
Vorlesung

Nichtlineare Optimierung

gehalten im WS 2022/23

Prof. Dr. Tobias Harks

Universität Passau

Institut für Mathematik

Dr.-Hans-Kapfinger-Straße 30

94032 Passau

Email: tobias.harks@uni-passau.de

9. Oktober 2026

Vorwort

Dieses Skript enthält die deutschsprachigen Kapitel zur nichtlinearen Optimierung, ergänzt um die Einführung und die Trennungstheorie. Die Darstellung geht auf die Optimierungsvorlesungen an der Universität Augsburg und auf handschriftliche Notizen zur Vorlesung von Helmut Maurer im Sommersemester 2003 an der Universität Münster zurück.

Die Abschnitte 9.1–9.5 zu numerischen Verfahren orientieren sich an Vorlesungsnotizen von Hans-Joachim Oberle (Universität Hamburg). Abschnitt 9.6 zum Frank–Wolfe-Verfahren basiert auf einem Artikel von Sebastian Pokutta (ZIB). Strafverfahren, SQP und Frank–Wolfe sind in der deutschen und der englischen Fassung enthalten.

Ein besonderer Dank gilt Lukas Graf und Georg Kraus für hilfreiche Korrekturen während der Veranstaltung im Sommersemester 2020.

Passau, 9. Oktober 2026

Prof. Dr. Tobias Harks

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Motivation und Grundbegriffe	7
1.2	Beispiele und Anwendungen	7
1.3	Finite Optimierung	9
1.4	Differenzierbare Klassische Optimierung	12
1.4.1	Variationsungleichung und Unrestringierte Optimierung	12
1.4.2	Konvexe Optimierung	13
2	Konvexität und Trennbarkeit	17
2.1	Konvexe Mengen und Kegel	17
2.2	Konvexkombinationen	18
2.3	Trennbarkeit	21
3	Nichtlineare Optimierung mit Nebenbedingungen	27
3.1	Problemformulierung	27
3.2	Formulierung für den Standardkegel	29
4	Tangentialkegel und Regularität	31
4.1	Motivation der Theorie	32
4.2	Tangentialkegel und Variationsungleichung	33
4.3	Linearisierender Kegel	37
4.4	Regularitätsbedingungen	40
5	Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung	47
5.1	Lagrange-Funktion und Multiplikatoren	49
5.2	Spezialisierung für den Standardkegel	51
6	Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung	57
6.1	Spezialisierung auf den Standardkegel	60
6.2	Beispiele	61
7	Sensitivitätsanalyse	63
7.1	Lokale Sensitivitätsanalyse	64
7.2	Anwendung auf Echtzeitoptimierung	68

8	Dualität	71
8.1	Duales Problem und schwache Dualität	72
8.2	Starke Dualität und Sattelpunkte	73
8.3	Starke Dualität für konvexe Probleme	75
9	Numerische Verfahren	79
9.1	Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	79
9.2	Schrittweitenwahl	81
9.3	Strafverfahren für Probleme mit Nebenbedingungen	86
9.4	Lagrange-Newton Verfahren	88
9.5	SQP-Verfahren	91
9.6	Das Frank–Wolfe-Verfahren	93
9.6.1	Konvexe Zielfunktionen	94
9.6.2	Nichtkonvexe Zielfunktionen	96

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation und Grundbegriffe

Allgemein betrachten wir einen reellen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ und $K \subset V$ nicht-leer. Ferner sei eine reellwertige Funktion

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Gesucht ist nun $\min\{f(x) \mid x \in K\}$. Häufig schreibt man auch

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } f(x) \\ &\text{unter den Nebenbedingungen } x \in K. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eine optimale Lösung des Problems (1.1) wird auch globales Minimum genannt.

Definition 1.1. Ein Punkt $x^* \in K$ ist ein globales Minimum von f über K falls

$$f(x) \geq f(x^*) \text{ für alle } x \in K.$$

Falls

$$f(x) > f(x^*) \text{ für alle } x \in K, x \neq x^*,$$

so sprechen wir von einem strikten globalen Minimum. Globale Maxima sind analog definiert.

- infinite Optimierung (V ist unendlich dimensionaler Funktionenraum),
- finite Optimierung ($V = \mathbb{R}^n$),
- kontinuierliche Optimierung (reellwertige Variablen, auch mit Gleichungsnebenbedingungen),
- diskrete Optimierung ($K \subseteq \mathbb{Z}^n$).

1.2 Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1.2 (Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz). Gegeben seien $j = 1, \dots, n$ mögliche Anlagen (z.B. Aktien, Fonds, Optionen, Wertpapiere). Jede Anlage wirft im

8 | Kapitel 1. Einführung

nächsten Zeitintervall einen Gewinn (oder Verlust) R_j ab.

Ein mögliches Ziel ist es, den erwarteten Gewinn

$$E[R] = \sum_{j=1}^n x_j E[R_j], \quad R = \sum_{j=1}^n x_j R_j$$

zu maximieren (E bezeichnet den Erwartungswert).

Als Maß für das Risiko kann die Varianz des Gewinns dienen:

$$\text{Var}[R] = E[(R - E[R])^2] = E \left[\left(\sum_{j=1}^n x_j (R_j - E[R_j]) \right)^2 \right].$$

Ein Kompromiss zwischen hohem Gewinn und geringem Risiko kann durch Lösen des folgenden Optimierungsproblems erreicht werden:

$$\begin{aligned} \min & - \sum_{j=1}^n x_j E[R_j] + \alpha \cdot E \left[\left(\sum_{j=1}^n x_j (R_j - E[R_j]) \right)^2 \right] \\ \text{s.t. : } & \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 (Optimaler Mengeneinkauf). Es soll eine bestimmte Menge M eines Gutes gekauft werden. Dazu werden Angebote von n Lieferanten eingeholt, wobei kein Lieferant die gewünschte Menge alleine liefern kann, sondern höchstens M_i Einheiten des Gutes. Die Preise $f_i(x_i)$ des i -ten Lieferanten sind i.a. abhängig von der Liefermenge x_i und beinhalten Mengenrabatte.

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{s.t. : } & \sum_{i=1}^n x_i = M \\ & 0 \leq x_i \leq M_i, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Beispiel 1.4 (Regression). Ein Experiment liefert die Messpunkte $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$. Der dem Experiment zu Grunde liegende Vorgang werde durch die Funktion $f(t, p)$ modelliert, die einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Messstellen t_i und den Messwerten y_i herstellt. Daher wird versucht, die Messpunkte so gut wie möglich zu approximieren, indem

$$\sum_{i=1}^m (y_i - f(t_i, p))^2$$

bezüglich p minimiert wird. Ein allgemeines Least-Squares Problem lautet

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^q \Phi_i(x)^2 \\ \text{s.t.} \quad & g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r \\ & h_j(x) = 0, j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Beispiel 1.5 (Optimalsteuerung). Gesucht sei eine Steuerfunktion, um ein Auto mit möglichst geringem (noch genauer zu definierendem) Aufwand in vorgegebener Zeit t_f von Punkt A (aus Ruhelage) nach Punkt B (in Ruhelage) zu steuern. Bekannt aus der Physik ist nach den Newtonschen Gesetzen, dass der Weg $s(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ folgenden Gesetzmäßigkeiten unterliegen:

$$\dot{s}(t) = v(t), \dot{v}(t) = a(t).$$

Wir betrachten die Aufgabe eindimensional auf der Verbindungslinie von A nach B (der Länge d) im Zeitintervall $[0, t_f]$. Setzen wir die Koordinate der Punkt A bzw. B auf $s = 0$ bzw. $s = d$, so fordern wir gemäß der Aufgabenstellung $s(0) = 0, v(0) = 0, s(t_f) = d, v(t_f) = 0$. Der Gesamtaufwand wird über das Integral der quadrierten Steuerfunktion gemessen, d.h. wir möchten erreichen, dass

$$\int_0^{t_f} a(t)^2 dt$$

möglichst klein wird. Insgesamt lautet die Formulierung daher

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^{t_f} a(t)^2 dt \\ & \dot{s}(t) = v(t) \\ & \dot{v}(t) = a(t) \\ & s(0) = 0, s(t_f) = d \\ & v(0) = 0, v(t_f) = 0. \end{aligned}$$

1.3 Finite Optimierung

In dieser Vorlesung werden wir nur finite bzw. endlich dimensionale Optimierungsprobleme betrachten und im Folgenden immer $V := \mathbb{R}^n$ annehmen.

Die Menge der Punkte aus K , in denen das Minimum angenommen wird, bezeichnen wir mit $\arg \min(f, K)$. Es gilt

$$\arg \min(f, K) := \{x \in K \mid f(x) = \inf_{y \in K} f(y)\}.$$

| Definition 1.6. Ein Punkt $x^* \in K$ ist ein lokales Minimum von f über K falls $\rho > 0$

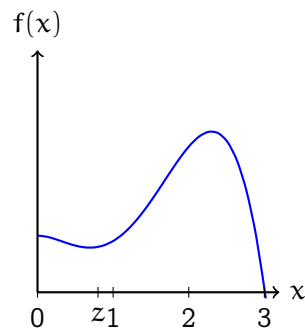


Abbildung 1.1: Die Funktion f nimmt auf $K = [0, 3]$ sein **globales** Minimum auf $x^* = 3$ an. Es gibt ein weiteres **lokales** Minimum im Punkt z .

existiert, so dass

$$f(x) \geq f(x^*) \text{ für alle } x \in K \cap B_\rho(x^*),$$

wobei

$$B_\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \rho\}$$

die offene Einheitskugel mit Zentrum x und Radius $\rho > 0$ bezeichnet. Falls

$$f(x) > f(x^*) \text{ für alle } x \in K \cap B_\rho(x^*), x \neq x^*,$$

so sprechen wir von einem strikten lokalen Minimum.

In der Regel kann K durch funktionale Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen beschrieben werden. In diesem Fall kann K dargestellt werden als

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, \ i \in I_1 = \{1, \dots, m\}, \ g_j(x) \leq 0, \ j \in I_2 = \{1, \dots, p\}\}, \quad (1.2)$$

In der differenzierbaren Optimierung nehmen wir üblicherweise glatte Problemdaten an. Die unten aufgeführten Minimax-Zielfunktionen sind jedoch im Allgemeinen nicht differenzierbar.

Für obige Form von K erhalten wir folgende verfeinerten Problemstellungen (vgl. Oberle, Skript 2012, Einführung in die Optimierung):

- Unrestringierte Optimierung: $m = p = 0$
- Restringierte Optimierung: $m > 0$ oder $p > 0$
- Lineare Optimierung: f linear, g_j, h_i affin linear
- Quadratische Optimierung: $f(x) = x^T A x + b^T x + c$, g_j, h_i affin linear
- Konvexe Optimierung: f konvex, g_j konvex, h_i affin linear

- L_2 -Probleme: Die Zielfunktion f hat die spezielle Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i (f_i(x))^2,$$

mit glatten Funktionen f_i und Gewichten $w_i > 0$.

- Minimax Probleme: Die Zielfunktion f hat die spezielle Form

$$f(x) = \max\{f_i(x), i = 1, \dots, m\}$$

mit glatten Funktionen f_i .

Die folgenden Fragen treten im Zusammenhang mit Optimierungsproblemen natürlicherweise auf:

- Existieren optimale Lösungen?
- Sind sie eindeutig?
- Lassen sich notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen herleiten?
- Welche Algorithmen eignen sich zur Berechnung einer optimalen Lösung?
- Wie hängt eine optimale Lösung von den Problemparametern ab ?

Bezüglich der Existenz von Optimallösungen werden wir zunächst einen zentralen Satz der Analysis wiederholen.

Satz 1.7 (Weierstrass). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $x^* \in K$ mit

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ für alle } x \in K.$$

Beweis. Da f stetig ist, ist das Bild $f(K)$ der kompakten Menge K beschränkt in $\mathbb{R}$ und das Infimum

$$A := \inf\{f(x) | x \in K\} \in \mathbb{R}$$

existiert (siehe den Satz über die Existenz von infima/suprema für nichtleere und beschränkte Teilmengen in $\mathbb{R}$). Weiterhin existiert eine Folge $x_n \in K, n \in \mathbb{N}$ so dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

(Die Existenz einer solchen Folge sollte auch klar sein, man nehme z.B. Folgeglieder $x_n \in K$ mit $f(x_n) < A + 1/n$). Da die Folge $x_n, n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano/Weierstrass eine konvergente Teilfolge $x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} =: x^* \in K.$$

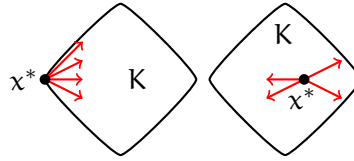


Abbildung 1.2: Die roten Pfeile repräsentieren zulässige Richtungen in $D_K(x^*)$.

Aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A.$$

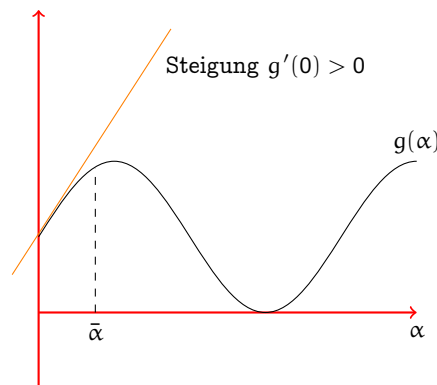
Somit nimmt f auf K ihr Minimum bei x^* an. □

1.4 Differenzierbare Klassische Optimierung

1.4.1 Variationsungleichung und Unrestringierte Optimierung

Definition 1.8 (Zulässigen Richtungen). Sei $x \in K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $K \neq \emptyset$. Der Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ ist eine zulässige Richtung an x , falls ein $\bar{\alpha} > 0$ existiert, sodass $x + \alpha d \in K$ für alle $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$.

Mit $D_K(x)$ bezeichnen wir die Menge der zulässigen Richtungen an x . Man sieht leicht ein, dass $D_K(x)$ ein Kegel mit Spitze im Nullpunkt (vgl. 2.1) ist, daher wird $D_K(x)$ auch der Kegel der zulässigen Richtungen genannt.



Für stetig differenzierbare Optimierungsprobleme der Form (1.1) erhalten wir folgende notwendige Optimalitätsbedingung.

Satz 1.9 (Variationsungleichung). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei x^* ein lokales Minimum von f über K und d eine zulässige Richtung an x^* . Dann gilt

$$\nabla f(x^*)^\top d \geq 0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine zulässige Richtung d an x^* . Somit existiert $\bar{\alpha} > 0$ sodass $x^*(\alpha) := x^* + \alpha d \in K$ für alle $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$. Wir definieren eine eindimensionale Funktion $g(\alpha) := f(x^*(\alpha))$. Für ein lokales Minimum x^* (bzgl. Umgebung $B_\rho(x^*)$) gilt

$$g(\alpha) \geq g(0) \text{ für alle } \alpha \in [0, \min\{\bar{\rho}, \bar{\alpha}\}],$$

wobei

$$\bar{\rho} := \sup\{\alpha \geq 0 \mid x^* + \alpha d \in B_{\rho/2}(x^*)\}.$$

Somit folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} \geq 0.$$

Mit der Differenzierbarkeit von f gilt nun

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} = g'(0) = \nabla f(x^*)^\top d.$$

□

Satz 1.10. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $x^* \in \text{int}(K)$ ein lokales Minimum von f über K . Dann gilt

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (1.3)$$

Insbesondere gilt (1.3) für jedes lokale Minimum eines unrestringierten Optimierungsproblems.

Beweis. Mit der Variationsungleichung aus Satz 1.9 gilt für jede zulässige Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$. Da $x^* \in \text{int}(K)$ ist für jeden Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ auch $-d$ zulässig. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.11. Es sei darauf verwiesen dass das Konzept von zulässigen Richtungen wie in Definition 1.8 nicht geeignet ist um zulässige Richtungen für gekrümmte Hyperflächen (oder nicht-volldimensionale Mengen) darzustellen. Für solche Fälle benötigt man anschaulich ein Konzept welches *infinitesimale* Schrittweiten in eine Richtung erlaubt. Diese Idee führt auf Begriffe wie *Tangententialkegel* und *Linearisierungskegel*, die wir uns für Optimierung II aufheben.

1.4.2 Konvexe Optimierung

Wir betrachten nun die Minimierung einer konvexen differenzierbaren Funktion f auf einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 1.12. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in K$ die Verbindungsstrecke zwischen x und y in K liegt, d.h.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K \text{ für alle } \lambda \in [0, 1].$$

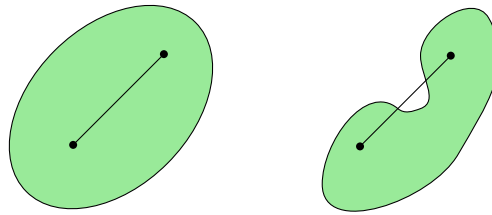


Abbildung 1.3: Links: Konvexe Menge. Rechts: Nicht-konvexe Menge

Definition 1.13. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (1.4)$$

f heißt strikt konvex, wenn für $x \neq y$ und $\lambda \in (0, 1)$ die Ungleichung strikt ist. Die Funktion f heißt (strikt) konkav, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Satz 1.14. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, und seien $f_1, f_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und sei $\alpha > 0$. Dann sind auch αf_1 , $f_1 + f_2$ und $\max\{f_1, f_2\}$ konvex auf K .

Beweis. Übung. □

Differenz, Produkt und Minimum konvexer Funktionen sind im Allgemeinen nicht konvex. Zu jeder Funktion lassen sich zwei sie charakterisierende Mengen definieren. Ist die Funktion konvex, sind diese Mengen ihrerseits konvex:

Definition 1.15. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge

$$\text{Epi}(f) = \{(x, \alpha) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

heißt der Epigraph von f . Für $\beta \in \mathbb{R}$ heißt die Menge

$$L(f, \beta) = \{x \in K : f(x) \leq \beta\}$$

untere Niveaumenge von f zum Niveau β .

Wir erhalten folgende Charakterisierung.

Satz 1.16. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. f ist konvex $\Leftrightarrow \text{Epi}(f)$ ist konvex.
2. f ist konvex $\Rightarrow L(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Beweis. Übung. □

Für konvexe differenzierbare Funktionen erhalten wir folgende Charakterisierung.

Satz 1.17. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^1$. Dann gilt:

1. f ist genau dann konvex auf der konvexen Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn für alle $x, y \in K$ gilt:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x). \quad (1.5)$$

2. f ist strikt konvex $\Rightarrow$ (1.5) gilt strikt für alle $x \neq y \in K$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Richtung $\Leftarrow$ für die erste Aussage. Es gelte (1.5) für alle $x, y \in K$. Wähle zwei beliebige Punkte $x, y \in K$ und $\lambda \in (0, 1)$. Wegen der Konvexität von K ist dann auch

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in K. \quad (1.6)$$

Mit (1.5) gilt für $x, y, z \in K$

$$f(x) \geq f(z) + (x - z)^T \nabla f(z) \quad (1.7)$$

$$f(y) \geq f(z) + (y - z)^T \nabla f(z). \quad (1.8)$$

Multiplizieren wir nun (1.7) mit λ und (1.8) mit $(1 - \lambda)$, und addieren die beiden Ungleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) &\geq f(z) + \left(\lambda(x - z) + (1 - \lambda)(y - z) \right)^T \nabla f(z) \\ &= f(z) + \left(\lambda x + (1 - \lambda)y - z \right)^T \nabla f(z) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Wegen (1.6) ist der zweite Ausdruck auf der rechten Seite der zweiten Ungleichung 0. Somit folgt die Konvexität von f .

$\Rightarrow$: Sei f konvex. Wir wählen $x, y \in K$ und definieren die Hilfsfunktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\psi(\lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

Mittels Konvexität von f gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$ die Eigenschaft $\psi(\lambda) \geq 0$. Desweiteren gilt $\psi(0) = 0$. Wir berechnen nun die Ableitung von ψ an der Stelle 0 und erhalten

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \psi'(0) = -f(x) + f(y) - \nabla f(x)^T(y - x).$$

Die zweite Aussage folgt unmittelbar. □

Wir erhalten nun sogar ein hinreichendes Optimalitätskriterium für konvexe Optimierungsprobleme.

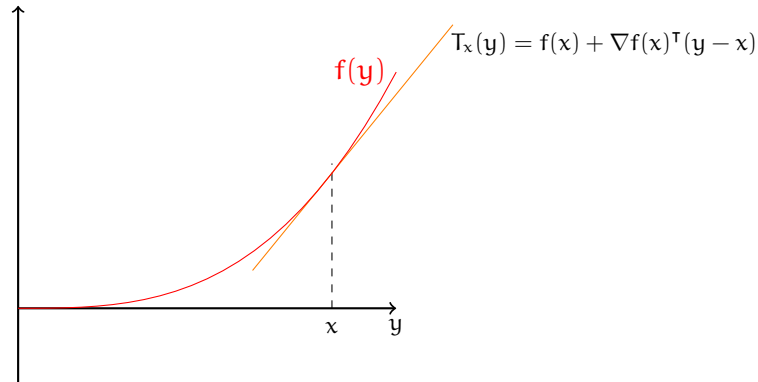


Abbildung 1.4: Illustration von Ungleichung 1.5. $T_x(y)$ repräsentiert die Tangentialebene von f im Punkt x und es gilt $T_x(y) \leq f(y)$ für alle $y \in K$.

Satz 1.18. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion. Dann ist jedes lokale Minimum von f auch ein globales Minimum.

Beweis. Sei x^* ein lokales Minimum. Dann gilt mit Satz 1.9, dass für jede zulässige Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ an x^* gelten muss $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$. Weil K konvex ist, gilt für beliebiges $y \in K$, dass $x^* + \lambda(y - x^*) = \lambda y + (1 - \lambda)x^* \in K$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Somit ist $y - x^*$ eine zulässige Richtung an x^* . Wir erhalten

$$f(y) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq f(x^*),$$

wobei die erste Ungleichung aus Satz 1.17 folgt und die zweite aus der Variationsungleichung. $\square$

Es folgt unmittelbar folgendes Optimalitätskriterium für unrestringierte konvexe Probleme.

Korollar 1.19. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion. Dann ist jeder Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x^*) = 0$ ein globales Minimum des zugehörigen unrestringierten Optimierungsproblems.

Kapitel 2

Konvexität und Trennbarkeit

2.1 Konvexe Mengen und Kegel

Definition 2.1. 1. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$\text{co}(M) := \cap \{K \supset M \mid K \text{ konvex}\}$$

die konvexe Hülle von M . Wie wir zeigen werden ist die konvexe Hülle die kleinste konvexe Menge, welche M enthält. Für $x^0, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\text{co}(x^0, \dots, x^k) = \text{co}(\{x^0, \dots, x^k\})$$

das von $x^0, \dots, x^k$ aufgespannte Simplex. Wenn $x^1 - x^0, \dots, x^k - x^0$ linear unabhängig sind, so heißt das Simplex nichtentartet.

2. Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt Kegel (mit Spitze im Nullpunkt), wenn für alle $x \in K$ der Halbstrahl durch x in K liegt, d.h.

$$\alpha x \in K \text{ für alle } \alpha \geq 0.$$

Ein Kegel K , der konvex ist, heißt konvexer Kegel.

3. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in K$. Der Kegel

$$K(x) := \{\alpha(y - x) \mid y \in K, \alpha > 0\} = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha(K - x)$$

heißt die konische Hülle von K bzgl. x .

Zur Erläuterung dieser Definitionen dienen die folgenden Beispiele in Abbildung 2.1. Wir definieren nun wichtige Klassen von konvexen Mengen.

Definition 2.2. Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$.

1. Eine Menge $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\}$ wird Hyperebene genannt.
2. Die Mengen $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\}$ und $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \geq b\}$ werden Halbräume genannt.

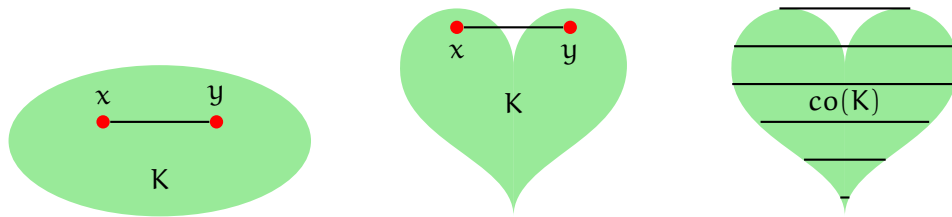


Abbildung 2.1: Die erste Menge ist konvex. Das zweite Herz ist nichtkonvex und die dritte Menge repräsentiert die konvexe Hülle des nicht-konvexen Herzens.

3. Sei nun A eine reellwertige $m \times n$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$.

$K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ wird Polyeder und $K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ Polyeder in Standardform genannt.

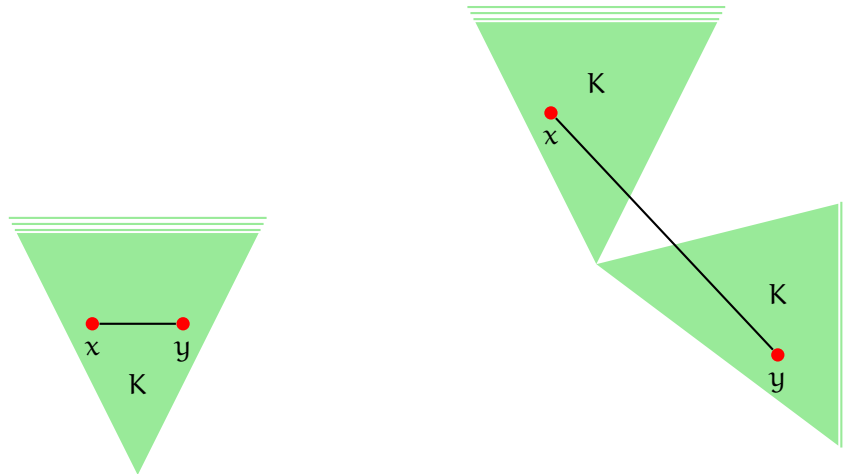


Abbildung 2.2: Links: konvexer Kegel. Rechts: nicht-konvexer Kegel.

2.2 Konvexkombinationen

Definition 2.3. Seien $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$.

- Der Vektor $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ heißt Konvexkombination von $x^1, \dots, x^k$.

Wir erhalten folgenden Satz.

- Satz 2.4.**
1. Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
 2. Jedes Polyeder ist eine konvexe Menge.
 3. Eine Konvexkombination einer endlichen Anzahl von Punkten einer konvexen Menge liegt in derselben Menge.

4. Die konvexe Hülle einer Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge der Konvexkombinationen von Punkten in K . Insbesondere ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte konvex.

Beweis. (1): Seien $X_i, i \in I$ konvexe Mengen und definiere $X := \bigcap_{i \in I} X_i$. Für $x, y \in X$ gilt $x, y \in X_i$ für alle $i \in I$, somit folgt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X_i$ für alle $i \in I$. Schlussendlich folgt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

(2): Ein Polyeder ist der Schnitt von endlich vielen (konvexen) Halbräumen.

(3): Wir zeigen mit Induktion über k , dass jede Konvexkombination von k vielen Punkten aus X wieder in X liegt. Für $k = 1$ ist die Aussage trivial und für $k = 2$ folgt die Aussage aus der Konvexität von X . Für den Schritt $k - 1 \rightarrow k$ betrachte eine Konvexkombination $\mu_1 x^1 + \dots + \mu_k x^k$. Falls $\mu_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, daher nehmen wir nun o.B.d.A. an dass $\mu_k \in (0, 1)$ gilt. Definiere

$$v_1 = \frac{\mu_1}{1 - \mu_k}, \dots, v_{k-1} = \frac{\mu_{k-1}}{1 - \mu_k} \geq 0, \sum_{l=1}^{k-1} v_l = 1.$$

Desweiteren setze

$$y := \sum_{l=1}^{k-1} v_l x^l \in X$$

nach Induktionsvoraussetzung. Nun gilt

$$x = (1 - \mu_k)y + \mu_k x^k \in X,$$

weil der Fall $k = 2$ schon gezeigt wurde.

(4): Sei L die Menge der Konvexkombinationen von Punkten in K und $\text{co}(K)$ die konvexe Hülle von K .

$L \subseteq \text{co}(K)$: Da $\text{co}(K)$ nach (1) konvex ist, liegen alle Konvexkombinationen von Punkten aus $\text{co}(K)$ wieder in $\text{co}(K)$. Da zusätzlich nach Definition der konvexen Hülle $K \subseteq \text{co}(K)$ gilt, ist $L \subseteq \text{co}(K)$.

$\text{co}(K) \subseteq L$: Seien nun $x, y \in L$ mit

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i \text{ und } y = \sum_{j=1}^l \beta_j y^j, \text{ wobei } \alpha_i, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \sum_{j=1}^l \beta_j = 1.$$

Für ein beliebiges $\lambda \in [0, 1]$ gilt dann für

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^k \lambda \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^l (1 - \lambda) \beta_j y^j,$$

dass dieses Element auch in L liegt, denn

$$0 \leq \lambda \alpha_i \leq 1 \forall i, \quad 0 \leq (1 - \lambda) \beta_j \leq 1 \forall j \text{ und}$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^l (1-\lambda) \beta_j = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^l \beta_j = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

was nichts anderes bedeutet, dass z eine Konvexkombination von Elementen aus K ist. Damit ist L konvex. Offensichtlich ist auch $K \subseteq L$, da sich jedes Element $x^p \in K$ schreiben lässt als

$$x^p = \sum_{j \in J} \lambda_j x^j \text{ mit } \lambda_p = 1 \text{ und } \lambda_j = 0 \text{ für } j \neq p.$$

Nach der Definition der konvexen Hülle von K ist $\text{co}(K) \subseteq L$, da L nach obiger Argumentation eine der K enthaltenden konvexen Mengen ist, über die der Schnitt gebildet wird. □

Wir erhalten als Folgerung.

Korollar 2.5. Die Menge der Konvexkombinationen von $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ ist die kleinste (bzgl. Inklusion) konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, welche die Punkte $x^1, \dots, x^k$ enthält.

Beweis. Sei X die Menge der Konvexkombinationen von $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$. Definiere nun

$$Y := \text{co}(x^1, \dots, x^k) = \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ konvex} \\ C \text{ enthält } x^1, \dots, x^k}} C. \quad (2.1)$$

Y ist wohldefiniert weil $\mathbb{R}^n$ ein Kandidat der C Mengen ist. Nach Satz 2.4(1.) ist Y konvex als Schnitt konvexer Mengen. Y ist auch die kleinste konvexe Menge, die die Punkte $x^1, \dots, x^k$ enthält. Da X nach Satz 2.4(4.) konvex ist, erhalten wir sofort $Y \subseteq X$. Sei $x \in X$. Nach Definition von X gilt $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$. Weil nach Voraussetzung $x^1, \dots, x^k \in Y$ gilt, folgt mit Satz 2.4(3.), dass $x \in Y$. □

Der folgende Satz sagt, dass man für die Darstellung eines beliebigen Punktes in $\text{co}(K)$ maximal $(n+1)$ Punkte benötigt, wobei n die Dimension des Raumes ist.

Satz 2.6 (Carathéodory). Für $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $\text{co}(K)$ die Menge aller Konvexkombinationen von höchstens $(n+1)$ -elementigen Teilmengen von K .

Beweis. Sei $x \in \text{co}(K)$. Wegen Satz 2.4 (4) existieren $x^1, \dots, x^k \in K$ so dass

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, k \text{ und } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Wenn bereits $k \leq n+1$ gilt, dann ist nichts mehr zu zeigen. Gilt $k > n+1$, dann zeigen wir, dass man für die Darstellung von x auf einen der k Punkte verzichten kann: Betrachten wir dazu die $(k-1)$ Vektoren $y^i = x^i - x^k, i = 1, \dots, k-1$. Für $k > n+1$ sind

die Punkte y^i linear abhängig, d.h. es existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ mit $\alpha_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, k-1\}$, so dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y^i &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (x^i - x^k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x^i + \left(-\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) x^k &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Definition $\alpha_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x^i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Wegen $\alpha_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, k-1\}$ ist folgender Wert wohldefiniert:

$$i_0 \in \arg \min_{i: \alpha_i > 0} \frac{\lambda_i}{\alpha_i}, \quad \tau := \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}.$$

Es gilt nun

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \right) = 1.$$

Desweiteren

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i x^i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i x^i \right) = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \alpha_i \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \right) x^i.$$

Dabei ist $\lambda_{i_0} - \alpha_{i_0} \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = 0$, so dass x wie gefordert als Konvexkombination von nur $k-1$ Punkten dargestellt werden kann. $\square$

2.3 Trennbarkeit

Wir werden nun den anschaulich einleuchtenden Sachverhalt zeigen, dass man zwei disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene trennen kann, d.h., die Hyperebene unterteilt den Raum in zwei Halbräume, und beide Mengen liegen im jeweils anderen Halbraum.

Definition 2.7. Zwei Teilmengen $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ heißen trennbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ und einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq 0$, gibt mit

$$\lambda x \leq c \leq \lambda y \text{ für alle } x \in K_1, y \in K_2.$$

Die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda x = c\}$ heißt trennende Hyperebene (vgl. Abbildung 2.3); Die Mengen K_1, K_2 heißen echt trennbar durch die Hyperebene H , wenn $K_1 \cup K_2$ nicht

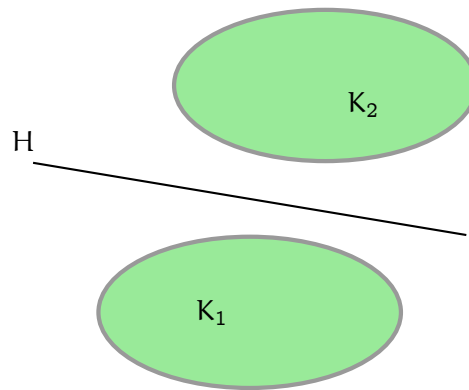


Abbildung 2.3: Illustration der (echten) Trennbarkeit von zwei disjunkten konvexen Mengen.

in H enthalten ist. Die Hyperebene H definiert die beiden Halbräume

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda x \geq c\}, \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda x \leq c\}.$$

Die Mengen K_1, K_2 sind also trennbar, wenn entweder $K_1 \subseteq H^+, K_2 \subseteq H^-$ oder $K_1 \subseteq H^-, K_2 \subseteq H^+$.

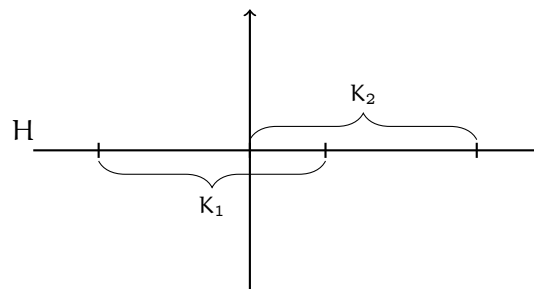


Abbildung 2.4: Zwei Mengen $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ die trennbar, jedoch nicht echt trennbar sind. Die trennende Hyperebene ist gegeben durch $H = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$.

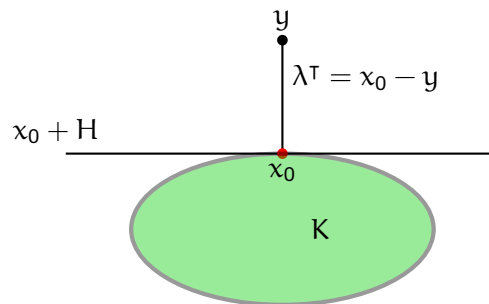


Abbildung 2.5: Illustration des Beweises von Satz 2.8. Gilt im Beispiel $x_0 = y$ dann ist $H + y$ eine trennende Stützhyperebene.

Satz 2.8. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe Menge und sei $y \notin \overset{\circ}{K} := \text{int}(K)$. Dann sind $\{y\}$ und K trennbar, d.h. es gibt einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda y \leq \lambda x \text{ für alle } x \in K.$$

Ist $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ so sind $\{y\}$ und $\overset{\circ}{K}$ echt trennbar, und es gilt

$$\lambda y < \lambda x \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{K}.$$

Beweis. 1. Fall: $y \notin \bar{K}$, wobei $\bar{K}$ den topologischen Abschluss von K bezeichnet. Mit $\|x\|$ werde die euklidische Norm bezeichnet. Setze

$$d := \inf_{x \in \bar{K}} \|x - y\| > 0.$$

Die Funktion $f(x) := \|y - x\|$ ist stetig und nimmt auf der kompakten Menge $\bar{K} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq 2d\}$ ihr Minimum an (Satz von Weierstrass). Wegen der Abgeschlossenheit von $\bar{K}$ gibt es daher $x_0 \in \bar{K}$ mit $d = \|y - x_0\|$. Mit der Konvexität von $\bar{K}$ kann man ausserdem zeigen, dass der Lotpunkt x_0 eindeutig bestimmt ist (vgl. Abbildung 2.5).

Wir zeigen nun, dass $\lambda := (x_0 - y)^T \neq 0$ die Behauptung des Satzes erfüllt. Sei $x \in K$. Wegen der Konvexität von $\bar{K}$ gilt

$$x_0 + \alpha(x - x_0) \in \bar{K} \text{ für } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Daher ist

$$\|x_0 + \alpha(x - x_0) - y\|^2 \geq \|x_0 - y\|^2$$

und hieraus erhält man durch Ausrechnen der Skalarprodukte

$$2\alpha(x_0 - y)^T(x - x_0) + \alpha^2 \|x - x_0\|^2 \geq 0.$$

Die Division durch $\alpha > 0$ liefert im Limes $\alpha \downarrow 0$ die Beziehung

$$(x_0 - y)^T(x - x_0) \geq 0$$

und damit wegen $\lambda^T = (x_0 - y)$ und $d = \|\lambda\|$

$$\lambda x \geq \lambda x_0 = \lambda y + d^2 > \lambda y.$$

Also ist $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda x = \lambda x_0\}$ eine Hyperebene, die $\{y\}$ und K trennt.

2. Fall: $y \in \partial K = \bar{K} - \overset{\circ}{K}$.

Zu $y \in \partial K$ gibt es eine Folge $\{y_k\}$, $y_k \notin \bar{K}$, mit $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. Zu y_k kann gemäß dem ersten Fall ein Zeilenvektor $\lambda_k \neq 0$ gewählt werden mit

$$\lambda_k y_k \leq \lambda_k x \text{ für alle } x \in K.$$

24 | Kapitel 2. Konvexität und Trennbarkeit

O.E. kann $\|\lambda_k\| = 1$ gesetzt werden und daher können wir annehmen, dass die beschränkte Folge $\{\lambda_k\}$ konvergent ist mit $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k$, $\|\lambda\| = 1$ (mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt). Durch Grenzübergang in der obigen Ungleichung ergibt sich dann

$$\lambda y \leq \lambda x \text{ für alle } x \in K.$$

Die Aussage

$$\lambda y < \lambda x \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{K}$$

folgt unmittelbar. □

Im Fall $y \in \partial K$ heißt die trennende Hyperebene Stützhyperebene von K in y . Aus dem Trennungssatz 2.8 folgert man direkt:

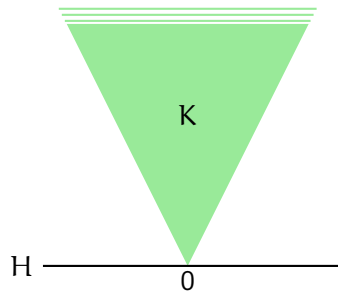


Abbildung 2.6: Trennung eines konvexen Kegels mittels Hyperebene durch 0.

Satz 2.9. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleerer konvexer, abgeschlossener Kegel und sei $y \notin K$. Dann gibt es einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda y < 0 \leq \lambda x \text{ für alle } x \in K.$$

Beweis. Wegen $\bar{K} = K$ gibt es nach dem ersten Fall von Satz 2.8 einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ so dass für alle $x \in K$ gilt $\lambda y < \lambda x$. Aus $0 \in K$ folgt $\lambda y < \lambda 0 = 0$. Angenommen es existiere ein $x \in K$ mit $\lambda x < 0$. Dann folgt

$$\lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty,$$

im Widerspruch zu Beschränktheit von λK durch λy nach unten. Also gilt

$$\forall x \in K : \lambda y < 0 \leq \lambda x.$$

□

Hieraus gewinnt man den folgenden Alternativsatz:

Satz 2.10 (Lemma von Farkas). Sei B eine $k \times n$ Matrix und $d \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Bx = d, x \geq 0$ hat eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\lambda B \geq 0, \lambda d < 0$ hat eine Lösung $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

Beweis. Der Kegel

$$K := \{Bx \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^k$$

ist nichtleer, konvex und abgeschlossen. Zur Abgeschlossenheit: Jeder Vektor aus K besitzt eine nichtnegative Darstellung durch linear unabhängige Spalten von B (abhängige Spalten lassen sich unter Erhaltung der Nichtnegativität eliminieren). Aus einer konvergenten Folge in K wählt man eine Teilfolge mit denselben unabhängigen Spalten. Deren Koeffizienten konvergieren wegen der Injektivität der zugehörigen linearen Abbildung und bleiben im Grenzwert nichtnegativ. Also liegt auch der Grenzwert in K .

Es gilt genau eine der beiden Aussagen

(a) $d \in K$.

(b) $d \notin K$.

Die Aussage (a) ist genau die Aussage (1) des Satzes. Im Falle (b) gibt es nach dem Trennungssatz 2.8 ein $\lambda \in \mathbb{R}^k$ mit

$$\lambda d < 0 \leq \lambda z \text{ für alle } z \in K.$$

Also $\lambda Bx \geq 0$ für alle $x \geq 0$, d.h., $\lambda B \geq 0$. Dies ist die Aussage (2) des Satzes. Man beachte dass die jeweiligen Aussagen (a) und (1) bzw. (b) und (2) äquivalent sind und sich (1) und (2) somit ausschließen. $\square$

Kapitel 3

Nichtlineare Optimierung mit Nebenbedingungen

3.1 Problemformulierung

Gegeben sei eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$. Das allgemeine nichtlineare Optimierungsproblem hat dann die Form:

$$\min \{f(x) | x \in S\}. \quad (3.1)$$

Beachte dass das Maximierungsproblem

$$\max \{f(x) | x \in S\}$$

äquivalent ist zum Minimierungsproblem

$$\min \{-f(x) | x \in S\}.$$

Definition 3.1 (Lokales Minimum). Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heisst lokale Minimalstelle des Problems (3.1), wenn es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\bar{x}$ gibt mit

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ für alle } x \in S \cap U.$$

$\bar{x} \in S$ heisst strenge lokale Minimalstelle des Problems (3.1), wenn es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\bar{x}$ gibt mit

$$f(\bar{x}) < f(x) \text{ für alle } x \in S \cap U, x \neq \bar{x}.$$

Definition 3.2 (Globales Minimum). Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heisst globale Minimalstelle des Problems (3.1), wenn

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ für alle } x \in S.$$

Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heisst strenge globale Minimalstelle des Problems (3.1), wenn

$$f(\bar{x}) < f(x) \text{ für alle } x \in S, x \neq \bar{x}.$$

In der Praxis wird die Menge S meist durch funktionale Gleichungen und Ungleichungen beschrieben. Eine allgemeine Form hierfür lautet

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \in K\}, \quad (3.2)$$

wobei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und $K \subset \mathbb{R}^m$ eine konvexe Menge ist. Das Optimierungsproblem (3.1) geht dann über in

$$\min \{f(x) | g(x) \in K\}. \quad (3.3)$$

Sei $K \neq \emptyset$ und $k = \dim \text{aff}(K)$. Eine invertierbare affine Abbildung $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann $\text{aff}(K)$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0_{m-k}\}$ abbilden. Ersetzt man gleichzeitig g durch $T \circ g$ und K durch $T(K)$, bleibt die zulässige Menge unverändert. In diesen Koordinaten gilt

$$T(K) = \tilde{K} \times \{0_{m-k}\}, \quad \tilde{K} \subset \mathbb{R}^k, \quad \text{int}(\tilde{K}) \neq \emptyset.$$

Im Folgenden schreiben wir wieder K für $\tilde{K}$. Entsprechend zerlegen wir die Abbildung $g = (g_1, \dots, g_m)^\top$ in

$$g := (g_1, \dots, g_k)^\top \text{ und } h := (g_{k+1}, \dots, g_m)^\top.$$

Die zulässige Menge S ist somit aufgespalten in ein System von Ungleichungen $g(x) \in K$, $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ und Gleichungen $h(x) = 0$:

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \in K, h(x) = 0, \overset{\circ}{K} \neq \emptyset\}.$$

Das Optimierungsproblem in (3.3) ist dann äquivalent zu

$$\min \{f(x) | g(x) \in K, h(x) = 0, \overset{\circ}{K} \neq \emptyset\}. \quad (3.4)$$

3.2 Formulierung für den Standardkegel

Wählt man in (3.4) für K den konvexen, abgeschlossenen Standardkegel

$$K := \mathbb{R}_-^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x_i \leq 0, i = 1, \dots, k\},$$

so erhält man das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung:

$$\min \{f(x) | g(x) \leq 0, h(x) = 0\}. \quad (3.5)$$

Hierin ist die Ungleichung $g(x) \leq 0$ komponentenweise zu verstehen. Ausgeschrieben erhalten wir

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{unter den Nebenbedingungen:} \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \\ & g_j(x) = 0, \quad j = k + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Im Fall $k = 0$ gibt es nur Gleichungsnebenbedingungen. Auch für $m > n$ ist das Problem sinnvoll, etwa bei redundanten Gleichungen. Nur wenn die m Nebenbedingungsgradienten linear unabhängig sein sollen, ist $m \leq n$ notwendig. Vorzeichenbedingungen des Typs

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, r \quad (r \leq n),$$

bzw. Schranken des Typs

$$a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, r, \quad (r \leq n)$$

können formal im Standardproblem als Ungleichungen modelliert werden.

Im Rahmen der hier betrachteten **differenzierbaren Optimierung**, machen wir in einer lokalen Minimalstelle $\bar{x}$ die Annahme dass f als auch g stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\bar{x}$ sind. Die ersten Ableitungen $f'(x)$ bzw. $g'(x)$ an der Stelle $\bar{x}$ sind gegeben durch den Zeilenvektor

$$f'(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

bzw. durch die $m \times n$ -Matrix

$$\mathbf{g}'(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}.$$

Für das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung werden wir im Folgenden notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen herleiten.

Kapitel 4

Tangentialkegel und Regularität

Eine zentrale Rolle bei der Herleitung von Optimalitätsbedingungen spielt der Begriff des **Tangentialkegels** $T(S, \bar{x})$ einer Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $\bar{x} \in S$. Bevor wir diesen Begriff formal definieren geben wir ein anschauliches Beispiel.

Beispiel 4.1. Sei $S = \mathbb{R}^n$ und betrachte das Problem

$$\min\{f(x) | x \in S\}.$$

Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von f über S , siehe Abbildung 4.1. Nach der Definition eines lokalen Minimums darf f bei einer Bewegung weg von $\bar{x}$ entlang einer **zulässigen Richtung** nicht fallen. Wir hatten in Optimierung I einen Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ als zulässige Richtung an $\bar{x} \in S$ bezeichnet, falls ein $\bar{\alpha} > 0$ existiert so dass $x = \bar{x} + \alpha d \in S$ für alle $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ gilt.

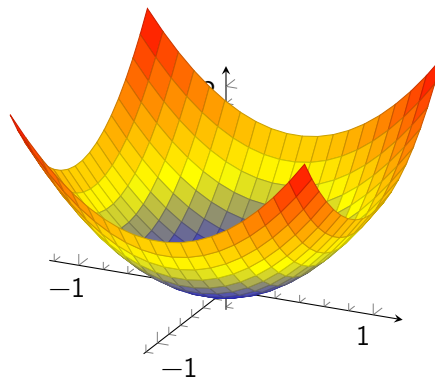
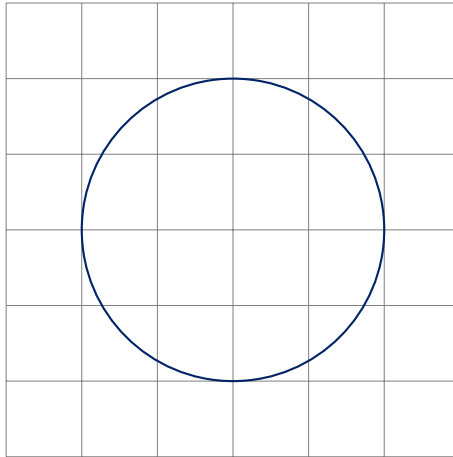


Abbildung 4.1: Beispiel eines lokalen Minimums bei $\bar{x} = 0$.

Für Punkte $\bar{x} \in \overset{0}{S}$ gilt natürlich dass jeder Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ eine zulässige Richtung darstellt. Für Punkte $\bar{x} \in \partial S$ ist das Konzept einer zulässigen Richtung nicht ausreichend. Wir geben ein weiteres Beispiel.

Beispiel 4.2. Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ und betrachte

$$\min\{2x_1 + x_2^2 | x \in S\}.$$



Hier gilt $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ und für jede Richtung $d \neq 0$ gibt es an keinem Punkt $\bar{x} \in S$ ein $\bar{\alpha} > 0$, so dass $x = \bar{x} + \alpha d \in S$ für alle $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ gilt. Wir benötigen somit ein allgemeineres Konzept von zulässigen Richtungen: **infinitesimal zulässige Richtungen an $\bar{x}$** .

4.1 Motivation der Theorie

Wir betrachten das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung.

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } f(x) \\ &\text{u.d.N. } h_i(x) = 0, \quad i \in \{1, \dots, k\}, \\ &\quad g_j(x) \leq 0, \quad j \in \{k+1, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbaren Funktionen f, h_i, g_j für alle i, j . Notation: $h = (h_1, \dots, h_k), g = (g_{k+1}, \dots, g_m)$

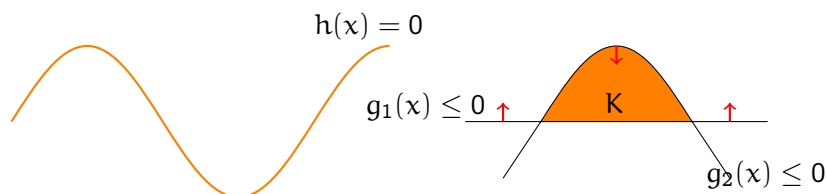


Abbildung 4.2: Veranschaulichung der zulässigen Menge.

Wir werden nun versuchen die nun folgende Theorie zu veranschaulichen. Ein wesentliches Hilfsmittel zur Herleitung von Optimalitätsbedingungen ist der “richtige” Begriff von **zulässigen Richtungen**.

Dazu betrachten wir nun den Fall einer gleichungsdefinierten Mannigfaltigkeit $h(x) = 0$ siehe Abbildung 4.3. Unter gewissen Voraussetzungen (Regularitätsbedingungen) enthält die Tangentialebene $T_h(x) = \{v : \nabla h(x)^T \cdot v = 0\}$ die Menge der **infinitesimal zulässigen Richtungen** an x (Beweis später).

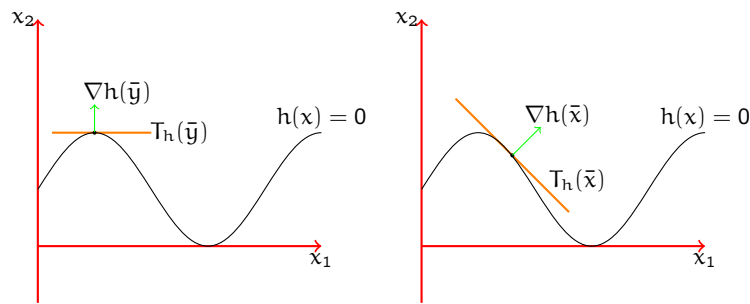


Abbildung 4.3: Die zulässige Menge sei eine Hyperfläche definiert durch $h(x) = 0$. Die Tangentialebene ist jeweils für die zwei Punkte $\bar{y}$ und $\bar{x}$ angegeben.

Nun betrachten wir die Zielfunktion $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ mit $-\nabla f(x_1, x_2) = (1, 1)$.

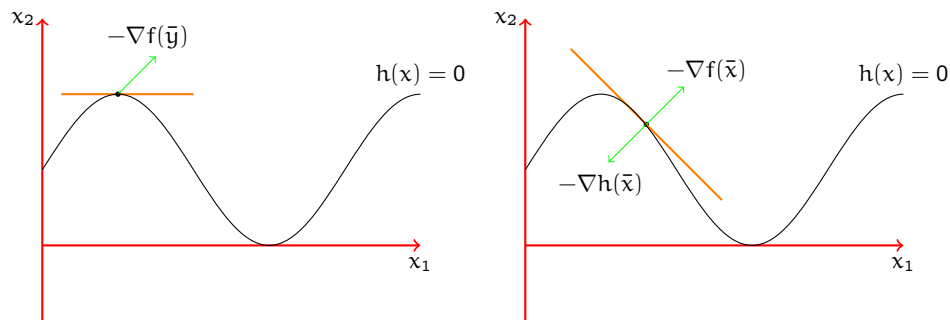


Abbildung 4.4: Zusammenhang der Gradienten von h und f in einem lokalen Minimum.

Der Vektor $-\nabla f(x)$ beschreibt eine Kraft in Abstiegsrichtung. Auf der regulären Hyperfläche $h(x) = 0$ kann die Zwangskraft in beide Normalenrichtungen wirken. Sie hat daher die Form $-\lambda \nabla h(x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Im Gleichgewicht gilt $\nabla f(x) + \lambda \nabla h(x) = 0$; für den Multiplikator einer Gleichungsnebenbedingung gibt es keine Vorzeichenbedingung.

Formaler argumentiert muss für ein lokales Minimum $\bar{x}$ bei einer Bewegung in eine beliebige Tangentialrichtung v von $\bar{x}$ sich der erste Term der Taylorentwicklung $\nabla f(\bar{x})^T v$ nur erhöhen, d.h., $\nabla f(\bar{x})^T v \geq 0$. Weil mit $v \in T_h(\bar{x})$ auch $-v \in T_h(\bar{x})$ gilt, folgt $\nabla f(\bar{x})^T v = 0$. Somit sind $\nabla f(\bar{x})^T$ und $\nabla h(\bar{x})^T$ linear abhängig (ohne Beweis) und es muss in $\bar{x}$ die Bedingung

$$f'(\bar{x}) + \lambda h'(\bar{x}) = 0$$

gelten.

4.2 Tangentialkegel und Variationsungleichung

Die obigen Betrachtungen führen auf folgende Definition des Tangentialkegels.

Definition 4.3 (Tangentialkegel). Der Tangentialkegel $T(S, \bar{x})$ einer Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $\bar{x} \in S$ ist definiert als:

$$T(S, \bar{x}) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt } x_i \in S, t_i > 0, \text{ mit } \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = 0, v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - \bar{x}}{t_i} \right\}. \quad (4.2)$$

Die Definition $v \in T(S, \bar{x})$ lässt sich umschreiben zu

$$x_i = \bar{x} + t_i v + r_i, r_i \in \mathbb{R}^n, \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_i}{t_i} = 0. \quad (4.3)$$

Bei Verwendung der Landau'schen Symbolik ist $r_i = o(t_i)$. Diese Beziehung verdeutlicht, in welchem Sinne v als **Tangentenvektor** zu verstehen ist. Insbesondere gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|x_i - \bar{x}\|}{t_i} = \|v\|.$$

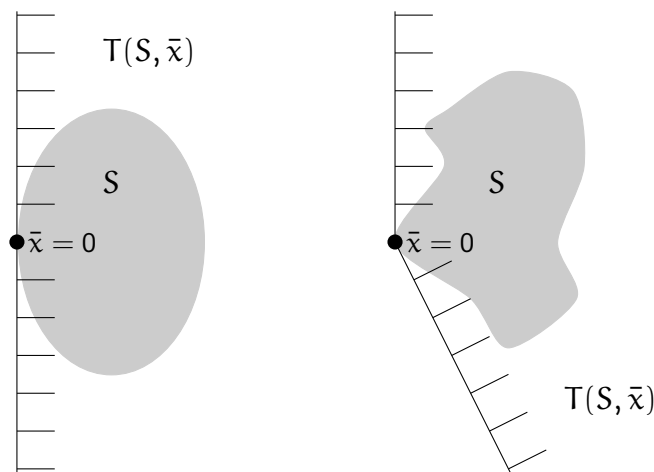


Abbildung 4.5: Tangentialkegel mit Spitze im Nullpunkt.

Nun zeigen wir, dass $T(S, \bar{x})$ in der Tat ein Kegel ist.

Notation.

Wir rekapitulieren einige Begriffe bezüglich topologischer Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$. Zu einer Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$\text{aff}(K)$: der kleinste K enthaltende affine Teilraum von $\mathbb{R}^n$,

$\text{span}(K)$: der kleinste K enthaltende lineare Teilraum von $\mathbb{R}^n$,

$\text{int}(K) = \overset{\circ}{K}$: das topologische Innere von K bzgl. $\mathbb{R}^n$,

K^i : das relative topologische Innere von K bzgl. $\text{aff}(K)$,

$\text{cl}(K) = \bar{K}$: der topologische Abschluss von K ,

$\partial K = \bar{K} \setminus \overset{\circ}{K}$: der Rand von K .

Kegel: Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heisst Kegel (mit Spitze im Nullpunkt), wenn für alle $x \in K$ der Halbstrahl durch x in K liegt, d.h.

$$\alpha x \in K \text{ für alle } \alpha \geq 0.$$

Ein Kegel K , der konvex ist, heisst konvexer Kegel.

Konische Hülle: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in K$. Der Kegel

$$K(x) := \{\alpha(y - x) \mid y \in K, \alpha \geq 0\} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha(K - x)$$

heisst die konische Hülle von K bzgl. x . Per definition entspricht $K(x)$ der konischen Hülle von $K - x$.

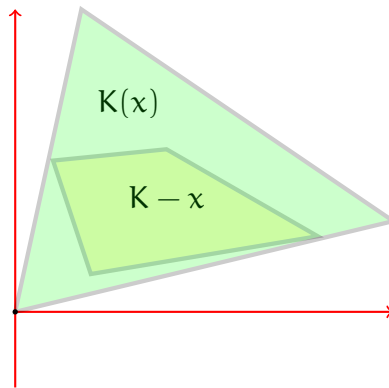


Abbildung 4.6: Illustration der konischen Hülle $K(x)$.

Lemma 4.4. Für jede Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in S$ ist der Tangentialkegel $T(S, \bar{x})$ ein abgeschlossener Kegel mit Spitze im Nullpunkt.

Beweis. Offensichtlich ist $T(S, \bar{x})$ ein Kegel mit Spitze im Nullpunkt. Es bleibt zu zeigen dass $T(S, \bar{x})$ abgeschlossen ist. Sei $v \in \text{cl}(T(S, \bar{x}))$ und $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$v_l \rightarrow v, \quad v_l \in T(S, \bar{x}), \quad \text{für die o.E. gilt } \|v_l - v\| \leq \frac{1}{l}.$$

Wir müssen also zeigen, dass $v \in T(S, \bar{x})$ gilt. Nach Definition des Tangentialkegels gibt es somit für alle $l \in \mathbb{N}$ Folgen $(x_{l,k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(t_{l,k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{l,k} \in S, t_{l,k} > 0, \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} t_{l,k} = 0, v_l = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{l,k} - \bar{x}}{t_{l,k}}. \quad (4.4)$$

Somit existiert für alle $l \in \mathbb{N}$ ein Index k_l mit

$$\left\| \frac{x_{l,k_l} - \bar{x}}{t_{l,k_l}} - v_l \right\| \leq \frac{1}{l}, \quad \|x_{l,k_l} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{l} \quad \text{und} \quad t_{l,k_l} \leq \frac{1}{l}.$$

Für $l \rightarrow \infty$ folgt unmittelbar $x_{l,k_l} \rightarrow \bar{x}$ und $t_{l,k_l} \rightarrow 0$. Des Weiteren gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\left\| \frac{x_{l,k_l} - \bar{x}}{t_{l,k_l}} - v \right\| \leq \left\| \frac{x_{l,k_l} - \bar{x}}{t_{l,k_l}} - v_l \right\| + \|v_l - v\| \leq \frac{2}{l}.$$

Also folgt $\frac{x_{l,k_l} - \bar{x}}{t_{l,k_l}} \rightarrow v$ und somit auch $v \in T(S, \bar{x})$. $\square$

Wir zeigen nun, dass für konvexe Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ der Tangentialkegel in einfacher Weise zu berechnen ist.

Lemma 4.5. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $\bar{x} \in K$. Dann ist der Tangentialkegel $T(K, \bar{x})$ der Abschluss der konischen Hülle von K in $\bar{x}$, d.h.,

$$T(K, \bar{x}) = \text{cl}(\cup_{\alpha > 0} \alpha(K - \bar{x})) =: \overline{K(\bar{x})}.$$

Beweis. $T(K, \bar{x}) \supset \overline{K(\bar{x})}$: Sei $x \in K$ und $\alpha > 0$. Zu zeigen ist dass $\alpha(x - \bar{x}) \in T(K, \bar{x})$. Da K konvex ist und $x \in K$, folgt

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{x} + \frac{\alpha}{i}(x - \bar{x}) \in K, \quad \text{für } i \geq \alpha \\ \Rightarrow \frac{x_i - \bar{x}}{1/i} &= \alpha(x - \bar{x}) \\ \Rightarrow \alpha(x - \bar{x}) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - \bar{x}}{1/i} = v \in T(K, \bar{x}). \end{aligned}$$

Mit der Abgeschlossenheit von $T(K, \bar{x})$ folgt dann auch $T(K, \bar{x}) \supset \overline{K(\bar{x})}$.

$T(K, \bar{x}) \subset \overline{K(\bar{x})}$: Sei $v \in T(K, \bar{x})$ mit

$$x_i = \bar{x} + t_i v + r_i, \quad r_i \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_i}{t_i} = 0.$$

Damit folgt auch

$$\underbrace{\frac{x_i - \bar{x}}{t_i}}_{\in K(\bar{x})} = v + \frac{r_i}{t_i} \Rightarrow v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - \bar{x}}{t_i} \in \overline{K(\bar{x})}. \quad \square$$

Wir leiten nun ein wichtiges notwendiges Optimalitätskriterium her, welches anschaulich besagt, dass in einem lokalen Minimum die Richtungsableitungen in jede Tangentialrichtung nichtnegativ sein muss (sonst gäbe es eine zulässige (tangente) Abstiegsrichtung).

Satz 4.6 (Variationsungleichung). Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle des Problems

$$\min \{f(x) | x \in S\}$$

Sei f in $\bar{x}$ differenzierbar. Dann gilt

$$f'(\bar{x})v \geq 0 \text{ für alle } v \in T(S, \bar{x}).$$

Beweis. Sei $v \in T(S, \bar{x})$. Mit der Darstellung $x_i = \bar{x} + vt_i + r_i$ folgt

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + o(\|x_i - \bar{x}\|) \\ &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})vt_i + o(t_i). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_i) - f(\bar{x})}{t_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(f'(\bar{x})v + \frac{o(t_i)}{t_i} \right) = f'(\bar{x})v.$$

Nun ist $\bar{x}$ lokale Minimalstelle und daher haben wir für genügend grosses i die Bedingung

$$f(x_i) \geq f(\bar{x}).$$

Somit folgt

$$0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_i) - f(\bar{x})}{t_i} = f'(\bar{x})v.$$

□

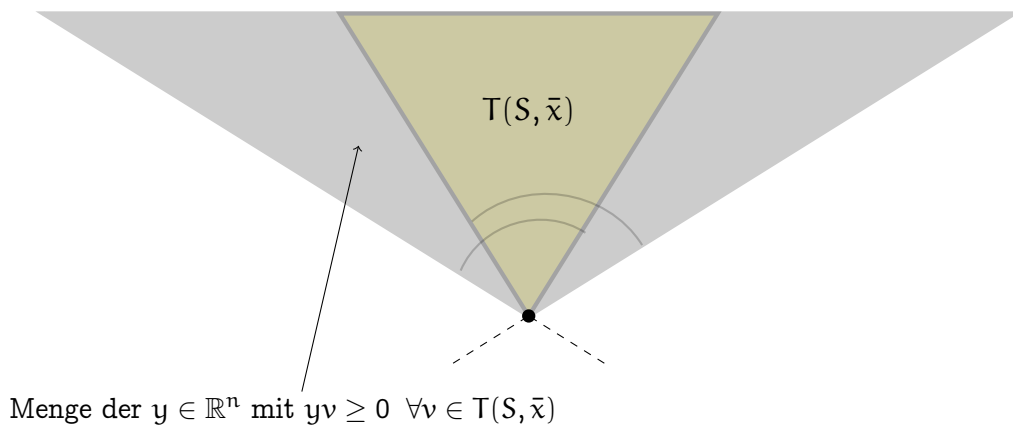


Abbildung 4.7: Menge der Vektoren y für die $yv \geq 0$ für alle $v \in T(S, \bar{x})$ gilt.

4.3 Linearisierender Kegel

Wir betrachten nun den Fall, dass S gegeben ist durch

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \in K\},$$

wobei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $K \subset \mathbb{R}^m$ eine konvexe Menge ist. Bei der Auswertung der Optimalitätsbedingungen in Satz 4.6, stellt sich die

38 | Kapitel 4. Tangentialkegel und Regularität

Frage, wie der Tangentialkegel an einem Punkt $\bar{x} \in S$ zu berechnen ist. Wir führen nun den Begriff des **linearisierenden Kegels** von S in $\bar{x}$ ein. Zur Motivation dieses Kegels “linearisieren” wir die Inklusion $g(x) \in K$ im Punkt $\bar{x}$, d.h., für $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Inklusion

$$g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v \in K,$$

also

$$g'(\bar{x})v \in K - g(\bar{x}) \subset \cup_{\alpha > 0} \alpha(K - g(\bar{x})) =: K(g(\bar{x})).$$

Diese Beziehung motiviert folgende Definition des **linearisierenden Kegels** von S in $\bar{x}$:

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n | g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\}. \quad (4.5)$$

Lemma 4.7. $L(S, \bar{x})$ ist ein konvexer Kegel mit Spitze im Nullpunkt.

Beweis. Es gilt $0 \in L(S, \bar{x})$, wegen der Inklusion $0 \in K(g(\bar{x}))$, die wiederum wegen $g(\bar{x}) \in K$ gilt. Die Kegeleigenschaft $v \in L(S, \bar{x}) \Rightarrow \alpha v \in L(S, \bar{x})$ für alle $\alpha \geq 0$ ist auch erfüllt. Es bleibt Konvexität zu zeigen. Dazu seien $u, v \in L(S, \bar{x})$ und sei $\lambda \in (0, 1)$. Dann gilt für $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$

$$g'(\bar{x})w = \lambda \underbrace{g'(\bar{x})u}_{\in K(g(\bar{x}))} + (1 - \lambda) \underbrace{g'(\bar{x})v}_{\in K(g(\bar{x}))} \in K(g(\bar{x}))$$

wobei die letzte Inklusion aus der Konvexität von $K(g(\bar{x}))$ folgt (siehe folgende Übung). $\square$

Übung 4.8. Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ konvex und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Ferner sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g(x) \in K$. Zeige dass die konische Hülle von K bezüglich $g(x)$, $K(g(x)) = \cup_{\alpha > 0} \alpha(K - g(x))$, konvex ist.

Man beachte, dass $L(S, \bar{x})$ nicht nur von der Punktmenge S abhängt, sondern auch von der für die Darstellung von S gewählten Abbildung g ; vgl. folgendes Beispiel.

Beispiel 4.9. Sei $S := \{0\} \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$. Mit $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ hat S die Darstellung $S = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \in K\}$. Wegen $g'(\bar{x}) = 0$ gilt

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R} | g'(\bar{x})v = 0\} = \mathbb{R}.$$

Wählen wir nun $g(x) = x$, gilt immer noch $S = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \in K\}$. Wegen $g'(\bar{x}) = 1$ gilt jetzt aber $L(S, \bar{x}) = \{0\}$.

Ein Spezialfall von besonderer Bedeutung ist $K = \{0\}$. Hier ist

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$$

eine durch Gleichungen definierte Menge. Bei vollem Zeilenrang von $g'(\bar{x})$ ist sie lokal eine glatte Mannigfaltigkeit. Der linearisierende Kegel ist der Unterraum

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g'(\bar{x})v = 0\}.$$

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist der Standardkegel $K = \mathbb{R}_-^k \times \{0_{m-k}\}$. Hier ist die zulässige Menge S gegeben durch

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k, \\ g_i(x) = 0, i = k+1, \dots, m \end{array} \right\}.$$

Sei

$$I(\bar{x}) := \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$$

die Menge der Indizes für die die Ungleichung $g_i(\bar{x}) \leq 0$ aktiv ist. Wir nennen die Indizes auch Menge der **aktiven Indizes**.

Es folgt unmittelbar, dass $K(g(\bar{x}))$ folgende Form hat:

$$K(g(\bar{x})) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid \begin{array}{l} y_i \leq 0, i \in I(\bar{x}), \\ y_i = 0, i = k+1, \dots, m \end{array} \right\}$$

und somit berechnet sich der linearisierende Kegel zu

$$L(S, \bar{x}) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} g'_i(\bar{x})v \leq 0, i \in I(\bar{x}), \\ g'_i(\bar{x})v = 0, i = k+1, \dots, m \end{array} \right\}. \quad (4.6)$$

Wir erhalten folgende Beziehung zwischen $T(S, \bar{x})$ und $L(S, \bar{x})$.

Lemma 4.10. Wenn $K(g(\bar{x}))$ abgeschlossen ist, so gilt

$$T(S, \bar{x}) \subset L(S, \bar{x}).$$

Beweis. Sei $v \in T(S, \bar{x})$ mit

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(x_i - \bar{x})}{t_i}, \quad x_i \in S, \quad t_i > 0.$$

Wie im Beweis von Satz 4.6 gilt

$$g'(\bar{x})v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(x_i) - g(\bar{x})}{t_i}.$$

Mit $x_i \in S \Rightarrow g(x_i) \in K$ und $t_i > 0$ folgt nach der Definition von $K(g(\bar{x}))$ die Beziehung $\frac{g(x_i) - g(\bar{x})}{t_i} \in K(g(\bar{x}))$. Aus der Abgeschlossenheit von $K(g(\bar{x}))$ folgt dann die Behauptung

$$g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x})), \text{ d.h. } v \in L(S, \bar{x}).$$

□

Die umgekehrte Inklusion $L(S, \bar{x}) \subset T(S, \bar{x})$ ist im Allgemeinen nicht richtig. Das folgende Beispiel illustriert dies.

Beispiel 4.11. Sei $S := \{0\} \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$, $T(S, \bar{x}) = \{0\}$.

1. Mit $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ hat S die Darstellung $S = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \in K\}$. Wegen $g'(\bar{x}) = 0$ gilt

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R} | g'(\bar{x})v = 0\} = \mathbb{R}$$

und daher gilt $T(S, \bar{x}) \subsetneq L(S, \bar{x})$.

2. Mit $K = \{0\} \subset \mathbb{R}$, $g(x) = x$ hat S die Darstellung $S = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \in K\}$. Wegen $g'(\bar{x}) = 1$ gilt $L(S, \bar{x}) = \{0\}$ und daher $T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x})$.

4.4 Regularitätsbedingungen

Zum Nachweis der Beziehung $L(S, \bar{x}) \subset T(S, \bar{x})$ muss man zusätzliche Bedingungen an die Abbildung g und die konvexe Menge K stellen. Solche Bedingungen werden in der Literatur **constraint qualifications** bzw. **Regularitätsbedingungen** genannt. Zur Motivation des allgemeinen Falls, betrachten wir zunächst den Fall einer gleichungsdefinierten Mannigfaltigkeit

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}.$$

Definition 4.12. Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heisst **regulär**, wenn

$$\text{Im } g'(\bar{x}) = \mathbb{R}^m \tag{4.7}$$

gilt, wobei $\text{Im } g'(\bar{x})$ das Bild der linearen Abbildung $x \mapsto g'(\bar{x})x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Ein Punkt $\bar{x}$ ist also genau dann regulär, wenn die Gradienten $g'_i(\bar{x})^\top$, $i = 1, \dots, m$ linear unabhängig sind, d.h., wenn die Matrix

$$g'(\bar{x})g'(\bar{x})^\top \text{ nicht singulär ist.}$$

Für spätere Betrachtungen halten wir fest, dass genau eine der folgenden Aussagen wahr ist:

1. $\bar{x}$ ist regulär.
2. es gibt einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \neq 0$ mit $\lambda g'(\bar{x}) = 0$.

Satz 4.13. Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$ und sei $\bar{x} \in S$ regulär. Dann gelten folgende Aussagen.

1. Zu $v \in \mathbb{R}^n$ mit $g'(\bar{x})v = 0$ gibt es $\epsilon > 0$ und eine Kurve $x : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow S$ mit

$$x(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - \bar{x}}{t} = v.$$

2. Es gilt $T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n | g'(\bar{x})v = 0\}$.

Beweis. Zu (1): Wir definieren folgende Abbildung $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$F(y, t) := g(\bar{x} + tv + g'(\bar{x})^T y), \quad y \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $F(0_m, 0) = g(\bar{x}) = 0$ und die partielle Ableitung von F bzgl. y berechnet sich zu

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0_m, 0) = g'(\bar{x})g'(\bar{x})^T.$$

Die resultierende Matrix ist regulär, da $\bar{x}$ regulär ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher $\epsilon > 0$ und eine in $t = 0$ stetig differenzierbare Funktion $y : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $y(0) = 0$ und

$$F(y(t), t) = 0 \text{ für } t \in [-\epsilon, \epsilon].$$

Hieraus folgt mit $\dot{y}(0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t}$ und der Voraussetzung dass $g'(\bar{x})v = 0$

$$0 = \frac{dF(y(t), t)}{dt} \Big|_{t=0} = F_y(y(0), 0)\dot{y}(0) + F_t(y(0), 0) = g'(\bar{x})g'(\bar{x})^T \dot{y}(0),$$

wobei wir $F_t(y(0), 0) = g'(\bar{x})v = 0$ ausgenutzt haben. Daher folgt $\dot{y}(0) = 0$. Setzen wir nun

$$x(t) = \bar{x} + vt + g'(\bar{x})^T y(t), \quad t \in [-\epsilon, \epsilon],$$

so hat die Kurve $x(t)$ die gewünschten Eigenschaften: $g(x(t)) = 0$, d.h. $x(t) \in S$, $x(0) = \bar{x}$ und $\dot{x}(0) = v$, wegen $\dot{y}(0) = 0$.

Zu (2): Die Behauptung folgt aus (1) und Lemma 4.10. □

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \in K\}, \quad K \text{ konvex.} \quad (4.8)$$

Definition 4.14. Sei S wie in (4.8) definiert. Ein Punkt $\bar{x} \in S$ heisst regulär, wenn gilt

$$\text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m. \quad (4.9)$$

Diese Regularitätsbedingung verallgemeinert die Bedingung (4.7) und besagt geometrisch, dass der lineare Unterraum $\text{Im } g'(\bar{x})$ und der Kegel $K(g(\bar{x}))$ transversal sind.

Im Folgenden werden wir äquivalente Bedingungen herleiten, die jedoch einfacher nachzuweisen sind.

Lemma 4.15. Sei K konvex. Die folgenden Regularitätsbedingungen sind äquivalent:

1. $\text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m$,

- 2. $0 \in \text{int}(\text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})))$,
- 3. $0 \in \text{int}(\text{Im } g'(\bar{x}) + g(\bar{x}) - K)$,

Beweis. Der Beweis wird in folgender Reihenfolge geführt: 1. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1.

1. $\Rightarrow$ 3. : Die Menge $\text{Im } g'(\bar{x}) + g(\bar{x}) - K$ ist konvex und enthält den Nullpunkt wegen $g(\bar{x}) \in K$. Angenommen $0 \notin \text{int}(\text{Im } g'(\bar{x}) + g(\bar{x}) - K)$. Nach dem Trennungssatz (Satz 2.8) existiert ein Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \neq 0$ mit

$$\lambda(g'(\bar{x})v + g(\bar{x}) - y) \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n, y \in K.$$

Mit der Definition

$$K(g(\bar{x})) = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha(K - g(\bar{x}))$$

folgt

$$\lambda(g'(\bar{x})v - y) \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n, y \in K(g(\bar{x})). \quad (4.10)$$

Mit der Voraussetzung $\text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})) = \mathbb{R}^m$ ergibt sich $\lambda = 0$ im Widerspruch zur Wahl von λ .

3. $\Rightarrow$ 2. : Folgt aus $K - g(\bar{x}) \subset K(g(\bar{x}))$.

2. $\Rightarrow$ 1. : Sei $B_\epsilon(0) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| \leq \epsilon\}$. Nach Voraussetzung gibt es $\epsilon > 0$ mit

$$B_\epsilon(0) \subset \text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})).$$

Nun ist $\text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x}))$ ein Kegel und daher gilt

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha B_\epsilon(0) \subset \text{Im } g'(\bar{x}) - K(g(\bar{x})),$$

womit die Behauptung 1. folgt. □

Die Regularitätsbedingungen des vorigen Satzes gehen auf Robinson (1976) zurück.

Unter Verwendung des Beweises von 1. $\Rightarrow$ 3. erhalten wir folgende Aussage.

Korollar 4.16. Ein Punkt $\bar{x} \in S$ ist genau dann nicht regulär, wenn es $\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \neq 0$ gibt mit

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0, \lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})).$$

Übung 4.17. Beweise die Aussage von Korollar 4.16.

Wir spezialisieren die Regularitätsbedingungen von Lemma 4.15 für den Fall

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K, h(x) = 0\}, \overset{\circ}{K} \neq \emptyset, K \text{ konvex}, \quad (4.11)$$

mit $g = (g_1, \dots, g_k)^\top, h = (g_{k+1}, \dots, g_m)^\top$. Dann ist Bedingung 2. von Lemma 4.15 äqui-

valent zu

$$\text{Im } h'(\bar{x}) = \mathbb{R}^{m-k} \text{ und es gibt } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } h'(\bar{x})v = 0, g'(\bar{x})v \in \text{int}(K(g(\bar{x}))). \quad (4.12)$$

und Bedingung 3. ist äquivalent zu

$$\text{Im } h'(\bar{x}) = \mathbb{R}^{m-k} \text{ und es gibt } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } h'(\bar{x})v = 0, g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v \in \overset{\circ}{K}. \quad (4.13)$$

Die Regularitätsbedingungen (4.12) und (4.13) werden in der Literatur **lokale Slater-Bedingungen** genannt. Für den Standardkegel $K = \mathbb{R}_+^k$ ergeben sich aus (4.12) die **Bedingungen von Mangasarian und Fromovitz** (vgl. Mangasarian 1969).

Definition 4.18 (Mangasarian-Fromovitz). Die Gradienten $g'_{k+1}(\bar{x})^\top, \dots, g'_m(\bar{x})^\top$ der Gleichungs-Nebenbedingungen sind linear unabhängig und es gibt $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} g'_i(\bar{x})v &< 0, \quad i \in I(\bar{x}) \text{ (Menge der aktiven Indizes)} \\ g'_i(\bar{x})v &= 0, \quad i = k+1, \dots, m. \end{aligned}$$

Wir werden nun als zentrales Resultat dieses Abschnitts die Beziehung $L(S, \bar{x}) \subset T(S, \bar{x})$ beweisen. Aus Gründen der besseren Verständlichkeit werden wir den Beweis nur für die zulässigen Menge S in der Form (4.11) angeben.

Satz 4.19. Sei $\bar{x}$ ein regulärer Punkt von

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \in K, h(x) = 0\}, \quad \overset{\circ}{K} \neq \emptyset, K \text{ konvex.}$$

Dann gelten folgende zwei Aussagen.

1. Zu $v \in \mathbb{R}^n$ mit $h'(\bar{x})v = 0$, und $g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v \in \overset{\circ}{K}$ gibt es $\epsilon > 0$ und eine Kurve

$$x : [0, \epsilon] \rightarrow S$$

mit der Eigenschaft

$$x(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{x(t) - \bar{x}}{t} = v.$$

2. Es gilt $L(S, \bar{x}) \subset T(S, \bar{x})$.

Beweis. Zu 1.: Im Fall $k = m$ setzen wir $\delta = 1$ und $x(t) = \bar{x} + tv$ für $|t| \leq \delta$. Wenn $k < m$ so gibt es nach Satz 4.13,(1.), eine Zahl $\delta > 0$ und eine Kurve $x : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$h(x(t)) = 0 \text{ für } t \in [-\delta, \delta], \quad x(0) = \bar{x}, \quad \dot{x}(0) = v.$$

Wegen

$$g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v \in \overset{\circ}{K}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x(t)) - g(\bar{x})}{t} = g'(\bar{x})v$$

gibt es $\epsilon \leq \min\{\delta, 1\}$ mit

$$g(\bar{x}) + \frac{g(x(t)) - g(\bar{x})}{t} \in K \text{ für } 0 < t \leq \epsilon.$$

Da $g(\bar{x}) \in K$, folgt aus der Konvexität von K

$$g(x(t)) = (1-t)g(\bar{x}) + t \left(g(\bar{x}) + \frac{g(x(t)) - g(\bar{x})}{t} \right) \in K \text{ für } 0 < t \leq \epsilon.$$

Somit folgt $x(t) \in S$ für $0 \leq t \leq \epsilon$.

Zu 2.: Wir wiederholen die Definition von $L(S, \bar{x})$:

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x})), \ h'(\bar{x})v = 0\}.$$

Sei $v \in L(S, \bar{x})$ gegeben. Nach Definition von $K(g(\bar{x}))$ gibt es $r > 0$ mit

$$g'(\bar{x})v \in r(K - g(\bar{x})), \quad h'(\bar{x})v = 0.$$

Dies impliziert

$$g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\frac{v}{r} \in K, \quad h'(\bar{x})v = 0.$$

Wegen der Regularität von $\bar{x}$ existiert nach (4.13) ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v_0 \in \overset{\circ}{K}, \quad h'(\bar{x})v_0 = 0.$$

Wir bilden die Konvexkombination

$$v_\alpha := (1-\alpha)v_0 + \alpha\frac{v}{r}, \quad \text{für } 0 \leq \alpha < 1.$$

und erhalten mittels folgender Aussage

Übung 4.20. Sei K konvex und $x \in \overset{\circ}{K}, y \in \bar{K}$. Dann gilt

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in \overset{\circ}{K}, \quad \text{für } 0 \leq \alpha < 1.$$

dass gilt

$$g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v_\alpha \in \overset{\circ}{K}, \quad h'(\bar{x})v_\alpha = 0 \text{ für } 0 \leq \alpha < 1.$$

Nach Teil 1. folgt

$$v_\alpha \in T(S, \bar{x}) \text{ für } 0 \leq \alpha < 1.$$

Aus der Abgeschlossenheit des Kegels $T(S, \bar{x})$ ergibt sich dann

$$v = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \alpha v_\alpha \in T(S, \bar{x}).$$

□

Wir geben nun Beispiele an um das obige Resultat zu verdeutlichen.

Beispiel 4.21. Die zulässige Menge S werde beschrieben durch die Ungleichungen

$$g_1(x) = x_2 - x_1^3 \leq 0, \quad g_2(x) = x_2 \leq 0.$$

Für $\bar{x} = 0$ gilt $I(\bar{x}) = \{1, 2\}$.

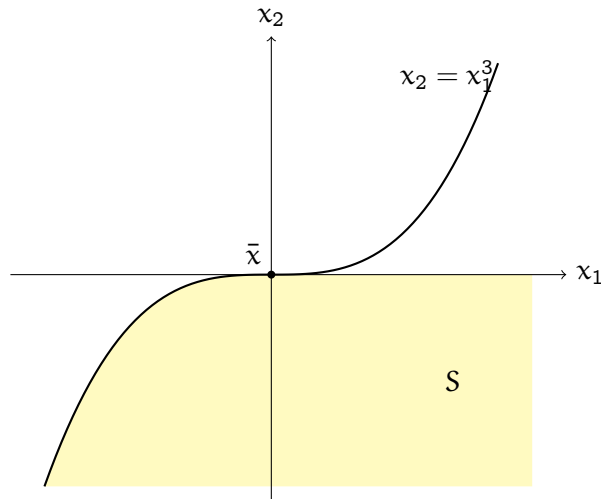


Abbildung 4.8: Menge S .

Die Ableitungen

$$g'_1(\bar{x}) = g'_2(\bar{x}) = (0, 1)$$

sind nicht linear unabhängig. Der Punkt $\bar{x} = 0$ ist jedoch regulär im Sinne von Definition 4.18, da für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v_2 < 0$ gilt

$$g'_i(\bar{x})v = v_2 < 0, \quad i = 1, 2.$$

Man erhält direkt

$$T(S, \bar{x}) = L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^2 | v_2 \leq 0\}$$

in Übereinstimmung mit Satz 4.19, (2.).

Wir geben ein weiteres leicht geändertes Beispiel an.

Beispiel 4.22. Die zulässige Menge S werde beschrieben durch die Ungleichungen

$$g_1(x) = x_2 - x_1^3 \leq 0, \quad g_2(x) = -x_2 \leq 0.$$

Für $\bar{x} = 0$ gilt $I(\bar{x}) = \{1, 2\}$. Die Ableitungen

$$g'_1(\bar{x}) = (0, 1) \quad \text{und} \quad g'_2(\bar{x}) = (0, -1).$$

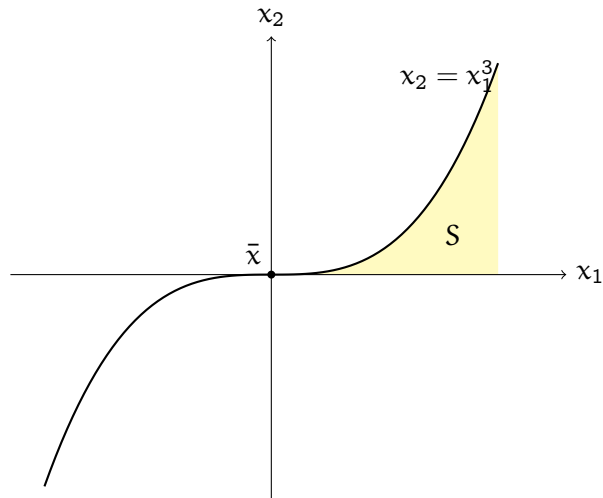


Abbildung 4.9: Menge S .

sind linear abhängig. Der Punkt $\bar{x} = 0$ ist nicht regulär im Sinne von Definition 4.18, da die Bedingungen

$$g'_1(0)v = v_2 < 0, \text{ und } g'_2(0)v = -v_2 < 0$$

für keinen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ erfüllbar sind. Wir berechnen

$$T(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^2 | v_1 \geq 0, v_2 = 0\}$$

und nach (4.6) erhalten wir

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^2 | v_2 = 0\}.$$

In diesem Beispiel gilt also $T(S, \bar{x}) \subsetneq L(S, \bar{x})$.

Kapitel 5

Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Nach den Vorbereitungen des letzten Kapitels sind wir nun in der Lage **notwendige Optimalitätsbedingungen** für folgendes Problem herzuleiten:

$$\min \{f(x) \mid g(x) \in K\} \quad (5.1)$$

Wir setzen wiederum voraus, dass f differenzierbar in einer lokalen Minimalstelle $\bar{x}$ von (5.1) ist und g stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\bar{x}$ ist.

Zur Motivation und besseren Verständlichkeit des folgenden Satzes werden wir zunächst einige Vorüberlegungen anstellen. Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von (5.1). Dann gibt es nach Definition eine Umgebung U von $\bar{x}$, so dass die beiden Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert als

$$\{(f(x) - f(\bar{x}), g(x)) \mid x \in U\} \cap \{(r, y) \mid r < 0, y \in K\}$$

leeren Durchschnitt haben. Daher ist der Nullpunkt $(0, 0_m)$ ein Randpunkt der Differenzmenge

$$B = \{(f(x) - f(\bar{x}) + r, g(x) - y) \mid x \in U, r \geq 0, y \in K\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m. \quad (5.2)$$

Linearisiert man diese Menge, d.h. ersetzt man $f(x)$ und $g(x)$ durch die Taylorapproximation erster Ordnung (ohne Restglied) im Punkt $\bar{x}$, also

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})v \text{ bzw. } g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v \text{ mit } v = x - \bar{x},$$

so erhält man die **konvexe Menge**

$$\tilde{B} = \{(f'(\bar{x})v + r, g'(\bar{x})v + g(\bar{x}) - y) \mid v \in \mathbb{R}^n, r \geq 0, y \in K\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Die konische Hülle dieser konvexen Menge bzgl. $(0, 0_m)$ ist gegeben durch den folgenden konvexen Kegel:

$$A = \{(f'(\bar{x})v + r, g'(\bar{x})v - y) \mid v \in \mathbb{R}^n, r \geq 0, y \in K(g(\bar{x}))\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m. \quad (5.3)$$

Übung 5.1. Zeige, dass A die konische Hülle von $\tilde{B}$ bzgl. $(0, 0_m)$ ist.

Die so konstruierte Menge A ist also eine **konvexe Approximation** der nicht-konvexen Menge B . Die Aussage des folgenden Satzes ist äquivalent zu der Aussage, dass $(0, 0_m)$ ein Randpunkt von A ist.

Satz 5.2. Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von (5.1). Dann gelten folgende Aussagen.

1. Notwendige Optimalitätsbedingungen von John:

Es gibt einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (\lambda_0, \lambda) \neq (0, 0_m)$ mit

$$\lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0 \quad (5.4)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})). \quad (5.5)$$

2. Notwendige Optimalitätsbedingungen von Karush-Kuhn-Tucker:

Ist $\bar{x}$ regulär, so gilt $\lambda_0 > 0$ in (1) und es kann o.E. $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden. Es gibt also einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0 \quad (5.6)$$

$$\lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})). \quad (5.7)$$

Beweis. Beide Teile des Satzes werden gemeinsam bewiesen.

1. Fall: $\bar{x}$ ist nicht regulär. Nach Korollar 4.16 gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \neq 0$ mit

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0, \lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})).$$

Die Aussage des ersten Teils des Satzes folgt dann mit $\lambda_0 = 0$.

2. Fall: Sei $\bar{x}$ nun regulär. Die Variationsungleichung in Satz 4.6 lautet:

$$f'(\bar{x})v \geq 0 \text{ für alle } v \in T(S, \bar{x}), \text{ wobei } S := \{x \mid g(x) \in K\}.$$

Mit der Regularität von $\bar{x}$ folgt aus Satz 4.19, dass

$$T(S, \bar{x}) \supset L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\},$$

und somit erhalten wir

$$f'(\bar{x})v \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x})). \quad (5.8)$$

Wir betrachten nun den in (5.3) eingeführten Kegel:

$$A = \{(f'(\bar{x})v + r, g'(\bar{x})v - y) \mid v \in \mathbb{R}^n, r \geq 0, y \in K(g(\bar{x}))\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

Wegen (5.8) ist $(0, 0_m)$ ein Randpunkt von A (denn $0 \in A$, aber $(-a, 0_m) \notin A$ für $a > 0$) und daher gibt es nach dem Trennungssatz einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (\lambda_0, \lambda) \neq 0$,

mit

$$\lambda_0(f'(\bar{x})v + r) + \lambda(g'(\bar{x})v - y) \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n, r \geq 0, y \in K(g(\bar{x})). \quad (5.9)$$

Für $r = 0$ und $y = 0$ erhalten wir hieraus

$$\lambda_0(f'(\bar{x})v) + \lambda g'(\bar{x})v \geq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n$$

und daher muss gelten

$$\lambda_0(f'(\bar{x})) + \lambda g'(\bar{x}) = 0.$$

Für $v = 0$ und $y = 0$ folgt $\lambda_0 r \geq 0$ für alle $r \geq 0$ und somit gilt $\lambda_0 \geq 0$. Schliesslich ergibt (5.9) für $v = 0$ und $r = 0$ die Beziehung

$$\lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})).$$

Der Fall $\lambda_0 = 0$ widerspricht der Aussage von Korollar 4.16 für reguläre Punkte $\bar{x}$. Also gilt $\lambda_0 > 0$ und wir können o.E. $\lambda_0 = 1$ setzen.

□

5.1 Lagrange-Funktion und Multiplikatoren

Der letzte Satz wird in der Literatur auch als Lagrange Multiplikatorenregel genannt. Die Komponenten $\lambda_i, i = 0, \dots, m$ heissen Lagrange-Multiplikatoren. Die Lagrange-Funktion wird definiert durch

$$L(x, \lambda_0, \lambda) := \lambda_0 f(x) + \lambda g(x), \quad (\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$$

bzw. für reguläre Punkte

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}^m.$$

Die Optimalitätsbedingungen von John bzw. von Karush-Kuhn-Tucker lauten dann:

1. John: $L_x(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) = 0, \lambda_0 \geq 0, (\lambda_0, \lambda) \neq 0, \lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$
2. KKT: $L_x(\bar{x}, \lambda) = 0, \lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$,

wobei L_x die partielle Ableitung von L bzgl. x bezeichnet.

Übung 5.3. Zeige dass die folgende Menge

$$\Lambda(\bar{x}) := \{\lambda \in \mathbb{R}^m | L_x(\bar{x}, \lambda) = 0, \lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x}))\} \quad (5.10)$$

konvex und abgeschlossen ist.

Ist $\bar{x}$ ein regulärer Punkt, so ist dies die Menge der Lagrange-Multiplikatoren zu $\bar{x}$.

Darüber hinaus zeigen wir folgenden Satz.

Satz 5.4. Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von (5.1). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1. $\bar{x}$ ist regulär.
2. $\Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $\Lambda(\bar{x})$ ist beschränkt.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: $\Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$ folgt aus Satz 5.2, (2.).

Annahme: $\Lambda(\bar{x})$ ist unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $\lambda_i \in \Lambda(\bar{x})$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\|\lambda_i\| \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$. Nach Definition von $\Lambda(\bar{x})$ gilt

$$f'(\bar{x}) + \lambda_i g'(\bar{x}) = 0, \lambda_i(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})).$$

Wegen $\lambda_i \neq 0$ für i gross genug, folgt hieraus

$$\frac{1}{\|\lambda_i\|} f'(\bar{x}) + \frac{\lambda_i}{\|\lambda_i\|} g'(\bar{x}) = 0, \quad \frac{\lambda_i}{\|\lambda_i\|}(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})). \quad (5.11)$$

Der Rand der Einheitskugel $B_1(0)$ in $\mathbb{R}^m$ ist kompakt und wir können daher o.E. annehmen, dass die Folge $\frac{\lambda_i}{\|\lambda_i\|}$ gegen λ mit $\|\lambda\| = 1$ konvergiert. Die Beziehung (5.11) liefert für $i \rightarrow \infty$

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0, \lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})).$$

Mit Korollar 4.16 steht dies im Widerspruch zur Regularität von $\bar{x}$.

1. $\Leftarrow$ 2.: Sei $\lambda_1 \in \Lambda(\bar{x})$ fest.

Annahme: $\bar{x}$ ist nicht regulär.

Nach Korollar 4.16 gibt es $\lambda_2 \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_2 \neq 0$ mit

$$\lambda_2 g'(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_2(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})).$$

Hieraus folgt unmittelbar $\lambda_1 + r\lambda_2 \in \Lambda(\bar{x})$ für alle $r \geq 0$ im Widerspruch zur Beschränktheit von $\Lambda(\bar{x})$. □

Zusammen mit den Einsichten der Übungsaufgabe erhalten wir folgende Folgerung.

Korollar 5.5. Ist $\bar{x}$ regulär, so ist $\Lambda(\bar{x})$ eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

Abschliessend geben wir nun eine Bedingung an, die die Eindeutigkeit des Lagrange-Multiplikators, der in der KKT-Bedingung auftritt, gewährleistet.

Definition 5.6. Ein Punkt $\bar{x}$ heisst normal, wenn

$$\text{Im } g'(\bar{x}) - V = \mathbb{R}^m, \quad V := K(g(\bar{x})) \cap (-K(g(\bar{x}))). \quad (5.12)$$

Man beachte dass $V = K(g(\bar{x})) \cap (-K(g(\bar{x})))$ der grösste in $K(g(\bar{x}))$ enthaltene lineare Teilraum ist. Wegen $K(g(\bar{x})) \supset V$ gilt: $\bar{x}$ ist normal $\Rightarrow \bar{x}$ ist regulär.

| **Satz 5.7.** Ist $\bar{x}$ normal, so besteht $\Lambda(\bar{x})$ aus genau einem Element.

Beweis. Zunächst gilt $\Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$, da $\bar{x}$ regulär ist. Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(\bar{x})$ wollen wir zeigen $\lambda_1 = \lambda_2$. Nach Definition von $\Lambda(\bar{x})$ erhalten wir

$$f'(\bar{x}) + \lambda_i g'(\bar{x}) = 0, \quad \lambda_i(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x})) \quad (i = 1, 2).$$

Der Vektor $\lambda := \lambda_1 - \lambda_2$ erfüllt dann

$$\lambda g'(\bar{x}) = 0, \quad \lambda y = 0 \text{ für alle } y \in V.$$

Aus der Bedingung (5.12) in Definition 5.6 (nämlich $\text{Im } g'(\bar{x}) - V = \mathbb{R}^m$) folgt $\lambda = 0$ und daher gilt $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

5.2 Spezialisierung für den Standardkegel

Wenn die Menge K in der Formulierung 5.1 ein konvexer Kegel ist, so erhalten wir $K(g(\bar{x})) = K + \mathbb{R} g(\bar{x})$.

| **Übung 5.8.** Zeige, dass für K konvexer Kegel gilt $K(g(\bar{x})) = K + \mathbb{R} g(\bar{x})$.

Die Beziehung

$$\lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x}))$$

ist dann äquivalent zu

$$\lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K, \quad \lambda g(\bar{x}) = 0. \quad (5.13)$$

Hierbei wird die Gleichung $\lambda g(\bar{x}) = 0$ Komplementaritätsbedingung genannt.

| **Übung 5.9.** Zeige die obige Äquivalenz, d.h., für $K(g(\bar{x})) = K + \mathbb{R} g(\bar{x})$ ist

$$\lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K(g(\bar{x}))$$

äquivalent zu

$$\lambda(-y) \geq 0 \text{ für alle } y \in K, \quad \lambda g(\bar{x}) = 0.$$

Nun wenden wir uns dem Standardproblem der nichtlinearen Optimierung zu.

$$\begin{aligned} \min \{f(x) \mid & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ & g_i(x) = 0, \quad i = k + 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

52 | Kapitel 5. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Dieses Problem erhält man als Spezialfall von 5.1 indem man $K = \mathbb{R}_+^k \times \{0_{m-k}\}$ setzt. Zur Erinnerung: die Indextmengen der **aktiven Indizes** sind

$$\begin{aligned} I(\bar{x}) &:= \{i \in \{1, \dots, k\} \mid g_i(\bar{x}) = 0\} \\ J(\bar{x}) &:= I(\bar{x}) \cup \{k+1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Für den Lagrange-Multiplikator $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ folgt aus (5.13) die Beziehung

$$\lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \in I(\bar{x}), \lambda_i = 0 \text{ für alle } i \notin J(\bar{x}).$$

Man berechnet

$$K(g(\bar{x})) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \leq 0, i \in I(\bar{x}), y_i = 0, i = k+1, \dots, m\}$$

und der lineare Teilraum V in der Normalitätsbedingung (5.12) ist somit gegeben durch

$$V = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i = 0 \text{ für alle } i \in J(\bar{x})\}.$$

Wir erhalten direkt folgende Folgerung:

Korollar 5.10. Der Punkt $\bar{x}$ ist genau dann normal für das Standardproblem 5.14, wenn die Gradienten

$$g'_i(\bar{x}) \text{ } i \in J(\bar{x}) \text{ linear unabhängig sind.} \quad (5.15)$$

Wir können nun den Satz von John und Karush-Kuhn-Tucker für das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung formulieren.

Satz 5.11. Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle des Standardproblems (5.14). Weiter sei f differenzierbar in $\bar{x}$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\bar{x}$. Dann gibt es $\lambda_0 \geq 0$ und einen Zeilenvektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $(\lambda_0, \lambda) \neq (0, 0_m)$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $L_x(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = \lambda_0 f'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g'_i(\bar{x}) = 0 \in \mathbb{R}^n$.
2. $\lambda_i = 0$ für $i \notin J(\bar{x})$, d.h., $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $g_i(\bar{x}) < 0$.
3. $\lambda_i \geq 0$ für $i \in I(\bar{x})$.

Es gilt $\lambda_0 > 0$, falls $\bar{x}$ regulär ist. Dann kann o.E. $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden (teile Lagrange-Funktion durch $\lambda_0 > 0$). Falls $\bar{x}$ normal ist, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}^m$ eindeutig.

Jeder zulässige Punkt $\bar{x}$, welcher zusammen mit Multiplikatoren (λ_0, λ) Satz 5.11 genügt, heisst kritischer Punkt bzw. Extremalpunkt. Es liegt in der Natur notwendiger Bedingungen, dass nicht jeder kritische Punkt eine lokale Minimalstelle von (5.14) ist. Insbesondere stimmen bei Optimierungsproblemen mit Gleichungsrestriktionen die Bedingungen von

Satz 5.11 für das Minimierungsproblem

$$\min\{f(x)|g(x) = 0\}$$

und das Maximierungsproblem

$$\max\{f(x)|g(x) = 0\}$$

formal überein.

Wir geben ein Beispiel zur Berechnung von kritischen Punkten.

Beispiel 5.12.

$$\begin{aligned} \min \{f(x) = x_1 + x_2 \\ g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0.\} \end{aligned}$$

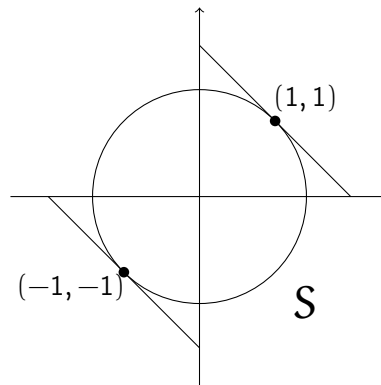


Abbildung 5.1: Menge S und kritische Punkte.

Jeder Punkt der zulässigen Menge S definiert durch

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0\}$$

ist regulär. Die notwendigen KKT-Bedingungen lauten

$$f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = (1 + 2\lambda\bar{x}_1, 1 + 2\lambda\bar{x}_2) = 0.$$

Hieraus folgt zunächst $\lambda \neq 0$. Zusammen mit $g(\bar{x}) = 0$ erhält man die beiden kritischen Punkte

$$\bar{y} = (1, 1)^T, \lambda = -1/2$$

$$\bar{x} = (-1, -1)^T, \lambda = 1/2$$

Offensichtlich ist $\bar{y}$ eine strenge lokale Maximalstelle, während $\bar{x}$ eine strenge lokale Minimalstelle ist. Mit den hinreichenden Bedingungen des folgenden Abschnitts kann das auch so formal nachgewiesen werden.

Wir modifizieren das Beispiel nun leicht.

54 | Kapitel 5. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung
Beispiel 5.13.

$$\min \{f(x) = x_1 + x_2 \\ g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0.\}$$

Jeder Punkt der zulässigen Menge S definiert durch

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0\}$$

ist regulär. Die notwendigen KKT-Bedingungen lauten

$$f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = (1 + 2\lambda\bar{x}_1, 1 + 2\lambda\bar{x}_2) = 0, \lambda \geq 0, \quad \lambda g(\bar{x}) = 0.$$

Hieraus folgt die eindeutige Lösung

$$\bar{x} = (-1, -1)^T, \lambda = 1/2$$

Somit sondert die Vorzeichenbedingung $\lambda \geq 0$ die Lösung $\bar{y}$ des vorigen Beispiels aus.

Wir geben ein weiteres Beispiel.

Beispiel 5.14.

$$\min \{f(x) = -x_2 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ g_2(x) = -x_1^2 + x_2 \leq 0.\}$$

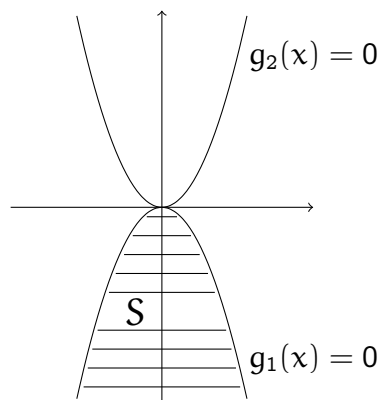


Abbildung 5.2: Menge S und kritischer Punkt.

Es ist sofort einzusehen, dass $\bar{x} = (0, 0)^T$ die globale Minimalstelle ist. Die Ableitungen der aktiven Indizes $I(\bar{x}) = \{1, 2\}$

$$g'_1(0, 0) = (0, 1), g'_2(0, 0) = (0, 1)$$

sind linear abhängig und daher ist $\bar{x}$ nicht normal. Jedoch ist $\bar{x}$ regulär, da die Mangasarian-

Fromovitz-Bedingung z.B. für den Vektor $v = (0, -1)^T$ erfüllt ist.

$$g_1'(0, 0)v = g_2'(0, 0)v = (0, 1) \cdot (0, -1)^T = -1 < 0.$$

Die notwendigen KKT-Bedingungen lauten

$$f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = (0, -1 + \lambda_1 + \lambda_2) = 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

Daher ist die Menge der Lagrange-Multiplikatoren gegeben durch

$$\Lambda(\bar{x}) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

Diese Menge ist konvex und kompakt im Einklang mit Korollar 5.5.

Kapitel 6

Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Wir gehen wieder von folgendem Optimierungsproblem

$$\min \{f(x) \mid g(x) \in K\} \quad (6.1)$$

aus und setzen voraus, dass f zweimal differenzierbar und g zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung einer lokalen Minimalstelle $\bar{x}$ von (6.1) ist.

Die Hesse-Matrix von f in $\bar{x}$ bezeichnen wir mit

$$f''(\bar{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Die Hesse-Matrix der Lagrange Funktion berechnet sich zu

$$L_{xx}(\bar{x}, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x}) = \lambda_0 f''(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i''(\bar{x}).$$

Der linearisierende Kegel der Menge S im Punkt $\bar{x}$ ist nach der Definition in (4.5) gegeben durch

$$L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\}.$$

Die in Abschnitt 5 hergeleiteten Optimalitätsbedingungen erster Ordnung stützen sich auf Eigenschaften der ersten Ableitung $f'(\bar{x})$ bzgl. des linearisierenden Kegels $L(S, \bar{x})$. Die nun folgenden notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen **zweiter Ordnung** hingegen beruhen auf Eigenschaften der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion

$$\lambda_0 f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x})$$

bzgl. des konvexen Kegels

$$\begin{aligned}
C &:= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(\bar{x})v \leq 0, g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(\bar{x})v \leq 0\} \cap L(S, \bar{x}).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Diese Menge C stellt die Menge der Vektoren v des linearisierenden Kegels $L(S, \bar{x})$ dar, welche zugleich potentielle Abstiegsrichtungen für die Funktion f in $\bar{x}$ sind.

Man möchte mit Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung die Kandidaten für ein lokales Minimum weiter eingrenzen. Ferner sind sie von enormer Bedeutung für numerische Verfahren, welche lokale Minima berechnen.

Der folgende Satz enthält nun die versprochenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung.

Satz 6.1. Sei $\bar{x} \in S$ und $K(g(\bar{x}))$ abgeschlossen.

1. Notwendige Bedingung zweiter Ordnung:

Ist $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von (6.1), so gibt es zu jedem Vektor $v \in C$ einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$, mit

- (a) $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$.
- (b) $\lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0$
- (c) $v^T(\lambda_0 f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x}))v \geq 0$

2. Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung:

Zu jedem Vektor $v \in C \setminus \{0\}$ gebe es einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$ mit

- (a) $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda(-y) \geq 0$ für alle $y \in K(g(\bar{x}))$.
- (b) $\lambda_0 f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0$
- (c) $v^T(\lambda_0 f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x}))v > 0$.

Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Konstante $c > 0$ mit

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + c \|x - \bar{x}\|^2 \text{ für alle } x \in S \text{ mit } \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon. \tag{6.3}$$

Insbesondere ist $\bar{x}$ eine strenge lokale Minimalstelle von (6.1).

3. Ist $\bar{x}$ regulär, so gilt $\lambda_0 > 0$, d.h. o.E. $\lambda_0 = 1$ kann in (1.) und (2.) angenommen werden. Ist $\bar{x}$ normal, so gilt $\lambda_0 = 1$ und der Multiplikator λ in (1.) und (2.) ist eindeutig und unabhängig von $v \in C$.

Beweis. Zu 1: Der Beweis unterscheidet sich nicht wesentlich von den notwendigen Bedingungen erster Ordnung und daher verweisen wir auf Lempio und Zowe (1981) für einen vollständigen Beweis.

Zu 2: Wir nehmen an, dass die Aussage (6.3) falsch ist. Dann gibt es eine Folge $\{x_i\} \subset S$ mit

$$x_i \neq \bar{x}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}.$$

und

$$f(x_i) < f(\bar{x}) + \frac{1}{i} \|x_i - \bar{x}\|^2. \quad (6.4)$$

Setze nun $v_i := x_i - \bar{x} \neq 0$. Der Rand der Einheitskugel ist kompakt und wir können daher o.E. annehmen, dass der folgende Limes existiert:

$$v := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{v_i}{\|v_i\|} \quad (\text{daraus folgt } \|v\| = 1).$$

Mit (6.4) folgt nun

$$f'(\bar{x})v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(x_i) - f(\bar{x})}{\|x_i - \bar{x}\|} \leq 0,$$

und weiterhin gilt wegen der Abgeschlossenheit von $K(g(\bar{x}))$

$$g'(\bar{x})v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(x_i) - g(\bar{x})}{\|x_i - \bar{x}\|} \in K(g(\bar{x})).$$

Nach Definition des Kegels in (6.2) haben wir daher $v \in C \setminus \{0\}$. Zu diesem Vektor v gibt es nach Voraussetzung einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$, welcher die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt. Die Taylorentwicklung um $\bar{x}$ zweiter Ordnung der Funktionen f und g liefert zusammen mit (6.4):

$$f'(\bar{x})v_i + \frac{1}{2} v_i^T f''(\bar{x})v_i + o(\|v_i\|^2) = f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{i} \|v_i\|^2 \quad (6.5)$$

$$g'(\bar{x})v_i + \frac{1}{2} v_i^T g''(\bar{x})v_i + o(\|v_i\|^2) = g(x_i) - g(\bar{x}) \in K(g(\bar{x})). \quad (6.6)$$

Multipliziert man (6.5) mit λ_0 und (6.6) mit λ , so erhält man durch Addition beider Gleichungen und unter Berücksichtigung von (a), (b) die Beziehung

$$\frac{1}{2} v_i^T (\lambda_0 f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x}))v_i + o(\|v_i\|^2) \leq \frac{\lambda_0}{i} \|v_i\|^2.$$

(Man benutze insbesondere (a), d.h., $g(x_i) - g(\bar{x}) \in K(g(\bar{x}))$ und somit $\lambda(g(x_i) - g(\bar{x})) \leq 0$.) Die Division dieser Ungleichung durch $\|v_i\|^2$ ergibt dann im Limes $i \rightarrow \infty$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2} v^T (\lambda_0 f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x}))v \leq 0$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten Bedingung (c).

Zu 3: Wenn $\bar{x}$ regulär ist, so folgt $\lambda_0 > 0$ bereits aus Satz 5.2(2.). Ist $\bar{x}$ normal, so gilt die Behauptung nach Satz 5.7. $\square$

Der Kegel C in (6.2) kann unter Vermeidung der Funktion f auch anders beschrieben werden. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, dass $\bar{x}$ normal ist. Falls nun $\bar{x}$ eine lokale

Minimalstelle ist, so gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit

$$f'(\bar{x}) + \lambda g'(\bar{x}) = 0, \quad \lambda(-y) \geq 0 \text{ für } y \in K(g(\bar{x})). \quad (6.7)$$

Für $v \in C$ gilt nach Definition

$$f'(\bar{x})v \leq 0, \quad \lambda(-y) \geq 0 \text{ für } y \in K(g(\bar{x})).$$

In Verbindung mit (6.7) erhalten wir

$$f'(\bar{x})v = -\lambda g'(\bar{x})v \leq 0, \quad \lambda(-g'(\bar{x})v) \geq 0.$$

Somit folgt

$$f'(\bar{x})v = 0 \text{ und } \lambda g'(\bar{x})v = 0 \text{ für alle } v \in C.$$

Daher hat C in diesem Fall die Darstellung

$$C = \{v \in \mathbb{R}^n | \lambda g'(\bar{x})v = 0, \quad g'(\bar{x})v \in K(g(\bar{x}))\}. \quad (6.8)$$

6.1 Spezialisierung auf den Standardkegel

Speziell für Gleichungsnebenbedingungen $K = \{0\}$ haben wir

$$C = L(S, \bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n | g'(\bar{x})v = 0\}.$$

Für das Standardproblem erhalten wir unter Zuhilfenahme der bekannten Indexmengen der aktiven Indizes $I(\bar{x})$ und $J(\bar{x}) = I(\bar{x}) \cup \{k+1, \dots, m\}$ (siehe Abschnitt 5) für den Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^m$:

$$\lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \in I(\bar{x}), \quad \lambda_i = 0 \text{ für alle } i \notin J(\bar{x}).$$

Wegen

$$K(g(\bar{x})) = \{y \in \mathbb{R}^m | y_i \leq 0, i \in I(\bar{x}), \quad y_i = 0, i = k+1, \dots, m\}$$

hat dann der Kegel C die Gestalt

$$\begin{aligned} C = \{v \in \mathbb{R}^n | & g'_i(\bar{x})v \leq 0, i \in I(\bar{x}), \quad \lambda_i = 0, \\ & g'_i(\bar{x})v = 0, i \in I(\bar{x}), \quad \lambda_i > 0, \\ & g'_i(\bar{x})v = 0, i = k+1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Zusammengefasst erhalten wir nun folgende notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung für das Problem (6.1).

Satz 6.2. Sei $\bar{x} \in S$ normal, d.h., die Gradienten $g'_i(\bar{x})^\top, i \in J(\bar{x})$ sind linear unabhängig.

1. Notwendige Bedingung zweiter Ordnung:

Ist $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von (6.1), so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen

$\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in J(\bar{x})$, mit

- (a) $\lambda_i \geq 0$ für $i \in I(\bar{x})$,
- (b) $f'(\bar{x}) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \lambda_i g'_i(\bar{x}) = 0$
- (c) $v^T(f''(\bar{x}) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \lambda_i g''_i(\bar{x}))v \geq 0$ für alle $v \in C$ mit C wie in (6.9).

2. Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung:

Es gebe Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in J(\bar{x})$, mit

- (a) $\lambda_i \geq 0$ für $i \in I(\bar{x})$,
- (b) $f'(\bar{x}) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \lambda_i g'_i(\bar{x}) = 0$
- (c) $v^T(f''(\bar{x}) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \lambda_i g''_i(\bar{x}))v > 0$ für alle $v \in C \setminus \{0\}$ mit C wie in (6.9).

Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Konstante $c > 0$ mit

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + c \|x - \bar{x}\|^2 \text{ für alle } x \in S \text{ mit } \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon. \quad (6.10)$$

Insbesondere ist $\bar{x}$ eine strenge lokale Minimalstelle von (6.1).

6.2 Beispiele

Das Optimierungsproblem in Beispiel 5.12

$$\begin{aligned} \min \{ & f(x) = x_1 + x_2 \\ & g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0. \} \end{aligned}$$

hatte die beiden regulären kritischen Punkte

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (1, 1)^T \text{ mit } \lambda_1 = -1/2 \\ \bar{x}_2 &= (-1, -1)^T \text{ mit } \lambda_2 = 1/2. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion in den beiden kritischen Punkten lautet

$$f''(\bar{x}) + \lambda g''(\bar{x}) = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $\bar{x}_2$ und λ_2 ist diese Matrix positiv definit auf $\mathbb{R}^2$, also ist die Bedingung in Satz 6.2(2.) erfüllt mit dem Unterraum

$$C = \{v \in \mathbb{R}^2 | v_2 = -v_1\}.$$

Daher ist $\bar{x}_2$ eine strenge lokale Minimalstelle.

Für $\bar{x}_1$ und λ_1 ist die Matrix negativ definit, somit ist $\bar{x}_1$ eine strenge lokale Maximalstelle.

Wir geben ein weiteres Beispiel.

Betrachte folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \min \{ & f(x) = x_1^2 + x_2 \\ & g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0, \\ & g_2(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0. \} \end{aligned}$$

Als Kandidaten für ein lokales Minimum betrachten wir den Punkt $\bar{x} = (0, -3)^\top$, für den $g_1(\bar{x}) = 0$ und $g_2(\bar{x}) < 0$ gilt. Also ist $I(\bar{x}) = \{1\}$. Der Punkt $\bar{x}$ ist normal und die KKT-Bedingungen in Satz 5.11 hat mit $\lambda_2 = 0$ die Lösung $\lambda_1 = 1/6$. Der Kegel C in (6.9) ist der Unterraum

$$\begin{aligned} C &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2\bar{x}_1 v_1 + 2\bar{x}_2 v_2 = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = 0\} \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion

$$f''(\bar{x}) + \lambda_1 g_1''(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2(1 + \lambda_1) & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

ist positiv definit auf $\mathbb{R}^2$ und insbesondere gilt dann

$$v^\top (f''(\bar{x}) + \lambda_1 g_1''(\bar{x})) v = 2v_1^2(1 + \lambda_1) > 0$$

für alle $v \in C \setminus \{0\}$. Mit Satz 6.2(2.) ist daher $\bar{x} = (0, -3)^\top$ eine strenge lokale Minimalstelle.

Kapitel 7

Sensitivitätsanalyse

Wir betrachten das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung:

$$\begin{aligned} \min \{f(x) \mid & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ & g_i(x) = 0, \quad i = k + 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

In der Praxis unterliegen die Eingabedaten, insbesondere die Funktionen f und g gewissen Störungen. Die einfachste Form eine solche Störung zu modellieren, ist die rechte Seite von (7.1) in folgender Weise zu stören:

$$\begin{aligned} \min \{f(x) \mid & g_i(x) \leq \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ & g_i(x) = \epsilon_i, \quad i = k + 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Diese vom Störungsparameter $\epsilon := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \in \mathbb{R}^m$ abhängige Schar von Optimierungsproblemen wird auch als Standardstörung von (7.1) bezeichnet. Für $\epsilon = 0$ geht (7.2) in (7.1) über, so dass man (7.1) als das ungestörte Problem bezeichnet.

Eine Verallgemeinerung ist die folgende Schar von Problemen, bei denen ein Störungsparameter $\epsilon \in \mathbb{R}^p, p \geq 1$ nichtlinear auf die Funktionen f und g einwirken:

$$\begin{aligned} \min \{f(x, \epsilon) \mid & g_i(x, \epsilon) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ & g_i(x, \epsilon) = 0, \quad i = k + 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Hier sind $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ vorgegebene Abbildungen, deren Differenzierbarkeitseigenschaften später erläutert werden.

Sei K der Standardkegel $K = \mathbb{R}_+^k \times \{0_{m-k}\}$. Dann erhalten wir in äquivalenter Form:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x, \epsilon) \mid g(x, \epsilon) \in K\}. \quad (7.4)$$

Die zulässige Menge von (7.4) ist gegeben durch

$$S(\epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x, \epsilon) \in K\}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^p. \quad (7.5)$$

Als Optimalwertfunktion von (7.4) bezeichnen wir die Funktion:

$$w : \mathbb{R}^p \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \text{ welche definiert ist durch} \quad (7.6)$$

$$w(\epsilon) := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x, \epsilon) | g(x, \epsilon) \in K\}, \epsilon \in \mathbb{R}^p.$$

7.1 Lokale Sensitivitätsanalyse

Bei der in diesem Abschnitt durchgeführten Analyse werden wir folgende Fragestellung betrachten: Unter welchen Bedingungen lässt sich eine lokale Minimalstelle $x(0)$ des ungestörten Problems in eine differenzierbare Schar $x(\epsilon)$ von lokalen Minimalstellen einbetten. O. E. benutzen wir folgende Notation für aktive Indizes:

$$\begin{aligned} I(\bar{x}) &= \{i \in \{1, \dots, k\} | g_i(\bar{x}, 0) = 0\} = \{1, \dots, k_0\}, \\ J(\bar{x}) &= \{1, \dots, k_0, k+1, \dots, m\}, \\ m_0 &:= |J(\bar{x})| = m + k_0 - k. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Wir erhalten folgenden Satz.

Satz 7.1. Seien f und g in einer Umgebung von $(\bar{x}, 0)$ gemeinsam bezüglich (x, ϵ) zweimal stetig differenzierbar. Sei $\bar{x} \in S(0)$ eine lokale Minimalstelle des ungestörten Problems 7.4. Der Punkt $\bar{x}$ sei normal, d.h., die Gradienten $g_{ix}(\bar{x}, 0)^T$ sind für $i \in J(\bar{x})$ linear unabhängig. Es gebe eindeutig bestimmte Zahlen $\bar{\lambda}_i, i \in J(\bar{x})$, so dass die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung von Satz 6.1, Bedingung (2) erfüllt sind mit

1. $\bar{\lambda}_i > 0$ für $i = 1, \dots, k_0$,
2. $f_x(\bar{x}, 0) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \bar{\lambda}_i g_{ix}(\bar{x}, 0) = 0$,
3. $v^T \left(f_{xx}(\bar{x}, 0) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \bar{\lambda}_i g_{ixx}(\bar{x}, 0) \right) v > 0$ für alle $v \neq 0$ mit

$$v \in C = \{v \in \mathbb{R}^n | g_{ix}(\bar{x}, 0)v = 0, i \in J(\bar{x})\}.$$

Dann gibt es eine Umgebung $E \subset \mathbb{R}^p$ von $\epsilon = 0$ und stetig differenzierbare Funktionen $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \lambda_i : E \rightarrow \mathbb{R}, i \in J(\bar{x})$, mit folgenden Eigenschaften:

1. $x(0) = \bar{x}, \lambda_i(0) = \bar{\lambda}_i, i \in J(\bar{x})$,
2. für alle $\epsilon \in E$ gilt: $x(\epsilon), \lambda_i(\epsilon), i \in J(\bar{x})$ erfüllen die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung von Satz 6.1(2.) für das gestörte Problem (7.4). Insbesondere ist $x(\epsilon)$ eine lokale Minimalstelle für (7.4).

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}, m_0 = m + k_0 - k,$$

durch

$$G(x, \epsilon) = (g_1(x, \epsilon), \dots, g_{k_0}(x, \epsilon), g_{k+1}(x, \epsilon), \dots, g_m(x, \epsilon))^T.$$

Nach Konstruktion ist $\bar{x}$ eine strenge lokale Minimalstelle des Problems

$$\min\{f(x, 0) \mid G(x, 0) = 0\}.$$

Die gesuchte lokale Minimalstelle $x(\epsilon)$ von (7.4) soll stetig differenzierbar sein, daher muss insbesondere gelten dass

$$g_i(x(\epsilon), \epsilon) < 0 \text{ für } i \notin J(\bar{x}), \|\epsilon\| \text{ klein genug.}$$

Daher ist $x(\epsilon)$ eine lokale Minimalstelle des gestörten Problems mit Gleichheitsnebenbedingungen der Form

$$\min\{f(x, \epsilon) \mid G(x, \epsilon) = 0\}. \quad (7.8)$$

Die Lagrange-Funktion für dieses Problem ist

$$L(x, v, \epsilon) = f(x, \epsilon) + vG(x, \epsilon), \quad v \in \mathbb{R}^{m_0}. \quad (7.9)$$

Der gesuchte Punkt $x(\epsilon)$ und der zugehörige Multiplikator $v(\epsilon) = (\lambda_i(\epsilon))_{i \in J(\bar{x})}$ müssen dann das Gleichungssystem

$$F(x, v^T, \epsilon) := \begin{pmatrix} L_x(x, v, \epsilon)^T \\ G(x, \epsilon) \end{pmatrix} = 0 \quad (7.10)$$

erfüllen, wobei

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_0},$$

und v^T als Argument von F aus Konsistenzgründen als Spaltenvektor auftritt. Für $\epsilon = 0$ gilt nach Voraussetzung $F(\bar{x}, \bar{v}^T, 0) = 0$ mit $\bar{v} := (\bar{\lambda}_i)_{i \in J(\bar{x})}$ und F ist stetig differenzierbar in einer Umgebung von $(\bar{x}, \bar{v}^T, 0)$. Die Jacobi-Matrix von F bzgl. (x, v^T) im Punkt $(\bar{x}, \bar{v}^T, 0)$ ist die $(n + m_0) \times (n + m_0)$ Matrix

$$A_0 := \frac{\partial F}{\partial (x, v^T)}(\bar{x}, \bar{v}^T, 0) = \begin{pmatrix} L_{xx}(\bar{x}, \bar{v}, 0) & G_x(\bar{x}, 0)^T \\ G_x(\bar{x}, 0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Wir zeigen nun, dass die Matrix A_0 regulär ist. Dazu sei $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_0}$ mit

$$A_0 \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{xx}(\bar{x}, \bar{v}, 0) v + G_x(\bar{x}, 0)^T w \\ G_x(\bar{x}, 0) v \end{pmatrix} = 0. \quad (7.12)$$

Durch Multiplikation der Gleichung mit $(v, 0)^T$ von links erhalten wir zusammen mit

$$G_x(\bar{x}, 0)v = 0$$

$$v^T L_{xx}(\bar{x}, \bar{v}, 0)v = 0.$$

Die Voraussetzung des Satzes ergibt nun $v = 0$. Die Gleichung (7.12) reduziert sich somit auf

$$G_x(\bar{x}, 0)^T w = 0.$$

Wegen der Normalität von $\bar{x}$ hat die Matrix $G_x(\bar{x}, 0)^T$ den Rang m_0 und daher folgt $w = 0$. Somit ist die Regularität von A_0 gezeigt.

Wir können nun den Satz über implizite Funktionen auf das Gleichungssystem (7.10) anwenden und erhalten die Existenz einer Umgebung $E \subset \mathbb{R}^p$ von $\epsilon = 0$ und stetig differenzierbare Funktionen $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v(\epsilon) = (\lambda_i(\epsilon))_{i \in J(\bar{x})} : E \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$, mit:

$$\begin{aligned} F(x(\epsilon), v(\epsilon)^T, \epsilon) &= 0 \text{ für alle } \epsilon \in E, \\ x(0) &= \bar{x}, \quad v(0) = \bar{v}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Zum Beweis des Satzes müssen wir noch nachweisen, dass $x(\epsilon)$ und die Multiplikatoren $(\lambda_i(\epsilon))_{i \in J(\bar{x})}$ den hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung für das gestörte Problem genügen. Wegen

$$\begin{aligned} \lambda_i(0) &= \bar{\lambda}_i > 0, \quad i = 1, \dots, k_0, \\ g_i(x(0), 0) &= g_i(\bar{x}, 0) < 0, \quad \text{für } i = k_0 + 1, \dots, k \end{aligned}$$

können wir die Umgebung E aus Stetigkeitsgründen klein genug wählen, so dass für alle $\epsilon \in E$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_i(\epsilon) &> 0, \quad i = 1, \dots, k_0, \\ g_i(x(\epsilon), \epsilon) &< 0, \quad \text{für } i = k_0 + 1, \dots, k \end{aligned}$$

Mit (7.10) und (7.13) ist daher $x(\epsilon) \in S(\epsilon)$ für alle $\epsilon \in E$ und ausserdem gelten die KKT-Bedingungen:

$$L_x(x(\epsilon), v(\epsilon), \epsilon) = 0 \text{ für alle } \epsilon \in E.$$

Schliesslich kann wiederum aus Stetigkeitsgründen E so gewählt werden, dass die folgende Bedingung zweiter Ordnung für alle $\epsilon \in E$ gilt:

$$v^T \left(f_{xx}(x(\epsilon), \epsilon) + \sum_{i \in J(\bar{x})} \lambda_i(\epsilon) g_{ixx}(x(\epsilon), \epsilon) \right) v > 0$$

für alle $v \neq 0$ mit

$$v \in C = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g_{ix}(x(\epsilon), \epsilon)v = 0, \quad i \in J(\bar{x})\}.$$

Die Matrix $G_x(x(\epsilon), \epsilon)$ hat den Rang m_0 , so dass $x(\epsilon)$ normal ist. Insgesamt ist daher $x(\epsilon)$ eine strenge lokale Minimalstelle des Störungsproblems (7.4). $\square$

Wir erhalten eine nützliche Folgerung.

Korollar 7.2. Für die in Satz 7.1 auftretenden stetig differenzierbaren Funktionen $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n, v(\epsilon) = (\lambda_i(\epsilon))_{i \in J(\bar{x})} : E \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ gelten die folgenden Aussagen:

1. Mit der regulären $(n + m_0) \times (n + m_0)$ Matrix A_0 und der $(n + m_0) \times p$ Matrix

$$B_0 = \begin{pmatrix} L_{x\epsilon}(\bar{x}, \bar{v}, 0) \\ G_\epsilon(\bar{x}, 0) \end{pmatrix}$$

berechnet sich $\dot{x}(0)$ und $\dot{v}(0)$ aus

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{v}(0)^\top \end{pmatrix} = -A_0^{-1} B_0.$$

2. Verallgemeinerte Schattenpreisformel:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} f(x(\epsilon), \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = L_\epsilon(\bar{x}, \bar{v}, 0) = f_\epsilon(\bar{x}, 0) + \bar{v} G_\epsilon(\bar{x}, 0).$$

Hier bezeichnen $\dot{x}(0)$ und $\dot{v}(0)^\top$ die Jacobi-Matrizen bezüglich ϵ (der Dimensionen $n \times p$ und $m_0 \times p$). Der obere Block $L_{x\epsilon}$ von B_0 ist die Ableitung der Spalte $L_x^\top$ nach ϵ . Die Schattenpreisformel beschreibt den lokalen Wert $f(x(\epsilon), \epsilon)$; für den globalen Wert $w(\epsilon)$ gilt sie nur, wenn dieser Zweig global optimal bleibt.

Beweis. Zu (1): Die Differentiation der Gleichung (7.13) ergibt mit (7.10) und (7.11) die Beziehung:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} F(x(\epsilon), v(\epsilon)^\top, \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = A_0 \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{v}(0)^\top \end{pmatrix} + B_0 = 0.$$

Daraus folgt direkt die Behauptung.

Zu (2): Zunächst folgt aus $G(x(\epsilon), \epsilon) = 0$ die Beziehung

$$0 = \left. \frac{d}{d\epsilon} G(x(\epsilon), \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = G_x(\bar{x}, 0) \dot{x}(0) + G_\epsilon(\bar{x}, 0).$$

Zusammen mit

$$f_x(\bar{x}, 0) = -\bar{v} G_x(\bar{x}, 0)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} f(x(\epsilon), \epsilon) \right|_{\epsilon=0} &= f_x(\bar{x}, 0) \dot{x}(0) + f_\epsilon(\bar{x}, 0) \\ &= -\bar{v} G_x(\bar{x}, 0) \dot{x}(0) + f_\epsilon(\bar{x}, 0) \\ &= \bar{v} G_\epsilon(\bar{x}, 0) + f_\epsilon(\bar{x}, 0) \\ &= L_\epsilon(\bar{x}, \bar{v}, 0). \end{aligned}$$

7.2 Anwendung auf Echtzeioptimierung

Teil (1) des Korollars eröffnet die Möglichkeit die Lösung $x(\epsilon)$ des gestörten Problems und den zugehörigen Lagrange-Multiplikator durch eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung aus der ungestörten Lösung zu approximieren:

$$\begin{pmatrix} x(\epsilon) \\ v(\epsilon)^T \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{v}(0)^T \end{pmatrix} \epsilon. \quad (7.14)$$

Die Formel in 2. geht für das Störungsproblem in Standardform (7.2) über in

$$\left. \frac{d}{d\epsilon_i} f(x(\epsilon), \epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \begin{cases} -\bar{\lambda}_i & \text{für } i \in J(\bar{x}) \\ 0, & \text{für } i \notin J(\bar{x}). \end{cases} \quad (7.15)$$

Diese Beziehung verdeutlicht die Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren als **Schattenpreise** bzw. als **marginale Kosten**.

Die Formel (7.14) ermöglicht eine Anwendung in der sogenannten **Echtzeioptimierung**. Angenommen man berechnet **offline** eine optimale Lösung des ungestörten Problems. Falls sich nun Systemdaten dynamisch ändern, so kann eine neue Lösung in **Echtzeit** (also ohne Gleichungssysteme neu zu lösen) mittels der Approximation (7.14) implementiert werden.

Das folgende Beispiel verdeutlicht die hergeleiteten Sätze.

Beispiel 7.3.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, \epsilon) = -(0.5 + \epsilon)\sqrt{x_1} - (0.5 - \epsilon)x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0.1, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Für $\epsilon = 0$ sind die Voraussetzungen von Satz 7.1 erfüllt mit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (0.25, 0.75), \quad \bar{x} \text{ ist normal} \\ J(\bar{x}) &= \{1\}, \quad G_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \\ \bar{v} &= \bar{\lambda}_1 = 0.5 > 0. \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion (7.9) ist gegeben durch

$$L(\bar{x}, \bar{v}, \epsilon) = -(0.5 + \epsilon)\sqrt{\bar{x}_1} - (0.5 - \epsilon)\bar{x}_2 + \bar{v}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1).$$

Die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung gelten wegen

$$L_{xx}(\bar{x}, \bar{v}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid G_x(\bar{x})v = v_1 + v_2 = 0\}$$

$$v^T L_{xx}(\bar{x}, \bar{v}, 0)v = v_1^2 > 0 \text{ für alle } v \in C \setminus \{0\}.$$

Die Formeln des Satzes ergeben dann

$$A_0 = \begin{pmatrix} L_{xx} & G_x^T \\ G_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} L_{x\epsilon} \\ G_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{v}(0) \end{pmatrix} = -A_0^{-1}B_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Approximation erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} x_1(\epsilon) \\ x_2(\epsilon) \\ v(\epsilon) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \epsilon.$$

Für $\epsilon = 0.05$ erhält man

Approximation : (0.35, 0.65, 0.45)
 exakterWert(gerundet) : (0.373, 0.627, 0.45).

Kapitel 8

Dualität

Wir betrachten wiederum das Standardproblem der nichtlinearen Optimierung:

$$\begin{aligned} \min \{f(x) \mid & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ & g_i(x) = 0, \quad i = k + 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (8.1)$$

mit äquivalenter Darstellung $\min\{f(x) \mid x \in S\}$ wobei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K\}$ und $K = \mathbb{R}_-^k \times \{0_{m-k}\}$.

Betrachte die Lagrange-Funktion:

$$L(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{m-k}.$$

Wir definieren die Lagrange-Dualfunktion.

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \mu(\lambda) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \lambda g(x)\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen hier an, dass $\mu(\lambda) = -\infty$ ist, falls $L(x, \lambda)$ auf $\mathbb{R}^n$ nicht nach unten beschränkt ist.

Wir erhalten folgende Eigenschaft der Lagrange-Dualfunktion.

Satz 8.1. Der effektive Definitionsbereich $R := \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \mu(\lambda) > -\infty\}$ ist konvex, und μ ist auf R konkav.

Beweis. Sei $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ und sei $\alpha \in [0, 1]$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2) &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + (\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2)g(x)\} \\ &\geq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{\alpha f(y) + \alpha\lambda_1 g(y)\} + \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \{(1-\alpha)f(z) + ((1-\alpha)\lambda_2)g(z)\} \\ &= \alpha\mu(\lambda_1) + (1-\alpha)\mu(\lambda_2). \end{aligned}$$

□

8.1 Duales Problem und schwache Dualität

Sei $p^* = \inf\{f(x) | x \in S\}$ der Optimalwert des Ausgangsproblems (8.1). Wir zeigen nun dass für jeden zulässigen Lagrange-Multiplikator, d.h., $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$, jeder Funktionswert $\mu(\lambda)$ eine untere Schranke an p^* ergibt.

Satz 8.2. Für $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$, gilt:

$$\mu(\lambda) \leq p^*. \quad (8.2)$$

Beweis. Sei $\bar{x} \in S$ beliebig, d.h., $g_i(\bar{x}) \leq 0, i = 1, \dots, k$ und $g_i(\bar{x}) = 0$ für $i = k+1, \dots, m$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\bar{x}) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i g_i(\bar{x}) \leq 0.$$

Daher folgt,

$$L(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\bar{x}) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i g_i(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$$

und wir erhalten

$$\mu(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \leq L(\bar{x}, \lambda) \leq f(\bar{x}).$$

□

Somit ergibt jeder zulässige Multiplikator λ eine untere Schranke $\mu(\lambda)$ an p^* . Das zum Ausgangsproblem (8.1) **duale Problem** maximiert diese untere Schranke:

$$\max\{\mu(\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k\} \quad (8.3)$$

Wir bezeichnen obiges Problem als **duales Problem** und das Ausgangsproblem (8.1) als **primales Problem**.

Wir sagen, dass λ mit $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ **dual zulässig** ist, falls $\mu(\lambda) > -\infty$. Wir bezeichnen mit λ^* den optimalen Lagrange-Multiplikator.

Bemerkung 8.3. Problem (8.3) ist ein konvexes Optimierungsproblem, weil die zu maximierende Zielfunktion konkav ist und der zulässige Bereich konvex. Diese Eigenschaft ist unabhängig davon ob das primale Problem konvex ist.

Sei $d^* := \sup\{\mu(\lambda) : \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}$ der duale Optimalwert. Satz 8.2 impliziert schwache Dualität:

$$d^* \leq p^*.$$

Beachte dass schwache Dualität auch gilt, falls d^* und p^* nicht endlich sind. Falls $p^* = -\infty$, gilt auch $d^* = -\infty$ und das duale Problem ist unzulässig. Umgekehrt, falls das

duale Problem unbeschränkt ist ($d^* = \infty$), gilt $p^* = \infty$, somit ist das primale Problem unzulässig. Man bezeichnet die Differenz $p^* - d^*$ als **Dualitätslücke**.

8.2 Starke Dualität und Sattelpunkte

Falls

$$d^* = p^*$$

gilt, ist die Dualitätslücke gleich null und wir sagen, dass **starke Dualität** gilt. Starke Dualität gilt im allgemeinen nicht aber für konvexe Optimierungsprobleme gilt (in den meisten Fällen) starke Dualität (vgl. folgenden Abschnitt).

Wir halten zunächst einige Eigenschaften von Lösungen des primalen und dualen Optimierungsproblems fest, welche starke Dualität erfüllen.

Satz 8.4. Sei x^* eine zulässige Lösung von (8.1) und λ^* zulässig für (8.3). Ferner nehmen diese zulässigen Punkte denselben Zielfunktionswert an:

$$f(x^*) = \mu(\lambda^*).$$

Dann gilt:

1. x^* und λ^* sind global optimale Lösungen der jeweiligen Probleme (8.1) und (8.3).
2. $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Beweis. Zu 1.: Schwache Dualität ergibt für jeden primal zulässigen Punkt x und jeden dual zulässigen Multiplikator λ

$$\mu(\lambda) \leq f(x^*) = \mu(\lambda^*) \leq f(x).$$

Damit sind beide gegebenen Punkte global optimal.

Für 2. beobachten wir zunächst, dass für alle $i > k$ die Zulässigkeit von x^* bereits $g_i(x^*) = 0$ und damit $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ impliziert. Für $i \leq k$ betrachten wir die Ungleichung:

$$f(x^*) = \mu(\lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) + \lambda^* g(x^*).$$

Es folgt $\lambda^* g(x^*) \geq 0$. Es gilt jedoch auch $\lambda^* g(x^*) \leq 0$, somit folgt $\lambda^* g(x^*) = 0$. Weil nun für jedes $i \leq k$ gilt $\lambda_i^* \geq 0$ und $g_i(x^*) \leq 0$, folgt die Behauptung auch für diese i . $\square$

Wir führen nun den Begriff eines **Sattelpunktes** ein.

Definition 8.5. Gegeben sei ein Problem der Form (8.1). Es sei $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ein Tupel, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\bar{\lambda}_i \geq 0, i = 1, \dots, k$
2. $L(\bar{x}, \lambda) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$.

3. $L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann heisst das Tupel $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ein Sattelpunkt für (8.1). Die drei Bedingungen nennt man Sattelpunktbedingungen.

Wir erhalten folgenden Satz.

Satz 8.6 (Sattelpunktsatz). Sei $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ein Sattelpunkt für (8.1). Dann gilt starke Dualität für die Punkte $\bar{x}$ und $\bar{\lambda}$.

Beweis. Die Bedingung 2. impliziert

$$f(\bar{x}) + v g(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{\lambda} g(\bar{x}) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^m \text{ mit } v_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

Nach Umformung ergibt sich

$$(v - \bar{\lambda}) g(\bar{x}) \leq 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^m \text{ mit } v_i \geq 0, i = 1, \dots, k. \quad (8.4)$$

Setzt man $v_i = \bar{\lambda}_i$ für $i = 1, \dots, k$, so erhält man

$$\sum_{i=k+1}^m (v_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \text{ für alle } v_i \in \mathbb{R}, i = k+1, \dots, m. \quad (8.5)$$

Dies impliziert $g_i(\bar{x}) = 0$ für alle $i = k+1, \dots, m$. Somit reduziert sich (8.4) zu

$$\sum_{i=1}^k (v_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \text{ für alle } v_i \geq 0, i = 1, \dots, k. \quad (8.6)$$

Diese Bedingung impliziert $g_i(\bar{x}) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. Daher folgt $\bar{x} \in S$. Des weiteren impliziert (8.6), dass die Komplementaritätsbedingungen

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \text{ für alle } i = 1, \dots, k$$

gelten.

Übung 8.7. Zeige, dass (8.6) die folgenden Bedingungen impliziert:

1. $g_i(\bar{x}) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, k$.
2. $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$, für alle $i = 1, \dots, k$.

Insgesamt erhalten wir

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}).$$

Die Bedingung 3. sagt nun

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Somit folgt

$$f(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda}) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

was wiederum

$$f(\bar{x}) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \bar{\lambda}) = \mu(\bar{\lambda})$$

zeigt. Mit schwacher Dualität folgt $f(\bar{x}) = \mu(\bar{\lambda})$. $\square$

Übung 8.8. Zeige, dass ein Tupel $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, welches ein Sattelpunkt für (8.1) ist, die KKT-Bedingungen aus Satz 5.2 erfüllt.

8.3 Starke Dualität für konvexe Probleme

Wir betrachten folgendes **konvexe Optimierungsproblem**:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax = b, \\ & x \in \bar{S}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

wobei $\bar{S} \subset \mathbb{R}^n$ konvex, A eine $(m - k) \times n$ Matrix mit vollem Rang ist und f und g_i konvexe Funktionen sind für $i = 1, \dots, k$. Wir nehmen weiterhin an, dass die folgende Regularitätsbedingung (**Slater**) gilt: Es existiert ein $\bar{x} \in \text{int}(\bar{S})$, so dass

$$g_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad A\bar{x} = b.$$

Bei diesem Problem bleibt $\bar{S}$ Teil des Minimierungsbereichs:

$$\mu(\lambda, v) := \inf_{x \in \bar{S}} \{f(x) + \lambda^T g(x) + v^T (Ax - b)\}, \quad \lambda \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}^{m-k}.$$

Mit vollem Rang von A ist hier voller **Zeilenrang** gemeint.

Satz 8.9 (Starke Dualität). Betrachte Problem (8.7) und nehme an, dass die Slater-Regularitätsbedingung gilt. Dann gilt, $d^* = p^*$.

Beweis. Der Slater-Punkt ist primal zulässig. Für $p^* = -\infty$ folgt $d^* = -\infty$ aus schwacher Dualität. Im Folgenden sei daher $p^* \in \mathbb{R}$. Wir definieren folgende Menge

$$A_1 \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}$$

$$A_1 = \{(u, v, t) | \exists x \in \bar{S}, g_i(x) \leq u_i, \quad i = 1, \dots, k, A_j x - b_j = v_j, \quad j = 1, \dots, m - k, f(x) \leq t\}$$

Man beachte dass A_1 eine konvexe Menge ist. Wir definieren eine weitere konvexe Menge:

$$A_2 = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R} | s < p^*\}.$$

Es gilt wieder dass A_1 und A_2 sich nicht schneiden, denn: Angenommen $(u, v, t) \in A_1 \cap A_2$. Mit $(u, v, t) \in A_2$ gilt $u = 0, v = 0$, und $t < p^*$. Weil $(u, v, t) \in A_1$, folgt die Existenz eines x mit $g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, k$, $Ax - b = 0$, und $f(x) \leq t < p^*$, im Widerspruch zur Optimalität von p^* .

Mit dem Trennungssatz existiert ein Vektor $(w_1, w_2, w_3) \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass gilt

$$(u, v, t) \in A_1 \Rightarrow w_1^T u + w_2^T v + w_3 t \geq \alpha. \quad (8.8)$$

und

$$(u, v, t) \in A_2 \Rightarrow w_1^T u + w_2^T v + w_3 t \leq \alpha. \quad (8.9)$$

Aus (8.8) folgt $w_1 \geq 0$ und $w_3 \geq 0$, denn anderenfalls ist $w_1^T u + w_3 t$ nach unten unbeschränkt auf A_1 im Widerspruch zu (8.8). Bedingung (8.9) impliziert $w_3 t \leq \alpha$ für alle $t \leq p^*$ und somit gilt $w_3 p^* \leq \alpha$. Zusammen mit (8.8) folgt für alle $x \in \bar{S}$ (wähle hierzu $g(x) = u$ und $Ax - b = v$), dass

$$\sum_{i=1}^k (w_1)_i g_i(x) + w_2^T (Ax - b) + w_3 f(x) \geq \alpha \geq w_3 p^*. \quad (8.10)$$

Wir führen eine Fallunterscheidung durch: Falls $w_3 > 0$, können wir (8.10) durch w_3 teilen und erhalten

$$L(x, w_1/w_3, w_2/w_3) \geq p^*,$$

für alle $x \in \bar{S}$. Daraus folgt $\mu(\lambda, v) \geq p^*$, wobei wir $\lambda = w_1/w_3$ und $v = w_2/w_3$ setzen. (Hier sind $\lambda \in \mathbb{R}^k$ und $v \in \mathbb{R}^{m-k}$ die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren für die Nebenbedingungen $g(x) \leq 0$ und $Ax = b$). Mit schwacher Dualität $\mu(\lambda, v) \leq p^*$ folgt Gleichheit.

Nun betrachten wir den Fall $w_3 = 0$ und führen diesen zum Widerspruch. Aus (8.10), folgern wir dass für alle $x \in \bar{S}$ gilt

$$\sum_{i=1}^k (w_1)_i g_i(x) + w_2^T (Ax - b) \geq 0. \quad (8.11)$$

Indem wir diese Ungleichung auf einen Punkt $\bar{x}$ anwenden, der die Slater-Bedingung erfüllt, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^k (w_1)_i g_i(\bar{x}) \geq 0.$$

Weil nun $g_i(\bar{x}) < 0$ und $w_1 \geq 0$ folgt $w_1 = 0$.

Aus $(w_1, w_2, w_3) \neq 0$ und $w_1 = 0, w_3 = 0$, folgt $w_2 \neq 0$. Somit impliziert (8.11) dass $w_2^T (Ax - b) \geq 0$ für alle $x \in \bar{S}$ gilt. Der Punkt $\bar{x}$ erfüllt $w_2^T (A\bar{x} - b) = 0$. Mit $\bar{x} \in \text{int}(\bar{S})$ folgt, dass $\bar{x} \pm \epsilon \in \text{int}(\bar{S})$ für $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\epsilon\|$ klein genug. Es folgt $A^T w_2 = 0$, da es

sonst Punkte in $\text{int}(\bar{S})$ gibt mit $w_2^T(Ax - b) < 0$, Widerspruch. Bedingung $A^T w_2 = 0$ und $w_2 \neq 0$ widersprechen jedoch der Annahme dass A vollen Rang hat. $\square$

Kapitel 9

Numerische Verfahren

9.1 Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen

Wir betrachten zunächst das Optimierungsproblem

$$\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \quad (9.1)$$

ohne Nebenbedingungen, wobei f eine auf $\mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Wir definieren den Begriff der Abstiegsrichtung.

Definition 9.1. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst Abstiegsrichtung von f in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, falls es $\bar{t} > 0$ gibt mit

$$f(\bar{x} + tv) < f(\bar{x}) \text{ für alle } t \in (0, \bar{t}).$$

Wir erhalten unmittelbar folgendes Lemma.

Lemma 9.2. Gilt $f'(\bar{x})v < 0$, so ist v eine Abstiegsrichtung von f in $\bar{x}$.

Beweis. Definiere $\Phi(t) := f(\bar{x} + tv)$. Es gilt $\Phi'(0) = f'(\bar{x})v < 0$ und somit folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 9.3.

- Die Bedingung $f'(\bar{x})v < 0$ bedeutet, dass der Winkel ϕ zwischen v und dem negativen Gradienten $-f'(\bar{x})$ von f in $\bar{x}$ weniger als $\pi/2$ also 90° beträgt. Betrachte dazu:

$$0 > f'(\bar{x})v \Rightarrow 0 < -f'(\bar{x})v = \cos(\phi) \| -f'(\bar{x}) \| \|v\|.$$

Es folgt $\cos(\phi) > 0$ und somit $\phi \in [0, \pi/2)$.

- Das Kriterium $f'(\bar{x})v < 0$ ist nicht notwendig. Ist $\bar{x}$ z.B. eine strikte lokale Maximalstelle, so sind alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Abstiegsrichtungen von f in $\bar{x}$, jedoch $f'(\bar{x})v < 0$ nicht notwendigerweise erfüllt.

Wir betrachten folgendes Beispiel.

Übung 9.4. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist $v = -B f'(\bar{x})^\top$ eine Abstiegsrichtung von f in $\bar{x}$, falls $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Wir beschreiben nun ein **Abstiegsverfahren** zur Bestimmung einer Lösung $\bar{x}$ mit $f'(\bar{x}) = 0$.

1. Wähle Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$ und festes $\epsilon_0 > 0$;
2. Gilt $\|f'(x^k)\| \leq \epsilon_0$:STOP (Abbruchkriterium);
3. Bestimme eine Abstiegsrichtung v^k mit $f'(x^k)v^k < 0$;
4. Bestimme eine Schrittweite t_k mit $f(x^k + t_k v^k) < f(x^k)$;
5. Setze $x^{k+1} \leftarrow x^k + t_k v^k$; $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 9.1: Generisches Abstiegsverfahren.

Das generische Abstiegsverfahren lässt viele Freiheitsgrade hinsichtlich der Wahl der Abstiegsrichtung und der Schrittweite.

Definition 9.5 (Gradientenverfahren, Newton-Verfahren, Quasi-Newton).

1. Setzt man

$$v^k := -f'(x^k)^\top$$

so erhalten wir das Gradientenverfahren.

2. Beim Newton-Verfahren für die Nullstellenbestimmung von $f'(x)$ wird v^k folgendermassen gewählt:

$$v^k := -f''(x^k)^{-1} f'(x^k)^\top.$$

In allen Punkten x^k , in denen die Hessematrix $f''(x^k)$ positiv definit ist, ist die entsprechende Richtung v^k auch eine Abstiegsrichtung (natürlich $f'(x^k) \neq 0$ vorausgesetzt).

3. Das Quasi-Newton-Verfahren bestimmt

$$v^k := -H_k^{-1} f'(x^k)^\top,$$

für eine geeignete positiv definite Matrix H_k .

Wir erhalten folgenden Satz.

Satz 9.6. Sei $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und $f'(x) \neq 0$. Die Richtung

$$v_* = -\frac{H^{-1} f'(x)^\top}{\sqrt{f'(x) H^{-1} f'(x)^\top}}$$

| minimiert $f'(x)v$ unter $\|v\|_H = 1$, wobei $\|v\|_H = \sqrt{v^T H v}$.

Beweis. Nach der Cauchy–Schwarz-Ungleichung gilt

$$f'(x)v = (H^{-1/2}f'(x)^T)^T H^{1/2}v \geq -\sqrt{f'(x)H^{-1}f'(x)^T} \|v\|_H.$$

Für $v = v_*$ gilt Gleichheit. □

Wir kehren zurück zur oben diskutierten Winkelbedingung, die formal in einer Definition festgehalten wird.

Definition 9.7 (Winkelbedingung). Ein allgemeines Abstiegsverfahren der Form 9.1 erfüllt die Winkelbedingung, falls folgende Eigenschaft gilt:

$$\text{es existiert } c > 0, \text{ so dass für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt: } c_k := -\frac{f'(x^k)v^k}{\|f'(x^k)\| \|v^k\|} \geq c. \quad (9.2)$$

Die schwächere Bedingung $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \infty$ liefert bei effizienten Schrittweiten und nach unten beschränkten Zielfunktionswerten lediglich $\liminf_k \|f'(x^k)\| = 0$. Der folgende Beweis zeigt die zugehörige Zoutendijk-Abschätzung $\sum_k c_k^2 \|f'(x^k)\|^2 < \infty$.

9.2 Schrittweitenwahl

Wir diskutieren nun den Freiheitsgrad der Schrittweitenwahl in Algorithmus 9.1. Sei x^0 der Ausgangsvektor und wir nehmen an dass die Levelmenge $N(f, f(x^0)) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x^0)\}$ kompakt ist. Mit der Stetigkeit der Hessematrix $f''(x)$ auf $N(f, f(x^0))$, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|f''(x)\| \leq C \text{ für alle } x \in N(f, f(x^0)).$$

Wir wenden die Taylorentwicklung auf f im Punkt x in Richtung $tv, v \in \mathbb{R}^n$ an

$$\begin{aligned} f(x + tv) &= f(x) + tf'(x)v + \frac{t^2}{2}v^T f''(z)v \\ &\leq f(x) + tf'(x)v + \frac{t^2}{2}C \|v\|^2. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Hier ist $z = x + \xi tv$ eine Zwischenstelle mit $0 < \xi < 1$. Die Abschätzung (9.3) gilt für alle $t > 0$ mit $x + [0, t]v \subset N(f, f(x^0))$.

Der letzte Term der Abschätzung (9.3) ist ein Polynom $p(t)$ zweiten Grades in t und besitzt in

$$t^* = -\frac{f'(x)v}{C \|v\|^2} > 0$$

ein striktes globales Minimum. Sei $\bar{t}$ die eindeutig bestimmte **maximale** Schrittweite mit

$$x + tv \in N(f, f(x^0)) \text{ für alle } t \in [0, \bar{t}].$$

Es gilt

$$p(\bar{t}) \geq f(x + \bar{t}v) \geq f(x) = p(0).$$

Mit $p'(0) = f'(x)v < 0$ folgt, dass t^* im offenen Intervall $(0, \bar{t})$ liegt, insbesondere also $x + t^*v \in N(f, f(x^0))$ gilt. Mit der Ungleichung (9.3) folgt

$$f(x + t^*v) \leq p(t^*) = f(x) - \frac{1}{2C} \left(\frac{f'(x)v}{\|v\|} \right)^2.$$

Diese Abschätzung gibt eine obere Schranke an den Mindestabstieg an. Weil die Konstante C i. A. a priori nicht bekannt ist, definiert man folgendes Maß.

Definition 9.8. Eine Schrittweitenstrategie $t(x, v)$ heisst effizient, wenn es zu jedem $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein $\xi > 0$ gibt mit

$$f(x + t(x, v)v) \leq f(x) - \xi \left(\frac{f'(x)v}{\|v\|} \right)^2 \quad \text{für alle } x \in N(f, f(x^0)),$$

und v Abstiegsrichtung von f in x mit $f'(x)v < 0$.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die exakte Schrittweitenstrategie

$$t \in \arg \min_{s>0} f(x + sv)$$

effizient.

Wir erhalten folgenden Satz über Abstiegsverfahren der Form 9.1 mit effizienten Schrittweitenstrategien.

Satz 9.9. Sei f zweimal stetig differenzierbar und das Abstiegsverfahren 9.1 mit $\epsilon_0 = 0$ erfülle die Winkelbedingung 9.2 und benutze eine effiziente Schrittweitenstrategie. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

1. Nach endlich vielen Iterationen gilt $f'(x^k) = 0$.
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = -\infty$
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(x^k) = 0$, d.h., jeder Häufungspunkt der Folge x^k , $k \in \mathbb{N}$ ist eine Nullstelle von $f'(x)$.

Beweis. Falls das Abstiegsverfahren 9.1 nach endlich vielen Iterationen abbricht ist wegen $\epsilon_0 = 0$ die Bedingung $f'(x^k) = 0$ erfüllt.

Also nehmen wir nun an, dass das Verfahren nicht nach endlich vielen Iterationen abbricht. Aus der Effizienz- und Winkelbedingung folgt für Iteration k :

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq -\xi \left(\frac{f'(x^k)v^k}{\|v^k\|} \right)^2 = -\xi c_k^2 \|f'(x^k)\|^2.$$

Nach $N \in \mathbb{N}$ Iterationen gilt

$$f(x^N) - f(x^0) = \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x^k)) \leq -\xi \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 \|f'(x^k)\|^2.$$

Wir teilen durch $-\xi < 0$ und erhalten

$$-\frac{f(x^N) - f(x^0)}{\xi} \geq \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 \|f'(x^k)\|^2.$$

Falls die monoton fallende Folge $f(x^k)$ nicht gegen $-\infty$ strebt, ist sie nach unten beschränkt, und es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(x^N) > -\infty$$

und insbesondere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{f(x^N) - f(x^0)}{\xi} < \infty.$$

Somit folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|f'(x^k)\|^2 < \infty.$$

Mit der Winkel- und Schrittweitenbedingung folgt $\|f'(x^k)\| \rightarrow 0$.

□

Wir geben noch zwei weitere Schrittweitenverfahren an, die [Armijo-Regel](#) und die [Regel von Goldstein](#).

Definition 9.10 (Armijo-Regel). Zu Parametern $\sigma \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$ wähle man die Schrittweite $t := \alpha^\ell$ mit

$$\ell := \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid f(x + \alpha^j v) \leq f(x) + \sigma \alpha^j (f'(x)v)\}.$$

Zur Interpretation der Armijo-Regel definieren wir mit

$$\Phi(t) = f(x + tv), t \geq 0$$

die Hilfsfunktion

$$\Psi(t) = \Phi(t) - (f(x) + \sigma t (f'(x)v)).$$

Nach Konstruktion gilt $\Psi(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \Psi'(0) &= \Phi'(0) - \sigma f'(x)v \\ &= f'(x)v - \sigma f'(x)v = (1 - \sigma)f'(x)v < 0. \end{aligned}$$

Aus $\Psi'(0) < 0$ folgt, dass die Armijo-Bedingung für alle hinreichend kleinen positiven t gilt. Der kleinste Index ℓ existiert daher auch ohne Kompaktheitsannahme. Man testet $\ell = 0, 1, 2, \dots$

Bemerkung 9.11. Eine feste Anfangsschrittweite, auch eine grosse Konstante, garantiert bei beliebiger Skalierung der Richtung keine Effizienz. Eine geeignete richtungsabhängige Anfangsschrittweite ist

$$s(x, v) = \eta \frac{-f'(x)v}{\|v\|^2}, \quad \eta > 0.$$

Man setzt $t = s(x, v)\alpha^\ell$ und verwendet den üblichen Armijo-Test. Ist $C > 0$ eine Schranke für die Hesse-Norm auf allen Teststrecken, so ist die Strategie nach der Taylorformel effizient mit

$$\xi = \sigma \min\{\eta, 2\alpha(1 - \sigma)/C\} > 0.$$

Entweder wird der erste Versuch akzeptiert, oder der vorherige verworfene Versuch liefert $t > 2\alpha(1 - \sigma)(-f'(x)v)/(C\|v\|^2)$. Bei kompakter Ausgangsniveaumenge existiert eine einheitliche Schranke, denn $s(x, v)\|v\| \leq \eta\|f'(x)\|$ beschränkt alle Teststrecken.

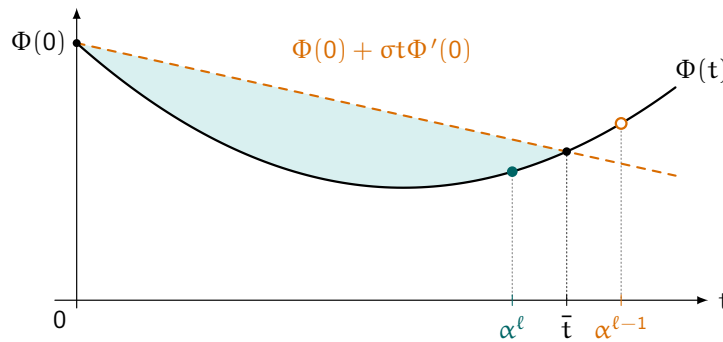


Abbildung 9.2: Armijo-Schrittweitenwahl: Der Schnittpunkt wird senkrecht auf $\bar{t}$ projiziert. Hier gilt $\alpha^\ell < \bar{t} < \alpha^{\ell-1}$: Der türkise Testpunkt wird akzeptiert, der offene orangefarbene verworfen.

Definition 9.12 (Goldstein-Regel). Um kleine Schrittweiten zu vermeiden, wird der zulässige Bereich nun nach unten beschränkt. Die Schrittweite $t > 0$ erfüllt die Goldstein-Bedingung, wenn zu einem festen Parameter $\sigma \in (0, 0.5)$ gilt

$$\Phi_u(t) \leq \Phi(t) \leq \Phi_o(t), \quad (9.4)$$

wobei die Funktionen $\Phi_u(t)$ und $\Phi_o(t)$ wie folgt definiert sind:

$$\Phi_o(t) := \Phi(0) + \sigma t \Phi'(0), \Phi_u(t) := \Phi(0) + (1 - \sigma)t \Phi'(0). \quad (9.5)$$

Man kann zeigen, dass eine Schrittweitenregel, welche die Goldstein-Regel erfüllt, ein effizientes Schrittweitenverfahren ist. Wir geben eine konkrete Implementierung an.

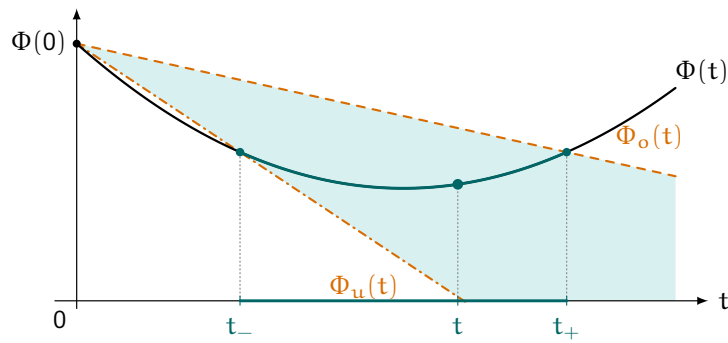


Abbildung 9.3: Goldstein-Schrittweiten: Positive Schritte erfüllen beide Bedingungen genau für $t \in [t_-, t_+]$. Dieser Bereich ist türkis hervorgehoben.

1. Setze $t_u := 0$, $t_o > 0$ (beliebig);
2. Ist $\Phi(t_o) < \Phi_u(t_o)$, so setze $t_u := t_o$, $t_o := 2t_o$. Wiederhole diesen Schritt solange, bis $\Phi(t_o) \geq \Phi_u(t_o)$;
3. Falls $\Phi(t_o) \leq \Phi_o(t_o)$, so setze $t := t_o$, Stop.;
4. Setze $t := (t_u + t_o)/2$
 Falls $\Phi(t) < \Phi_u(t)$, so setze $t_u := t$;
 Falls $\Phi(t) > \Phi_o(t)$, so setze $t_o := t$;
5. Gilt $\Phi_u(t) \leq \Phi(t) \leq \Phi_o(t)$, Stop.
 Falls nicht, gehe zurück zu Schritt 4.

Abbildung 9.4: Schrittweitenwahl nach Goldstein.

Satz 9.13. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $N_0 := \{y : f(y) \leq f(x^0)\}$ kompakt. Wähle $C > 0$ mit $\|f''(y)\| \leq C$ für alle $y \in N_0$. Für $x \in N_0$, $f'(x)v < 0$ und jede Goldstein-Schrittweite t mit $0 < \sigma < 1/2$ gilt

$$f(x + tv) \leq f(x) - \frac{\sigma}{C} \left(\frac{f'(x)v}{\|v\|} \right)^2.$$

Beweis. Setze $a = -\Phi'(0) > 0$ mit $\Phi(t) = f(x + tv)$ und sei $t_* > 0$ die erste Nullstelle von Φ' . Sie existiert wegen der Kompaktheit von N_0 . Auf $[0, t_*]$ fällt Φ , daher bleibt die gesamte Strecke in N_0 , und es gilt $|\Phi''(s)| \leq C\|v\|^2$.

Für $t \leq t_*$ liefern die untere Goldstein-Bedingung und Taylor

$$-(1 - \sigma)at \leq \Phi(t) - \Phi(0) \leq -at + \frac{1}{2}Ct^2\|v\|^2.$$

Also ist $t \geq \hat{t} := 2\sigma\alpha/(C\|v\|^2)$. Monotonie und Taylor an der Stelle $\hat{t}$ ergeben

$$\Phi(t) \leq \Phi(\hat{t}) \leq \Phi(0) - \frac{2\sigma(1-\sigma)\alpha^2}{C\|v\|^2} \leq \Phi(0) - \frac{\sigma\alpha^2}{C\|v\|^2}.$$

Für $t > t_*$ folgt nach dem Mittelwertsatz $\alpha = \Phi'(t_*) - \Phi'(0) \leq Ct_*\|v\|^2$. Die obere Goldstein-Bedingung liefert daher

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) - \sigma\alpha t \leq \Phi(0) - \sigma\alpha t_* \leq \Phi(0) - \frac{\sigma\alpha^2}{C\|v\|^2}.$$

□

9.3 Strafverfahren für Probleme mit Nebenbedingungen

Wir betrachten das gleichungsrestringierte Problem

$$\min\{f(x) \mid h(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (9.6)$$

wobei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zunächst stetig differenzierbar seien. Die Idee eines Strafverfahrens besteht darin, Verletzungen der Nebenbedingungen durch einen zusätzlichen Term in der Zielfunktion zu bestrafen. Die quadratische Straffunktion lautet

$$P(x; \alpha) := f(x) + \frac{\alpha}{2} \|h(x)\|^2, \quad \alpha > 0.$$

1. Wähle $\alpha_0 > 0$ und setze $k := 0$.

2. Berechne eine globale Minimalstelle x^k von

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x; \alpha_k).$$

3. Falls $\|h(x^k)\| = 0$: **STOP**.

4. Setze $\alpha_{k+1} := \rho\alpha_k$ mit festem $\rho > 1$, $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 9.5: Quadratisches Strafverfahren.

Dies ist ein idealisiertes Verfahren: Die Existenz und die globale Lösung der unrestringierten Teilprobleme werden vorausgesetzt.

Satz 9.14. Seien f, h stetig, α_k streng monoton wachsend mit $\alpha_k \rightarrow \infty$ und $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$ nichtleer. Für jedes k existiere eine globale Minimalstelle x^k von $P(\cdot; \alpha_k)$. Dann gilt:

1. $P(x^k; \alpha_k)$ ist monoton wachsend.

2. $\|h(x^k)\|$ ist monoton fallend.
3. $f(x^k)$ ist monoton wachsend.
4. Es gilt $h(x^k) \rightarrow 0$.
5. Jeder Häufungspunkt von $\{x^k\}$ ist eine globale Lösung von (9.6).

Beweis. Zu 1: Aus der Optimalität von x^k und $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ folgt

$$P(x^k; \alpha_k) \leq P(x^{k+1}; \alpha_k) \leq P(x^{k+1}; \alpha_{k+1}).$$

Zu 2: Addiert man die Optimalitätsungleichungen

$$\begin{aligned} P(x^k; \alpha_k) &\leq P(x^{k+1}; \alpha_k), \\ P(x^{k+1}; \alpha_{k+1}) &\leq P(x^k; \alpha_{k+1}), \end{aligned}$$

so erhält man

$$(\alpha_k - \alpha_{k+1})(\|h(x^k)\|^2 - \|h(x^{k+1})\|^2) \leq 0.$$

Wegen $\alpha_k - \alpha_{k+1} < 0$ folgt die Behauptung.

Zu 3: Die erste Optimalitätsungleichung liefert

$$f(x^k) \leq f(x^{k+1}) + \frac{\alpha_k}{2} (\|h(x^{k+1})\|^2 - \|h(x^k)\|^2) \leq f(x^{k+1}).$$

Zu 4: Für einen beliebigen festen Punkt $z \in S$ gilt

$$P(x^k; \alpha_k) \leq P(z; \alpha_k) = f(z). \quad (9.7)$$

Zusammen mit $f(x^k) \geq f(x^0)$ ergibt dies

$$0 \leq \|h(x^k)\|^2 \leq \frac{2(f(z) - f(x^0))}{\alpha_k} \rightarrow 0.$$

Zu 5: Sei $x^{k_j} \rightarrow x^*$. Aus der Stetigkeit von h und Teil 4 folgt $h(x^*) = 0$. Für jedes $z \in S$ gilt nach (9.7)

$$f(x^{k_j}) \leq P(x^{k_j}; \alpha_{k_j}) \leq f(z).$$

Im Grenzwert folgt $f(x^*) \leq f(z)$; also ist x^* global optimal. $\square$

Der Satz setzt weder Differenzierbarkeit noch eine Regularitätsbedingung an S voraus. Existenz eines Häufungspunktes wird jedoch nicht behauptet. Bei endlichem Abbruch ist das gefundene zulässige x^k bereits global optimal.

Auch Ungleichungsrestriktionen lassen sich auf diese Weise behandeln:

$$\min f(x) \quad \text{unter } h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0$$

ist äquivalent zu einem Problem mit den Gleichungen $h(x) = 0$ und $\max\{0, g(x)\} = 0$,

wobei das Maximum komponentenweise gebildet wird. Für $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lautet die Straffunktion

$$P(x; \alpha) = f(x) + \frac{\alpha}{2} \|h(x)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^k (\max\{0, g_i(x)\})^2.$$

Wir kehren zu (9.6) zurück und setzen $f, h \in C^1$ voraus. Aus der Optimalität von x^k folgt insbesondere

$$0 = P_x(x^k; \alpha_k) = f'(x^k) + \alpha_k \sum_{j=1}^m h_j(x^k) h_j'(x^k). \quad (9.8)$$

Der Vergleich mit der KKT-Stationaritätsbedingung motiviert die Multiplikatorschätzungen

$$\mu_j^k := \alpha_k h_j(x^k), \quad j = 1, \dots, m. \quad (9.9)$$

Satz 9.15. Es gelten die Voraussetzungen von Satz 9.14, zusätzlich seien $f, h \in C^1$, $x^k \rightarrow x^*$ und die Gradienten $h_1'(x^*), \dots, h_m'(x^*)$ linear unabhängig. Dann konvergiert die durch (9.9) definierte Folge $\mu^k \in \mathbb{R}^m$ gegen einen Vektor μ^* . Das Paar (x^*, μ^*) ist ein KKT-Punkt von (9.6), und μ^* ist der eindeutig bestimmte Multiplikator zu x^* .

Beweis. Setze $A_k := h'(x^k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $A_* := h'(x^*)$. Wegen $A_k \rightarrow A_*$ und der linearen Unabhängigkeit ist $A_k A_k^T$ für alle hinreichend grossen k invertierbar, und seine Inverse konvergiert gegen $(A_* A_*^T)^{-1}$. Die Stationarität (9.8) ergibt

$$A_k^T \mu^k = -f'(x^k)^T, \quad \mu^k = -(A_k A_k^T)^{-1} A_k f'(x^k)^T.$$

Somit konvergiert μ^k gegen

$$\mu^* = -(A_* A_*^T)^{-1} A_* f'(x^*)^T.$$

Im Grenzwert folgen die KKT-Stationarität und, nach Satz 9.14, die Zulässigkeit von x^* . Der volle Zeilenrang von A_* liefert die Eindeutigkeit des Multiplikators. $\square$

9.4 Lagrange-Newton Verfahren

Wir wiederholen kurz das Newton-Verfahren zur Lösung von Gleichungen. Gegeben sei eine stetig differenzierbare Abbildung

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

und gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$F(x) = 0.$$

Idee des Newton-Verfahrens ist die iterative Berechnung einer Nullstelle der **linearen Approximation** von F im aktuellen Punkt x^k (wobei k die jeweilige Iteration bezeichnet).

Formal, ist die lineare Approximation in x^k definiert als

$$F_k(x) := F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k).$$

Die Nullstelle x^{k+1} berechnet sich durch

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1}F(x^k),$$

sofern die Inverse F'^{-1} existiert. In einer Implementierung berechnet man nicht die Inverse, sondern einen Richtungsvektor $v = x - x^k$ der folgende Newton-Gleichung löst:

$$F'(x^k)v = -F(x^k).$$

Für eine Lösung v^k wird

$$x^{k+1} := x^k + v^k$$

gesetzt.

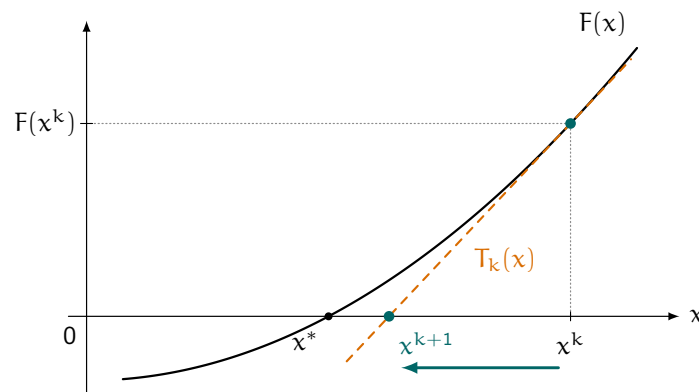


Abbildung 9.6: Newton-Schritt: Die Tangente $T_k(x) = F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k)$ schneidet die waagerechte Achse in x^{k+1} .

Satz 9.16. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\bar{x}$ eine Nullstelle von F und die Jacobi-Matrix $F'(\bar{x})$ regulär. Dann existiert eine Umgebung U von $\bar{x}$, so dass für jeden Startpunkt $x^0 \in U$ folgende Aussagen gelten:

1. Das Newton-Verfahren ist wohldefiniert und erzeugt eine gegen $\bar{x}$ konvergente Folge $x^k, k \in \mathbb{N}$.
2. Die Konvergenz ist superlinear.
3. Ist F' lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenz quadratisch.

Für eine Folge $x^k \rightarrow \bar{x}$ bedeutet superlineare Konvergenz $\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \epsilon_k \|x^k - \bar{x}\|$ mit $\epsilon_k \rightarrow 0$. Quadratische Konvergenz bedeutet $\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq C \|x^k - \bar{x}\|^2$ für ein $C > 0$ und alle hinreichend grossen k .

Ein Beweis findet sich in Kanzow und Geiger (Satz, 5.26).

Wir betrachten nun gleichungsrestringierte Optimierungsprobleme der folgenden Form:

$$\min \{f(x) \mid g(x) = 0\}, \text{ wobei } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (9.10)$$

Mit der Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

lauten die KKT-Bedingungen

$$F(x, \lambda) := \begin{pmatrix} L_x(x, \lambda)^T \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x)^T + g'(x)^T \lambda \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Die Gleichung (9.11) ist ein i.A. nichtlineares System von $n + m$ Gleichungen in den Variablen x, λ . Das zugehörige Newton-Verfahren lautet

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} - F'(x^k, \lambda^k)^{-1} F(x^k, \lambda^k). \quad (9.12)$$

Formal erhalten wir folgenden Algorithmus:

1. Wähle Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}^n, \lambda^0 \in \mathbb{R}^m, k = 0$ und festes $\epsilon_0 > 0$;
2. Gilt $\|F(x^k, \lambda^k)\| \leq \epsilon_0$:STOP (Abbruchkriterium);
3. Berechne $(\Delta x^k, \Delta \lambda^k)$ als Lösung von

$$F'(x^k, \lambda^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = -F(x^k, \lambda^k). \quad (9.13)$$

4. Setze $x^{k+1} \leftarrow x^k + \Delta x^k; \lambda^{k+1} \leftarrow \lambda^k + \Delta \lambda^k; k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 9.7: Lagrange-Newton Verfahren.

Wir erhalten folgendes Resultat bezüglich der Konvergenz des Lagrange-Newton Verfahrens.

Satz 9.17. Seien f, g in einer Umgebung eines normalen KKT-Punktes $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ von (9.10) zweimal stetig differenzierbar. Es gelten die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung. Für $\epsilon_0 = 0$ und einen hinreichend nahen Startpunkt (x^0, λ^0) konvergiert das Lagrange–Newton-Verfahren superlinear gegen $(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Sind die zweiten Ableitungen von f, g lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenz quadratisch. Nach endlichem Abbruch wird die Folge konstant an der Lösung fortgesetzt.

Beweis. Die KKT-Jacobi-Matrix ist nach demselben Argument wie A_0 im Beweis von Satz 7.1 regulär. Der lokale Newton-Satz liefert die Behauptung; für quadratische Konvergenz ist zusätzlich die genannte Lipschitz-Annahme erforderlich. $\square$

9.5 SQP-Verfahren

In diesem Abschnitt bezeichnen wir Gleichungsrestriktionen mit $h(x) = 0$ und ihre Multiplikatoren mit dem Spaltenvektor μ . Für Ungleichungsrestriktionen $g(x) \leq 0$ verwenden wir den Spaltenvektor λ . Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x).$$

Im reinen Gleichungsfall setzen wir

$$L(x, \mu) = f(x) + \mu^T h(x), \quad F(x, \mu) = \begin{pmatrix} L_x(x, \mu)^T \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

Das Lagrange-Newton-Verfahren berechnet

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad \mu^{k+1} = \mu^k + \Delta \mu^k,$$

wobei die Korrekturen das lineare Gleichungssystem

$$F'(x^k, \mu^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \end{pmatrix} = -F(x^k, \mu^k)$$

lösen. Mit $H_k = L_{xx}(x^k, \mu^k)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} H_k \Delta x + h'(x^k)^T \Delta \mu &= -L_x(x^k, \mu^k)^T, \\ h'(x^k) \Delta x &= -h(x^k). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Wir lassen im Folgenden auch symmetrische Approximationen $H_k \approx L_{xx}(x^k, \mu^k)$ zu. Mit $\mu^+ := \mu^k + \Delta \mu$ wird (9.14) zu

$$\begin{aligned} H_k \Delta x + h'(x^k)^T \mu^+ &= -f'(x^k)^T, \\ h'(x^k) \Delta x &= -h(x^k). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Dies sind genau die KKT-Bedingungen des quadratischen Teilproblems

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x} \quad & f'(x^k)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H_k \Delta x \\ \text{unter} \quad & h(x^k) + h'(x^k)\Delta x = 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Diese Beobachtung motiviert die **sequentielle quadratische Programmierung (SQP)** für das allgemeine Problem

$$\min\{f(x) \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}, \quad (9.17)$$

wobei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ und $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-\ell}$. Das zugehörige quadratische Teilproblem lautet

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x} \quad & f'(x^k)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H_k \Delta x \\ \text{unter} \quad & g(x^k) + g'(x^k)\Delta x \leq 0, \\ & h(x^k) + h'(x^k)\Delta x = 0. \end{aligned} \quad (9.18)$$

SQP mit der exakten Hesse-Matrix $H_k = L_{xx}(x^k, \lambda^k, \mu^k)$:

1. Wähle $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{m-\ell}$ und setze $k := 0$.
2. Ist (x^k, λ^k, μ^k) ein KKT-Punkt von (9.17): **STOP**.
3. Berechne einen KKT-Punkt $(\Delta x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1})$ des Teilproblems (9.18) und setze $x^{k+1} := x^k + \Delta x^k$. Gibt es mehrere KKT-Punkte, so wähle einen, für den

$$\|(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (x^k, \lambda^k, \mu^k)\|$$

minimal ist.

4. Setze $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 9.8: Lokales SQP-Verfahren.

Die Auswahl des nächstgelegenen KKT-Punktes ist in der Praxis schwer umzusetzen. Für den folgenden lokalen Konvergenzsatz stellt sie jedoch sicher, dass das Verfahren dem richtigen Lösungszweig folgt.

Satz 9.18 (Lokale Konvergenz von SQP). Seien f, g, h in einer Umgebung von x^* zweimal stetig differenzierbar. Der KKT-Punkt (x^*, λ^*, μ^*) erfülle:

1. Strikte Komplementarität: $g_i(x^*) + \lambda_i^* \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, \ell$.
2. Die Gradienten der Gleichungen und der aktiven Ungleichungen sind linear unabhängig (LICQ). Dabei sei $I(x^*) := \{i \mid g_i(x^*) = 0\}$.
3. Es gilt

$$d^T L_{xx}(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$$

für jeden Vektor $d \neq 0$ mit $h'(x^*)d = 0$ und $g'_i(x^*)d = 0$ für alle $i \in I(x^*)$.

Dann ist Algorithmus 9.8 für jeden hinreichend nahen Startpunkt wohldefiniert und konvergiert superlinear gegen (x^*, λ^*, μ^*) . Sind zusätzlich f'' , alle g''_i und alle h''_j lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenz quadratisch. Nach endlichem Abbruch wird die Folge konstant fortgesetzt.

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$F(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} L_x(x, \lambda, \mu)^\top \\ h(x) \\ \min\{-g(x), \lambda\} \end{pmatrix},$$

wobei das Minimum komponentenweise gebildet wird. Ihre Nullstellen sind genau die KKT-Punkte. Wegen strikter Komplementarität ist in einer Umgebung der Lösung jeder Zweig des Minimums festgelegt: Bei aktiven Restriktionen ist er $-g_i(x)$, bei inaktiven Restriktionen λ_i . Somit ist F dort C^1 . LICQ und die Bedingung zweiter Ordnung implizieren die Regularität der Jacobi-Matrix, wie im Beweis von Satz 7.1.

Das Newton-Verfahren konvergiert daher lokal superlinear und unter der zusätzlichen Lipschitz-Annahme quadratisch. Seine Iterierten erfüllen lokal die KKT-Bedingungen des SQP-Teilproblems mit derselben aktiven Menge. Die aktiven Multiplikatoren bleiben positiv, die inaktiven linearisierten Ungleichungen bleiben strikt erfüllt. Diese KKT-Lösung ist in einer festen Umgebung eindeutig. Bei hinreichend nahem Startpunkt ist sie deshalb die vom Algorithmus gewählte nächstgelegene KKT-Lösung; andere KKT-Lösungen liegen ausserhalb dieser Umgebung. SQP- und Newton-Iterierte stimmen daher lokal überein. $\square$

9.6 Das Frank–Wolfe-Verfahren

Wir betrachten das Problem

$$\min\{f(x) \mid x \in K\}, \quad (9.19)$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^m$ nichtleer, kompakt und konvex und f in einer Umgebung von K stetig differenzierbar ist. Die Idee des Frank–Wolfe-Verfahrens (FW) besteht darin, in jeder Iteration die linearisierte Zielfunktion über K zu minimieren:

$$v_k \in \arg \min_{v \in K} f'(x_k)v. \quad (9.20)$$

Ausgehend von $x_0 \in K$ setzen wir

$$x_{k+1} = (1 - \gamma_k)x_k + \gamma_k v_k, \quad 0 \leq \gamma_k \leq 1. \quad (\text{FW-Alg.})$$

Die Konvexität von K garantiert, dass alle Iterierten zulässig sind. Eine häufige Schrittweitenwahl ist $\gamma_k = 2/(k+2)$. Wir nehmen an, dass das lineare Teilproblem effizient

gelöst werden kann, und beschreiben diesen Zugriff durch ein [lineares Minimierungssorakel](#) (LMO).

9.6.1 Konvexe Zielfunktionen

Definition 9.19 (Glattheitsabschätzung). Eine stetig differenzierbare Funktion f erfüllt die obere L -Glattheitsabschätzung mit $L > 0$, wenn

$$f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x) + \frac{L}{2} \|y - x\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in K. \quad (9.21)$$

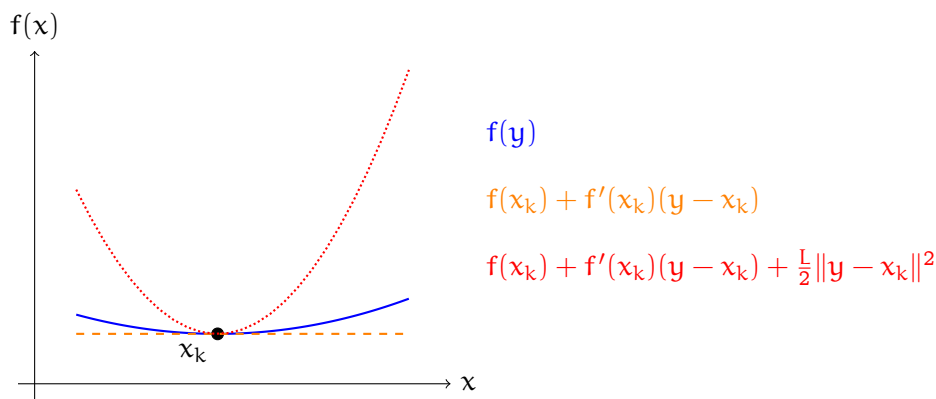


Abbildung 9.9: Obere Glattheitsabschätzung.

Lemma 9.20. Sei f konvex. Dann gilt:

1. Ein Punkt $x^* \in K$ ist genau dann optimal, wenn $f'(x^*)(x^* - v^*) \leq 0$ für eine Lösung $v^* \in \arg \min_{v \in K} f'(x^*)v$.
2. Für jedes $x \in K$, jede optimale Lösung x^* von (9.19) und $v^* \in \arg \min_{v \in K} f'(x)v$ gilt

$$\underbrace{f(x) - f(x^*)}_{\text{primale Lücke}} \leq \underbrace{f'(x)(x - x^*)}_{\text{Linearisierungsschranke}} \leq \max_{v \in K} f'(x)(x - v) = f'(x)(x - v^*). \quad (9.22)$$

Beweis. Die Aussagen folgen aus der Optimalitätsbedingung erster Ordnung für konvexe Probleme, der Konvexitätsungleichung für f und der Optimalität von v^* im linearen Teilproblem. $\square$

Lemma 9.21. Erfüllt f die Abschätzung (9.21), so gilt für jede Iteration (FW-Alg.)

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \gamma_k f'(x_k)(x_k - v_k) - \frac{\gamma_k^2 L}{2} \|x_k - v_k\|^2.$$

Beweis. Setze $x = x_k$ und $y = x_{k+1} = x_k + \gamma_k(v_k - x_k)$ in (9.21) ein und stelle um. $\square$

Für dieses Fortschrittslemma ist keine Konvexität von f erforderlich.

Satz 9.22. Sei f konvex und L -glatt im Sinne von (9.21). Der Durchmesser von K sei $D := \text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|$. Für die Iterierten (FW-Alg.) mit $\gamma_k = 2/(k+2)$ gilt

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{2LD^2}{k+2} \quad (k \geq 1).$$

Insbesondere ist die primale Lücke höchstens $\epsilon > 0$, sobald $k \geq 1$ und $k \geq 2LD^2/\epsilon$.

Beweis. Schreibe $h_k := f(x_k) - f(x^*)$. Aus Lemma 9.21, (9.22) und $\|x_k - v_k\| \leq D$ folgt

$$h_{k+1} \leq (1 - \gamma_k)h_k + \frac{\gamma_k^2 LD^2}{2}.$$

Für $k = 0$ ist $\gamma_0 = 1$, also $h_1 \leq LD^2/2 \leq 2LD^2/3$. Dies ist der Induktionsanfang bei $k = 1$. Der Induktionsschritt ergibt

$$\begin{aligned} h_{k+1} &\leq \frac{k}{k+2} \frac{2LD^2}{k+2} + \frac{4}{(k+2)^2} \frac{LD^2}{2} \\ &= \frac{2LD^2}{k+3} \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} \leq \frac{2LD^2}{k+3}, \end{aligned}$$

da $(k+1)(k+3) = (k+2)^2 - 1$. $\square$

Beispiel 9.23 (Untere Schranke für die primale Lücke). Wir zeigen, dass bei hinreichend grosser Dimension und kleiner Genauigkeit ϵ im ungünstigsten Fall $\Omega(LD^2/\epsilon)$ Orakelaufrufe erforderlich sind, wenn das Orakel stets eine optimale Ecke zurückgibt. Betrachte

$$\min_{x \in P} \|x\|_2^2, \quad P = \text{co}\{e_1, \dots, e_n\},$$

wobei e_i die Standardbasisvektoren sind. Die eindeutig bestimmte optimale Lösung ist $x^* = (1/n, \dots, 1/n)^T$ mit $f(x^*) = 1/n$.

Beginnt FW in einer Ecke x_0 und liefert das LMO immer eine Ecke, so besitzt x_k nach k Orakelaufrufen höchstens $k+1$ von null verschiedene Koordinaten. Denn jeder Schritt bildet eine Konvexkombination des bisherigen Punktes mit einer neuen Ecke. Ein Punkt des Simplex mit höchstens s von null verschiedenen Koordinaten erfüllt nach Cauchy–Schwarz

$$1 = \left(\sum_{i: x_i \neq 0} x_i \right)^2 \leq s \sum_i x_i^2 = sf(x).$$

Für $k < n$ folgt somit

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n}.$$

96 | Kapitel 9. Numerische Verfahren

Bei $n \gg 1/\epsilon$ sind also $\Omega(1/\epsilon)$ Orakelaufufe erforderlich. Die Annahme eines Eckenorakels ist wesentlich: Bei mehreren optimalen Lösungen kann ein allgemeines LMO auch einen Punkt mit vielen von null verschiedenen Koordinaten zurückgeben.

Für beliebige $L, D > 0$ verwenden wir das skalierte Simplex

$$K = \frac{D}{\sqrt{2}} \text{co}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad f(x) = \frac{L}{2} \|x\|^2.$$

Es hat Durchmesser D , und f ist L -glatt. Dann gilt

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{LD^2}{4} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n} \right).$$

Dies liefert die behauptete Schranke für hinreichend grosse Dimension und ϵ klein relativ zu LD^2 .

9.6.2 Nichtkonvexe Zielfunktionen

Nun sei f nicht notwendigerweise konvex. Die Menge K bleibe nichtleer, kompakt und konvex.

Definition 9.24 (Frank–Wolfe–Lücke). Die Frank–Wolfe–Lücke von f an der Stelle $x \in K$ ist

$$g(x) := \max_{v \in K} f'(x)(x - v). \quad (9.23)$$

Wegen $x \in K$ gilt stets $g(x) \geq 0$.

Für konvexes f ist $g(x) = 0$ äquivalent zur globalen Optimalität von x . Ohne Konvexität ist $g(x) = 0$ lediglich eine notwendige Optimalitätsbedingung. Wir suchen deshalb Punkte mit kleiner Stationaritätslücke, also $g(x) \leq \epsilon$ für eine vorgegebene Genauigkeit $\epsilon > 0$.

Satz 9.25. Sei f L -glatt im Sinne von (9.21) und $D = \text{diam}(K)$. Wähle für eine feste ganze Zahl $T \geq 0$ die konstante Schrittweite $\gamma_k = \gamma = 1/\sqrt{T+1}$. Nach $T+1$ Orakelaufufen und Aktualisierungen gilt

$$G_T := \min_{0 \leq k \leq T} g(x_k) \leq \frac{\max\{2h_0, LD^2\}}{\sqrt{T+1}},$$

wobei x^* eine globale Minimalstelle auf K und $h_0 := f(x_0) - f(x^*)$ ist.

Die Schranke betrifft die kleinste Lücke unter $x_0, \dots, x_T$; sie muss nicht für die letzte Iterierte gelten.

Beweis. Summiert man die Abschätzung aus Lemma 9.21 für $k = 0, \dots, T$, so ergibt sich

$$\gamma \sum_{k=0}^T g(x_k) \leq f(x_0) - f(x_{T+1}) + \frac{\gamma^2 L}{2} \sum_{k=0}^T \|x_k - v_k\|^2$$

$$\leq h_0 + \frac{\gamma^2(T+1)LD^2}{2}.$$

Division durch $\gamma(T+1)$ liefert

$$\begin{aligned} G_T &\leq \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T g(x_k) \leq \frac{h_0}{\gamma(T+1)} + \frac{\gamma LD^2}{2} \\ &= \frac{2h_0 + LD^2}{2\sqrt{T+1}} \leq \frac{\max\{2h_0, LD^2\}}{\sqrt{T+1}}. \end{aligned}$$

□