset, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{B}{}_0^k = X$.

ii) $E' \subseteq L^1(V_p)$.

iii) $V_p(\cdot, f) \in E'$ für alle $f \in E'$.

Dabei ist der bornologische Raum (E', b') für $((B_0^k, B_1^k))_{k \in \mathbb{N}}$ zu bilden (vgl. Kapitel 2).

Satz 12. *Der Kern V auf X genüge der Bedingung (A_r) für ein $r \geq 0$. Dann gibt es genau eine Absorptionsresolvente $(V_p)_{|p|<\frac{1}{r}}$ von Kernen auf X für V.*

Beweis. Sei wieder 1_X die konstante Funktion Eins auf X. Für $|p| < \frac{1}{r}$ sei V_{p1_X} der in Satz 8 definierte Kern V_h zur Funktion $h = p1_X$.

Wir setzen

$$V_p := V_{p1_X}.$$

Es ist klar, dass $(V_p)_{|p|<\frac{1}{r}}$ eine Absorptionsresolvente von Kernen für V ist. Sei zum Nachweis der Eindeutigkeit $(W_p)_{|p|<\frac{1}{r}}$ eine beliebige Absorptionsresolvente von Kernen auf X für V. Dann gibt es für jedes $q \in \mathbb{C}$, $|q| < \frac{1}{r}$ eine reelle Zahl s mit $0 < s < \frac{1}{|q|}$ und eine Folge $((B_0^k, B_1^k))_{k\in\mathbb{N}}$ von s–verfeinerbaren A–Paaren für V mit den Eigenschaften:

i) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_0^k = \emptyset$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{B}{}_1^k = X$.

ii) $E' \subseteq L^1(W_q)$.

iii) $W_q(\cdot, f) \in E'$ für alle $f \in E'$,

wobei der bornologische Raum (E', b') für $((B_0^k, B_1^k))_{k\in\mathbb{N}}$ zu bilden ist (vgl. Kapitel 2). Nach Satz 11 (angewandt auf E') gibt es genau eine Resolvente $(V_p')_{|p|<\frac{1}{s}}$ in $L(E')$ mit $V_0 = V$; somit gilt $W_q(\cdot, f) = V_q' f$ für alle $f \in E'$. Andererseits gilt $V_q(\cdot, \varphi) = V_q'\varphi$ für $\varphi \in CK(X, \mathbb{C})$, denn beide Funktionen sind gleich $\sum_{n=0}^{\infty} (-q)^n V^{n+1}\varphi$. Hieraus folgt $W_q = V_q$ für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < \frac{1}{r}$.

4. Die Bedingung (A_0) bei hyperbolischen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir verwenden in diesem Kapitel die Bezeichnungen von [6] und [13]. Sei $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom und $P(D_1, \ldots, D_n)$ der zugehörige lineare Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf $\mathbb{R}^n$ $\left(D_k := -i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$. P_m sei der Hauptteil von P.

Definition. P [oder $P(D_1, \ldots, D_n)$] heißt *hyperbolisch*, wenn es $0 \neq N \in \mathbb{R}^n$ gibt mit den Eigenschaften

i) $P_m(N) \neq 0$,

ii) es existiert $\tau_0 \in \mathbb{R}$ mit $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau < \tau_0$.

Man sagt in diesem Falle auch, P sei hyperbolisch bezüglich N. Aus [6], p. 137 entnehmen wir folgenden

Satz (Gårding). *Sei P hyperbolisch bzgl. $N \in \mathbb{R}^n$, $N \neq 0$. Dann gibt es genau eine Fundamentallösung $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ von $P(D_1, \ldots, D_n)$ deren Träger in $\{x \in \mathbb{R}^n/(x, N) \geq 0\}$ liegt. Darüberhinaus liegt der Träger von G in einem abgeschlossenen konvexen Kegel C, für welchen gilt*

$$C \cap \{x/(x, N) \leq 0\} = \{0\}.$$

Wir erhalten nun

Proposition 13. *Sei P hyperbolisch bzgl. N und sei $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ die Fundamentallösung von $P(D_1, \ldots, D_n)$ mit* $\operatorname{supp} G \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n/(x, N) \geq 0\}$*. Falls G ein Radon–Maß ist, so genügt $V := G*$ der Bedingung (A_0).*

Beweis. Wir können annehmen, $N = (1, 0, \ldots, 0)$. Zunächst zeigen wir, dass G keine Masse auf den Hyperebenen $\{x \ / \ x_1 = a\}$ trägt $(x = (x_1, \ldots, x_n))$. Seien dazu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\psi \in$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ beliebig. Wir setzen wie in [6], p. 138 $F := e^{\langle\cdot,\tau N\rangle}G$ wobei $\tau < \tau_0$ fest gewählt sei. Dann gilt $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Da $\varphi\otimes\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ haben wir für die Fourier–Transformierte $\widehat{(\varphi\otimes\psi)F} = (\widehat{\varphi}\otimes\widehat{\psi}) * \widehat{F}$. Sei π die kanonische Projektion $\mathbb{R}^n \to \langle N\rangle$. Dann gilt für das Bildmaß $\pi[(\varphi\otimes\psi)F]$

$$\begin{aligned}\pi[\widehat{(\varphi\otimes\psi)}F](\varrho_1) &= [(\widehat{\varphi}\otimes\widehat{\psi}) * \widehat{F}](\varrho_1, 0, \dots, 0)\\ &= \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \dots \int_{\mathbb{R}} d\xi_n \widehat{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)\widehat{\varphi}(\varrho_1 - \xi_1)\widehat{\psi}(-\xi_2, \dots, -\xi_n).\end{aligned}$$

Nun gilt aber $\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{P(\xi+i\tau N)}$. Da P hyperbolisch ist [und da $N = (1, 0, \dots, 0)$], hat $P(\xi+i\tau N)$ die Darstellung

$$P(\xi + i\tau N) = c\xi_1^m + Q(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

mit $c \neq 0$, wobei Q vom Grade m ist und keinen Term ξ_1^m enthält. Aus der Hyperbolizität von P folgt außerdem die Existenz von $K > 0$ mit $|P(\xi + i\tau N| \geq K$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\{\pi[(\varphi\otimes\psi)F]\}\widehat{\ }(\varrho_1) = \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \widehat{\varphi}(\varrho_1 - \xi_1) \int_{\mathbb{R}} d\xi_2 \dots \int_{\mathbb{R}} d\xi_n \frac{\widehat{\psi}(-\xi_2, \dots, -\xi_n)}{P(\xi + i\tau N)}.$$

Für jedes $\xi_1 \in \mathbb{R}$ sei

$$f_{\xi_1}(\xi_2, \dots, \xi_n) := \frac{\widehat{\psi}(-\xi_2, \dots, -\xi_n)}{P(\xi + i\tau N)} \quad ((\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Die Funktionen f_{ξ_1} sind durch die auf $\mathbb{R}^{n-1}$ integrable Funktion

$$(\xi_2, \dots, \xi_n) \mapsto \frac{\widehat{\psi}(-\xi_2, \dots, -\xi_n)}{K}$$

majorisiert.

Obige Darstellung von P zeigt nun über den Lebesgueschen Konvergenzsatz, dass

$$\xi_1 \to \int_{\mathbb{R}} d\xi_2 \dots \int_{\mathbb{R}} d\xi_n f_{\xi_1}(\xi_2, \dots, \xi_n)$$

eine Funktion aus $C_0(\mathbb{R})$ ist. Damit ist gezeigt, dass auch $\{\pi[(\varphi\otimes\psi)F]\}\widehat{\ }$ im Unendlichen verschwindet. Aus einem Satz von Wiener (siehe [12], p. 118) folgt, dass $\pi[(\varphi\otimes\psi)F]$ keine Masse auf den Punkten von $\mathbb{R}$ trägt. Da dies für alle solchen φ und ψ gilt, ist die obige Zwischenbehauptung bewiesen.

Nun ist leicht zu sehen, dass V der Bedingung (A_0) genügt: Sei dazu für $a \in R$ $H_a := \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \leq a\}$. Die Mengen H_a sind Absorptionsmengen für V. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(a) := |V|(0, \complement H_a)$ ist nach dem oben Bewiesenen stetig und damit auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig. Hieraus folgt die Behauptung.

Die Fundamentallösung G ist nicht für alle hyperbolischen P ein Radon–Maß. Z.B. ist für $P(D) = \square_5$ die Fundamentallösung G eine Distribution der Ordnung 1; vgl. dazu [3], p. 236. Es gilt jedoch

Lemma 14. *Sei G die Fundamentallösung von $P(D_1, \dots, D_n)$ mit*

$$\operatorname{supp} G \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n / (x, N) \geq 0\}.$$

Falls dann die Abbildung $\xi \mapsto \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{P(\xi+i\tau N)}$ für jedes $\varphi \in CK(\mathbb{R}^n)$ und für ein $\tau < \tau_0$ Lebesgue–integrabel auf $\mathbb{R}^n$ ist, so ist G ein Radon–Maß.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $F := e^{\langle\cdot,\tau N\rangle}G$ ein Radon–Maß ist. Dazu zeigen wir, dass $F * \varphi$ stetig für alle $\varphi \in CK(\mathbb{R}^n)$ ist (siehe [13], p. 192).

Wegen $\widehat{F}(\xi) = \frac{1}{P(\xi+i\tau N)}$ gilt aber für das endliche Maß

$$\mu(d\xi) := \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{P(\xi + i\tau N)}\lambda^n(d\xi)$$

$$\widehat{\mu}(-x) = \widehat{\widehat{F}\widehat{\varphi}}(-x) = \widehat{\widehat{F * \varphi}}(-x) = (2\pi)^n F * \varphi(x).$$

Dies zeigt die Behauptung.

Korollar 15. *Für ein $\tau < \tau_0$ gelte $\frac{1}{P(\cdot+i\tau N)} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist G ein Radon–Maß.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus $\widehat{\varphi} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $\varphi \in CK(\mathbb{R}^n)$.

Sei z.B. $P(\xi) = \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n}$ mit $k_j \in \{1, 2, 3, \dots\}$ Dann ist P hyperbolisch bzgl. $N = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Aus Korollar 15 und Proposition 13 folgt, dass die im Satz von Gårding ausgezeichnete Fundamentallösung G von $P(D)$ der Bedingung (A_0) genügt.

Literatur

[1] Heinz Bauer. *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie.* Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[2] P.R. Garabedian. *Partial differential equations.* Wiley and Sons, New York, London, Sydney, 1964.

[3] J. Hadamard. *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Hermann, Paris, 1932.

[4] F. Hirsch. Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels. *Ann. d. l'Inst. Fourier*, 22(1):89–210, 1972.

[5] H. Hogbe-Nlend. *Théorie des bornologies et applications.* Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[6] L. Hörmander. *Linear partial differential operators.* Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

[7] G.A. Hunt. Markoff processes and potentials. II. *Illinois J. Math.*, 1:316–369, 1957.

[8] G. Lion. Construction du semi-groupe associé à un noyau de Hunt. Technical report, Institut Henri Poincaré, Paris, 1960/61. Séminaire Brelot–Choquet–Deny, 5^e année.

[9] G. Lion. Théorème de représentation d'un noyau l'intégrale d'un semi-groupe. Technical report, Institut Henri Poincaré, Paris, 1961/62. Séminaire Brelot–Choquet–Deny, 6^e année fasc.1.

[10] G. Mokobodzki and D. Sibony. Cônes de fonctions et théorie du potentiel. II. Résolventes et semi-groupes subordonnés à un cône de fonctions. Technical report, Institut Henri Poincaré, Paris, 1966/67. Séminaire Brelot–Choquet–Deny, 11^e année.

[11] Gunter Ritter. *Eine Methode zur Konstruktion von Resolventen mit Hilfe von Absorptionsmengen.* PhD thesis, Universität Erlangen, Erlangen, 1974.

[12] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience Publ., New York, London, 1962.

[13] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions. Nouvelle édition.* Hermann, Paris, 1966.

[14] J. Sebastião e Silva. Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non borné. *Annali di mat. pura ed appl.*, 58:219–275, 1962.

[15] J.C. Taylor. On the existence of Submarkovian resolvents. *Inventiones math.*, 17:85–93, 1972.

[16] L. Waelbroeck. *Topological vector spaces and algebras*. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

G. Ritter
Mathematisches Institut der Universität
D-8520 Erlangen
Bismarckstr. $1\frac{1}{2}$
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 19. Dezember 1974)