Math. Ann. 224, 77—96 (1976)

Über die Integrierbarkeit von Fourier-Transformierten auf Gruppen. Teil I. Stetige Funktionen mit kompaktem Träger und eine Bemerkung über hyperbolische Differentialoperatoren

Edwin Hewitt* und Gunter Ritter

Mathematisches Institut der Universität, Bismarckstr. 1 1/2, D-8520 Erlangen, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

1.1. Geschichte des Problems. Seit der Entdeckung des Satzes von Riesz-Fischer (1906—1907) ist es eine natürliche Frage, ob die Fourier-Koeffizienten von Funktionen in gewissen Teilräumen von $\mathfrak{L}_2(\mathbb{T})$ schneller gegen 0 konvergieren als die Funktionen aus l_2. Eine erste Antwort auf diese Frage gab im Jahre 1918 Carleman [3], indem er eine stetige Funktion f auf $\mathbb{T}$ mit der Eigenschaft $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon} = \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ konstruierte. Sein Beweis wurde von Landau [8] modifiziert, und Gronwall [5] verschärfte 1921 Carlemans Konstruktion. Im Jahre 1931 bewiesen Orlicz [10], Paley [11] und Sidon [15] fast gleichzeitig einen Satz, der einen Schlußpunkt hinter diese Entwicklung setzte: Wenn $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nicht in l_2 ist, dann gibt es eine stetige Funktion f auf $\mathbb{T}$, so daß $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n \hat{f}(n)| = \infty$. Seit dem Erscheinen des Plancherelschen Satzes (1910) wäre es natürlich gewesen, derartige Fragen auch auf der reellen Geraden $\mathbb{R}$ zu stellen, aber soweit uns bekannt ist, hat sich mit diesem Phänomen auf $\mathbb{R}$ oder überhaupt auf einer von $\mathbb{T}$ verschiedenen lokalkompakten abelschen Gruppe noch niemand befaßt. In der vorliegenden Arbeit studieren wir das Integrationsverhalten von Fourier-Transformierten stetiger Funktionen mit kompaktem Träger und erhalten (mit Ausnahme des Orlicz-Paley-Sidon'schen Satzes im Falle der Gruppe $\mathbb{R}^n$) vollständige Informationen. Unsere Aufmerksamkeit wurde durch Ergebnisse eines der Autoren über hyperbolische Differentialoperatoren [12] auf diesen Gegenstand gelenkt. Eine diesbezügliche Erörterung befindet sich in (2.11).

In einer weiteren Arbeit, die in den Proceedings of the Royal Irish Academy erscheinen wird, werden wir ähnliche Fragen für singuläre Maße behandeln. Kurz gesagt kann die Fourier-Stieltjes-Transformierte eines solchen Maßes in jedem Raum $\mathfrak{L}_r$ $(r>2)$ liegen.

---

* Der erstgenannte Verfasser wurde durch ein Senior U.S. Scientist Award der Alexander-von-Humboldt-Stiftung gefördert. Er benutzt diese Gelegenheit, um der Stiftung herzlich zu danken

1.2. Notation und Terminologie. Wo nicht ausdrücklich anderes vereinbart wird, bezeichnet G eine nicht-diskrete, lokalkompakte, abelsche Gruppe und X die Charaktergruppe von G. Bekanntlich läßt sich G in der Form $\mathbb{R}^n \times H$ schreiben, wobei n eine nicht-negative, ganze Zahl ist und H eine lokalkompakte abelsche Gruppe die eine kompakte, offene Untergruppe J enthält ([6], (24.30)). Wenn $n=0$ ist, verzichten wir auf den Faktor $\mathbb{R}^0$. Da G nicht diskret ist, ist J im Falle $n=0$ eine unendliche, kompakte, abelsche Gruppe. Wir normieren das Haar-Maß auf $G(X)$ wie in [6], (31.1) mit $c=(2\pi)^{n/2}$ und schreiben es $\lambda(\theta)$. Für $f \in \mathfrak{L}_1(G)$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ die durch

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \overline{\chi(t)} f(t) d\lambda(t) \quad (\chi \in X) \tag{1}$$

definierte Funktion in $\mathfrak{C}_0(X)$, dem Raum aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden. Wie üblich bezeichnet $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen, der hier vor allem als additive Gruppe betrachtet wird, $\mathbb{T}$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1 und $\mathbb{Z}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Wir identifizieren die Charaktergruppen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ und $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{T}$. Für $G=\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$ und $\mathbb{Z}$ wird aus (1) also

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iut) dt \quad (u \in \mathbb{R}),$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-int) dt \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

bzw.

$$\hat{f}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \exp(-int) \quad (t \in \mathbb{T}).$$

Das Symbol $\mathfrak{C}_k(G)$ bezeichnet den Vektorraum aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger. Die übrigen Notationen und Terminologien werden aus [6] übernommen.

1.3. Darstellung der Probleme. Sei $f \in \mathfrak{C}_k(G)$. Aus dem Satz von Plancherel und der Tatsache, daß $\hat{f}$ in $\mathfrak{C}_0(X)$ liegt und daher beschränkt ist, folgt, daß $\hat{f}$ in $\mathfrak{L}_p(X)$ für alle $p \geqq 2$ ist. Gibt es ein $p<2$, so daß $\hat{f} \in \mathfrak{L}_p(X)$ für alle $f \in \mathfrak{C}_k(G)$ gilt? Oder, allgemeiner, gibt es eine Funktion $\varphi:]0, \infty[\to]0, \infty[$ mit $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$, so daß

$$\int_X |\hat{f}(\chi)|^2 \varphi(|\hat{f}(\chi)|^{-1}) d\theta(\chi) < \infty$$

gilt? Für $G=\mathbb{T}$ haben Carleman und Gronwall beide Fragen negativ beantwortet. Schließlich, sei w eine nicht-negative, beschränkte, meßbare Funktion auf X, die nicht in $\mathfrak{L}_2(X)$ ist. Gibt es ein $f \in \mathfrak{C}_k(G)$, so daß $\hat{f}w$ nicht in $\mathfrak{L}_1(X)$ ist? Wir werden diese Fragen in den folgenden Abschnitten beantworten und das mögliche $\mathfrak{L}_p$-Verhalten von $\hat{f}$ vollständig beschreiben.

1.4. Bemerkung. Es ist bemerkenswert, daß man entsprechende Aussagen nicht erhält, wenn man fordert, daß $\hat{f}$ nichtnegativ ist. Siehe [6], (31.42).

2. $\mathfrak{L}_p$-Verhalten von $\hat{f}\,(f \in \mathfrak{C}_k(G))$

Wir zeigen, daß das Integrierbarkeitsverhalten von $\hat{f}$ im beschriebenen Rahmen beliebig sein kann. Hier ist unser Resultat:

2.1. Satz. *Sei G eine nicht-diskrete, lokal-kompakte, abelsche Gruppe.*

(a) *Sei $1 \leqq r < 2$. Dann gibt es $f \in C_k(G)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

(i) $\hat{f} \in \mathfrak{L}_p(X)$ *für alle* $p > r$;

(ii) $\hat{f} \notin \mathfrak{L}_p(X)$ *für alle* p *mit* $1 \leqq p \leqq r$.

(b) *Sei $1 \leqq r \leqq 2$. Dann gibt es $g \in \mathfrak{C}_k(G)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

(iii) $\hat{g} \in \mathfrak{L}_p(X)$ *für alle* $p \geqq r$;

(iv) $\hat{g} \notin \mathfrak{L}_p(X)$ *für alle* p *mit* $1 \leqq p < r$.

Den Beweis werden wir in diesem Abschnitt stufenweise durchführen.

2.2. Geschichtliches. Wenn man nicht verlangt, daß f kompakten Träger hat, kann man Satz 2.1 ziemlich einfach wie in 2.8 beweisen (mutatis mutandis), wobei man eine stetige Funktion in $\mathfrak{L}_1(G)$ benutzt, deren Fourier-Transformierte kompakten Träger hat. Das Neue tritt schon im klassischen Fall $G = \mathbb{R}^1$ auf, dem 2.5 gewidmet ist. Im Falle $G = \mathbb{T}$, wo $\hat{f}$ aus den Fourier-Koeffizienten einer stetigen, periodischen Funktion besteht, ist Teil b) für $r = 2$ schon von Carleman (loc. cit.) bewiesen worden. Der Carlemansche Satz ist von vielen Autoren auf verschiedenste Art bewiesen worden. Wir verwenden später (3.3 unten) die Beweisidee von Sidon [16]. Schließlich möchten wir die explizite Konstruktion bei Katznelson [7], Chapter IV, §2.3 erwähnen, die uns einen nützlichen Hinweis auf den Beweis von 2.5 lieferte.

2.3. Bezeichnungen. Wir befassen uns zunächst mit dem Fall $G = \mathbb{R}$, der allerdings der interessanteste ist. In 2.3–2.5 stehe $\mathfrak{L}_p$ für $\mathfrak{L}_p(\mathbb{R}, \mu)$, wobei μ das gewöhnliche Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$ bedeutet. Für eine willkürliche Funktion f auf $\mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $D_a f$ und $T_c f$ folgendermaßen:

$$D_a f(t) := f\left(\frac{t}{a}\right) \qquad (0 < a < \infty)$$

und

$$T_c f(t) := f(t - c) \qquad (-\infty < c < \infty).$$

D_a ist also eine Dilation, T_c eine Translation.

Für $b \in \mathbb{R}$, stehe χ_b abkürzend für den Charakter $t \to \exp(ibt)$ der Gruppe $\mathbb{R}$.

2.4. Lemma. *Sei $h \in \mathfrak{L}_1$ von Null verschieden und sei $\hat{h} \in \mathfrak{L}_r$ für eine reelle Zahl $r \in [1, \infty[$. Dann gibt es eine strikt positive Konstante C, so daß für alle a mit $0 < a < \infty$ und alle $b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $\|\widehat{\chi_b T_c D_a h}\|_r = C a^{\frac{r-1}{r}}$

(Die Konstante hängt nur von h und r ab.)

Beweis. Natürlich gilt $\|\widehat{\chi_b T_c D_a h}\|_r = \|\widehat{D_a h}\|_r$. Außerdem sieht man leicht, daß $\widehat{D_a h}(u) = a\hat{h}(au)$. Damit erhält man dann (i) aus der evidenten Gleichheit

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{D_a h}(u)|^r du = a^r \int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(au)|^r du = a^{r-1} \|\hat{h}\|_r^r$$

und der Voraussetzung $\hat{h} \in \mathfrak{L}_r$, wobei $C = \|\hat{h}\|_r$.

2.5. Satz. *Satz 2.1 gilt für* $G = \mathbb{R}$.

Beweis. Wir konstruieren explizit zwei derartige Funktionen f und g.

Fall (a). Für die Konstruktion von f können wir von einer beliebigen Funktion $h \in \mathfrak{C}_k(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ausgehen, die die zusätzliche Eigenschaft $\hat{h} \in \mathfrak{L}_r$ hat. Wir setzen aber im folgenden voraus $h(t) := \max\{1 - |t|, 0\}$. Dann ergibt sich

$$\hat{h}(u) = \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^2, \quad \text{also} \quad \hat{h} \in \mathfrak{L}_r \quad \text{für allle} \quad r \geqq 1 .$$

Wir definieren nun vier Folgen reeller Zahlen (a_m), (b_m), (c_m) und (l_m), sowie eine disjunkte Folge (A_m) kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ $(m \geqq 1)$.

$$a_m := \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{r-1}} & \text{für} \quad 1 < r < 2 , \\ \frac{1}{2^m} & \text{für} \quad r = 1 . \end{cases}$$

Die Folge (c_m) sei so gewählt, daß die Funktionen $T_{c_m} D_{a_m} h = T_{c_m}(D_{a_m} h)$ paarweise disjunkte Träger haben und die Vereinigung dieser Träger beschränkt ist. Dies ist möglich, da der Träger von $D_{a_m} h$ das Intervall $[-a_m, a_m]$ ist und da $\sum_{m \geqq 1} a_m < \infty$ ist. Als l_m nehmen wir $l_m := \frac{1}{(1 + \log m)^{1/2}}$. Die Folgen (b_m) und (A_m) bestimmen wir durch Induktion: $b_1 := 0$. Sei A_1 ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\int_{A_1} |\widehat{T_{c_1} D_{a_1} h}|^r d\mu \geqq \frac{C^r}{2} a_1^{r-1}$$

(siehe 2.4) und

$$\int_{\mathbb{R} \setminus A_1} |\widehat{T_{c_1} D_{a_1} h}|^r d\mu \leqq l_1^r \frac{C^r}{2} \frac{a_1}{2^{2(1+1)}} .$$

Seien nun b_j und A_j für $1 \leqq j \leqq m-1$ bestimmt. Dann kann man die Fourier-Transformierte der Funktion $T_{c_m} D_{a_m} h$ durch Multiplikation dieser Funktion mit einem geeigneten Charakter χ_{b_m} so verschieben, daß es ein kompaktes Intervall $A_m \subseteqq \mathbb{R}$ gibt mit den Eigenschaften:

$$\int_{A_m} |\widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|^r d\mu \geqq \frac{C^r}{2} a_m^{r-1} \quad \text{(siehe 2.4)}, \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus A_m} |\widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|^r d\mu \leqq l_m^r \frac{C^r}{2} \frac{a_m}{2^{2(m+1)}}, \tag{2}$$

$$|\widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}| \leqq 1 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}\setminus A_m, \tag{3}$$

$$\int_{A_m} |\widehat{\chi_{b_k} T_{c_k} D_{a_k} h}|^r d\mu \leqq l_m^r \frac{C^r}{2} \frac{a_m}{2^{2(k+1)}} \quad (k<m), \tag{4}$$

$$A_m \cap A_k = \emptyset \, (k<m). \tag{5}$$

Wir setzen $f_k := \chi_{b_k} T_{c_k} D_{a_k} h$ für alle $k \geqq 1$. $\|\cdot\|_{q,k}$ sei die $\mathfrak{L}_q$-Norm auf A_k, aufgefaßt als Unterraum des Maßraumes $(\mathbb{R}, \mu)$. Aus (2), (4) und (5) folgt wegen der Antitonie von (l_k) und (a_k)

$$\|\hat{f}_m\|_{r,k}^r \leqq l_k^r \frac{C^r}{2} \frac{a_k}{2^{2(m+1)}} \quad (m \neq k). \tag{6}$$

Wir zeigen nun, daß die Funktion

$$f := \sum_{m=1}^{\infty} l_m f_m$$

die verlangten Eigenschaften 2.1.i und 2.1.ii hat. Zunächst ist klar, daß f wegen der Wahl von (c_m) und (l_m) stetig mit kompaktem Träger ist. Sei nun p eine reelle Zahl mit $r<p\leqq 2$.

Dann gilt mit $B := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $\|v\|_{q,B}^q := \int_B |v|^q d\mu$

$$\|\hat{f}\|_p^p = \sum_k \left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{p,k}^p + \left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{p,B}^p. \tag{7}$$

Für den ersten Summanden in (7) ergibt sich

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{p,k}^p \leqq \left[\|\hat{f}_k\|_{p,k} + \sum_{m \neq k} \|\hat{f}_m\|_{p,k} \right]^p \tag{8}$$

und wegen (3) und (6) haben wir für $m \neq k$

$$\|\hat{f}_m\|_{p,k}^p \leqq \|\hat{f}_m\|_{r,k}^r \leqq l_k^r \frac{C^r}{2} \frac{a_k}{2^{2(m+1)}}. \tag{9}$$

Dann ergeben (8), (2.4), (9) und eine leichte Abschätzung

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{p,k}^p \leqq \left[C^{1/p} a_k^{\frac{p-1}{p}} + l_k^{r/p} \frac{C^{r/p}}{2^{1/p}} \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} \frac{a_k^{1/p}}{2^{\frac{2}{p}(m+1)}} \right]^p$$

$$\leqq a_k^{p-1} \left[C^{1/p} + \frac{C^{r/p}}{2^{1/p}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{2}{p}(m+1)}} \right]^p.$$

Aus der Wahl von (a_k) folgt nun die Konvergenz von $\sum_k \left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{p,k}^p$, des ersten Summanden in (7).

Für den zweiten Summanden in (7) gilt wegen (3) und (2)

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{p,B}^p &\leqq \left[\sum_{m=1}^{\infty} \| l_m \hat{f}_m \|_{p,B} \right]^p \\
&\leqq \left[\sum_{m=1}^{\infty} l_m \| \hat{f}_m \|_{r,B}^{r/p} \right]^p \\
&\leqq \left[\sum_{m=1}^{\infty} l_m^{\frac{r}{p}+1} \frac{C^{r/p}}{2^{1/p}} \frac{a_m^{1/p}}{2^{\frac{2}{p}(m+1)}} \right]^p < \infty .
\end{aligned}$$

Deshalb ist (7) endlich und es gilt 2.1.i im vorliegenden Fall.

Wir beweisen jetzt 2.1.ii. Es genügt zu zeigen, daß $\hat{f} \notin \mathfrak{L}_r$. Wegen (5) gilt

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_r^r &\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{m=1}^{\infty} l_m \hat{f}_m \right\|_{r,k}^r \\
&\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \left| l_k \| \hat{f}_k \|_{r,k} - \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} l_m \| \hat{f}_m \|_{r,k} \right|^r .
\end{aligned} \tag{11}$$

Wegen (6) und wegen $a_k \leqq 1$ haben wir aber

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m \\ m \neq k}} l_m \| \hat{f}_m \|_{r,k} &\leqq l_k \frac{C}{2^{1/r}} a_k^{1/r} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l_m}{2^{\frac{2}{r}(m+1)}} \\
&\leqq \tfrac{1}{2} l_k \frac{C}{2^{1/r}} a_k^{1/r} \\
&\leqq \tfrac{1}{2} l_k \frac{C}{2^{1/r}} a_k^{\frac{r-1}{r}} .
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Formeln (11), (12) und (1) ergeben zusammen

$$\| \hat{f} \|_r^r \geqq \frac{C^r}{2} \frac{1}{2^r} \sum_{k=1}^{\infty} l_k^r a_k^{r-1} = \infty .$$

Wir wenden uns nun dem Falle (b) zu. Für $r=1$ kann man einfach $g=h$ nehmen. Falls $r>1$ ist, wählen wir eine strikt aufsteigende Folge $(r_m)_{m \geqq 1}$ aus $[1, r[$ mit $\lim_{n \to \infty} r_m = r$. Nach Fall (a) dieses Satzes gibt es eine Folge $(g_m)_{m \geqq 1}$ in $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$ mit Träger in $[0, 1]$ und den Eigenschaften

$$\hat{g}_m \in \mathfrak{L}_p \quad (p > r_m), \tag{13}$$

$$\| \hat{g}_m \|_r \leqq 1 , \tag{14}$$

$$\hat{g}_m \notin \mathfrak{L}_p \quad (p \leqq r_m), \tag{15}$$

$$\| g_m \|_\infty \leqq 1 , \tag{16}$$

$$\| \hat{g}_m \|_\infty \leqq 1 . \tag{17}$$

Wir bestimmen nun, ähnlich wie in (a), durch Induktion eine Folge (e_m) von reellen Zahlen und eine Folge (B_m) von kompakten Intervallen:
$e_1 := 0$. Es sei B_1 ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, so daß

$$\int_{B_1} |\hat{g}_1|^{r_1}\, d\mu \geqq 2 .$$

Seien nun e_j und B_j für $1 \leqq j \leqq m-1$ bestimmt. Dann kann man wegen (15) $e_m \in \mathbb{R}$ und ein kompaktes Intervall B_m so bestimmen, daß gilt

$$\int_{B_m} |\widehat{\chi_{e_m} g_m}|^{r_m} d\mu \geqq 2^m , \tag{18}$$

$$|\widehat{\chi_{e_m} g_m}(u)| \leqq \frac{1}{2(1+\mu(B_k))} \quad (k<m, u \in B_k), \tag{19}$$

$$|\widehat{\chi_{e_k} g_k}(u)| \leqq \frac{1}{2(1+\mu(B_m))} \quad (k<m, u \in B_m), \tag{20}$$

$$B_m \cap B_k = \emptyset \quad (k<m). \tag{21}$$

Wegen (16) ist klar, daß $g := \sum_{m \geqq 1} \frac{1}{2^m} \chi_{e_m} g_m \in \mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$ und aus (14) folgt $\hat{g} \in \mathfrak{L}_r$ und damit $\hat{g} \in \mathfrak{L}_p$ für $p \geqq r$.

Sei nun $p<r$. Wir bezeichnen wieder mit $\|\cdot\|_{q,k}$ die $\mathfrak{L}_q$-Norm auf B_k. Die Ungleichungen (19) und (20) sind offenbar äquivalent mit

$$\|\widehat{\chi_{e_m} g_m}\|_{\infty,k} \leqq \frac{1}{2(1+\mu(B_k))} \quad (k \neq m). \tag{22}$$

Damit erhält man für $k \neq m$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\chi_{e_m} g_m}\|_{p,k} &= \left[\int_{B_k} |\widehat{\chi_{e_m} g_m}|^p\, d\mu\right]^{1/p} \leqq [\|\widehat{\chi_{e_m} g_m}\|_{\infty,k}^p \mu(B_k)]^{1/p} \\ &\leqq \frac{\mu(B_k)^{1/p}}{2(1+\mu(B_k))} \leqq \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Nun haben wir wegen (21)

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_p^p &\geqq \sum_{\substack{k \\ r_k \geqq p}} \left\| \sum_{m \geqq 1} \frac{1}{2^m} \widehat{\chi_{e_m} g_m} \right\|_{p,k}^p \\ &\geqq \sum_{\substack{k \\ r_k \geqq p}} \left| \frac{1}{2^k} \|\widehat{\chi_{e_k} g_k}\|_{p,k} - \sum_{\substack{m \\ m \neq k}} \frac{1}{2^m} \|\widehat{\chi_{e_m} g_m}\|_{p,k} \right|^p . \end{aligned} \tag{24}$$

Wegen (17) und (18) gilt aber für $r_k \geqq p$

$$\|\widehat{\chi_{e_k} g_k}\|_{p,k}^p \geqq \|\widehat{\chi_{e_k} g_k}\|_{r_k,k}^{r_k} \geqq 2^{k r_k} \geqq 2^{kp} . \tag{25}$$

Aus (24), (25) und (23) folgt schließlich

$$\|\hat{g}\|_p^p \geqq \sum_{\substack{k \\ r_k \geqq p}} \left(1 - \sum_{m \geqq 1} \frac{1}{2^{m+1}}\right)_{(k)}^p = \infty .$$

2.6. Satz. *Satz 2.1 gilt für $G = \mathbb{R}^n$. Dabei darf man sogar vorschreiben, daß die Träger von f und g in einer willkürlich gewählten nichtleeren, offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ liegen.*

Beweis. Im Hinblick auf 2.5 und die Operationen D_a und T_c genügt es, den Fall $U = \mathbb{R}^n$ mit $n \geqq 2$ zu behandeln. Sei dazu $f(g)$ eine Funktion mit den Eigenschaften von 2.1.a bzw. 2.1.b und sei $k := \underbrace{h \otimes \ldots \otimes h}_{n-1}$ die Funktion

$$(t_2, \ldots, t_n) \to \prod_{j=2}^{n} h(t_j) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^{n-1},$$

wobei h die Funktion aus dem Beweis von 2.5 ist. Dann ist $f \otimes k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ [definiert durch $(t_1, t) \to f(t_1) k(t)$] eine stetige Funktion mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$.

Ihre Fourier-Transformierte ist

$$\widehat{f \otimes k} = \hat{f} \otimes \hat{k}.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt leicht, daß $\hat{f} \otimes \hat{k}$ dasselbe $\mathfrak{L}_p$-Verhalten wie $\hat{f}$ hat (da $\hat{k}$ nicht die Nullfunktion ist). Wir bemerken dazu, daß der Satz von Fubini auch für nicht-negative, nicht-integrable Funktionen gilt (siehe [2], 22.6). Analog schließt man für g.

Um alle lokal-kompakten, abelschen Gruppen zu behandeln, müssen wir Gruppen mit kompakten offenen Untergruppen betrachten. Dies ist unser nächstes Ziel.

2.7. *Erläuterungen.* Wenn wir eine Gruppe H haben, die eine unendliche, kompakte, offene Untergruppe J enthält, kann die Konstruktion von Satz 2.5 wesentlich vereinfacht werden. Sei Y die Charaktergruppe von H und A der Annihilator von J in Y, d.h. A ist die Untergruppe $\{\chi \in Y : \chi(x) = 1 \text{ für alle } x \in J\}$. Es ist wohlbekannt, daß A eine kompakte, offene Untergruppe von Y ist ([6], 23.24.d und 23.24.e). Wie in [6], 31.1 wählen wir Haar-Maße μ auf H und η auf Y mit $\mu(J) = 1$ und $\eta(A) = 1$.

2.8. *Konstruktion.* Sei $h = \xi_J$ die Indikatorfunktion der Menge J. Es ist klar, daß $\hat{h} = \xi_A$, also gilt $\hat{h} \in \mathfrak{C}_k(Y)$. Wir definieren nun durch Induktion zwei Folgen von Funktionen $(f_m)_{m \geqq 0}$ und $(g_m)_{m \geqq 0}$ auf H und eine Folge $(A_m)_{m \geqq 0}$ von Teilmengen von Y wie folgt (vgl. [6], 37.19.d). Sei $f_0 := g_0 := h$, $A_0 := A$. Da H nicht diskret ist, ist Y nicht kompakt, folglich ist A_0 eine echte Untergruppe von Y. Sei ψ_0 irgendein Element aus $Y \setminus A_0$. Sei $f_1 := f_0 + \psi_0 g_0$, $g_1 := f_0 - \psi_0 g_0$ und sei $A_1 := A_0 \cup (\psi_0 A_0)$. Nehmen wir an, es seien $(f_k)_{0 \leqq k \leqq m}$, $(g_k)_{0 \leqq k \leqq m}$ und $(A_k)_{0 \leqq k \leqq m}$ so definiert, daß

$$\hat{f}_k(\chi) = \hat{g}_k(\chi) = 0 \quad \text{für alle} \quad \chi \in Y \setminus A_k, \tag{1}$$

$$|\hat{f}_k| = |\hat{g}_k| = \xi_{A_k}, \tag{2}$$

$$\eta(A_k) = 2^k \eta(A) \quad \text{und} \quad A_k \quad \text{kompakt ist} \tag{3}$$

für alle $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Da Y nicht kompakt ist, gibt es wegen (3) einen Charakter $\psi_m \in Y \setminus (A_m^{-1} A_m)$.

Wir definieren

$$
\begin{aligned}
f_{m+1} &:= f_m + \psi_m g_m \\
g_{m+1} &:= f_{m+1} - \psi_m g_m \\
A_{m+1} &:= A_m \cup (\psi_m A_m)\,.
\end{aligned}
$$

Einfache Argumente, die wir dem Leser überlassen, zeigen, daß

$$|f_m|^2 + |g_m|^2 = 2^{m+1} h^2 \tag{4}$$

$$\eta(A_m) = 2^m \eta(A) \tag{5}$$

$$|\hat{f}_m| = |\hat{g}_m| = \xi_{A_m} \tag{6}$$

für $m \geqq 0$, und daß

$$(\psi_k A_k) \cap (\psi_l A_l) = \emptyset \tag{7}$$

für $k \neq l$ gilt.

Aus (4) folgt

$$|f_m| \leqq 2^{\frac{1}{2}(m+1)} h\,, \tag{8}$$

und aus (6) und (5) erhält man

$$\|\hat{f}_m\|_p = 2^{\frac{m}{p}} (\eta(A))^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{m}{p}} \tag{9}$$

für alle $m \geqq 0$.

Für eine reelle Zahl r mit $1 \leqq r < 2$ definieren wir

$$f := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{r}} \psi_m f_m\,. \tag{10}$$

Im Hinblick auf (8) konvergiert die Reihe (10) gleichmäßig und stellt damit eine stetige Funktion mit Träger in der kompakten Menge J dar. Wegen (8) konvergiert (10) auch in $\mathfrak{L}_1(H)$. Also gilt für die Fourier-Transformierte

$$\hat{f} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{r}} \widehat{\psi_m f_m}$$

oder

$$\hat{f}(\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{r}} \hat{f}_m(\psi_m^{-1} \chi)\,. \tag{11}$$

Für $p \leqq r$ haben wir wegen (7), (6) und (9)

$$\begin{aligned}\int_Y |\hat{f}(\chi)|^p d\eta(\chi) &\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\psi_k A_k} |\hat{f}(\chi)|^p d\eta(\chi)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\psi_k A_k} \left|2^{-\frac{k}{r}} \hat{f}_k(\psi_k^{-1}\chi)\right|^p d\eta(\chi)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{kp}{r}} \int_{A_k} |\hat{f}_k(\chi)|^p d\eta(\chi)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{kp}{r}} 2^k = \infty .\end{aligned}$$

Für $p > r$ haben wir wegen (9)

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{r}} \|\widehat{\psi_m f_m}\|_p = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{r}} 2^{\frac{m}{p}} < \infty .$$

Es folgt, daß $\hat{f} \in \mathfrak{L}_p(Y)$ für $p > r$. $\hat{f}$ gehört also zu $\mathfrak{L}_p(Y)$ genau für die Werte $p \in]r, \infty]$.

Für eine Zahl r mit $1 \leqq r \leqq 2$ ersetzen wir f durch die Funktion

$$g := \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} 2^{-\frac{m}{r}} \psi_m f_m .$$

Die vorherigen Abschätzungen mit trivialen Änderungen zeigen, daß $\hat{g} \in \mathfrak{L}_p(Y)$ genau dann gilt, wenn $p \in [r, \infty]$.

Es ist jetzt leicht, Satz 2.1 für alle nicht-diskreten G zu beweisen.

2.9. Beweis von Satz 2.1 im allgemeinen Fall. Schreiben wir $G = \mathbb{R}^n \times H$, wobei H eine Gruppe mit den in 2.7 geschilderten Eigenschaften ist. Da G nicht diskret ist, muß J im Falle $n=0$ unendlich sein. Die Charaktergruppe X von G schreiben wir in der Form $\mathbb{R}^n \times Y$, wobei Y wie in 2.7 die Charaktergruppe von H ist. Dies soll bedeuten, daß jeder Charakter von G die Form

$$(t, x) \to e^{i(u,t)} \chi(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^n, x \in H) \tag{1}$$

hat, wobei u und χ Elemente aus $\mathbb{R}^n$ bzw. Y sind. Wir wählen Haar-Maße λ auf G und θ auf X wie in 1.2 oben. Das Maß λ ist also das Produkt $\lambda = \mu_n \times \mu$, wo μ_n das n-dimensionale Lebesgue-Maß ist, und μ dasjenige Haar-Maß auf H mit $\mu(J) = 1$. Ebenso hat θ die Gestalt $\theta = (2\pi)^{-n} \mu_n \times \eta$, wo η das Haar-Maß auf Y mit $\eta(A) = 1$ ist (siehe 2.7). Sei $f: G \to \mathbb{C}$ von der Form $f = g \otimes h$ mit $g \in \mathfrak{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathfrak{L}_1(H)$. Dann folgt aus dem Satz von Fubini, daß

$$\hat{f}(u, \chi) = \hat{g}(u) \hat{h}(\chi) .$$

Wie im Beweis von 2.6 sieht man sofort, daß für $g \neq 0$, $h \neq 0$, die Relation $\hat{f} \in \mathfrak{L}_p(X)$ dann und nur dann gilt, wenn $\hat{g} \in \mathfrak{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{h} \in \mathfrak{L}_p(Y)$. Wenden wir dann 2.6 bzw. 2.8 auf die Faktoren $\mathbb{R}^n$ und H an, so finden wir 2.1 im allgemeinen Fall.

2.10. Bemerkung. Für kompakte, unendliche, nicht-abelsche Gruppen kann man fragen, ob ein dem Satz 2.1 ähnlicher Satz gilt. Der Fall 2.1.b mit $r=2$ ist durch [6], 37.22.k schon erledigt, die übrigen Fälle sind unseres Wissens noch nicht behandelt worden.

2.11. Bemerkung über hyperbolische Differentialgleichungen. Mit Lemma 14 aus [12] sieht man sofort folgendes: Sei $P(D)$ ein hyperbolischer Differentialoperator bezüglich $N\in\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ und sei r eine reelle Zahl $\geqq 1$. Es gelte

$$\frac{1}{P(\xi+i\tau N)}\in\mathfrak{L}_{\frac{r}{r-1}}$$

für ein $\tau\in\mathbb{R}$. Falls dann die Fourier-Transformierte $\hat{\varphi}$ jeder stetigen Funktion mit kompaktem Träger $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ in $\mathfrak{L}_r$ liegt, so folgt, daß die (einzige) Fundamentallösung $G\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ von $P(D)$ mit Träger in $\{x\in\mathbb{R}^n:(x,N)\geqq 0\}$ sogar ein Radon-Maß ist. Es erschien deshalb wichtig und interessant zu wissen, ob es $r<2$ gibt, mit $\hat{\varphi}\in\mathfrak{L}_r$ für alle obigen Funktionen φ. Satz 2.1 besagt, daß es ein solches r nicht gibt. Dies bedeutet, daß Korollar 15 aus [12] mit den dort angewandten Methoden nicht ohne weiteres verbessert werden kann.

2.12. Bemerkung zum Beweis von 2.5. Wir können Satz 2.5 auch unter Verwendung einer in 2.8 konstruierten Funktion auf $\mathbb{T}$ beweisen. Sei z.B. f die Funktion 2.8.10 auf $\mathbb{T}$, und sei die Funktion f' auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f'(t)=\begin{cases} f(e^{it})-f(-1) & \text{für} \quad |t|\leqq\pi\,,\\ 0 & \text{für} \quad |t|>\pi\,.\end{cases}$$

Dann ist bekannt, daß für $p>1$ $\widehat{f'}$ genau dann in $\mathfrak{L}_p(\mathbb{R})$ liegt, wenn $\hat{f}$ in $l_p(\mathbb{Z})$ liegt. Die Einzelheiten werden in Teil II (erscheint in "Proceedings of the Royal Irish Academy") näher ausgeführt. Der Vorteil des in 2.5 gegebenen Beweises beruht auf der expliziten Konstruktion der geforderten Funktionen.

3. Der Satz von Gronwall für lokalkompakte, abelsche Gruppen

3.1. Erläuterungen. Der schon in 1.1 und 1.3 zitierte Satz von Gronwall lautet folgendermaßen: Sei φ eine Funktion $\varphi:]0,\infty[\to[0,\infty[$ mit $\lim\limits_{s\to\infty}\varphi(s)=\infty$. Dann gibt es eine Funktion $f\in\mathfrak{C}(\mathbb{T})$, für welche gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2\varphi(|\hat{f}(n)|^{-1})=\infty\,.$$

Gronwall gab eine (von φ abhängige) explizite Konstruktion einer solchen Funktion. Sein Beweis beruht auf exakten Abschätzungen der Partialsummen gewisser trigonometrischer Polynome und verdient auch heute noch ein gewisses Interesse. Sidon [16] fand einen reinen Existenzbeweis dieses Satzes, der auf Dünnheitseigenschaften gewisser Mengen ganzer Zahlen beruht. In unserem Beweis werden wir beiden Richtungen folgen.

3.2. Satz *(Gronwall). Sei G eine nicht-diskrete, lokalkompakte, abelsche Gruppe und sei φ eine meßbare Funktion von $]0,\infty[$ in eine rechte Halbgerade $[\alpha,\infty[$*

($\alpha\in\mathbb{R}$) *mit der Eigenschaft* $\lim_{s\to\infty}\varphi(s)=\infty$. *Dann gibt es ein* $f\in\mathfrak{C}_k(G)$ *mit der Eigenschaft*

$$\int_X |\hat{f}|^2\,\varphi\circ\frac{1}{|\hat{f}|}\,d\theta=\infty\,.$$

Dabei sei vereinbart $|\hat{f}(\chi)|^2\,\varphi\left(\frac{1}{|\hat{f}(\chi)|}\right)=0$ *für* $\hat{f}(\chi)=0$.

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten und bemerken, daß es wegen

$$\int_X |\hat{f}(\chi)|^2\varphi(|\hat{f}(\chi)|^{-1})\,d\theta=\int_X |\hat{f}(\chi)|^2(\varphi-\alpha)\,(|\hat{f}(\chi)|^{-1})\,d\theta+\alpha\int_X |\hat{f}(\chi)|^2 d\theta$$

und

$$\int_X |\hat{f}(\chi)|^2 d\theta<\infty$$

genügt, den Fall $\alpha\geqq 0$ zu behandeln.

3.3. Satz. *Sei J eine unendliche, kompakte, abelsche Gruppe.*

Satz 3.2 gilt für $G=J$.

Beweis. Wie bei Zygmund [17], Vol. II, Chapter XII, Beweis von Satz 7.5, wählen wir eine willkürliche Folge $(\varrho_k)_{k=1}^{\infty}$ positiver, reeller Zahlen mit den Eigenschaften

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k^2\varphi\left(\frac{1}{\varrho_k}\right)=\infty \quad\text{und}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k^2<\infty\,. \tag{1}$$

Sei $\Delta=\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine abzählbar unendliche Sidonsche Menge in der Charaktergruppe Z von J (siehe hierzu [6], Vol. II, (37.18)). Die Menge Δ ist eine Λ_2-Menge (ibid., (37.10)). Ein bekannter Interpolationssatz (ibid., (37.9)) besagt, daß es eine Funktion $f\in\mathfrak{C}(J)$ gibt, mit der Eigenschaft, daß $\hat{f}(\chi_k)=\varrho_k$ für alle $\chi_k\in\Delta$, denn $(\varrho_k)_{k=1}^{\infty}\in l_2$. Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in Z}|\hat{f}(\chi)|^2\,\varphi\left(\frac{1}{|\hat{f}(\chi)|}\right)&\geqq\sum_{\chi_k\in\Delta}|\hat{f}(\chi_k)|^2\varphi\left(\frac{1}{|\hat{f}(\chi_k)|}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k^2\,\varphi\left(\frac{1}{\varrho_k}\right)\\&=\infty\,.\end{aligned}$$

3.4. Satz. *Sei H eine abelsche Gruppe, die eine unendliche, kompakte, offene Untergruppe J enthält. Dann gilt Satz 3.2 für* $G=H$.

Beweis. Seien Y und A wie in 2.7. Die Charaktergruppe Z von J kann naturgemäß mit Y/A identifiziert werden, d.h. ein Charakter von J kann als Nebenklasse χA von A in Y betrachtet werden. Sei f^* eine Funktion in $\mathfrak{C}(J)$ mit der Eigenschaft, daß

$$\sum_{\chi A\in Y/A}|\widehat{f^*}(\chi A)|^2\varphi(1/|\widehat{f^*}(\chi A)|)=\infty\,. \tag{1}$$

Sei f die Funktion auf H definiert durch

$$f(x)=\begin{cases} f^*(x) & \text{für} \quad x\in J\,, \\ 0 & \text{für} \quad x\in H\backslash J\,. \end{cases}$$

Eine leichte Rechnung, die wir auslassen, zeigt, daß

$$\int_Y |\hat{f}(\chi)|^2\varphi(1/|\hat{f}(\chi)|)d\theta(\chi)$$

mit der Summe (1) identisch ist. (Es ist zu beachten, daß $\hat{f}$ auf den Nebenklassen χA konstant ist.)

Wir befassen uns nun wieder mit dem Fall $G=\mathbb{R}$. Die Bezeichnungen werden aus 2.3 übernommen. Der Schlüssel zum Beweis von Satz 3.2 für $G=\mathbb{R}$ ist das folgende Analogon zu Lemma 2.4. Wieder stehe in 3.5, 3.6 $\mathfrak{L}_p$ für $\mathfrak{L}_p(\mathbb{R},\mu)$.

3.5. Lemma. *Sei h eine beschränkte, nicht-verschwindende Funktion in $\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{L}_2$. Dann gibt es eine meßbare Funktion Φ: $]0,\infty[\to]0,\infty[$ mit $\lim\limits_{s\to\infty}\Phi(s)=\infty$, so daß für alle reellen Zahlen a, b, c mit $a>0$ gilt*

$$\text{(i)} \quad \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi_b T_c D_a h}|^2\varphi\circ\frac{1}{|\widehat{\chi_b T_c D_a h}|}\,d\mu\geqq a\Phi\left(\frac{1}{a}\right).$$

(Dabei ist, wie vereinbart, der Integrand Null zu setzen, wo er nicht definiert ist. Wir bemerken, daß Φ von h abhängt.)

Beweis. Wegen $\widehat{D_a h}(u)=ah(au)$ gilt für alle $u\in\mathbb{R}$

$$|\widehat{\chi_b T_c D_a h}|(u)=|T_b(\chi_{-c}\widehat{D_a h})|(u)\leqq\|\widehat{D_a h}\|_\infty=a\|\hat{h}\|_\infty\,. \tag{1}$$

Indem wir φ gegebenenfalls durch die offenbar Lebesgue-meßbare Funktion $s\to\inf\{\varphi(t)|t\geqq s\}$ ersetzen, können wir φ als isoton annehmen. Mit

$$\Phi_0(s):=\varphi\left(\frac{s}{\|\hat{h}\|_\infty}\right)$$

gilt dann wegen (1)

$$\varphi\left(\frac{1}{|\widehat{\chi_b T_c D_a h}|}\right)\geqq\varphi\left(\frac{1}{a\|\hat{h}\|_\infty}\right)=\Phi_0\left(\frac{1}{a}\right)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi_b T_c D_a h}|^2\varphi\circ\frac{1}{|\widehat{\chi_b T_c D_a h}|}\,d\mu &\geqq \Phi_0\left(\frac{1}{a}\right)\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi_b T_c D_a h}|^2 d\mu \\ &=2\pi\Phi_0\left(\frac{1}{a}\right)\int_{\mathbb{R}} |\chi_b T_c D_a h|^2 d\mu \\ &=2\pi\Phi_0\left(\frac{1}{a}\right)\int_{\mathbb{R}} |D_a h|^2 d\mu \\ &=2\pi\Phi_0\left(\frac{1}{a}\right)a\|h\|_2^2\,.\end{aligned}$$

Dann hat die Funktion $\Phi := 2\pi \|h\|_2^2 \, \Phi_0$ alle gewünschten Eigenschaften für die Gültigkeit der Ungleichung (i).

3.6. Satz. *Satz 3.2 gilt für $G = \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir dürfen wie im Beweis von Lemma 3.5 o.B.d.A. voraussetzen, daß φ isoton ist. Insbesondere ist φ dann lokalbeschränkt. Wieder sei h die Funktion $h(t) = \max(1-|t|, 0)$ aus dem Beweis des Satzes 2.5. Sei Φ die Funktion aus Lemma 3.5. Wieder wählen wir eine Folge $(a_m)_{m \geqq 1}$ reeller Zahlen mit $0 < a_m \leqq 1$ und den beiden zusätzlichen Eigenschaften

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m < \infty \tag{1}$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \Phi\left(\frac{1}{a_m}\right) = \infty \,. \tag{2}$$

Wegen (2) können wir eine weitere Folge $(l_m)_{m=1}^{\infty}$ reeller Zahlen mit $0 < l_m \leqq 1$, $\lim_{m \to \infty} l_m = 0$, und mit der weiteren Eigenschaft

$$\sum_{m=1}^{\infty} l_m^2 a_m \Phi\left(\frac{1}{a_m}\right) = \infty \tag{3}$$

finden. $\left[\text{Zum Beispiel nehmen wir } l_m = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k \Phi\left(\frac{1}{a_k}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ für große } m.\right]$

Ferner wählen wir wie im Beweis von 2.5 eine beschränkte Folge $(c_m)_{m=1}^{\infty}$ reeller Zahlen so, daß die Funktionen $T_{c_m} D_{a_m} h$ paarweise disjunkte Träger haben. Dies ist möglich wegen (1).

Schließlich bestimmen wir durch Induktion ähnlich wie im Beweis von 2.5 eine Folge $(b_m)_{m \geqq 1}$ reeller Zahlen und eine Folge $(A_m)_{m \geqq 1}$ kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$b_1 = 0$. Sei A_1 eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\int_{A_1} |\widehat{T_{c_1} D_{a_1} h}|^2 \varphi \circ \left(\frac{1}{|\widehat{T_{c_1} D_{a_1} h}|}\right) d\mu \geqq \tfrac{1}{2}\, a_1 \Phi\left(\frac{1}{a_1}\right)$$

(siehe 3.5) und

$$\varepsilon_1 := \inf_{u \in A_1} |l_1 \widehat{T_{c_1} D_{a_1} h}|(u) > 0 \,.$$

Seien nun b_j und A_j für $1 \leqq j \leqq m-1$ so bestimmt, daß

$$\varepsilon_j := \inf_{u \in A_j} |l_j \widehat{\chi_{b_j} T_{c_j} D_{a_j} h}|(u) > 0 \tag{4}$$

und

$$|l_k \widehat{\chi_{b_k} T_{c_k} D_{a_k} h}|(u) \leqq \varepsilon_j 2^{-(k+1)} \qquad (k, j \leqq m-1,\ k \neq j,\ u \in A_j) \tag{5}$$

Dann finden wir eine kompakte Teilmenge A'_m von $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\int_{A'_m} |\widehat{T_{c_m} D_{a_m} h}|^2 \varphi \circ \frac{1}{|\widehat{T_{c_m} D_{a_m} h}|} d\mu \geqq \tfrac{1}{2} a_m \Phi\left(\frac{1}{a_m}\right) \tag{6}$$

(siehe 3.5) und

$$\varepsilon_m := \inf_{u \in A'_m} |l_m \widehat{T_{c_m} D_{a_m} h}|(u) > 0 . \tag{7}$$

Da φ lokalbeschränkt ist, zeigt der Konvergenzsatz von Lebesgue zusammen mit (4), (5) und (7), daß es $b_m \in \mathbb{R}$ gibt, so daß mit

$$A_m := A'_m + b_m$$

gilt

$$|I_m - I_m(1, m)| \leqq \frac{1}{m^2}, \tag{8}$$

$$|I_k(1, m-1) - I_k(1, m)| \leqq \frac{2^{-m}}{k^2} \quad (k < m), \tag{9}$$

wobei wir gesetzt haben

$$I_m := \int_{A_m} |l_m \widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|^2 \varphi \circ \frac{1}{|l_m \widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|} d\mu ,$$

$$I_k(1, m) := \int_{A_k} \left| \sum_{j=1}^{m} l_j \widehat{\chi_{b_j} T_{c_j} D_{a_j} h} \right|^2 \varphi \circ \frac{1}{\left| \sum_{j=1}^{m} l_j \widehat{\chi_{b_j} T_{c_j} D_{a_j} h} \right|} d\mu , \quad (k \leqq m) .$$

Darüber hinaus kann man $|b_m|$ so groß wählen, daß auch gilt

$$|l_m \widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|(u) \leqq \varepsilon_k 2^{-(m+1)} \quad (k < m, u \in A_k), \tag{10}$$

$$A_k \cap A_m = \emptyset \; (k < m), \tag{11}$$

sowie

$$|l_k \widehat{\chi_{b_k} T_{c_k} D_{a_k} h}|(u) \leqq \varepsilon_m 2^{-(k+1)} \quad (k < m, u \in A_m) . \tag{12}$$

Aus (6) folgt

$$\int_{A_m} |\widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|^2 \varphi \circ \frac{1}{|\widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|} d\mu \geqq \tfrac{1}{2} a_m \Phi\left(\frac{1}{a_m}\right), \tag{13}$$

und aus (7) erhält man

$$\inf_{u \in A_m} |l_m \widehat{\chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|(u) = \varepsilon_m > 0 . \tag{14}$$

Wegen (14), (10) und (12) hat man (4) und (5) für $j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \neq k$, und die Induktion kann fortgeführt werden.

Wir kommen schließlich zur Abschätzung. Aus (4) und (5) folgt

$$\left| |\widehat{l_k \chi_{b_k} T_{c_k} D_{a_k} h}|(u) - \sum_{m \neq k} |\widehat{l_m \chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|(u) \right| \geqq \frac{\varepsilon_k}{2} (u \in A_k) \tag{15}$$

sowie

$$\sum_{m=1}^{m} |\widehat{l_m \chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}|(u) \leqq K_k \quad (u \in A_k), \tag{16}$$

wobei K_k eine Konstante ist.

Setzen wir abkürzend

$$I_k(1, \infty) := \int_{A_k} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{l_m \chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h} \right|^2 \varphi \circ \frac{1}{\left| \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{l_m \chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h} \right|} d\mu,$$

so kann man wegen (16), (15), (4) und der lokalen Beschränktheit von φ den Konvergenzsatz von Lebesgue nochmals anwenden, wodurch man erhält

$$|I_k - I_k(1, \infty)| = \lim_{r \to \infty} |I_k - I_k(1, r)|. \tag{17}$$

Wegen (8) und (9) gilt aber für $r > k$

$$\begin{aligned} |I_k - I_k(1, r)| &\leqq |I_k - I_k(1, k)| + \sum_{s=k+1}^{r} |I_k(1, s-1) - I_k(1, s)| \\ &< \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} = \frac{2}{k^2}. \end{aligned}$$

Wegen (17) erhält man also

$$|I_k - I_k(1, \infty)| \leqq \frac{2}{k^2}. \tag{18}$$

Schließlich setzen wir

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} l_m \chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h. \tag{19}$$

Aus der Wahl der Folgen (a_m), (c_m) und (l_m) folgt, daß f stetig mit kompaktem Träger ist. Da die Reihe rechts in (19) auch in $\mathfrak{L}_1$ konvergiert, gilt für deren Fourier-Transformierte $\hat{f}$ die Identität

$$\hat{f} = \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{l_m \chi_{b_m} T_{c_m} D_{a_m} h}.$$

Man hat

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \varphi \circ \frac{1}{|\hat{f}|} d\mu &\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |\hat{f}|^2 \varphi \circ \frac{1}{|\hat{f}|} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} I_k(1, \infty). \end{aligned} \tag{20}$$

Wegen (18) genügt es hinmit zu zeigen, daß $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ divergiert. Nun gilt aber wegen der Isotonie von φ, (13) und (3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} I_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |\widehat{l_k\chi_{b_k}T_{c_k}D_{a_k}h}|^2\, \varphi\circ \frac{1}{|\widehat{l_k\chi_{b_k}T_{c_k}D_{a_k}h}|}\, d\mu \\ &\geqq \sum_{k=1}^{\infty} l_k^2 \int_{A_k} |\widehat{\chi_{b_k}T_{c_k}D_{a_k}h}|^2\, \varphi\circ \frac{1}{|\widehat{\chi_{b_k}T_{c_k}D_{a_k}h}|}\, d\mu \\ &\geqq \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} l_k^2 a_k \Phi\left(\frac{1}{a_k}\right)=\infty\,.\end{aligned}$$

Damit ist 3.6 bewiesen.

3.7. Beweis von Satz 3.2 im allgemeinen Fall. Wegen 3.4 dürfen wir annehmen, daß $G=\mathbb{R}^n\times H$ ist, wobei $n\geqq 1$. Deshalb hat G die Gestalt $G=\mathbb{R}\times G_0$, wobei wir $G_0=\mathbb{R}^{n-1}\times H$ gesetzt haben. Sei θ_0 das in 1.2 definierte Haarsche Maß auf der Dualgruppe X_0 von G_0 und sei f eine Funktion aus $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$ wie in Satz 3.6:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat f(u)|^2 \varphi\left(\frac{1}{|\hat f(u)|}\right) du=\infty\,. \tag{1}$$

Ferner sei f_0 eine Funktion aus $\mathfrak{C}_k(G_0)$ mit der Eigenschaft

$$\theta_0(B)>0\,, \tag{2}$$

wobei B für die Menge

$$B:=\{\chi_0\in X_0 : \tfrac{1}{2}\leqq |\hat f_0(\chi_0)|\leqq 1\} \tag{3}$$

steht. Schließlich sei g die Funktion auf $\mathfrak{C}_k(\mathbb{R}\times G_0)$ definiert durch

$$g(x,x_0):=f(x)f_0(x_0)\,.$$

Wir dürfen annehmen, daß φ isoton ist (siehe Beweis von Lemma 3.5). Wegen (3), (1) und (2) gilt dann

$$\begin{aligned}&\int_X |\hat g|^2 \varphi\circ\left(\frac{1}{|\hat g|}\right) d\theta \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{B_0}\int_{\mathbb{R}} |\hat f(u)\hat f_0(\chi_0)|^2 \varphi\left(\frac{1}{|\hat f(u)\hat f_0(\chi_0)|}\right) du\,d\theta_0(\chi_0) \\ &\geqq \frac{1}{8\pi}\int_{B}\int_{\mathbb{R}} |\hat f(u)|^2\varphi\left(\frac{1}{|\hat f(u)|}\right) du\,d\theta_0(\chi_0) \\ &=\infty\,.\end{aligned}$$

3.8. Bemerkung. Im Fall einer diskreten Gruppe G gibt es kein Analogon zu Satz 2.1, denn in diesem Fall gilt $\theta(X)=1$ und man hat deshalb $\hat f\in\mathfrak{L}_p(X)$ für alle $f\in\mathfrak{C}_k(G)$ und alle $p\geqq 1$. Man kann fragen, ob es ein Analogon zum Satz von Gronwall im diskreten Fall gibt, d.h. kann man ein trigonometrisches Polynom p auf der kompakten Gruppe X finden, mit der Eigenschaft

$$\int_X |p|^2\varphi\circ\frac{1}{|p|}\, d\theta=\infty\,? \tag{1}$$

Daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist, lehrt das Beispiel einer beliebigen unendlichen, diskreten Gruppe G, deren Elemente alle endliche Ordnung haben. Dann hat jeder Charakter von X endliche Ordnung, nimmt also nur endlich viele Werte an. Dasselbe gilt dann für jedes trigonometrische Polynom auf X, so daß das Integral in (1) endlich sein muß. Die Frage bleibt jedoch z.B. für die Gruppe $\mathbb{Z}$ offen. Wir werden sie hier nicht weiter verfolgen.

4. Der Satz von Orlicz-Paley-Sidon

4.1. Erläuterungen. Im Jahr 1932 wurde der folgende Satz unabhängig und simultan von Orlicz [10], Paley [11] und Sidon [15] auf drei verschiedene Arten bewiesen: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ irgendeine Folge, die nicht in l_2 ist. Dann gibt es eine Funktion $f\in\mathfrak{C}(\mathbb{T})$, so daß $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)x_n| = \infty$.

Dies ist vielleicht alles, was man über die Größe von $\hat{f}$ für $f\in\mathfrak{C}(\mathbb{T})$ sagen kann.

4.2. Das Analogon zum Orlicz-Paley-Sidon'schen Satz gilt für alle kompakten (nicht notwendig abelschen) Gruppen; siehe die $(\mathfrak{C}, \mathfrak{R})$-Stelle in der in [6], Vol. II, pp. 410–411 aufgeführten Tabelle. Für den abelschen Fall stammt der Satz von Edwards [4]. Da der Satz auch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen gilt, und da der Beweis verhältnismäßig kurz ist, erlauben wir uns, einen Beweis hier aufzuführen.

4.3. Bezeichnungen. In 4.3–4.5, sei A ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum mit einem endlichen, nicht-negativen, regulären Borel-Maß $\mu\neq 0$. Sei Φ eine Menge komplex-wertiger, μ-integrabler Funktionen auf A, für welche es eine positive Konstante α gibt, so daß

$$\alpha\leqq|\varphi(t)| \tag{1}$$

für alle $\varphi\in\Phi$ und alle $t\in A$ gilt. Sei $\boldsymbol{P}$ die Gruppe $\mathbb{T}^{\Phi}$ aller $\mathbb{T}$-wertigen Funktionen auf Φ, versehen mit der Produkttopologie und der koordinatenweise definierten Gruppenstruktur. Wir schreiben die Elemente von $\boldsymbol{P}$ in der Form $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}(\varphi))_{\varphi\in\Phi}$. Sei $\boldsymbol{\lambda}$ das normierte Haar-Maß auf $\boldsymbol{P}$. Die Projektionen $\pi_\varphi:\boldsymbol{P}\to\mathbb{T}(\pi_\varphi(\boldsymbol{c}):=\boldsymbol{c}(\varphi))$ sind Charaktere von $\boldsymbol{P}$ und bilden bekanntlich eine Sidonsche Menge in der Charaktergruppe von $\boldsymbol{P}$. (Siehe z.B. [6], Vol. II, (37.5).) Deshalb ist die Menge $\{\pi_\varphi|\varphi\in\Phi\}$ eine Λ_2-Menge ([6], Vol. II, (37.10)), und damit gibt es eine Konstante $\varkappa$ mit der Eigenschaft

$$\Big(\sum_{\varphi\in\Phi}|h(\varphi)|^2\Big)^{1/2}\leqq\varkappa\int_{\boldsymbol{P}}\Big|\sum_{\varphi\in\Phi}h(\varphi)\boldsymbol{c}(\varphi)\Big|\,d\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{c}) \tag{2}$$

für alle komplexwertigen Funktionen h auf Φ mit endlichem Träger.

4.4. Satz. *Sei w eine nicht-negative, reelle Funktion auf Φ mit der Eigenschaft, daß $\sum\limits_{\varphi\in\Phi} w(\varphi)^2=\infty$.*

Dann gibt es ein $f\in\mathfrak{C}_0(A)$, so daß

(i) $\displaystyle\sum_{\varphi\in\Phi}\Big|\int_A f(t)\varphi(t)d\mu(t)\Big|w(\varphi)=\infty$.

Beweis. Nehmen wir an, (i) gelte nicht. Dann hat man für jedes $c \in \boldsymbol{P}$, jede endliche Teilmenge Δ von Φ und jedes $f \in \mathfrak{C}_0(A)$

$$|L_{\Delta,c}(f)| = \left| \sum_{\varphi \in \Delta} c(\varphi) w(\varphi) \int_A f(t)\varphi(t) d\mu(t) \right| \leqq \sum_{\varphi \in \Phi} \left| \int_A f(t)\varphi(t) d\mu(t) \right| w(\varphi) < \infty .$$

Die bedeutet, daß die Familie der linearen Funktionale $\{L_{\Delta,c} : \Delta$ endliche Untermenge von Φ, $c \in \boldsymbol{P}\}$ beschränkt in jedem Punkt des Banachschen Raumes $\mathfrak{C}_0(A)$ ist. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit erhält man, daß die Normen dieser Funktionale beschränkt sind:

$$\sup_{\substack{\Delta, c \\ \|f\|_\infty \leqq 1}} |L_{\Delta,c}(f)| \leqq K < \infty . \tag{1}$$

Die linearen Funktionale $L_{\Delta,c}$ sind beschränkte Radon-Maße auf A. Bekanntlich ist $\sup\limits_{\|f\|_\infty \leqq 1} |L_{\Delta,c}(f)|$ die Maß-Norm von $L_{\Delta,c}$. Außerdem hat $L_{\Delta,c}$ die Dichtefunktion $\sum\limits_{\varphi \in \Delta} c(\varphi) w(\varphi) \varphi(t)$ bezüglich μ. Folglich gilt

$$\int_A \left| \sum_{\varphi \in \Delta} c(\varphi) w(\varphi) \varphi(t) \right| d\mu(t) = \sup_{\|f\|_\infty \leqq 1} |L_{\Delta,c}(f)| .$$

Somit impliziert (1)

$$\int_A \left| \sum_{\varphi \in \Delta} c(\varphi) w(\varphi) \varphi(t) \right| d\mu(t) \leqq K < \infty \tag{2}$$

für alle endlichen $\Delta \subseteqq \Phi$ und alle $c \in \boldsymbol{P}$.

Nun haben wir für alle $t \in A$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\varphi \in \Delta} w^2(\varphi) \right)^{1/2} &= \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\varphi \in \Delta} \alpha^2 w^2(\varphi) \right)^{1/2} \\ &\leqq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\varphi \in \Delta} |\varphi(t) w(\varphi)|^2 \right)^{1/2} . \end{aligned} \tag{3}$$

Aus 4.3.2 und (3) bekommen wir

$$\left(\sum_{\varphi \in \Delta} w^2(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{\varkappa}{\alpha} \int_{\boldsymbol{P}} \left| \sum_{\varphi \in \Delta} \varphi(t) w(\varphi) c(\varphi) \right| d\lambda(c) . \tag{4}$$

Integrieren wir (4) über A, und wenden den Satz von Fubini sowie (2) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu(A) \left(\sum_{\varphi \in \Delta} w^2(\varphi) \right)^{1/2} &\leqq \frac{\varkappa}{\alpha} \int_{\boldsymbol{P}} \int_A \left| \sum_{\varphi \in \Delta} \varphi(t) w(\varphi) c(\varphi) \right| d\mu(t) d\lambda(c) \\ &\leqq \frac{K\varkappa}{\alpha} . \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen $\mu \neq 0$ ist deshalb

$$\sum_{\varphi \in \Phi} w^2(\varphi) < \infty .$$

4.5. *Bemerkung.* Von Satz 4.4 gilt keineswegs die Umkehrung. Diese gilt aber natürlich immer dann, wenn Φ sogar ein Orthonormalsystem in $\mathfrak{L}_2(A, \mu)$ ist.

4.6. Satz *(Orlicz-Paley-Sidon-Edwards). Sei J eine kompakte, abelsche Gruppe mit Dualgruppe Z, und sei w eine nicht-negative Funktion auf Z. Die Ungleichung*

(i) $\sum_{\chi \varepsilon Z} w(\chi)|\hat{f}(\chi)| < \infty$

gilt für alle $f \in \mathfrak{C}(J)$ *dann und nur dann, wenn* $w \in l_2(Z)$.

Beweis. Klar wegen 4.4 und 4.5.

4.7. Bemerkung. Im Falle $G = \mathbb{R}$ liegen die Verhältnisse etwas komplizierter. Hier kann man zu jeder Funktion $\phi: \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit

$$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{t \to -\infty} \phi(t) = \infty$$

eine stetige Funktion $w: \mathbb{R} \to [0, \infty[$ mit den Eigenschaften $w \leqq \phi$ und $w \in \mathfrak{L}_1 \setminus \mathfrak{L}_2$ finden. Dann gilt natürlich $w\hat{f} \in \mathfrak{L}_1$ für alle $f \in \mathfrak{C}_k(\mathbb{R})$.

Zusatz bei der Korrektur

Nach der Fertigstellung des Manuskripts erfuhren wir, daß Satz 2.1 im Falle der Kreislinie bereits durch Lynette M. Bloom [J. Austr. Math. Soc. **17**, 319—331 (1974)] bewiesen wurde. Wir räumen ihr hiermit gern die Priorität für diesen Fall ein.

Literatur

1. Bary, N. K.: Trigonometritscheskie rjady. Moskau: Fizmatgiz 1961. Englische Übersetzung: A treatise on trigonometric series Bd. I und II. Oxford, London: Pergamon 1964
2. Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin: de Gruyter 1968
3. Carleman, T.: Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion. Acta Math. **41**, 377—384 (1918)
4. Edwards, R. E.: Changing signs of Fourier coefficients. Pacific J. Math. **15**, 463—475 (1965)
5. Gronwall, T. H.: On the Fourier coefficients of a continuous function. Bull. Amer. Math. Soc. **27**, 320—321 (1921)
6. Hewitt, E., Ross, K. A.: Abstract harmonic analysis, Bd. I und II. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1963 und 1970
7. Katznelson, Y.: An introduction to harmonic analysis. New York: John Wiley & Sons 1968
8. Landau, E.: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carleman. Math. Z. **5**, 147—153 (1919)
9. Larsen, R.: An introduction to the theory of multipliers. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971
10. Orlicz, W.: Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (III). Bull. int. Acad. Polon. A Nr. 8/9, 229—238 (1932)
11. Paley, R. E. A. C.: A note on power series. J. London Math. Soc. **7**, 122—130 (1932)
12. Ritter, G.: Konstruktion von Operatoren und Kernen mit Hilfe von Absorptionsmengen. Math. Ann. **216**, 51—66 (1975)
13. Sidon, S.: Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen. Journal f. reine u. angew. Math. **163**, 251—252 (1930)
14. Sidon, S.: Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten. Math. Z. **34**, 477—480 (1932)
15. Sidon, S.: Ein Satz über die Fourierschen Reihen stetiger Funktionen. Math. Z. **34**, 485—486 (1932)
16. Sidon, S.: Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen. Math. Ann. **106**, 536—539 (1932)
17. Zygmund, A.: Trigonometric series I and II. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press 1959

Angenommen am 23. Dezember 1975