



---

Vorlesung

# Lineare und Diskrete Optimierung

gehalten im SS 2025

---

Prof. Dr. Tobias Harks  
Universität Passau  
Institut für Mathematik  
Dr.-Hans-Kapfinger-Straße 30  
94032 Passau  
Email: [tobias.harks@uni-passau.de](mailto:tobias.harks@uni-passau.de)

29. April 2025



# Vorwort

Dieses Skript ist in diesem Semester die wesentliche Grundlage dieser Veranstaltung. Kapitel 1-3 und Teile von Kapitel 5 und 6 dieses Skripts basieren auf handschriftlichen Notizen zur Vorlesung [Lineare Optimierung](#) gehalten von Helmut Maurer im SS 2003 am Institut für Mathematik der Universität Münster. Kapitel 4 basiert weitestgehend auf dem Skript von Stefan Ulbrich (TU Darmstadt, Stand WS 2013), welches wiederum in Teilen auf ein älteres Skript von Martin Grötschel rekurriert. Kapitel 7 und 8 (und auch einzelne Abschnitte von Kapitel 5 und 9) orientieren sich stark an den entsprechenden Kapiteln des Lehrbuchs “Optimierungsmethoden – Eine Einführung” von Dieter Jungnickel (Universität Augsburg). Das Kapitel 9 basiert auf dem Buch “Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization” von Martin Grötschel, Laszlo Lovasz und Alexander Schrijver.

Ein besonderer Dank gilt Lukas Graf und Georg Kraus, die während der Veranstaltung im SS 2020 einige hilfreiche Korrekturen eingefügt haben. Für die Veranstaltung im SS 2025 an der Universität Passau sind die Kapitel 6.4-6.6. sowie 7 und 8 nicht prüfungsrelevant.  
Passau, April 2025

Prof. Dr. Tobias Harks



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
1.1	Motivation und Grundbegriffe . . . . .	7
1.2	Beispiele und Anwendungen . . . . .	7
1.3	Finite Optimierung . . . . .	9
1.4	Differenzierbare Klassische Optimierung . . . . .	12
1.4.1	Variationsungleichung und Unrestringierte Optimierung . . . . .	12
1.4.2	Konvexe Optimierung . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Konvexität und Trennbarkeit</b>	<b>17</b>
2.1	Konvexe Mengen und Kegel . . . . .	17
2.2	Konvexkombinationen . . . . .	18
2.3	Trennbarkeit . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Einführung in die Lineare Optimierung</b>	<b>27</b>
3.1	Beispiele . . . . .	27
3.1.1	Produktionsmodelle . . . . .	27
3.1.2	Mischungsaufgaben . . . . .	29
3.1.3	Transportprobleme . . . . .	30
3.2	Mathematische Formulierung linearer Optimierungsprobleme . . . . .	30
3.3	Rückführung anderer LP's auf Standardform . . . . .	31
3.3.1	Ungleichungen . . . . .	31
3.3.2	Freie Variable . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Grundlagen der Polyedertheorie</b>	<b>35</b>
4.1	Seitenflächen von Polyedern . . . . .	35
4.2	Ecken und Extrempunkte . . . . .	39
4.3	Basislösungen . . . . .	45
4.4	Degeneriertheit von Basislösungen . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Das Simplex Verfahren</b>	<b>51</b>
5.1	Parametrisierung des Lösungsraumes . . . . .	52
5.2	Basistausch . . . . .	53
5.3	Zielfunktion und Reduzierte Kosten . . . . .	59
5.4	Anwendung auf LPs mit Ungleichungen . . . . .	63

## 6 | Inhaltsverzeichnis

5.5	Kreiseln des Simplex Verfahrens und Lexikographische Auswahlregel . . . . .	65
5.6	Berechnung einer zulässigen Basislösung - Die Zweiphasen-Methode . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Dualität</b>	<b>75</b>
6.1	Duale Programme . . . . .	75
6.2	Duale Programme für Transportprobleme . . . . .	78
6.3	Der Dualitätssatz . . . . .	79
6.4	Das Duale Simplex-Verfahren . . . . .	81
6.5	Sensitivität und Schattenpreise . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Postoptimierung</b>	<b>89</b>
7.1	Änderung der rechten Seite $b$ . . . . .	89
7.2	Änderung der Zielfunktion $c$ . . . . .	90
7.3	Hinzufügen einer neuen Variablen . . . . .	90
7.4	Änderung einer Spalte von $A$ . . . . .	90
<b>8</b>	<b>Parametrische Lineare Optimierung</b>	<b>95</b>
8.1	Störung der Zielfunktion $c$ . . . . .	95
8.2	Störung der rechten Seite $b$ . . . . .	97
<b>9</b>	<b>Komplexität der Linearen Optimierung</b>	<b>103</b>
9.1	Klee-Minty Würfel . . . . .	103
9.2	Polynomiale Algorithmen . . . . .	108
9.3	Reduktion auf Zulässigkeitsprobleme – LP-Dualität . . . . .	110
9.4	Reduktion mit Binärsuche . . . . .	111
9.5	Geometrische Grundlagen von Ellipsoiden . . . . .	115
9.6	Die Ellipsoid-Methode . . . . .	119
9.7	Polynomialität der Ellipsoid-Methode . . . . .	125
9.8	Nicht-Volldimensionale Polytope . . . . .	126
9.9	Implementation . . . . .	128
<b>10</b>	<b>Lineare Ganzzahlige Optimierung</b>	<b>129</b>
10.1	Die Branch & Bound Methode . . . . .	130
10.2	LP-Basierte Relaxierungen . . . . .	132
10.3	Schnittebenenverfahren . . . . .	133

Datum	Thema
21.4.	Einführung §1.1 – §1.3
23.4.	Differenzierbare Optimierung, Variationsungleichung §1.4.1
28.4.	Konvexe Optimierung §1.4.2
30.4.	Konvexe Mengen §2.1 – §2.2
5.5.	Trennbarkeit §2.3
7.5.	Einführung in die Lineare Optimierung §3.1
12.5.	Einführung in die Lineare Optimierung §3.2 – §3.3
14.5.	Polyedertheorie §4.1 – §4.2
19.5.	Polyedertheorie §4.3 – §4.4
21.5.	Simplex Verfahren §5.1 – §5.2
26.5.	Simplex Verfahren §5.3 – §5.4
28.5.	Simplex Verfahren §5.5 – §5.6
2.6.	Dualität §6.1 – §6.3
4.6.	Dualität §6.4 – §6.5
16.6.	Klee-Minty Würfel, Komplexitätsmodell §9.1 – §9.2
18.6.	Binäre Suche §9.3 – §9.4
23.6.	Geometrie von Ellipsen §9.5
25.6.	Ellipsoid Methode §9.6
30.6.	Ellipsoid Methode §9.6
2.7.	Ellipsoid Methode §9.7
7.7.	Ellipsoid Methode §9.8 – §9.9
9.7.	Ganzzahlige Optimierung, Branch and Bound Verfahren §10.1 – §10.2
14.7.	Schnittebenen, Zusammenfassung §10.3



## Kapitel 1

# Einführung

### 1.1 Motivation und Grundbegriffe

Allgemein betrachten wir einen reellen normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  und  $K \subset V$  nicht-leer. Ferner sei eine reellwertige Funktion

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Gesucht ist nun  $\min\{f(x) \mid x \in K\}$ . Häufig schreibt man auch

$$\begin{aligned} & \text{minimiere } f(x) \\ & \text{unter den Nebenbedingungen } x \in K. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eine optimale Lösung des Problems (1.1) wird auch globales Minimum genannt.

**Definition 1.1.** Ein Punkt  $x^* \in K$  ist ein globales Minimum von  $f$  über  $K$  falls

$$f(x) \geq f(x^*) \text{ für alle } x \in K.$$

Falls

$$f(x) > f(x^*) \text{ für alle } x \in K, x \neq x^*,$$

so sprechen wir von einem strikten globalen Minimum. Globale Maxima sind analog definiert.

- infinite Optimierung ( $V$  ist unendlich dimensionaler Funktionenraum),
- finite Optimierung ( $V = \mathbb{R}^n$ ),
- kontinuierliche Optimierung ( $\text{int}(K) \neq \emptyset$ ),
- diskrete Optimierung ( $K \subseteq \mathbb{Z}^n$ ).

### 1.2 Beispiele und Anwendungen

**Beispiel 1.2** (Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz). Gegeben seien  $j = 1, \dots, n$  mögliche Anlagen (z.B. Aktien, Fonds, Optionen, Wertpapiere). Jede Anlage wirft im nächsten Zeitintervall einen Gewinn (oder Verlust)  $R_j$  ab.

## 10 | Kapitel 1. Einführung

Ein mögliches Ziel ist es, den erwarteten Gewinn

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{E}[R_j], \quad R = \sum_{j=1}^n x_j R_j$$

zu maximieren ( $\mathbb{E}$  bezeichnet den Erwartungswert).

Als Maß für das Risiko kann die Varianz des Gewinns dienen:

$$\text{Var}[R] = \mathbb{E}[R - \mathbb{E}[R]]^2 = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^n x_j (R_j - \mathbb{E}[R_j]) \right]^2.$$

Ein Kompromiss zwischen hohem Gewinn und geringem Risiko kann durch Lösen des folgenden Optimierungsproblems erreicht werden:

$$\begin{aligned} \min & - \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{E}[R_j] + \alpha \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^n x_j (R_j - \mathbb{E}[R_j]) \right]^2 \\ \text{s.t.} & : \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.3 (Optimaler Mengeneinkauf).** Es soll eine bestimmte Menge  $M$  eines Gutes gekauft werden. Dazu werden Angebote von  $n$  Lieferanten eingeholt, wobei kein Lieferant die gewünschte Menge alleine liefern kann, sondern höchstens  $M_i$  Einheiten des Gutes. Die Preise  $f_i(x_i)$  des  $i$ -ten Lieferanten sind i.a. abhängig von der Liefermenge  $x_i$  und beinhalten Mengenrabatte.

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{s.t.} & : \sum_{i=1}^n x_i = M \\ & 0 \leq x_i \leq M_i, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.4 (Regression).** Ein Experiment liefert die Messpunkte  $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$ . Der dem Experiment zu Grunde liegende Vorgang werde durch die Funktion  $f(t, p)$  modelliert, die einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Messstellen  $t_i$  und den Messwerten  $y_i$  herstellt. Daher wird versucht, die Messpunkte so gut wie möglich zu approximieren, indem

$$\sum_{i=1}^m (y_i - f(t_i, p))^2$$

bezüglich  $p$  minimiert wird. Ein allgemeines Least-Squares Problem lautet

$$\min \sum_{i=1}^q \Phi_i(x)^2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. : } & g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, r \\ & h_j(x) = 0, j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.5 (Optimalsteuerung).** Gesucht sei eine Steuerfunktion, um ein Auto mit möglichst geringem (noch genauer zu definierendem) Aufwand in vorgegebener Zeit  $t_f$  von Punkt A (aus Ruhelage) nach Punkt B (in Ruhelage) zu steuern. Bekannt aus der Physik ist nach den Newtonschen Gesetzen, dass der Weg  $s(t)$ , die Geschwindigkeit  $v(t)$  und die Beschleunigung  $a(t)$  folgenden Gesetzmäßigkeiten unterliegen:

$$\dot{s}(t) = v(t), \dot{v}(t) = a(t).$$

Wir betrachten die Aufgabe eindimensional auf der Verbindungslinie von A nach B (der Länge  $d$ ) im Zeitintervall  $[0, t_f]$ . Setzen wir die Koordinate der Punkt A bzw. B auf  $s = 0$  bzw.  $s = d$ , so fordern wir gemäß der Aufgabenstellung  $s(0) = 0, v(0) = 0, s(t_f) = d, v(t_f) = 0$ . Der Gesamtaufwand wird über das Integral der quadrierten Steuerfunktion gemessen, d.h. wir möchten erreichen, dass

$$\int_0^{t_f} a(t)^2 dt$$

möglichst klein wird. Insgesamt lautet die Formulierung daher

$$\begin{aligned} \min & \int_0^{t_f} a(t)^2 dt \\ & \dot{s}(t) = v(t) \\ & \dot{v}(t) = a(t) \\ & s(0) = 0, s(t_f) = d \\ & v(0) = 0, v(t_f) = 0. \end{aligned}$$

### 1.3 Finite Optimierung

In dieser Vorlesung werden wir nur finite Optimierungsprobleme betrachten und im Folgenden immer  $V := \mathbb{R}^n$  annehmen.

Die Menge der Punkte aus  $K$ , in denen das Minimum angenommen wird, bezeichnen wir mit  $\arg \min(f, K)$ . Es gilt

$$\alpha = \min\{f(x) : x \in K\} \Leftrightarrow \arg \min(f, K) = \{x \in K \mid f(x) = \alpha\}.$$

**Definition 1.6.** Ein Punkt  $x^* \in K$  ist ein lokales Minimum von  $f$  über  $K$  falls  $\rho > 0$  existiert, so dass

$$f(x) \geq f(x^*) \text{ für alle } x \in K \cap B_\rho(x^*),$$

wobei

$$B_\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \rho\}$$

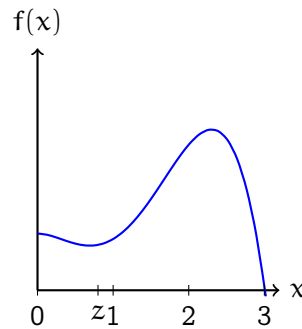


Abbildung 1.1: Die Funktion  $f$  nimmt auf  $K = [0, 3]$  sein **globales** Minimum auf  $x^* = 3$  an. Es gibt ein weiteres **lokales** Minimum im Punkt  $z$ .

die offene Einheitskugel mit Zentrum  $x$  und Radius  $\rho > 0$  bezeichnet. Falls

$$f(x) > f(x^*) \text{ für alle } x \in K \cap B_\rho(x^*), x \neq x^*,$$

so sprechen wir von einem strikten lokalen Minimum.

In der Regel kann  $K$  durch funktionale Gleichungs- und Ungleichungsrestriktionen beschrieben werden. In diesem Fall kann  $K$  dargestellt werden als

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, i \in I_1 = \{1, \dots, m\}, g_j(x) \leq 0, j \in I_2 = \{1, \dots, p\}\}, \quad (1.2)$$

wobei angenommen wird dass alle auftretenden Funktionen hinreichend glatt sind, d.h.,  $f, h_i, g_j \in C^2$  für alle  $i \in I_1, j \in I_2$ .

Für obige Form von  $K$  erhalten wir folgende verfeinerten Problemstellungen (vgl. Oberle, Skript 2012, Einführung in die Optimierung):

- Unrestringierte Optimierung:  $m = p = 0$
- Restringierte Optimierung:  $m > 0$  oder  $p > 0$
- Lineare Optimierung:  $f$  linear,  $g_j, h_i$  affin linear
- Quadratische Optimierung:  $f(x) = x^T A x + b^T x + c$ ,  $g_j, h_i$  affin linear
- Konvexe Optimierung:  $f$  konvex,  $g_j$  konvex,  $h_i$  affin linear
- $L_2$ -Probleme: Die Zielfunktion  $f$  hat die spezielle Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i (f_i(x))^2,$$

mit glatten Funktionen  $f_i$  und Gewichten  $w_i > 0$ .

- Minimax Probleme: Die Zielfunktion  $f$  hat die spezielle Form

$$f(x) = \max\{f_i(x), i = 1, \dots, m\}$$

mit glatten Funktionen  $f_i$ .

Die folgenden Fragen treten im Zusammenhang mit Optimierungsproblemen natürlicherweise auf:

- Existieren optimale Lösungen?
- Sind sie eindeutig?
- Lassen sich notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen herleiten?
- Welche Algorithmen eignen sich zur Berechnung einer optimalen Lösung?
- Wie hängt eine optimale Lösung von den Problemparametern ab ?

Bezüglich der Existenz von Optimallösungen werden wir zunächst einen zentralen Satz der Analysis wiederholen.

**Satz 1.7 (Weierstrass).** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  nichtleer und kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existiert ein  $x^* \in K$  mit

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ für alle } x \in K.$$

*Beweis.* Da  $f$  stetig ist, ist das Bild  $f(K)$  der kompakten Menge  $K$  beschränkt in  $\mathbb{R}$  und das Infimum

$$A := \inf\{f(x) | x \in K\} \in \mathbb{R}$$

existiert (siehe den Satz über die Existenz von infima/suprema für nichtleere und beschränkte Teilmengen in  $\mathbb{R}$ ). Weiterhin existiert eine Folge  $x_n \in K, n \in \mathbb{N}$  so dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

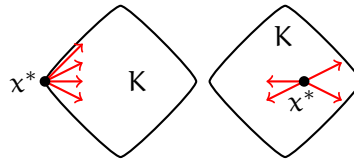
(Die Existenz einer solchen Folge sollte auch klar sein, man nehme z.B. Folgeglieder  $x_n \in K$  mit  $f(x_n) < A + 1/n$ ). Da die Folge  $x_n, n \in \mathbb{N}$  beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano/Weierstrass eine konvergente Teilfolge  $x_{n_k}, k \in \mathbb{N}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} =: x^* \in K.$$

Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt

$$f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = A.$$

Somit nimmt  $f$  auf  $K$  ihr Minimum bei  $x^*$  an. □

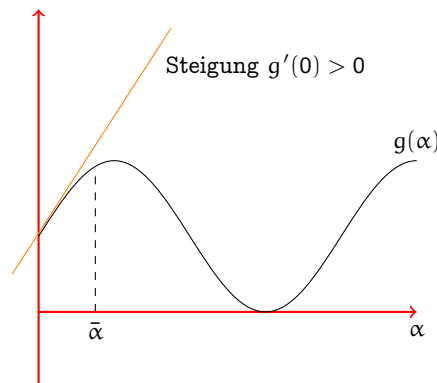
Abbildung 1.2: Die roten Pfeile repräsentieren zulässige Richtungen in  $D_K(x^*)$ .

## 1.4 Differenzierbare Klassische Optimierung

### 1.4.1 Variationsungleichung und Unrestringierte Optimierung

**Definition 1.8 (Zulässigen Richtungen).** Sei  $x \in K \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $K \neq \emptyset$ . Der Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  ist eine zulässige Richtung an  $x$ , falls ein  $\bar{\alpha} > 0$  existiert, sodass  $x + \alpha d \in K$  für alle  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ .

Mit  $D_K(x)$  bezeichnen wir die Menge der zulässigen Richtungen an  $x$ . Man sieht leicht ein, dass  $D_K(x)$  ein Kegel mit Spitze im Nullpunkt (vgl. 2.1) ist, daher wird  $D_K(x)$  auch der Kegel der zulässigen Richtungen genannt.



Für stetig differenzierbare Optimierungsprobleme der Form (1.1) erhalten wir folgende notwendige Optimalitätsbedingung.

**Satz 1.9 (Variationsungleichung).** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $x^*$  ein lokales Minimum von  $f$  über  $K$  und  $d$  eine zulässige Richtung an  $x^*$ . Dann gilt

$$\nabla f(x^*)^\top d \geq 0.$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert eine zulässige Richtung  $d$  an  $x^*$ . Somit existiert  $\bar{\alpha} > 0$  sodass  $x^*(\alpha) := x^* + \alpha d \in K$  für alle  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ . Wir definieren eine eindimensionale Funktion  $g(\alpha) := f(x^*(\alpha))$ . Für ein lokales Minimum  $x^*$  (bzgl. Umgebung  $B_\rho(x^*)$ ) gilt

$$g(\alpha) \geq g(0) \text{ für alle } \alpha \in [0, \min\{\bar{\rho}, \bar{\alpha}\}],$$

wobei

$$\bar{\rho} := \sup\{\alpha \geq 0 \mid x^* + \alpha d \in B_{\rho/2}(x^*)\}.$$

Somit folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} \geq 0.$$

Mit der Differenzierbarkeit von  $f$  gilt nun

$$0 \leq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha} = g'(0) = \nabla f(x^*)^\top d.$$

□

**Satz 1.10.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $x^* \in \text{int}(K)$  ein lokales Minimum von  $f$  über  $K$ . Dann gilt

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{1.3}$$

Insbesondere gilt (1.3) für jedes lokale Minimum eines unrestringierten Optimierungsproblems.

*Beweis.* Mit der Variationsungleichung aus Satz 1.9 gilt für jede zulässige Richtung  $d \in \mathbb{R}^n$  die Ungleichung  $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$ . Da  $x^* \in \text{int}(K)$  ist für jeden Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  auch  $-d$  zulässig. Daraus folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 1.11.** Es sei darauf verwiesen dass das Konzept von zulässigen Richtungen wie in Definition 1.8 nicht geeignet ist um zulässige Richtungen für gekrümmte Hyperflächen (oder nicht-volldimensionale Mengen) darzustellen. Für solche Fälle benötigt man anschaulich ein Konzept welches **infinitesimale** Schrittweiten in eine Richtung erlaubt. Diese Idee führt auf Begriffe wie **Tangentialkegel** und **Linearisierungskegel**, die wir uns für Optimierung II aufheben.

### 1.4.2 Konvexe Optimierung

Wir betrachten nun die Minimierung einer konvexen differenzierbaren Funktion  $f$  auf einer konvexen Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.12.** Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt konvex, wenn für alle  $x, y \in K$  die Verbindungsstrecke zwischen  $x$  und  $y$  in  $K$  liegt, d.h.

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K \text{ für alle } \lambda \in [0, 1].$$

**Definition 1.13.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex. Eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, wenn für alle  $x, y \in K$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.4}$$

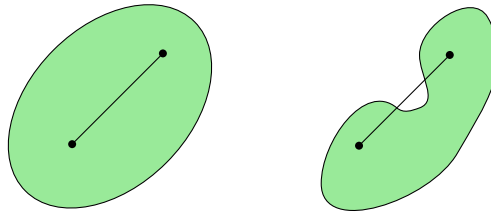


Abbildung 1.3: Links: Konvexe Menge. Rechts: Nicht-konvexe Menge

$f$  heißt strikt konvex, wenn für  $x \neq y$  und  $\lambda \in (0, 1)$  die Ungleichung strikt ist. Die Funktion  $f$  heißt (strikt) konkav, wenn  $-f$  (strikt) konvex ist.

**Satz 1.14.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex, und seien  $f_1, f_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  konvexe Funktionen und sei  $\alpha > 0$ . Dann sind auch  $\alpha f_1$ ,  $f_1 + f_2$  und  $\max\{f_1, f_2\}$  konvex auf  $K$ .

*Beweis.* Übung. □

Differenz, Produkt und Minimum konvexer Funktionen sind im Allgemeinen nicht konvex. Zu jeder Funktion lassen sich zwei sie charakterisierende Mengen definieren. Ist die Funktion konvex, sind diese Mengen ihrerseits konvex:

**Definition 1.15.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex, und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Menge

$$\text{Epi}(f) = \{(x, \alpha) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

heißt der Epigraph von  $f$ . Für  $\beta \in \mathbb{R}$  heißt die Menge

$$L(f, \beta) = \{x \in K : f(x) \leq \beta\}$$

untere Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $\beta$ .

Wir erhalten folgende Charakterisierung.

**Satz 1.16.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $f$  ist konvex  $\Leftrightarrow$   $\text{Epi}(f)$  ist konvex.
2.  $f$  ist konvex  $\Rightarrow$   $L(f, \beta)$  ist konvex für jedes  $\beta \in \mathbb{R}$ . Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

*Beweis.* Übung. □

Für konvexe differenzierbare Funktionen erhalten wir folgende Charakterisierung.

**Satz 1.17.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f \in C^1$ . Dann gilt:

1.  $f$  ist genau dann konvex auf der konvexen Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , wenn für alle  $x, y \in K$  gilt:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x). \quad (1.5)$$

2.  $f$  ist strikt konvex  $\Rightarrow$  (1.5) gilt strikt für alle  $x \neq y \in K$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Richtung  $\Leftarrow$  für die erste Aussage. Es gelte (1.5) für alle  $x, y \in K$ . Wähle zwei beliebige Punkte  $x, y \in K$  und  $\lambda \in (0, 1)$ . Wegen der Konvexität von  $K$  ist dann auch

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in K. \quad (1.6)$$

Mit (1.5) gilt für  $x, y, z \in K$

$$f(x) \geq f(z) + (x - z)^T \nabla f(z) \quad (1.7)$$

$$f(y) \geq f(z) + (y - z)^T \nabla f(z). \quad (1.8)$$

Multiplizieren wir nun (1.7) mit  $\lambda$  und (1.8) mit  $(1 - \lambda)$ , und addieren die beiden Ungleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) &\geq f(z) + \left( (\lambda(x - z) + (1 - \lambda)(y - z)) \right)^T \nabla f(z) \\ &= f(z) + \left( \lambda x + (1 - \lambda)y - z \right)^T \nabla f(z) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Wegen (1.6) ist der zweite Ausdruck auf der rechten Seite der zweiten Ungleichung 0. Somit folgt die Konvexität von  $f$ .

$\Rightarrow$ : Sei  $f$  konvex. Wir wählen  $x, y \in K$  und definieren die Hilfsfunktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\psi(\lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

Mittels Konvexität von  $f$  gilt für alle  $\lambda \in [0, 1]$  die Eigenschaft  $\psi(\lambda) \geq 0$ . Desweiteren gilt  $\psi(0) = 0$ . Wir berechnen nun die Ableitung von  $\psi$  an der Stelle 0 und erhalten

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \dot{\psi}(0) = -f(x) + f(y) - \nabla f(x)^T(y - x).$$

Die zweite Aussage folgt unmittelbar. □

Wir erhalten nun sogar ein hinreichendes Optimalitätskriterium für konvexe Optimierungsprobleme.

**Satz 1.18.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex und sei  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare konvexe Funktion. Dann ist jedes lokale Minimum von  $f$  auch ein globales Minimum.

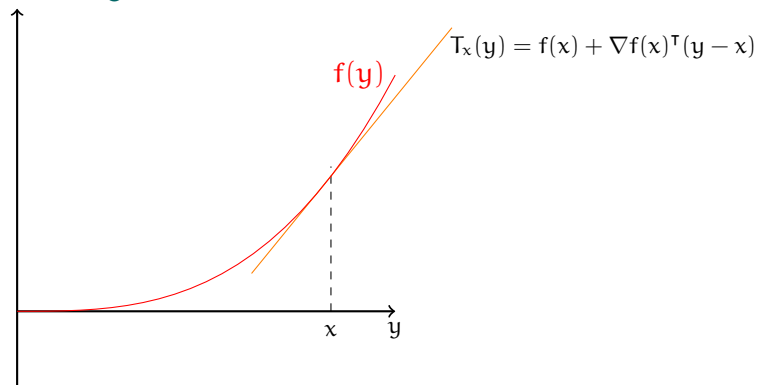


Abbildung 1.4: Illustration von Ungleichung 1.5.  $T_x(\mathbf{y})$  repräsentiert die Tangentialebene von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}$  und es gilt  $T_x(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{y})$  für alle  $\mathbf{y} \in K$ .

*Beweis.* Sei  $\mathbf{x}^*$  ein lokales Minimum. Dann gilt mit Satz 1.9, dass für jede zulässige Richtung  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  an  $\mathbf{x}^*$  gelten muss  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d} \geq 0$ . Weil  $K$  konvex ist, gilt für beliebiges  $\mathbf{y} \in K$ , dass  $\mathbf{x}^* + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^* \in K$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ . Somit ist  $\mathbf{y} - \mathbf{x}^*$  eine zulässige Richtung an  $\mathbf{x}^*$ . Wir erhalten

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^*),$$

wobei die erste Ungleichung aus Satz 1.17 folgt und die zweite aus der Variationsungleichung.  $\square$

Es folgt unmittelbar folgendes Optimalitätskriterium für unrestringierte konvexe Probleme.

**Korollar 1.19.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare konvexe Funktion. Dann ist jeder Punkt  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$  ein globales Minimum des zugehörigen unrestringierten Optimierungsproblems.

## Kapitel 2

# Konvexität und Trennbarkeit

### 2.1 Konvexe Mengen und Kegel

**Definition 2.1.** 1. Für  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt

$$\text{co}(M) := \bigcap \{K \supset M \mid K \text{ konvex}\}$$

die konvexe Hülle von  $M$ . Wie wir zeigen werden ist die konvexe Hülle die kleinste konvexe Menge, welche  $M$  enthält. Für  $x^0, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$  heißt

$$\text{co}(x^0, \dots, x^k) = \text{co}(\{x^0, \dots, x^k\})$$

das von  $x^0, \dots, x^k$  aufgespannte Simplex. Wenn  $x^1 - x^0, \dots, x^k - x^0$  linear unabhängig sind, so heißt das Simplex nichtentartet.

2. Eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt Kegel (mit Spitze im Nullpunkt), wenn für alle  $x \in K$  der Halbstrahl durch  $x$  in  $K$  liegt, d.h.

$$\alpha x \in K \text{ für alle } \alpha \geq 0.$$

Ein Kegel  $K$ , der konvex ist, heißt konvexer Kegel.

3. Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  und  $x \in K$ . Der Kegel

$$K(x) := \{\alpha(y - x) \mid y \in K, \alpha > 0\} = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha(K - x)$$

heißt die konische Hülle von  $K$  bzgl.  $x$ .

Zur Erläuterung dieser Definitionen dienen die folgenden Beispiele in Abbildung 2.1.

Wir definieren nun wichtige Klassen von konvexen Mengen.

**Definition 2.2.** Sei  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{R}$ .

1. Eine Menge  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$  wird Hyperebene genannt.

2. Die Mengen  $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$  und  $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$  werden Halbräume genannt.

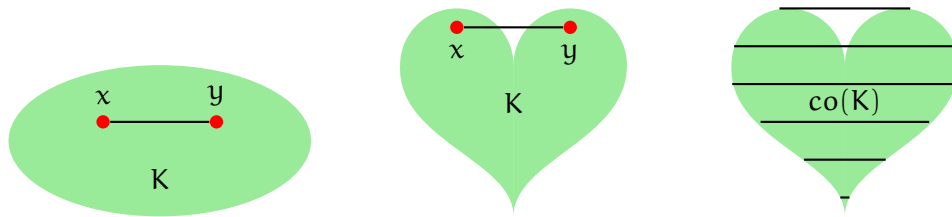


Abbildung 2.1: Die erste Menge ist konvex. Das zweite Herz ist nichtkonvex und die dritte Menge repräsentiert die konvexe Hülle des nicht-konvexen Herzens.

3. Sei nun  $A$  eine reellwertige  $m \times n$  Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$ .

$K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$  wird Polyeder und  $K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$  Polyeder in Standardform genannt.

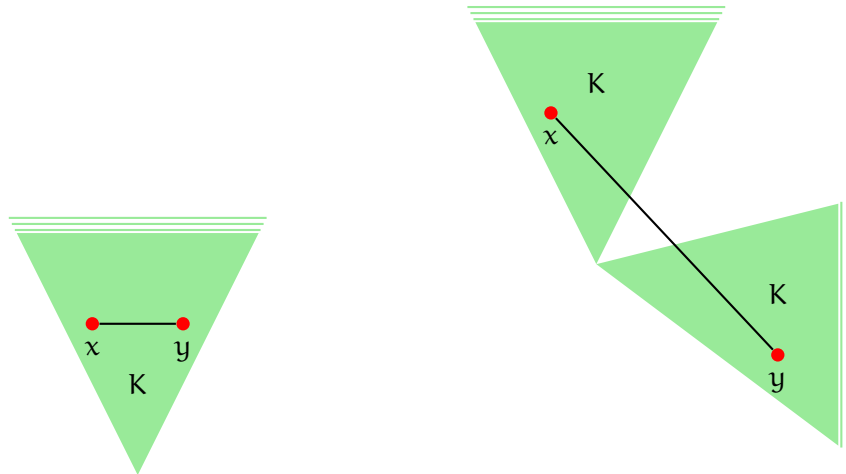


Abbildung 2.2: Links: konvexer Kegel. Rechts: nicht-konvexer Kegel.

## 2.2 Konvexkombinationen

**Definition 2.3.** Seien  $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ .

- Der Vektor  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$  heißt Konvexkombination von  $x^1, \dots, x^k$ .

Wir erhalten folgenden Satz.

- Satz 2.4.**
1. Der Schnitt von konvexen Mengen ist konvex.
  2. Jedes Polyeder ist eine konvexe Menge.
  3. Eine Konvexkombination einer endlichen Anzahl von Punkten einer konvexen Menge liegt in derselben Menge.

4. Die konvexe Hülle einer Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist die Menge der Konvexkombinationen von Punkten in  $K$ . Insbesondere ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte konvex.

*Beweis.* (1): Seien  $X_i, i \in I$  konvexe Mengen und definiere  $X := \bigcap_{i \in I} X_i$ . Für  $x, y \in X$  gilt  $x, y \in X_i$  für alle  $i \in I$ , somit folgt  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X_i$  für alle  $i \in I$ . Schlussendlich folgt  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ .

(2): Ein Polyeder ist der Schnitt von endlich vielen (konvexen) Halbräumen.

(3): Wir zeigen mit Induktion über  $k$ , dass jede Konvexkombination von  $k$  vielen Punkten aus  $X$  wieder in  $X$  liegt. Für  $k = 1$  ist die Aussage trivial und für  $k = 2$  folgt die Aussage aus der Konvexität von  $X$ . Für den Schritt  $k - 1 \rightarrow k$  betrachte eine Konvexkombination  $\mu_1 x^1 + \dots + \mu_k x^k$ . Falls  $\mu_i = 0$  für ein  $i \in \{1, \dots, k\}$  können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, daher nehmen wir nun o.B.d.A. an dass  $\mu_k \in (0, 1)$  gilt. Definiere

$$v_1 = \frac{\mu_1}{1 - \mu_k}, \dots, v_{k-1} = \frac{\mu_{k-1}}{1 - \mu_k} \geq 0, \sum_{l=1}^{k-1} v_l = 1.$$

Desweiteren setze

$$y := \sum_{l=1}^{k-1} v_l x^l \in X$$

nach Induktionsvoraussetzung. Nun gilt

$$x = (1 - \mu_k)y + \mu_k x^k \in X,$$

weil der Fall  $k = 2$  schon gezeigt wurde.

(4): Sei  $L$  die Menge der Konvexkombinationen von Punkten in  $K$  und  $\text{co}(K)$  die konvexe Hülle von  $K$ .

$L \subseteq \text{co}(K)$ : Da  $\text{co}(K)$  nach (1) konvex ist, liegen alle Konvexkombinationen von Punkten aus  $\text{co}(K)$  wieder in  $\text{co}(K)$ . Da zusätzlich nach Definition der konvexen Hülle  $K \subseteq \text{co}(K)$  gilt, ist  $L \subseteq \text{co}(K)$ .

$\text{co}(K) \subseteq L$ : Seien nun  $x, y \in L$  mit

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i \text{ und } y = \sum_{j=1}^l \beta_j y^j, \text{ wobei } \alpha_i, \beta_j \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \sum_{j=1}^l \beta_j = 1.$$

Für ein beliebiges  $\lambda \in [0, 1]$  gilt dann für

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^k \lambda \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^l (1 - \lambda) \beta_j y^j,$$

dass dieses Element auch in  $L$  liegt, denn

$$0 \leq \lambda \alpha_i \leq 1 \forall i, \quad 0 \leq (1 - \lambda) \beta_j \leq 1 \forall j \text{ und}$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^l (1-\lambda) \beta_j = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^l \beta_j = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

was nichts anderes bedeutet, dass  $z$  eine Konvexkombination von Elementen aus  $K$  ist. Damit ist  $L$  konvex. Offensichtlich ist auch  $K \subseteq L$ , da sich jedes Element  $x^p \in K$  schreiben lässt als

$$x^p = \sum_{j \in J} \lambda_j x^j \text{ mit } \lambda_p = 1 \text{ und } \lambda_j = 0 \text{ für } i \neq p.$$

Nach der Definition der konvexen Hülle von  $K$  ist  $\text{co}(K) \subseteq L$ , da  $L$  nach obiger Argumentation eine der  $K$  enthaltenden konvexen Mengen ist, über die der Schnitt gebildet wird. □

Wir erhalten als Folgerung.

**Korollar 2.5.** Die Menge der Konvexkombinationen von  $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$  ist die kleinste (bzgl. Inklusion) konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , welche die Punkte  $x^1, \dots, x^k$  enthält.

*Beweis.* Sei  $X$  die Menge der Konvexkombinationen von  $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ . Definiere nun

$$Y := \text{co}(x^1, \dots, x^k) = \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{R}^n \\ C \text{ konvex} \\ C \text{ enthält } x^1, \dots, x^k}} C. \quad (2.1)$$

$Y$  ist wohldefiniert weil  $\mathbb{R}^n$  ein Kandidat der  $C$  Mengen ist. Nach Satz 2.4(1.) ist  $Y$  konvex als Schnitt konvexer Mengen.  $Y$  ist auch die kleinste konvexe Menge, die die Punkte  $x^1, \dots, x^k$  enthält. Da  $X$  nach Satz 2.4(4.) konvex ist, erhalten wir sofort  $Y \subseteq X$ . Sei  $x \in X$ . Nach Definition von  $X$  gilt  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ . Weil nach Voraussetzung  $x^1, \dots, x^k \in Y$  gilt, folgt mit Satz 2.4(3.), dass  $x \in Y$ . □

Der folgende Satz sagt, dass man für die Darstellung eines beliebigen Punktes in  $\text{co}(K)$  maximal  $(n+1)$  Punkte benötigt, wobei  $n$  die Dimension des Raumes ist.

**Satz 2.6 (Charathéodory).** Für  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist  $\text{co}(K)$  die Menge aller Konvexkombinationen von höchstens  $(n+1)$ -elementigen Teilmengen von  $K$ .

*Beweis.* Sei  $x \in \text{co}(K)$ . Wegen Satz 2.4 (4) existieren  $x^1, \dots, x^k \in K$  so dass

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, k \text{ und } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

Wenn bereits  $k \leq n+1$  gilt, dann ist nichts mehr zu zeigen. Gilt  $k > n+1$ , dann zeigen wir, dass man für die Darstellung von  $x$  auf einen der  $k$  Punkte verzichten kann: Betrachten wir dazu die  $(k-1)$  Vektoren  $y^i = x^i - x^k, i = 1, \dots, k-1$ . Für  $k > n+1$  sind

die Punkte  $y^i$  linear abhängig, d.h. es existieren  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$  mit  $\alpha_j \neq 0$  für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ , so dass

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i y^i = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (x^i - x^k) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x^i + \left(-\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) x^k = 0. \end{aligned}$$

Mit der Definition  $\alpha_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i$  erhalten wir

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x^i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0.$$

Wegen  $\alpha_j \neq 0$  für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  ist folgender Wert wohldefiniert:

$$i_0 = \arg \min_{i \in \{1, \dots, k\}} \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}}.$$

Es gilt nun

$$\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i = 1.$$

Desweiteren

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^k \left( \lambda_i x^i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i x^i \right) = \sum_{i=1}^k \left( \lambda_i - \alpha_i \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \right) x^i.$$

Dabei ist  $\lambda_{i_0} - \alpha_{i_0} \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = 0$ , so dass  $x$  wie gefordert als Linearkombination von nur  $k-1$  Punkten dargestellt werden kann.  $\square$

## 2.3 Trennbarkeit

Wir werden nun den anschaulich einleuchtenden Sachverhalt zeigen, dass man zwei disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene trennen kann, d.h., die Hyperebene unterteilt den Raum in zwei Halbräume, und beide Mengen liegen im jeweils anderen Halbraum.

**Definition 2.7.** Zwei Teilmengen  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$  heissen trennbar, wenn es  $c \in \mathbb{R}$  und einen Zeilenvektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq 0$ , gibt mit

$$\lambda x \leq c \leq \lambda y \quad \text{für alle } x \in K_1, y \in K_2.$$

Die Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda x = c\}$  heißt trennende Hyperebene (vgl. Abbildung 2.3); Die Mengen  $K_1, K_2$  heissen echt trennbar durch die Hyperebene  $H$ , wenn  $K_1 \cup K_2$  nicht

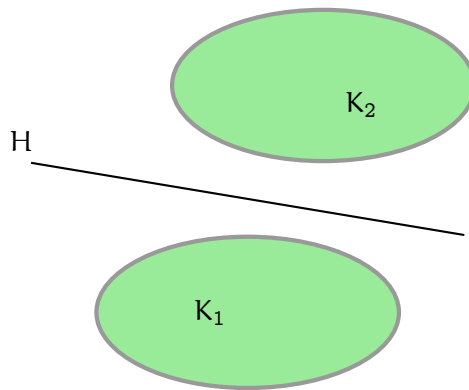


Abbildung 2.3: Illustration der (echten) Trennbarkeit von zwei disjunkten konvexen Mengen.

in  $H$  enthalten ist. Die Hyperebene  $H$  definiert die beiden Halbräume

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda x \geq c\}, \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \lambda x \leq c\}.$$

Die Mengen  $K_1, K_2$  sind also trennbar, wenn entweder  $K_1 \subseteq H^+, K_2 \subseteq H^-$  oder  $K_1 \subseteq H^-, K_2 \subseteq H^+$ .

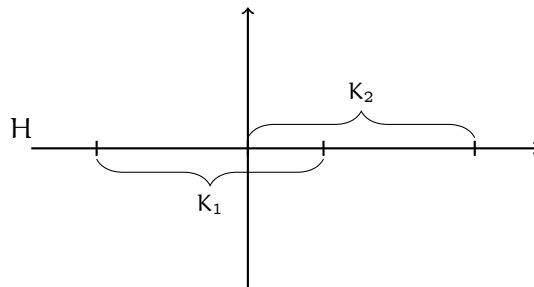


Abbildung 2.4: Zwei Mengen  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$  die trennbar, jedoch nicht echt trennbar sind. Die trennende Hyperebene ist gegeben durch  $H = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ .

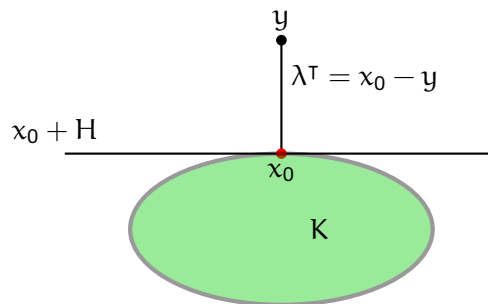


Abbildung 2.5: Illustration des Beweises von Satz 2.8. Gilt im Beispiel  $x_0 = y$  dann ist  $H + y$  eine trennende Stützhyperebene.

**Satz 2.8.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere, konvexe Menge und sei  $y \notin \overset{\circ}{K} := \text{int}(K)$ . Dann sind  $\{y\}$  und  $K$  trennbar, d.h. es gibt einen Zeilenvektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit

$$\lambda y \leq \lambda x \text{ für alle } x \in K.$$

Ist  $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$  so sind  $\{y\}$  und  $\overset{\circ}{K}$  echt trennbar, und es gilt

$$\lambda y < \lambda x \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{K}.$$

*Beweis.* 1. Fall:  $y \notin \bar{K}$ , wobei  $\bar{K}$  den topologischen Abschluss von  $K$  bezeichnet. Mit  $\|x\|$  werde die euklidische Norm bezeichnet. Setze

$$d := \inf_{x \in \bar{K}} \|x - y\| > 0.$$

Die Funktion  $f(x) := \|y - x\|$  ist stetig und nimmt auf der kompakten Menge  $\bar{K} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq 2d\}$  ihr Minimum an (Satz von Weierstrass). Wegen der Abgeschlossenheit von  $\bar{K}$  gibt es daher  $x_0 \in \bar{K}$  mit  $d = \|y - x_0\|$ . Mit der Konvexität von  $\bar{K}$  kann man ausserdem zeigen, dass der Lotpunkt  $x_0$  eindeutig bestimmt ist (vgl. Abbildung 2.5).

Wir zeigen nun, dass  $\lambda := (x_0 - y)^T \neq 0$  die Behauptung des Satzes erfüllt. Sei  $x \in K$ . Wegen der Konvexität von  $\bar{K}$  gilt

$$x_0 + \alpha(x - x_0) \in \bar{K} \text{ für } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Daher ist

$$\|x_0 + \alpha(x - x_0) - y\|^2 \geq \|x_0 - y\|^2$$

und hieraus erhält man durch Ausrechnen der Skalarprodukte

$$2\alpha(x_0 - y)^T(x - x_0) + \alpha^2 \|x - x_0\|^2 \geq 0.$$

Die Division durch  $\alpha > 0$  liefert im Limes  $\alpha \downarrow 0$  die Beziehung

$$(x_0 - y)^T(x - x_0) \geq 0$$

und damit wegen  $\lambda^T = (x_0 - y)$  und  $d = \|\lambda\|$

$$\lambda x \geq \lambda x_0 = \lambda y + d^2 > \lambda y.$$

Also ist  $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda x = \lambda x_0\}$  eine Hyperebene, die  $\{y\}$  und  $K$  trennt.

2. Fall:  $y \in \partial K = \bar{K} - \overset{\circ}{K}$ .

Zu  $y \in \partial K$  gibt es eine Folge  $\{y_k\}$ ,  $y_k \notin \bar{K}$ , mit  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ . Zu  $y_k$  kann gemäß dem ersten Fall ein Zeilenvektor  $\lambda_k \neq 0$  gewählt werden mit

$$\lambda_k y_k \leq \lambda_k x \text{ für alle } x \in K.$$

O.E. kann  $\|\lambda_k\| = 1$  gesetzt werden und daher können wir annehmen, dass die beschränkte Folge  $\{\lambda_k\}$  konvergent ist mit  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k$ ,  $\|\lambda\| = 1$  (mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt). Durch Grenzübergang in der obigen Ungleichung ergibt sich dann

$$\lambda y \leq \lambda x \text{ für alle } x \in K.$$

Die Aussage

$$\lambda y < \lambda x \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{K}$$

folgt unmittelbar. □

Im Fall  $y \in \partial K$  heißt die trennende Hyperebene Stützhyperebene von  $K$  in  $y$ . Aus dem Trennungssatz 2.8 folgert man direkt:

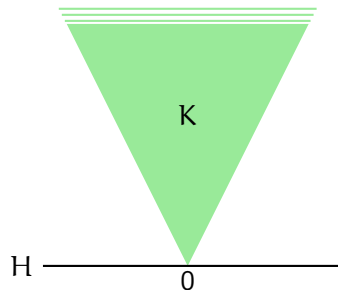


Abbildung 2.6: Trennung eines konvexen Kegels mittels Hyperebene durch 0.

**Satz 2.9.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein nichtleerer konvexer, abgeschlossener Kegel und sei  $y \notin K$ . Dann gibt es einen Zeilenvektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit

$$\lambda y < 0 \leq \lambda x \text{ für alle } x \in K.$$

*Beweis.* Wegen  $\bar{K} = K$  gibt es nach dem ersten Fall von Satz 2.8 einen Zeilenvektor  $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  so dass für alle  $x \in K$  gilt  $\lambda y < \lambda x$ . Aus  $0 \in K$  folgt  $\lambda y < \lambda 0 = 0$ . Angenommen es existiere ein  $x \in K$  mit  $\lambda x < 0$ . Dann folgt

$$\lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\infty,$$

im Widerspruch zu Beschränktheit von  $\lambda K$  durch  $\lambda y$  nach unten. Also gilt

$$\forall x \in K : \lambda y < 0 \leq \lambda x.$$

□

Hieraus gewinnt man den folgenden Alternativsatz:

**Satz 2.10 (Lemma von Farkas).** Sei  $B$  eine  $k \times n$  Matrix und  $d \in \mathbb{R}^k$ . Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1.  $Bx = d, x \geq 0$  hat eine Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $\lambda B \geq 0, \lambda d < 0$  hat eine Lösung  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ .

*Beweis.* Der Kegel

$$K := \{Bx \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^k$$

ist nichtleer, konvex und abgeschlossen. Es gilt genau eine der beiden Aussagen

- (a)  $d \in K$ .
- (b)  $d \notin K$ .

Die Aussage (a) ist genau die Aussage (1) des Satzes. Im Falle (b) gibt es nach dem Trennungssatz 2.8 ein  $\lambda \in \mathbb{R}^k$  mit

$$\lambda d < 0 \leq \lambda z \text{ für alle } z \in K.$$

Also  $\lambda Bx \geq 0$  für alle  $x \geq 0$ , d.h.,  $\lambda B \geq 0$ . Dies ist die Aussage (2) des Satzes. Man beachte dass die jeweiligen Aussagen (a) und (1) bzw. (b) und (2) äquivalent sind und sich (1) und (2) somit ausschließen.  $\square$



## Kapitel 3

# Einführung in die Lineare Optimierung

### 3.1 Beispiele

#### 3.1.1 Produktionsmodelle

Ein Unternehmer produziert  $n$  Produkte  $P_1, \dots, P_n$ , zu deren Herstellung  $m$  Aktivitäten  $A_1, \dots, A_m$  (Rohstoffe, Arbeitskräfte, Arbeitsstunden o.ä.) benötigt werden. Das Produkt  $P_j$  enthalte  $a_{ij}$  Anteile der Aktivität  $A_i$  und möge beim Verkauf pro Einheit einen Reingewinn von  $c_j$  Zahlungseinheiten erzielen. Von der Aktivität  $A_i$  sei die Menge  $b_i$  verfügbar. Die Produktionsmenge  $x_j$  des Produktes  $P_j$  soll nun bestimmt werden, so dass der Gewinn maximal wird. Gesucht ist daher das Maximum von

$$z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ für alle } i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0, \text{ für alle } j = 1, \dots, n.$$

**Beispiel 3.1.** Der Besitzer einer kleinen Schuhfabrik will je ein Modell eines Damen- und Herrenschuhs herstellen. Er verfügt über 40 Angestellte und über einen Maschinenpark von 10 Maschinen. Die pro Monat zur Verfügung stehende Arbeitszeit und Ledermenge ist in der folgenden Tabelle 3.1 enthalten: Mit den Optimierungsvariablen

$x_1$  : Zahl der produzierten Damenschuhe

$x_2$  : Zahl der produzierten Herrenschuhe

lautet die Optimierungsaufgabe:

Tabelle 3.1: Angaben zum Produktionsproblem

	Damenschuh	Herrenschuh	verfügbar
Herstellungszeit [h]	20	10	8000
Maschinenbearbeitung [h]	4	5	2000
Lederbedarf [dm <sup>2</sup> ]	6	15	4500
Reingewinn [EUR]	16	32	—

$$\text{maximiere } z(x_1, x_2) = 16x_1 + 32x_2$$

unter d.N.

$$20x_1 + 10x_2 \leq 8000$$

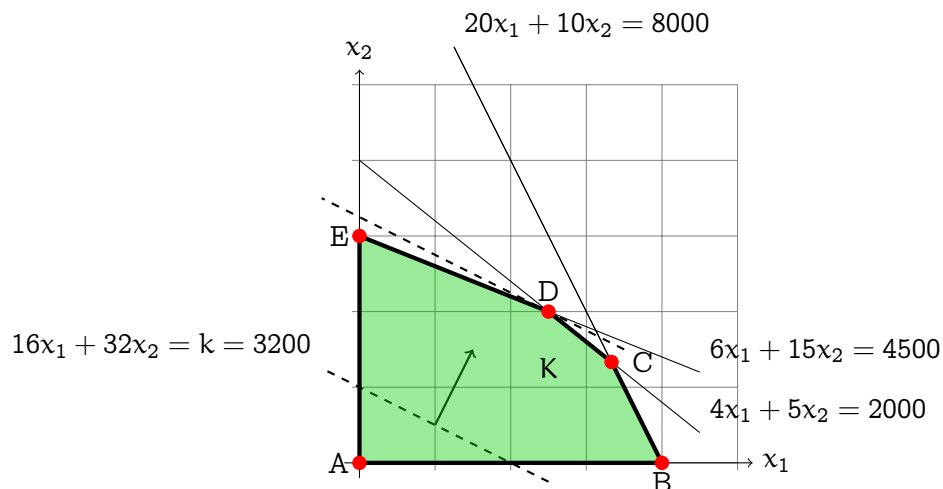
$$4x_1 + 5x_2 \leq 2000$$

$$6x_1 + 15x_2 \leq 4500$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Die obigen Ungleichungen beschreiben Halbebenen im  $\mathbb{R}^2$ , die durch Geraden begrenzt werden. Der Durchschnitt aller dieser Halbebenen beschreibt den zulässigen Bereich aller Punktepaare  $(x_1, x_2)$ , die den Ungleichungen genügen. Die Niveaulinien  $z(x_1, x_2) = 16x_1 + 32x_2 = k$ , mit variablem  $k$ , beschreibt eine Schar von parallelen Geraden. Es ist ein maximales  $k_m$  derart zu bestimmen, dass (mindestens) ein Punkt des zulässigen Bereichs auf der Geraden  $z(x_1, x_2) = k_m$  liegt.



Offenbar nimmt die Zielfunktion  $z$  ihren maximalen Wert in der Ecke D des zulässigen

Bereichs  $K$  an. Die Ecken von  $K$  sind  $A, B, C, D, E$ ; z.B. berechnet man die Ecken  $B, C, D$  mit zugehörigem Wert  $z$ :

Tabelle 3.2: Angaben zum Produktionsproblem

Ecke	$z$	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
B	6400	400	0	0	400	2100
C	9600	1000/3	400/3	0	0	500
D	10400	250	200	100	0	0

In jeder Ecke haben genau zwei Variablen den Wert 0 (Basislösungen). Bei Durchlaufen der Ecken  $B \rightarrow C \rightarrow D$  vergrößert sich der Wert der Zielfunktion. Das Optimum in der Ecke  $D$  ist:

$$x_1 = 250, x_2 = 200, z(x_1, x_2) = 10400.$$

### 3.1.2 Mischungsaufgaben

Es seien  $n$  Mischungen gegeben, die aus  $m$  Stoffen zusammengesetzt sind. Eine Einheit der Mischung  $M_j$  enthalte  $a_{ij}$  Einheiten des Stoffes  $S_i$ . Aus den Mischungen  $M_1, \dots, M_n$  soll eine neue Mischung hergestellt werden. Mit  $x_j$  wird der Anteil der Mischung  $M_j$  bei der neuen Mischung bezeichnet. Seien  $I, J$  Teilmengen von  $\{1, \dots, m\}$ . Eine Einheit der neuen Mischung enthalte von jedem Stoff  $S_i$  für  $i \in I$  mindestens  $b_i$  Einheiten und von jedem Stoff  $s_i$  für  $i \in J$  höchstens  $b'_i$  Einheiten. Die Kosten pro Einheit der Mischung  $M_j$  seien  $c_j$ . Wir erhalten die Aufgabe:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{unter d.N.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, i \in I \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b'_i, i \in J \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

### 3.1.3 Transportprobleme

In  $m$  Fabriken werden jeweils die Warenmengen  $a_i, 1 \leq i \leq m$  erzeugt. Diese Waren sollen an  $n$  Abnehmer, die jeweils die Warenmengen  $b_j, 1 \leq j \leq n$  benötigen, so versandt werden, dass die Gesamtkosten minimal werden. Bezeichnen wir mit  $c_{ij}$  die Transportkosten pro Wareneinheit von Fabrik  $i$  zum Abnehmer  $j$ , so lautet das zugehörige Modell, in dem mit  $x_{ij}$  die tatsächlich von  $i$  nach  $j$  versandte Menge bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{unter d.N.} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, 1 \leq i \leq m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, 1 \leq j \leq n, \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ist  $n = m$ , und  $a_i = b_j = 1$  für alle  $i, j$ , so geht das Transportproblem in ein Zuordnungsproblem über (Personaleinsatzplanung).

## 3.2 Mathematische Formulierung linearer Optimierungsprobleme

Das lineare Optimierungsproblem (LP) lautet in Standardform

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{unter d.N.} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, 1 \leq i \leq m \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

In Vektor-Schreibweise mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, A = (a_{ik}) \text{ } m \times n \text{ Matrix}$$

lautet die Standardform

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } z(x) = cx \\ &\text{unter d.N.} \\ &Ax = b \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

### 3.3 Rückführung anderer LP's auf Standardform

Haben wir ein lineares Optimierungsproblem, welches nicht in Standardform gegeben ist (weil es Ungleichungsnebenbedingungen oder freie Variablen enthält), so können wir dieses wie folgt auf Standardform bringen.

#### 3.3.1 Ungleichungen

Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix (nicht notwendig  $m < n$ ). Das Problem lautet

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } z(x) = cx \\ &\text{unter d.N.} \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definiere Schlupf-Variablen

$$y := b - Ax \in \mathbb{R}^m.$$

Dann sind die Ungleichungsnebenbedingungen  $Ax \leq b$  äquivalent zu

$$Ax + y = b, y \geq 0.$$

Mit  $\tilde{c} := (c, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\tilde{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $I$  der  $m \times m$  Einheitsmatrix und der  $m \times (n+m)$ -Matrix  $\tilde{A} := (A|I)$  ist (3.2) äquivalent zur Standardform

$$\begin{aligned}
& \text{minimiere } \tilde{z}(x) = \tilde{c}\tilde{x} \\
& \text{unter d.N.} \\
& \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\
& \tilde{x} \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

### 3.3.2 Freie Variable

In der Standardform (3.1) seien einige  $x_i$  ohne Vorzeichenbedingung, z.B.  $x_1$ . Das Problem lautet also

$$\begin{aligned}
& \text{minimiere } z(x) = cx \\
& \text{unter d.N.} \\
& Ax = b \\
& x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

#### 1. Methode: Elimination von $x_1$

Wähle Index  $i$  mit  $a_{i1} \neq 0$  und eliminiere aus

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

die Variable  $x_1$  als Linearkombination von  $x_2, \dots, x_n$ . Dies ergibt ein reduziertes LGS

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \tilde{b} \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Wir betrachten ein Beispiel.

$$\begin{aligned}
& \text{minimiere } z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
& \text{unter d.N.} \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\
& x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Die freie Variable  $x_1$  wird von der ersten Gleichung eliminiert:

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks erhält man (subtrahiere 5 in der Zielfunktion)

$$\text{minimiere } z(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 3x_3$$

unter d.N.

$$x_2 + x_3 = 4$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Lösung:  $x_2 = 4, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ .

## 2. Methode:

Setze  $x_1 = u_1 - v_1$ ,  $u_1 := \max\{0, x_1\} \geq 0$ ,  $v_1 := \max\{0, -x_1\} \geq 0$ . Dies ergibt ein LP in den  $n + 1$  Variablen  $u_1, v_1, x_2, \dots, x_n$ .



## Kapitel 4

# Grundlagen der Polyedertheorie

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit einigen grundlegenden Konzepten der Polyedertheorie. Insbesondere werden anschaulich klare Begriffe wie Seitenflächen und Ecken von Polyedern definiert und charakterisiert.

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Menge

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

ein Polyeder in Standardform. Da die Beschreibung des Polyeders durch die Matrizen  $A, b$  gegeben ist, schreiben wir auch  $P^=(A, b) := K$ . Ebenso ist die Menge

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

ein Polyeder und hierfür schreiben wir  $P(A, b) := K$ .

**Definition 4.1.** Ein Polyeder das beschränkt ist, heisst Polytop.

### 4.1 Seitenflächen von Polyedern

Wir werden im Folgenden Polyeder der Form  $P(A, b)$  betrachten, wobei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ .

**Definition 4.2.** Es seien  $K \subseteq \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Die Ungleichung  $a^T x \leq \alpha$  heisst gültig bezüglich  $K$ , falls gilt

$$K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}.$$

2. Die Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \alpha\}, a \neq 0$ , heisst Stützhyperebene von  $K$ , falls  $a^T x \leq \alpha$  gültig bezüglich  $K$  und  $K \cap H \neq \emptyset$  ist.

Beachte, dass  $a = 0$  im ersten Punkt von Definition 4.2 zugelassen ist.

**Definition 4.3.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Menge  $F \subseteq K$  heisst Seitenfläche von  $K$ , wenn es eine bezüglich  $K$  gültige Ungleichung  $d^T x \leq \delta$  gibt mit

$$F = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x = \delta\}.$$

Eine Seitenfläche heisst echt, wenn  $F \neq K$  gilt.  $F$  heisst nichttrivial, falls  $\emptyset \neq F \neq K$  gilt. Ist  $d^T x \leq \delta$  gültig für  $K$ , dann heisst  $K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x = \delta\}$  die von  $d^T x \leq \delta$  induzierte Seitenfläche.

Beachte wiederum, dass  $d = 0$  in Definition 4.3 zugelassen ist.

**Beispiel 4.4.** Wir betrachten folgendes Beispiel.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

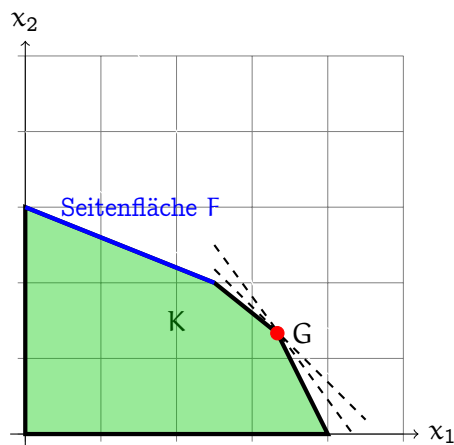


Abbildung 4.1: Beispiel einer Seitenfläche.

Die Seitenfläche  $F$  ist durch die Ungleichung

$$2x_1 + 5x_2 \leq 15$$

induziert, denn es gilt

$$F = K \cap \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid 2x_1 + 5x_2 = 15\}.$$

Ebenso ist der Punkt  $G = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$  eine Seitenfläche induziert durch die gültigen Ungleichungen (in Proposition 4.8 wird klar, dass eine Seitenfläche auch durch mehrere Unglei-

chungen gleichzeitig induziert werden kann).

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 20. \end{aligned}$$

Man beachte dass  $G = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$  als Seitenfläche von  $K$  auch durch die beiden gültigen Ungleichungen (siehe Abbildung 4.1)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 52/3 \\ x_1 + x_2 &\leq 14/3 \end{aligned}$$

induziert wird. Eine Seitenfläche kann somit durch unterschiedliche gültige Ungleichungen induziert werden.

**Proposition 4.5.** Sei  $K = P(A, b) \subset \mathbb{R}^n$  ein Polyeder. Dann gilt:

1.  $K$  ist eine Seitenfläche von sich selbst.
2.  $\emptyset$  ist eine Seitenfläche von  $K$ .
3. Ist  $F = \{x | d^T x = \delta\} \cap K$  eine nichttriviale Seitenfläche von  $K$ , dann gilt  $d \neq 0$ .

*Beweis.* (1):  $K = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n | 0^T x = 0\}$ .

(2): Sei  $\delta > 0$  beliebig. Es gilt  $0^T x \leq \delta$  ist eine gültige Ungleichung für  $K$  und es folgt  $\emptyset = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n | 0^T x = \delta\}$ .

(3): Für  $d = 0$  liefert nur der Fall  $\delta \geq 0$  eine gültige Ungleichung der Form  $d^T x \leq \delta$  und somit tritt einer der beiden ersten Fälle ein.  $\square$

**Satz 4.6.** Sei  $K = P(A, b)$  ein nichtleeres Polyeder und  $c^T \in \mathbb{R}^n$ . Betrachte das lineare Optimierungsproblem

$$\min\{cx | x \in K\}.$$

Sei  $F^*$  die Lösungsmenge und im Fall  $F^* \neq \emptyset$  bezeichne  $z^* = \min\{cx | x \in K\}$  den Optimalwert. Dann gilt:

1. Ist  $F^* \neq \emptyset$ , dann ist  $F^* = \{x \in K | cx = z^*\}$  eine nichtleere Seitenfläche von  $K$  und  $\{x \in \mathbb{R}^n | cx = z^*\}$  ist eine Stützhyperebene von  $K$ , falls  $c \neq 0$ .
2. Die Menge der Optimallösungen des linearen Problems  $\min\{cx | x \in K\}$  ist eine Seitenfläche von  $K$ .

*Beweis.* Zu (1):

Sei  $F^* \neq \emptyset$ . Nach Definition von  $z^*$  ist  $cx \geq z^*$  für alle  $x \in K$ , somit ist die Ungleichung  $-cx \leq -z^*$  gültig für  $K$ . Desweiteren gilt  $F^* = \{x \in \mathbb{R}^n | cx = z^*\} \cap K$ , was impliziert dass  $F^*$  eine nichtleere Seitenfläche von  $K$  ist. Zudem folgt unmittelbar, dass die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n | cx = z^*\}$  eine Stützhyperebene ist, falls  $c \neq 0$ .

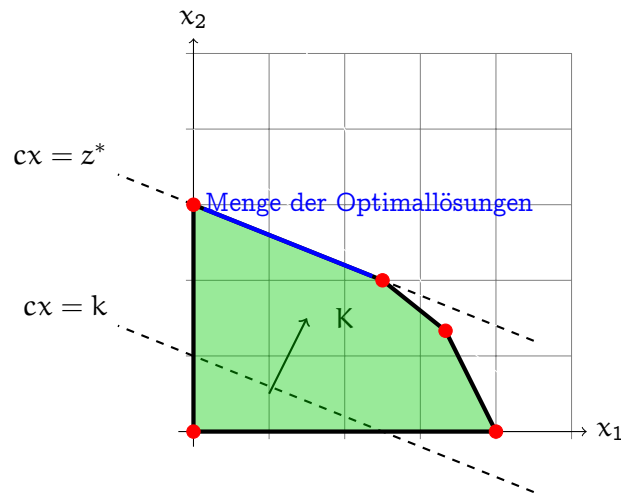


Abbildung 4.2: Graphische Veranschaulichung des Satzes (4.6).

Zu (2): Für  $F^* = \emptyset$  ist die Aussage klar, ansonsten ist (2) nur eine Umformulierung von (1).  $\square$

Eine Illustration des obigen Satzes findet sich in Abbildung 4.2.

Zu einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Zeilenindexmenge  $M := \{1, \dots, m\}$  und Spaltenindexmenge  $N = \{1, \dots, n\}$  bezeichne mit  $a_i, i \in M$  die Zeilen und  $a^j, j \in N$  die Spalten von  $A$ . Für  $I \subseteq M$  bezeichne  $A_I$  die aus den Zeilen  $a_i, i \in I$  gebildete Teilmatrix.

**Definition 4.7.** Sei  $K = P(A, b) \subset \mathbb{R}^n$  und  $M$  die Zeilenindexmenge von  $A$ . Für  $F \subseteq K$  sei

$$eq(F) := \{i \in M \mid a_i x = b_i \forall x \in F\},$$

d.h.  $eq(F)$  ist die Menge der für alle  $x \in F$  aktiven Ungleichungen. Für  $I \subseteq M$  bezeichne

$$fa(I) := \{x \in K \mid A_I x = b_I\}$$

die von  $I$  induzierte Seitenfläche (face).

Wir überprüfen nun, dass  $fa(I)$  tatsächlich eine Seitenfläche von  $K$  ist.

**Proposition 4.8.** Die in Definition 4.7 definierte Menge  $F := fa(I)$  ist eine Seitenfläche von  $K$ .

*Beweis.* Falls  $I = \emptyset$ , ist auch  $F = K$  eine (triviale) Seitenfläche von  $K$ . Sei nun  $|I| \geq 1$ . Definiere

$$a^T := \sum_{i \in I} a_i \text{ und } \gamma := \sum_{i \in I} b_i.$$

Es gilt, dass  $a^T x \leq \gamma$  gültige Ungleichung ist und weiterhin gilt für  $x \in K \setminus F$ , dass

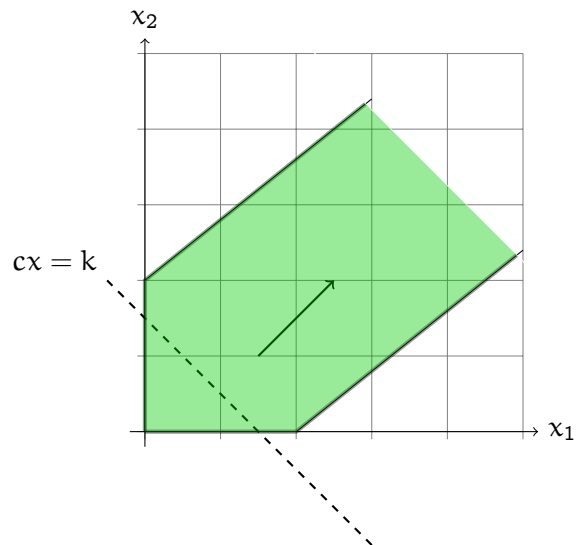


Abbildung 4.3: In diesem Beispiel ist die Menge der Optimallösungen leer.

mindestens eine der Ungleichungen nicht strikt ist und somit

$$a^T x \begin{cases} = \gamma, & \text{für } x \in F, \\ < \gamma, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt  $F = \{x \in K \mid a^T x = \gamma\} = K \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \gamma\}$ . □

Wir betrachten nochmals Beispiel 4.4. Hier ist  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f_a(\{1, 2\}) = G$  und  $\text{eq}(G) = \{1, 2\}$ .

## 4.2 Ecken und Extrempunkte

Wir geben nun eine Definition von Ecken und Extrempunkten an.

**Definition 4.9.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

1. Ein Punkt  $x \in K$  heißt Extrempunkt von  $K$ , wenn es nicht zwei verschiedene Punkte  $y, z \in K$  gibt mit

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z \text{ für ein } \alpha \in (0, 1).$$

2. Eine nulldimensionale (also einpunktige) Seitenfläche von  $K$  heißt Ecke.

Man beachte dass Definition 4.9 für beliebige Mengen  $K \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist.



Abbildung 4.4: Die schwarzen Punkte des Polytopes sind die Ecken. Für einen Kreis sind alle Punkte Ecken.

**Satz 4.10.** Sei  $K = P(A, b) \subset \mathbb{R}^n$  ein Polyeder und  $x \in K$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $x$  ist eine Ecke von  $K$ .
2.  $\{x\}$  ist eine nulldimensionale Seitenfläche von  $K$ .
3.  $x$  ist ein Extrempunkt von  $K$ .
4.  $\text{rang}(A_{\text{eq}(\{x\})}) = n$ .
5. Es existiert ein  $c^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , so dass  $x$  die eindeutig bestimmte Optimallösung des linearen Problems  $\min\{cy : y \in K\}$  ist.

*Beweis.* Die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2) ist gerade die Definition 4.9 einer Ecke. Der Beweis besteht aus den Teilen (2) $\Rightarrow$ (5), (5) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) und (4) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (5):

Nach Definition ist  $x$  eine Seitenfläche, also existiert eine bezüglich  $K$  gültige Ungleichung  $cx \leq \gamma$ , so dass  $\{y \in K \mid cx = \gamma\} = \{x\}$ .

Folglich ist  $x$  die eindeutig bestimmte Optimallösung von  $\min\{-cy : y \in K\}$ .

Ist  $K \neq \{x\}$ , so ist  $c \neq 0$  wegen Proposition 4.5(3), andernfalls kann  $c \neq 0$  beliebig gewählt werden.

(5) $\Rightarrow$ (3):

Sei  $x$  die eindeutige Optimallösung von  $\min\{cy \mid y \in K\}$  mit Wert  $\gamma$ . Gilt  $x = \lambda w + (1 - \lambda)z$  für  $w, z \in K, w \neq z, 0 < \lambda < 1$ , dann folgt

$$\begin{aligned} \gamma &= cx = c(\lambda w + (1 - \lambda)z) \\ &= \lambda cw + (1 - \lambda)cz \\ &> \lambda\gamma + (1 - \lambda)\gamma = \gamma, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

(3) $\Rightarrow$ (4):

Angenommen (4) gilt nicht. Dann existiert  $d \neq 0$  mit  $A_{\text{eq}(\{x\})}d = 0$ . Für kleines  $\epsilon > 0$  gilt dann

$$A(x \pm \epsilon d) \leq b,$$

denn die bindenden Nebenbedingungen bleiben aktiv, die inaktiven Nebenbedingungen

bleiben für  $\epsilon > 0$  klein genug inaktiv. Mit  $y = x - \epsilon d$ , und  $z = x + \epsilon d$  gilt dann  $y, z \in K$  und  $x = 1/2y + 1/2z$ . Also gilt auch (3) nicht.

(4) $\Rightarrow$ (2):

Wir wissen, dass  $\text{fa}(\text{eq}(\{x\}))$  eine Seitenfläche ist und wegen  $\text{rang}(A_{\text{eq}(\{x\})}) = n$  gilt

$$\text{fa}(\text{eq}(\{x\})) = \{y \in K \mid A_{\text{eq}(\{x\})}y = b_{\text{eq}(\{x\})}\} = \{x\}.$$

Also ist  $\{x\}$  eine Seitenfläche und ihre Dimension ist offensichtlich 0.  $\square$

Wir übertragen nun die obige Charakterisierung von Ecken auf Polyeder in Standardform.

**Satz 4.11.** Sei  $K = P^=(A, b)$ , d.h.

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

$x \in K$  ist genau dann ein Extrempunkt (bzw. äquivalent Ecke), wenn die zu positiven Komponenten  $x_k$  gehörenden Spaltenvektoren  $a^k$  von  $A$  linear unabhängig sind.

*Beweis.*  $\Rightarrow$ :  $x \in K$  sei eine Ecke. O.E. sei

$$x = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^T, x_i > 0, i = 1, \dots, r.$$

Ist  $r = 0$ , so ist die zugehörige Menge der Spaltenvektoren leer, also per Definition linear unabhängig. Für  $r > 0$  gilt

$$\sum_{i=1}^r a^i x_i = b.$$

Annahme:  $a^1, \dots, a^r$  seien linear abhängig. Dann gibt es Zahlen  $d_1, \dots, d_r, d_i \neq 0$  für mindestens ein  $i$ , mit

$$\sum_{i=1}^r a^i d_i = 0.$$

Wenn  $x_i > 0$  ist für ein hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  auch

$$x_i \pm \epsilon d_i > 0, \text{ für } i = 1, \dots, r.$$

Wir setzen

$$d := (d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)^T, y := x + \epsilon d, z := x - \epsilon d.$$

Dann sind  $y, z \geq 0$  und wegen

$$\sum_{i=1}^r a^i (x_i \pm \epsilon d_i) = \sum_{i=1}^r a^i x_i \pm \epsilon \underbrace{\sum_{i=1}^r a^i d_i}_{=0} = b,$$

gilt  $y, z \in K$ . Nun ist  $x \neq y, z$ , aber  $x = \frac{y+z}{2}$  im Widerspruch dazu, dass  $x$  Ecke (Extrempunkt) von  $K$  ist. Daher sind  $a^1, \dots, a^r$  linear unabhängig.

⇐: O.E. seien die ersten  $r$  Komponenten von  $x$  positiv, also nach Vor.  $a^1, \dots, a^r$  linear unabhängig.

1. Fall:  $r = 0 \Rightarrow x = 0$ . Wäre  $x = 0$  kein Extrempunkt (Ecke), so gäbe es  $y, z \in K, y \neq z$  und  $0 < \alpha < 1$  mit

$$0 = x = \alpha y + (1 - \alpha)z.$$

Wegen  $y, z \geq 0$  und  $\alpha \neq 0$  folgt hieraus  $y = 0, z = 0$ , Widerspruch.

2. Fall:  $r > 0$ : Nach Def. ist  $\sum_{i=1}^r a^i x_i = b$ .

Annahme:  $x$  ist kein Extrempunkt (Ecke) von  $K$ . Es gibt  $y, z \in K, y \neq z$ , und  $0 < \alpha < 1$  mit

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z.$$

Wie im 1. Fall folgt

$$y_{r+1} = \dots = y_n = 0, z_{r+1} = \dots = z_n = 0.$$

Ferner ist

$$Ay = Az = b \text{ also } A(y - z) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r a^i (y_i - z_i) = 0$$

Weil  $a^1, \dots, a^r$  linear unabhängig sind, folgt

$$y_i = z_i \text{ für } i = 1, \dots, r \Rightarrow y = z \Rightarrow x = y = z, \text{ Widerspruch.} \quad \square$$

**Definition 4.12.** Ein Polyeder heißt spitz, wenn es eine Ecke besitzt.

Neben den Ecken eines Polyeders, sind auch weitere niedrigdimensionale Seitenflächen von Polyedern relevant. Wir definieren die Begriffe Kante und Linie in einem Polyeder.

**Definition 4.13.** Ein Polyeder  $K \subset \mathbb{R}^n$  enthält eine Linie, falls  $x \in K$  und eine Richtung  $d \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass gilt

$$x + \lambda d \in K \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eine Kante von  $K$  ist eine Seitenfläche der Dimension 1, die zwei verschiedene Ecken von  $K$  verbindet.

**Satz 4.14.** Sei  $K = P(A, b) \subset \mathbb{R}^n$  ein nichtleeres Polyeder. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

1.  $K$  ist spitz.
2.  $\text{rang}(A) = n$ .
3. Jede nichtleere Seitenfläche von  $K$  ist spitz.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2): Ist  $x$  eine Ecke von  $K$ , so gilt mit Satz 4.10 dass

$$n = \text{rang}(A_{\text{eq}(\{x\})}) \leq \text{rang}(A) \leq n.$$

Also  $\text{rang}(A) = n$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Wir wählen  $x \in K$  so, dass die Menge  $I = \text{eq}(\{x\})$  inklusionsmaximal ist. Sei

$$F = \{x \in K \mid A_I x = b_I\}.$$

Falls  $\text{rang}(A_I) = n$ , so gilt mit Satz 4.10 bereits dass  $x$  eine Ecke ist, daher nehmen wir an dass  $\text{rang}(A_I) < n$  gilt. Somit enthält der Kern von  $A_I$  einen Vektor  $d \neq 0$  so dass gilt

$$x \pm \epsilon d \in K, \text{ für } \epsilon \text{ klein genug.}$$

Die Linie  $\{x + \lambda d \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  trifft nun mindestens eine der Hyperebenen  $H_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j x = b_j\}$  für ein  $j \notin I$ . (Angenommen nicht, d.h. die Hyperebene liegt vollständig in  $K$ . Dann gilt

$$a_i(x + \lambda d) \leq b_i, \text{ für alle Zeilenindizes } i, \text{ und alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Diese Aussage impliziert  $A d = 0$  und mit  $\text{rang}(A) = n$  folgt  $d = 0$ , Widerspruch.) Somit existiert  $\delta \in \mathbb{R}$  sodass  $x + \delta d \in K$  und  $\text{eq}(\{x + \delta d\}) \supset I$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $I$ .

(3) $\Rightarrow$ (1): Ist trivial, da  $K$  eine Seitenfläche von sich selbst ist.

(2) $\Rightarrow$ (3): Für jede nichtleere Seitenfläche  $F$  von  $K$  gilt

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, A_{\text{eq}(F)} x \leq b_{\text{eq}(F)}, -A_{\text{eq}(F)} x \leq -b_{\text{eq}(F)}\}.$$

Aus (2) und der Äquivalenz von (2) und (1) folgt damit direkt, dass  $F$  spitz ist.  $\square$

Wir erhalten eine wichtige Folgerung für Polyeder in Standardform.

**Korollar 4.15.** Sei  $K = P^=(A, b)$ , dann gilt

$$K \neq \emptyset \Leftrightarrow K \text{ ist spitz.}$$

*Beweis.* Wir erhalten eine Darstellung von  $K$  durch

$$K = P^=(A, b) = P(D, d) \text{ mit } D = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar hat  $D$  den Rang  $n$ . Aus Satz 4.14 folgt dann die Behauptung.  $\square$

Für Polytope erhalten wir ein ähnliches Resultat.

**Korollar 4.16.** Sei  $K = P(A, b)$  ein Polytop. Dann gilt

$$K \neq \emptyset \Leftrightarrow K \text{ ist spitz.}$$

*Beweis.* Da  $K$  beschränkt ist, gibt es einen Vektor  $u$  mit  $K \subseteq \{x \mid x \leq u\}$ . So erhalten wir eine Darstellung von  $K$  durch

$$K = P(A, b) = P(D, d) \text{ mit } D = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}.$$

$D$  hat den Rang  $n$ . Aus Satz 4.14 folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.17.** Sei  $K = P(A, b)$  ein spitzes Polyeder und das LP

$$\min cx \text{ u.d.N. } x \in K$$

habe eine endliche Optimallösung. Dann hat das LP auch eine Optimallösung die eine Ecke ist.

*Beweis.*  $F = \{x \in K \mid cx = \min\{cy \mid y \in K\}\}$  ist eine nichtleere Seitenfläche von  $K$  und besitzt nach Satz 4.14 eine Ecke.  $\square$

**Korollar 4.18.** Wenn  $K$  ein nichtleeres Polytop ist, dann hat jedes LP

$$\min cx \text{ u.d.N. } x \in K$$

auch eine optimale Ecklösung.

Wir fassen nun die beherigen Resultate im folgenden wichtigen Hauptsatz der linearen Optimierung zusammen.

**Satz 4.19.** Das lineare Programm der Form

$$\min cx \text{ u.d.N. } Ax = b, x \geq 0$$

besitzt genau dann eine endliche Optimallösung, wenn es eine optimale Ecklösung besitzt.

*Beweis.* Mit Korollar 4.15 gilt, dass  $K$  spitz ist (falls  $K$  nichtleer ist) und mit Korollar 4.17 folgt, dass das LP eine optimale Ecklösung besitzt (falls es überhaupt eine zulässige Lösung gibt).  $\square$

Der Hauptsatz 4.19 kann im Prinzip zur Lösung eines LP's in Standardform benutzt werden indem man die endlich vielen Ecken von  $K$  "ausprobiert".

**Beispiel 4.20.**

$$\begin{aligned} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{unter d.N.} & \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Lösung: Für eine Ecke ist genau eine der Komponenten gleich 0.

1. Möglichkeit:  $x_1 = 0$ . Löse

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 5/3, x_3 = 2/3$$

Ecke:  $(0, 5/3, 2/3)^T$ , Zielfunktion  $16/3$ .

2. Möglichkeit:  $x_2 = 0$ . Löse

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 5, x_3 = -1$$

Nicht zulässig.

3. Möglichkeit:  $x_3 = 0$ . Löse

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$$

Ecke:  $(2, 1, 0)^T$ , Zielfunktion 4.

Da die zulässige Menge  $K$  beschränkt ist, nimmt die Zielfunktion im Punkt  $(2, 1, 0)^T$  ihr Minimum an.

Im Gegensatz zum "Ausprobieren" stellt der Simplex-Algorithmus (siehe Kapitel 5) einen "effizienten" Algorithmus zur Berechnung einer optimalen Ecke dar.

### 4.3 Basislösungen

Wir betrachten ein LP in Standardform:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & z(x) = cx \\ \text{unter d.N.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Notation:  $K := P^=(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ .

Wir nehmen an, dass  $\text{rang}(A) = m < n$  gilt. (Später werden wir sehen dass diese Voraussetzung keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt). Wir betrachten das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ , dessen Lösungsmenge ein  $(n - m)$ -dimensionaler affiner Unterraum ist. Die Spalten von  $A$  seien  $a^j, j = 1, \dots, n$ .

**Definition 4.21.** Ein Indexvektor  $B = (i_1, \dots, i_m)$  mit  $m$  verschiedenen Indizes  $i_j \in \{1, \dots, n\}$  heißt Basis, wenn die zugehörigen Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Ein zu  $B$  komplementärer Indexvektor  $N = (j_1, \dots, j_{n-m}), j_k \in \{1, \dots, n\}$  heißt Nichtbasis. Es gilt also die Zerlegung  $B \oplus N = \{1, \dots, n\}$ . Mit  $A_B$  und  $A_N$  werden die Untermatrizen bezeichnet, die durch die Spaltenvektoren in  $B$  bzw.  $N$  definiert sind:

$A_B : m \times m$  Matrix mit Spaltenvektoren  $a^i, i \in B$

$A_N : m \times (n - m)$  Matrix mit Spaltenvektoren  $a^j, j \in N$

Für eine solche Zerlegung der Indexmenge  $\{1, \dots, n\}$  schreibt sich die Menge  $K$  äquivalent als

$$(A_B, A_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b, x_B, x_N \geq 0.$$

Wir bezeichnen für eine Basis  $B$ , die Matrix  $A_B$  als Basismatrix und komplementär  $A_N$  als Nichtbasismatrix. Die Variablen  $x_i, i \in B$  heißen Basisvariablen und die Variablen  $x_j, j \in N$  heißen Nichtbasisvariablen. Der Vektor  $x = (x_B, x_N)$  mit

$$x_B := A_B^{-1}b \text{ und } x_N := 0$$

wird als Basislösung zur Basis  $B$  bezeichnet. Eine Basislösung heißt zulässig, falls  $x_B \geq 0$ . Eine zulässige Basislösung heißt nicht-entartet, falls  $x_B > 0$ ; falls aber mehr als  $n - m$  Komponenten von  $x$  gleich Null sind, so sprechen wir von einer degenerierten oder entarteten Basislösung.

Wir erhalten unmittelbar folgende Charakterisierung von Basislösungen aus Satz 4.11:

**Satz 4.22.** Sei  $K = P^=(A, b)$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $x \in K$  ist ein Extrempunkt.
2.  $x \in K$  ist eine Ecke.
3.  $x \in K$  ist eine zulässige Basislösung zu einer Basis  $B$ .

*Beweis.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2) folgt aus Satz 4.10.

(1)  $\Rightarrow$  (3) : Sei  $x \in K$  ein Extrempunkt. Nach Satz 4.11 sind alle, die zu positiven Komponenten gehörenden Spaltenvektoren linear unabhängig. Somit sind die Spaltenvektoren

$a^j, j \in J$  mit  $J := \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i > 0\}$  linear unabhängig und können zu einer Basis  $B$  ergänzt werden. Nach Definition von  $J$  gilt dann  $x_N = 0$ , wobei  $N$  die zu  $B$  gehörende Nichtbasis ist. Damit folgt

$$b = Ax = A_B x_B,$$

und es gilt, da  $A_B$  invertierbar ist,

$$x_B = A_B^{-1}b.$$

Somit ist  $x$  eine zulässige Basis-Lösung zur Basis  $B$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Sei  $x$  eine zulässige Basislösung zu einer Basis  $B$ , das heisst es gibt eine Darstellung  $x = (x_B, x_N)$  mit  $x_N = 0$  und  $x_B := A_B^{-1}b \geq 0$ . Die Menge der Indizes der positiven Komponenten von  $x$  ist eine Teilmenge von  $B$ . Weil alle Spaltenvektoren  $a^i, i \in B$  nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt mit Satz 4.11 die Behauptung.  $\square$

Der obige Satz besagt dass Ecken eines Polyeders  $P^=(A, b)$  genau zulässigen Basislösungen entsprechen. Wir betonen ausdrücklich, dass die Korrespondenz zwischen Ecken und Basen im allgemeinen keine Bijektion ist. Verschiedene Ecken liefern verschiedene zugehörige Basen, aber die Aussage gilt nicht umgekehrt: Zu einer entarteten Ecke - also einer Ecke mit weniger als  $m$  positiven Komponenten - können verschiedene Basen gehören, weil die Erweiterungen zu einer Basis nicht eindeutig sein müssen.

$$\text{Ecke} \begin{matrix} \text{eindeutig} \\ \leftrightarrow \end{matrix} \text{zulässige Basislösung} \begin{matrix} \text{nicht-eindeutig} \\ \leftrightarrow \end{matrix} \text{Basis.}$$

Wir erhalten eine Folgerung bzgl. der maximalen Anzahl von Ecken bzw. zulässigen Basislösungen eines Polyeders  $K$  mit  $\text{rang}(A) = m < n$ .

**Korollar 4.23.** Es gibt höchstens  $\binom{n}{m}$  verschiedene Ecken von  $K$ .

*Beweis.* Jede Ecke führt zu mindestens einer zulässigen Basis-Lösung mit zugehöriger Basismatrix. Jede Basismatrix besteht aus  $m$  linear unabhängigen Spalten von  $A$  und wir können nun auf  $\binom{n}{m}$  verschiedene Arten  $m$  linear unabhängige Spalten aus  $A$  auswählen.  $\square$

Wir beenden dieses Kapitel mit der Aussage, dass die Annahme  $\text{rang}(A) = m$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist.

**Satz 4.24.** Sei  $K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$  ein nichtleeres Polyeder in Standardform mit Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Sei  $\text{rang}(A) = k < m$  und seien die Zeilenvektoren  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  linear unabhängig. Betrachte das Polyeder

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n | a_{i_1}x = b_{i_1}, \dots, a_{i_k}x = b_{i_k}, x \geq 0\}.$$

Dann gilt  $K = P$ .

*Beweis.* Nach Umbenennung der Indizes können wir annehmen dass gilt  $i_1 = 1, \dots, i_k = k$ . Trivialerweise gilt  $K \subseteq P$ , da jeder Punkt aus  $K$  natürlich alle Gleichungen aus  $P$  erfüllt. Wir zeigen nun  $P \subseteq K$ . Mit  $\text{rang}(A) = k$  gilt dass der Zeilenraum von  $A$  Dimension  $k$  hat und die Vektoren  $a_1, \dots, a_k$  eine Basis des Zeilenraums bilden. Somit kann jede Zeile  $a_i$  von  $A$  in der Form  $a_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} a_j$  dargestellt werden, wobei  $\lambda_{ij}$  geeignete Skalare sind. Betrachte ein  $x \in K$ . Es gilt

$$b_i = a_i x = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} a_j x = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} b_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

Sei nun  $y \in P$ . Wir zeigen dass  $y \in K$ . Für alle  $i = 1, \dots, m$  folgt mit (4.1)

$$a_i y = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} a_j y = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} b_j = b_i,$$

somit folgt  $y \in K$ . □

#### 4.4 Degeneriertheit von Basislösungen

Bei einer zuässigen Basislösung sind alle  $m$  Gleichungen aktiv und in der Regel auch genau  $n - m$  Variablen gleich null und definieren somit zusätzliche  $n - m$  aktive Ungleichungen. Falls jedoch mehr als  $n - m$  Variablen gleich null sind, so spricht man von einer entarteten Basislösung, siehe Definition 4.21.

Wir geben einige Beispiele an.

**Beispiel 4.25.** 1. Redundante Variablen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Redundante Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + y_1 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + y_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 + y_3 &= 2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Im Punkt  $x = (1, 1, 0, 0, 0)^T$  ist hier die Ungleichung  $y_3 \geq 0$  redundant.

3. geometrische Gründe (siehe Oktahedron in Abbildung 4.5).

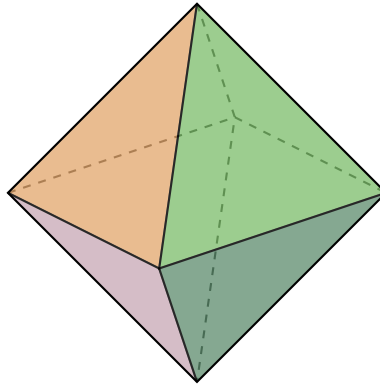


Abbildung 4.5: Die Ecken des Oktaedrons sind degeneriert.

**Bemerkung 4.26.** Indem man die rechte Seite eines Gleichungssystems zufällig stört, erhält man mit hoher Wahrscheinlichkeit ein nicht-degeneriertes Problem.



## Kapitel 5

# Das Simplex Verfahren

Die am häufigsten benutzte Methode zur Lösung des Standardproblems

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } z(x) = cx \\ &\text{unter d.N.} \\ &Ax = b \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

ist das Simplex-Verfahren. Generell wird  $\text{rang}(A) = m < n$  vorausgesetzt. Nach dem Hauptsatz (4.19) ist die optimale Lösung (falls sie existiert) in einer Ecke der zulässigen Menge

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

zu suchen.

Das Simplex-Verfahren besteht aus den folgenden elementaren Schritten:

Geometrische Form des Simplex-Verfahrens:

1. Finde eine Ecke  $x$  von  $P^=(A, b)$
2. Versuche, eine zu  $x$  adjazente Ecke  $y$  mit besserem Zielfunktionswert zu finden. Ersetze  $x$  durch  $y$  und wiederhole Schritt (2).
3. Falls Schritt (2) nicht möglich ist, gibt es drei sich ausschließende Alternativen:
  - $x$  ist optimal.
  - Man stellt fest dass das LP unbeschränkt ist.
  - Man geht zu einer Basis über die dieselbe Ecke beschreibt, und wiederholt Schritt (2).

## 5.1 Parametrisierung des Lösungsraumes

Bei beliebiger Basis  $B$  geht das LGS  $Ax = b$  über in

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b.$$

Damit erhält man eine Parametrisierung des  $n - m$  dimensionalen Lösungsraumes von  $Ax = b$  durch

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N, \quad x_N \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad (5.2)$$

wobei  $x_B$  die abhängige Variable und  $x_N$  die unabhängige Variable bezeichnet. Zerlege  $c$  entsprechend in  $c_B \in \mathbb{R}^m$  und  $c_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ . Durch Einsetzen des Ausdrucks (5.2) ergibt sich die Zielfunktion

$$\begin{aligned} z(x) &= cx = c_B x_B + c_N x_N \\ &= c_B A_B^{-1}b - (c_B A_B^{-1}A_N - c_N)x_N \\ &=: z_0 - r_N x_N, \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei

$$\begin{aligned} z_0 &:= c_B A_B^{-1}b \\ r_N &:= c_B A_B^{-1}A_N - c_N = (r_j)_{j \in N} \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ (Vektor der reduzierten Kosten)} \end{aligned}$$

Nach Satz 4.22 sind die Basis-Lösungen gerade die Ecken von  $K$ . Die Darstellung (5.3) der Zielfunktion ergibt das folgende fundamentale Optimalitätskriterium:

**Satz 5.1.** Sei  $B$  eine Basis mit den Eigenschaften

1. die zugehörige Basis-Lösung  $x$  ist zulässig, d.h.  $x_B \geq 0$ ,
2.  $r_N = c_B A_B^{-1}A_N - c_N \leq 0$ .

Dann ist  $x$  optimal für das LP (5.1) und der optimale Wert ist  $z_0 = c_B A_B^{-1}b$ .

*Beweis.* Für jeden zulässigen Punkt  $\tilde{x}$  ist  $\tilde{x}_B \geq 0$  und daher folgt aus (5.3) wegen  $r_N \leq 0$

$$z(\tilde{x}) = c\tilde{x} = z_0 - r_N \tilde{x}_N \geq z_0 = z(x).$$

□

Für den Spezialfall eines LP mit Ungleichungsrestriktionen

$$\min cx \text{ u.d.N. } Ax \leq b, x \geq 0, \text{ wobei } b \geq 0,$$

erstellen wir ein äquivalentes Problem

$$\min cx + 0y \text{ u.d.N. } Ax + y = \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, x \geq 0, y \geq 0,$$

wobei  $\tilde{A} = (A, I)$ . Wähle Basis  $B = \{n+1, \dots, n+m\}$ ,  $N = \{1, \dots, n\}$  und wir erhalten eine Basis-Lösung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ . Die reduzierten Kosten ergeben sich mit  $\tilde{A}_B = I$ ,  $\tilde{c}_B = 0$ ,  $\tilde{c}_N = c$  durch

$$r_N = \tilde{c}_B \tilde{A}_B^{-1} \tilde{A}_N - \tilde{c}_N = -c \in \mathbb{R}^n$$

$$z_0 = 0.$$

## 5.2 Basistausch

Das Simplex-Verfahren basiert nun auf dem hinreichenden Optimalitätskriterium von Satz 5.1. Man sucht eine Basis  $B$  mit

1.  $x_B \geq 0$
2.  $r_N \leq 0$ .

Man startet dabei mit einer Basis  $B$ , für die 1. erfüllt ist. Wenn das Kriterium 2. verletzt ist, so geht man zu einer benachbarten Basis  $B'$  über (Basistausch), in der die Zielfunktion verbessert wird.

**Definition 5.2.** Wir werden zwei zulässige Basislösungen  $x = (x_B, x_N)$  und  $x' = (x'_B, x'_{N'})$  als benachbart bezeichnen, falls gilt  $|B \cap B'| = m - 1$ , d.h.,  $B$  und  $B'$  unterscheiden sich genau durch Austausch einer Basisvariablen.

Zur Basis  $B$  benötigt man die allgemeine Darstellung (5.2)

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N, \quad x_N \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Die Multiplikation mit  $A_B^{-1}$  kann mit elementarer Zeilenoperationen (Gauss-Jordan-Elimination) durchgeführt werden. Das folgende Beispiel dient gleichzeitig als Illustration eines Austausch-Schrittes (Pivot-Schritt).

### Beispiel 5.3.

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{unter d.N.} & \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Wir wählen die Basis  $B = (1, 2)$  und führen die Rechnungen in Tableau-Form an der Matrix  $b|A$  durch:

b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
5	2	1	5	·1/2
4	1	2	1	

b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
5/2	1	1/2	5/2	-1. Zeile
4	1	2	1	

b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
5/2	1	1/2	5/2	·2/3
3/2	0	3/2	-3/2	

b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
5/2	1	1/2	5/2	-1/2 · 2. Zeile
1	0	1	-1	

b	$x_1$	$x_2$	$x_3$
2	1	0	3
1	0	1	-1

Wir erhalten nun folgende Darstellung:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N.$$

Die Basislösung

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$$

ist zulässig aber nicht optimal, da für die reduzierten Kosten gilt

$$r_N = r_3 = c_B A_B^{-1} A_N - c_N = (-1, -2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - (-3) = 2 > 0.$$

Für  $0 \leq x_3 \leq 2/3$  ist  $x_B \geq 0$  zulässig: hier läuft man entlang einer Kante von  $K$ . Für  $x_3 = 2/3$  erhält man die neue Basislösung  $x = (0, 5/3, 2/3)^T$ . Der Übergang  $x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 2/3$  entspricht dem Basistausch

$$B = (1, 2) \rightarrow B' = (3, 2), N = (3) \rightarrow N' = (1).$$

Die Nichtbasisvariable  $x_3$  wird dabei mit der Basisvariable  $x_1$  getauscht:  $x_3 = 2/3 - 1/3x_1$ . In der neuen Basis  $B'$  ergibt sich die Darstellung

$$x_{B'} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_1$$

mit

$$r_{N'} = r'_1 = (-3, -2) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - (-1) = -2/3 < 0.$$

Also ist die gefundene Lösung optimal.

Wir werden nun die Idee des Basistausches formalisieren. Wir nehmen an, dass

$$A_B = I, B = (1, \dots, m) \text{ und } N = (m+1, \dots, n)$$

gelten sowie  $x_B = b \geq 0$ , d.h. die gegenwärtige Basislösung  $x$  sei zulässig. Ist  $r_N \leq 0$ , so ist  $x$  optimal nach Satz 5.1. Sei nun  $r_s > 0$  für ein  $s \in N$ . In die allgemeinen Ausdrücke

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N, z(x) = z_0 - r_N x_N,$$

setze man ein

$$A_B = I, x_j = 0 \text{ für } j \in N \setminus \{s\}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_B &= b - a^s x_s \\ z(x) &= z_0 - r_s x_s. \end{aligned} \tag{5.4}$$

1. Fall:  $a^s \leq 0$ .

In diesem Fall ist

$$x_B = b - a^s x_s \geq 0 \text{ für } x_s \rightarrow \infty.$$

Es folgt  $z(x) = z_0 - r_s x_s \rightarrow -\infty$  für  $x_s \rightarrow \infty$  und somit besitzt das Problem keine endliche Lösung; das Polyeder  $K$  ist unbeschränkt.

2. Fall:  $a_{is} > 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Definiere Index  $p \in B$  durch

$$\frac{b_p}{a_{ps}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Um  $x_B \geq 0$  zu garantieren, kann  $x_s$  höchstens den Wert

$$x_s = \frac{b_p}{a_{ps}} \text{ annehmen} \Rightarrow x_p = 0.$$

Dies entspricht einem Tausch der Nichtbasisvariablen  $x_s$  gegen die Basisvariable  $x_p$  (beachte  $B = (1, \dots, m)$ ). Der Wert  $a_{ps} > 0$  heißt Pivotelement. Es gilt die Beziehung

$$z(x) = z_0 - r_s \frac{b_p}{a_{ps}}. \quad (5.5)$$

Wir können folgende Fälle unterscheiden:

- (a)  $b_p = 0$ : Basislösung ist entartet,  $z(x) = z_0$
- (b)  $b_p > 0$ : Wir erhalten eine strikte Verbesserung  $z(x) < z_0$

Wir folgern an dieser Stelle ein notwendiges Optimalitätskriterium:

**Korollar 5.4.** Die Basislösung  $x$  mit  $x_B \geq 0$  und  $x_N = 0$  sei optimal. Gilt  $x_B > 0$ , dann folgt  $r_N \leq 0$ .

Der Index  $s \in N$  (Pivot Spalte) kann folgendermaßen festgelegt werden:

1. (Regel von Dantzig): Wähle  $s \in N$  kleinstmöglich mit der Eigenschaft:

$$r_s = \max_{j \in N} r_j. \quad (5.6)$$

Wähle den kleinsten Index  $p \in B$  mit

$$\frac{b_p}{a_{ps}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (5.7)$$

2. (Regel von Bland): Wähle den kleinsten Index  $s \in N$  mit  $r_s > 0$ . Wähle den kleinsten Index  $p \in B$ , sodass  $b_p$  kleinstmöglich ist mit  $\frac{b_p}{a_{ps}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0, i = 1, \dots, m \right\}$ .

Wir beschreiben nun den Basistausch mittels der Gauss-Jordan Elimination. Nach Voraussetzung

$$A_B = I, B = (1, \dots, m), N = (m + 1, \dots, n),$$

gilt

$$x_i = b_i - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j, \quad i \in B. \quad (5.8)$$

Die  $p$ -te Gleichung kann wegen  $a_{ps} > 0$  nach  $x_s$  aufgelöst werden:

$$x_p = b_p - \sum_{j \in N} a_{pj} x_j = b_p - \sum_{j \in N, j \neq s} a_{pj} x_j - a_{ps} x_s$$

Auflösen nach  $x_s$  ergibt:

$$x_s = \frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j \in N, j \neq s} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} x_j - \frac{1}{a_{ps}} x_p. \quad (5.9)$$

Setze  $x_s$  in die übrigen Gleichungen (5.8) mit  $i \neq p$  ein:

$$x_i = \underbrace{b_i - a_{is} \frac{b_p}{a_{ps}}}_{=b'_i} - \sum_{j \in N, j \neq s} \left( a_{ij} - a_{is} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} \right) x_j + \frac{a_{is}}{a_{ps}} x_p. \quad (5.10)$$

Definiere neue Basis: Übergang

$$B = (1, \dots, m) \rightarrow B' = (1, \dots, p-1, s, p+1, \dots, m).$$

Neue Nichtbasis:

$$N = (m+1, \dots, n) \rightarrow N' = (m+1, \dots, s-1, p, s+1, \dots, n).$$

Die Ausdrücke (5.9) und (5.10) haben die Form

$$x_{B'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_s \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = b' - A_{N'} x_{N'},$$

und sind somit von der Gestalt (5.2). Die Elemente der Matrix

$$\boxed{b' \quad A_{N'}}$$

sind gegeben durch

Pivotelement: reziproker Wert:

$$a'_{ps} = \frac{1}{a_{ps}}$$

Übrige Zeile p: teile durch Pivotelement:

$$a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{ps}}, j \neq s$$

$$b'_p = \frac{b_p}{a_{ps}}$$

Übrige Spalte s: teile durch negatives Pivotelement:

$$a'_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{ps}}, i \neq p$$

Sonstige Elemente: subtrahiere das  $a_{is}$ -fache der neuen Zeile p von i-ter Zeile:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{is} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} = a_{ij} - a_{is} a'_{pj}, i \neq p, j \neq s$$

$$b'_i = b_i - a_{is} \frac{b_p}{a_{ps}} = b_i - a_{is} b'_p, i \neq p$$

Wir betrachten ein Beispiel.

	b	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	5	1	0	0	1	1	-1
$x_2$	3	0	1	0	2	-3	1
$x_3$	-1	0	0	1	-1	2	-1

Beachte, dass die aktuelle Basislösung gar nicht zulässig ist. Tausche Nichtbasis-variable  $x_4$  gegen Basisvariable  $x_1$ :

	b'	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_4$	5	1	0	0	1	1	-1
$x_2$	-7	-2	1	0	0	-5	3
$x_3$	4	1	0	1	0	3	-2

Bei der Wahl des Pivotelements haben wir uns nicht an die Pivotregel von Dantzig oder Bland gehalten und in der Tat:  $x_2$  wird negativ.

Da die Einheitsmatrix  $A_B = I$  (bzw. allgemein Permutationsmatrix) keine zusätzliche Information beinhaltet (bei Kenntnis von  $B, N, A_N, b$ ) werden wir im Folgenden nur das verkürzte Tableau betrachten.

	b'	$x_1$	$x_5$	$x_6$
$x_4$	5	1	1	-1
$x_2$	-7	-2	-5	3
$x_3$	4	1	3	-2

Wir überprüfen: z.B.:

$$b'_2 = 3 - 2 \cdot 5 = -7$$

$$b'_3 = -1 - (-1) \cdot 5 = 4$$

$$x_{B'} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b' = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B' = (4, 2, 3)$$

### 5.3 Zielfunktion und Reduzierte Kosten

Durch Elimination des Ausdrucks (5.9) für  $x_s$  folgt

$$\begin{aligned} z(x) &= z_0 - \sum_{j \in N} r_j x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in N, j \neq s} r_j x_j - r_s \left( \frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j \in N, j \neq s} \frac{a_{pj}}{a_{ps}} x_j - \frac{1}{a_{ps}} x_p \right) \\ &= z_0 - r_s \frac{b_p}{a_{ps}} - \sum_{j \in N, j \neq s} \left( r_j - r_s \frac{a_{pj}}{a_{ps}} \right) x_j + \frac{r_s}{a_{ps}} x_s \\ &=: z'_0 - \sum_{j \in N'} r'_j x_j \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} z'_0 &:= z_0 - r_s \frac{b_p}{a_{ps}} \\ r'_p &:= -\frac{r_s}{a_{ps}} \\ r'_j &:= r_j - r_s \frac{a_{pj}}{a_{ps}} = r_j - r_s a'_{pj}, \quad j \neq p. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Zeile  $(z_0, r_N)$  wird also wie die Zeilen in

$$\begin{array}{|c|c|} \hline b & A_N \\ \hline \end{array}$$

transformiert. Damit kann die Pivotoperation des Basis-Tausches an dem erweiterten Simplex-Tableau durchgeführt werden:

$$\begin{array}{c} x_j, j \in N \\ z(x) \\ x_i, i \in B \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline z_0 & r_N \\ \hline b & A_N \\ \hline \end{array} \tag{5.12}$$

Abbildung 5.1: Erweitertes Simplex-Tableau.

Wir geben ein Beispiel.

### Beispiel 5.5.

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{unter d.N.} \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Für  $B = (1, 2)$ ,  $N = (3)$  kann das LGS überführt werden in das LGS mit  $A_B = I$ :

$$\boxed{\mathbf{b} \mid A_N} = \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right], \quad x_B = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

$$\mathbf{c} = (-1, -2, -3)$$

$$z_0 = \mathbf{c}_B \mathbf{b} = (-1, -2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$$

$$r_3 = \mathbf{c}_B A_B^{-1} A_N - \mathbf{c}_3 = 2 > 0.$$

Wir erhalten das folgende Simplex-Tableau:

	$x_N$	
$z(x), r_N$	-4	2
$x_1$	2	3
$x_2$	1	-1

Tausche  $x_3$  gegen  $x_1$ :  $r'_1 = -2/3 < 0$ , also ist die Basislösung  $x_1 = 0, x_2 = 5/3, x_3 = 2/3$

	$x_N$	
$z(x), r_N$	-16/3	-2/3
$x_3$	2/3	1/3
$x_2$	5/3	1/3

optimal.

Die algorithmische Durchführung des Simplex-Verfahrens wird vereinfacht durch die in Abb.5.1 abgebildete Tableau-Matrix.

$$T = (t_{ij}) = \begin{array}{|c|c|} \hline z_0 & r_N \\ \hline b & A_N \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n - m \end{array} \quad (5.13)$$

Nun können wir den Simplex-Algorithmus formal hinschreiben (hier mit der Auswahlregel von Dantzig).

1. **Start:** Sei  $B$  eine Basis mit  $A_B = I$ . Die zugehörige Basis-Lösung sei zulässig, d.h.  $x_B = b \geq 0$ . Berechne mit  $N$  die Tableau-Matrix  $T = (t_{ij})$  in (5.13). Bezeichne mit  $B(i)$  den zur  $i$ -ten Zeile von  $T$  gehörenden Basisindex für  $1 \leq i \leq m$ . Analog dazu bezeichne mit  $N(j)$  den zur  $j$ -ten Spalte von  $T$  gehörenden Nichtbasisindex für  $1 \leq j \leq n - m$ .

2. Ist ein  $t_{0s} > 0$  ( $1 \leq s \leq n - m$ ), so gehe zu 3. Andernfalls ist die Basis-Lösung optimal. Setze

$$\begin{aligned}x_{B(i)} &:= t_{i0}, 1 \leq i \leq m \\x_{N(j)} &:= 0, 1 \leq j \leq n - m \\z &:= t_{00}\end{aligned}$$

3. **Bestimmung der Austausch-Spalte:** Wähle Index  $1 \leq s \leq n - m$  (mit  $N(s)$  kleinstmöglich) mit

$$t_{0s} := \max_{1 \leq j \leq n-m} t_{0j}.$$

4. Sind alle  $t_{is} \leq 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ , so gibt es keine endliche Lösung. **Stopp.** Gibt es ein  $t_{is} > 0$ , so gehe zu Schritt 5.

5. **Bestimmung der Austausch-Zeile:** Wähle Index  $1 \leq p \leq m$  (mit  $N(p)$  kleinstmöglich) mit

$$\frac{t_{p0}}{t_{ps}} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{t_{is}} \mid t_{is} > 0, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Gehe zu Schritt 6.

6. Vertausche das  $s$ -te Element von  $N$  mit dem  $p$ -ten Element von  $B$ :

$$B \leftarrow (B(1), \dots, B(p-1), N(s), B(p+1), \dots, B(m))$$

$$N \leftarrow (N(1), \dots, N(s-1), B(p), N(s+1), \dots, N(n-m))$$

Führe eine Pivotoperation mit Pivotelement  $t_{ps} > 0$  durch, also setze:

- Pivotelement:  $t'_{ps} := 1/t_{ps}$
- übrige Pivotzeile:  $t'_{pj} := \frac{t_{pj}}{t_{ps}}, j = 0, 1, \dots, n - m, j \neq s$
- übrige Pivotspalte:  $t'_{is} := -\frac{t_{is}}{t_{ps}}, i = 0, 1, \dots, m, i \neq p$
- sonstige Elemente:  $t'_{ij} := t_{ij} - t_{is} \frac{t_{pj}}{t_{ps}}, i \neq p, j \neq s$
- Setze  $t_{ij} := t'_{ij}$  und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 5.2: Formaler Ablauf des Simplex-Verfahrens.

## 5.4 Anwendung auf LPs mit Ungleichungen

Das LP

$$\min\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n, b \geq 0$$

ist äquivalent zu

$$\min\{cx + 0 \cdot y \mid Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, b \in \mathbb{R}^n$$

Start:  $B = (n+1, \dots, n+m), N = (1, \dots, n)$

Basis-Lösung:  $x = 0, y = b \geq 0, z_0 = 0, r_N = -c$ . Das zugehörige  $(m+1) \times (n+1)$  dimensionale Simplex-Tableau lautet

z	0	-c
y	b	A

Als Beispiel lösen wir das Problem aus Abschnitt 3.1.1.

$$\text{maximiere } z(x_1, x_2) = 16x_1 + 32x_2$$

unter d.N.

$$20x_1 + 10x_2 \leq 8000$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 2000$$

$$6x_1 + 15x_2 \leq 4500$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Der geometrische Übergang der Ecken  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  wird rechnerisch in Tableau-Form nachvollzogen.

		$x_1$	$x_2$
z	0	16	32
$y_1$	8000	20	10
$y_2$	2000	4	5
$y_3$	4500	6	15

Entgegen der Regel von Dantzig oder Bland wählen wir das Element 20 als Pivotelement und wir tauschen  $x_1$  mit  $y_1$ : Dies entspricht dem Übergang  $A \rightarrow B$ .

		$y_1$	$x_2$
$z$	-6400	-4/5	24
$x_1$	400	1/20	1/2
$y_2$	400	-1/5	③
$y_3$	2100	-3/10	12

Nun tauschen wir  $x_2$  mit  $y_2$ : Dies entspricht dem Übergang  $B \rightarrow C$ .

		$y_1$	$y_2$
$z$	-9600	4/5	-8
$x_1$	1000/3	1/12	-1/6
$x_2$	400/3	-1/15	1/3
$y_3$	500	①/2	-4

Tausche  $y_1$  mit  $y_3$ : Dies entspricht dem Übergang  $C \rightarrow D$ .

		$y_3$	$y_2$
$z$	-10400	-8/5	-8/5
$x_1$	250	-1/6	1/2
$x_2$	200	2/15	-1/5
$y_1$	1000	2	-8

Hier ist nun  $r_N = (-8/5, -8/5) < 0$ , also ist  $x_1 = 250, x_2 = 200, z_{\min} = -10400$ , d.h.  $z_{\max} = 10400$ , die optimale Lösung.

Wir zeigen nun dass für nichtentartete Probleme, der Simplexalgorithmus stets terminiert.

**Satz 5.6.** Falls alle bei der Durchführung des Simplex-Algorithmus berechneten Basis-Lösungen nichtentartet sind, so terminiert der Algorithmus.

*Beweis.* Bei jedem Pivotschritt  $j$  erhalten wir eine Darstellung des neuen Zielfunktionswerts

$$z_0^j = z_0^{j-1} - r_s^{j-1} \frac{b_p^{j-1}}{a_{ps}^{j-1}}.$$

Da für jeden Schritt  $j$  nach Annahme  $b_p^j > 0$  gilt, erhalten wir eine streng monotone Folge

$$z_0^1 > z_0^2 > \dots$$

Somit wird keine Basis-Lösung mehrfach besucht und da es nur endlich viele Basis-Lösungen gibt, terminiert der Algorithmus. □

## 5.5 Kreiseln des Simplex Verfahrens und Lexikographische Auswahlregel

Bei einer Pivotoperation mit  $b_p = 0$  ändert sich die Zielfunktion nicht, d.h.,

$$\begin{aligned} z(x) &= z_0 - r_s \frac{b_p}{a_{ps}} = t_{00} - t_{0s} \frac{t_{p0}}{t_{ps}} \\ &= z_0 \end{aligned}$$

Beispiele zeigen, dass bei entarteten Basis-Lösungen der Simplex-Algorithmus (mit der "falschen" Pivot-Regel) nicht endlich ist, sondern ins Kreiseln geraten kann (siehe Übung). Zur Vermeidung des Kreiseln werden wir nun den lexikographischen Simplex-Algorithmus kennenlernen, der auf der lexikographischen Auswahl der Zeilen beruht.

**Definition 5.7.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist auf  $\mathbb{R}^k$  durch folgende Vorschrift

$$x \succeq y : \Leftrightarrow x = y \text{ oder } x_i > y_i \text{ für } i = \min\{s \mid x_s \neq y_s\}$$

eine totale Ordnung erklärt, die mit der Addition auf  $\mathbb{R}^k$  verträglich ist. Man nennt diese die lexikographische Ordnung.

Ist  $0 \in \mathbb{R}^k$  und  $x \in \mathbb{R}^k$  mit  $x \succ 0$  (das bedeutet  $x \succeq 0$  und  $x \neq 0$ ), heißt  $x$  lexikographisch positiv. Wir betrachten nun das sogenannte volle Tableau in Standardform, welches bei der ersten Iteration wie folgt aussieht:

$$T = (t_{ij})_{\substack{i=0,\dots,m \\ j=0,\dots,n}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_0 & 0 & r_N \\ \hline b & A_B = I & A_N \\ \hline \end{array}$$

Die Zeilen des Tableaus  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sind dann also Vektoren im  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Für eine Basis  $B$  bezeichnen wir wie üblich mit  $B(i)$  den  $i$ -ten Eintrag der aktuellen Basis  $B$  (siehe vorangegangene Beispiele). Zu Beginn ist also  $B = (1, \dots, m)$  und  $N = (m+1, \dots, n)$ .

**Definition 5.8 (Lexikographische Auswahlregel (LEX)).** Es liege die Basis  $B$  vor und das zugehörige volle Tableau sei  $T$ .

- Wähle einen beliebigen Spaltenindex  $s \in N$  mit  $r_s = t_{0s} > 0$ .

- Betrachte zur Zeilenauswahl die Menge  $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid t_{is} > 0\}$ . Nun sei  $p \in I$  so gewählt, dass gilt

$$\frac{t_p}{t_{ps}} = \operatorname{lexmin} \left\{ \frac{t_i}{t_{is}} \mid i \in I \right\}.$$

Das so gewählte lexikographische Minimum erfüllt

$$\frac{t_i}{t_{is}} \succ \frac{t_p}{t_{ps}} \text{ für alle } i \in I \setminus \{p\}.$$

Dann ist  $B(p)$  die Ausgangsvariable, welche die aktuelle Basis  $B$  verlässt, und  $s$  wird zur Eingangsvariable, welche in die neue Basis  $B'$  aufgenommen wird, d.h.,  $B'(p) = s$ .

Man beachte, dass nach Wahl der Pivotzeile  $p$  insbesondere gelten muss, dass

$$\frac{t_{p0}}{t_{ps}} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{t_{is}} \mid i \in I \right\}.$$

Somit führt der Pivotschritt wiederum zu einer zulässigen Basislösung.

**Satz 5.9.** Beim Start des Simplex liege ein Tableau vor, dessen Zeilen (ausser möglicherweise der reduzierten Kosten) sämtlich lexikographisch positiv sind. Dann terminiert der Simplex-Algorithmus unter Verwendung von LEX.

*Beweis.* Wir sehen zunächst recht leicht, dass die Voraussetzung des Satzes leicht erfüllbar ist, indem wir durch Gauss-Jordan Transformation das Tableau in die Gestalt  $(b \mid I \mid A_N)$  bringen (erste Zeile weggelassen). Wegen der Zulässigkeit  $x_B \geq 0$  muss die erste Spalte nur Einträge grösser gleich 0 haben (erste Zeile wieder weggelassen). Da die erste Teilmatrix nun die Einheitsmatrix ist, sind alle Zeilenvektoren lexikographisch positiv.

Wir zeigen nun induktiv dass bei iterativer Ausführung von LEX, diese Eigenschaft erhalten bleibt. Wir betrachten dazu eine Basis  $B$  mit der gewünschten Eigenschaft. Es seien nun  $s$  und  $p$  gemäß LEX gewählt. Die neue zu  $B$  benachbarte Basis sei mit  $B'$  bezeichnet. Für die  $p$ -te Zeile  $t'_p$  des neuen Tableaus  $T'$  gilt nun

$$t'_p = \frac{t_p}{t_{ps}} \succ 0,$$

da nach Voraussetzung  $t_p \succ 0$  und zudem  $t_{ps} > 0$  gilt. Ist nun  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i \neq p$ , so gilt für die  $i$ -te Zeile  $t'_i$  des Tableaus  $T'$ :

$$t'_i = t_i - \frac{t_{is}}{t_{ps}} t_p.$$

Ist  $t_{is} > 0$ , so ist gemäß Regel LEX, die zur Wahl von  $p$  geführt hat,

$$t'_i = t_{is} \left( \frac{t_i}{t_{is}} - \frac{t_p}{t_{ps}} \right) \succ 0.$$

Ist andererseits  $t_{is} \leq 0$ , so folgt

$$t'_i = t_i + \frac{|t_{is}|}{t_{ps}} t_p \geq t_i > 0.$$

Daraus folgt insgesamt, dass die Zeilen lexikographisch positiv bleiben.

Wir betrachten schließlich die ersten Zeilen  $t_0$  und  $t'_0$  der Tableaus, welche die reduzierten Kosten enthalten. Es gilt

$$t'_0 = t_0 - \frac{t_{0s}}{t_{ps}} t_p.$$

Wegen  $t_{0s} = r_s > 0$  gilt also

$$t_0 = t'_0 + \frac{t_{0s}}{t_{ps}} t_p > t'_0.$$

Dies zeigt, dass bei jedem Pivotschritt die 0-Zeile des Tableaus strikt lexikographisch fällt und somit sich kein Tableau während der Ausführung des Algorithmus wiederholen kann.  $\square$

## 5.6 Berechnung einer zulässigen Basislösung - Die Zweiphasen-Methode

In den bisherigen Betrachtungen sind wir immer von einer bereits gegebenen zulässigen Basislösung ausgegangen und haben durch die Anwendung des Simplex-Algorithmus eine optimale Ecke gesucht (falls sie existiert). Jedoch ist es überhaupt nicht klar, ob es für ein gegebenes LP überhaupt eine zulässige Ecke gibt und falls doch, wie man diese findet. Man kann natürlich alle der  $\binom{n}{m}$  möglichen Kombinationen von Basisvariablen ausprobieren, diese Vorgehensweise ist aber nicht effizient.

Wir betrachten wieder ein LP in Standardform:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x) &= cx \\ \text{unter d.N.} \\ Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Zusätzlich setzen wir ohne Einschränkung voraus, dass  $b \geq 0$  ist. Falls es nämlich Zeilen gibt, in denen der Eintrag von  $b$  negativ ist, multiplizieren wir diese mit  $-1$  und ändern damit nichts am Polyeder.

Interessanterweise gibt es ein relativ leicht zu lösendes Hilfsproblem, welches uns bei Existenz einer zulässigen Basislösung eine solche liefert. Dieses sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x, y) &= \sum_{i=n+1}^{n+m} y_i \\ \text{unter d.N.} \\ Ax + y &= b \\ x, y &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Man führt also in jeder der  $m$  Zeilen eine zusätzliche künstliche Variable  $y_i$  ein, wobei  $i \in \{n+1, \dots, n+m\}$ . Nun muss genau eine der beiden folgenden Möglichkeiten eintreten:

1. Das Hilfsproblem besitzt eine Optimallösung mit Zielfunktionswert 0. Dann ist die zugehörige Basislösung zulässig für das System  $Ax = b, x \geq 0$ .
2. Das Hilfsproblem besitzt eine Optimallösung mit Zielfunktionswert  $> 0$ . Dann besitzt das System  $Ax = b, x \geq 0$  keine zulässige Lösung.

Die Folgerungen sind offensichtlich. Ist nämlich der Zielfunktionswert gleich 0, so sind alle  $y_i = 0$ , da  $y \geq 0$  ist. Dann ist aber auch  $Ax = b$  mit  $x \geq 0$ . Ist jedoch der optimale Zielfunktionswert  $> 0$ , so kann  $Ax = b, x \geq 0$  keine Lösung besitzen, da dafür ja  $y = 0$  gelten müsste.

Das Hilfsproblem lässt sich nun mit dem Simplex-Algorithmus lösen, wobei man trivialerweise als Basis die künstlichen Variablen  $y_i, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$  nutzen kann (da die rechte Seite nach Voraussetzung  $\geq 0$  ist). Es ist also

$$B = (n+1, \dots, n+m), N = (1, \dots, n), c_B = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m \text{ und } c_N = 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} z_0 = c_B b &= \sum_{i=1}^m b_i \geq 0, \\ r_N &= c_N A_N, \end{aligned} \tag{5.16}$$

wobei sich  $r_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}, j = 1, \dots, n$  aus der Summe der Einträge in den Spalten von  $A_N$  berechnet. Das Starttableau lautet dann

$$\begin{array}{cc} & x \\ z(x, y), r_N & \begin{array}{|c|c|} \hline z_0 & r_N \\ \hline b & A_N \\ \hline \end{array} \\ y & \end{array} \tag{5.17}$$

Die Zweiphasen-Methode zur Lösung des LP (5.14) besteht also aus

Phase I: Löse das Hilfsproblem (5.15) mit dem oben gegebenen Starttableau. Die Basisvariablen  $y_{n+1}, \dots, y_{n+m}$  müssen im optimalen Tableau Nichtbasis-Variablen sein. Daraus ergibt sich eine zulässige Basislösung für das Ausgangsproblem.

Phase II: Berechne Starttableau zur Lösung von LP (5.14) durch

- Streichung der zu  $y_{n+1}, \dots, y_{n+m}$  gehörigen Spalten,
- Berechnung der neuen Werte  $z_0$  und  $r_N$ .

**Beispiel 5.10.** Wir wenden die Zweiphasen-Methode auf folgendes Problem an:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{u.d.N.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Das Hilfsproblem sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_4 + y_5 \\ \text{u.d.N.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_4 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Wir starten mit der Basis  $B = (4, 5)$  und zugehöriger Nichtbasis  $N = (1, 2, 3)$ . Zusätzlich berechnen wir

$$z_0 = b_1 + b_2 = 4 + 3 = 7 \quad \text{und} \quad r_N = \left( \sum_{i=1}^2 a_{ij} \right)_{j=1,2,3} = (5, 4, 3).$$

Damit erhalten wir das Starttableau

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z(x, y), r_N$	7	5	4	3
$y_4$	4	2	1	2
$y_5$	3	3	3	1

Mit Dantzig's Auswahlregel erhalten wir noch die beiden folgenden Tableaus:

		$y_5$	$x_2$	$x_3$
$z(x, y), r_N$	2	-5/3	-1	4/3
$y_4$	2	-2/3	-1	4/3
$x_1$	1	1/3	1	1/3

		$y_5$	$x_2$	$y_4$
$z(x, y), r_N$	0	-1	0	-1
$x_3$	3/2	-1/2	-3/4	3/4
$x_1$	1/2	1/2	5/4	-1/4

Hier erkennen wir, dass  $r_N \leq 0$  und  $z(x, y) = 0$  ist, wobei  $y_4$  und  $y_5$  Nichtbasis-Variablen sind. Damit ist eine zulässige Lösung von  $Ax = b, x \geq 0$  gegeben durch die Basis  $B = (3, 1)$  mit den Belegungen

$$x_3 = 3/2, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 0.$$

An dieser Stelle wollen wir festhalten, dass durch das Lösen des Hilfsproblems die zugehörige Basismatrix  $A_B$  schon als Einheitsmatrix vorliegt und wir deshalb das Starttableau für Phase II relativ leicht aufstellen können.

Wollen wir nun Phase II ausführen, so streichen wir die zu  $y_4$  und  $y_5$  gehörenden Spalten aus dem Tableau. Es ist  $c = (4, 1, 1)$ . Bezüglich  $B = (3, 1)$  und  $N = (2)$  ist  $c_B = (1, 4)$  und  $b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  (siehe Tableau). Berechnen wir nun noch die neuen Werte für die Zielfunktion und reduzierte Kosten, so erhalten wir

$$z_0 = c_B b = (1, 4) \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 3/2 + 4/2 = 7/2 \text{ und}$$

$$r_N = r_2 = c_B a^2 - c_2 = (1, 4) \begin{pmatrix} -3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} - 1 = 13/4,$$

wobei  $a^2$  aus dem Tableau entnommen werden muss.

Das Starttableau für Phase II hat also folgende Form:

		$x_2$
$z(x), r_N$	7/2	13/4
$x_3$	3/2	-3/4
$x_1$	1/2	5/4

Nach einem Pivotschritt erhalten wir

		$x_1$
$z(x), r_N$	$11/5$	$-13/5$
$x_3$	$9/5$	$3/5$
$x_2$	$2/5$	$4/5$

Da nun die reduzierten Kosten  $r_1 = -13/5 < 0$  sind, ist die optimale Lösung des Ausgangsproblems

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2/5, \quad x_3 = 9/5 \quad \text{mit Zielfunktionswert } 11/5.$$

Mit der Zweiphasen-Methode lassen sich nicht nur zulässige Basislösungen für lineare Programme in Standardform finden, sondern auch für Probleme, in denen zusätzlich Ungleichungen enthalten sind. Gegeben sei also das Problem

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiere } z(x) = cx \\
 &\text{unter d.N.} \\
 &\quad a_i x = b_i, \quad i = 1, \dots, k \\
 &\quad a_i x \leq b_i, \quad i = k + 1, \dots, m \\
 &\quad x \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Hier benötigen wir also künstliche Variablen  $y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$  für die ersten  $k$  Gleichungen sowie Schlupfvariablen  $x_{n+k+1}, \dots, x_{n+m}$  um die Ungleichungen in Gleichungsform zu bringen. Da wir wie oben von  $b \geq 0$  ausgehen, müssen wir in Phase I folgendes Hilfsproblem lösen (da die Schlupfvariablen  $\geq 0$  sein dürfen, kommen diese in der Zielfunktion nicht vor):

$$\begin{aligned}
 &\text{minimiere } \sum_{i=n+1}^{n+k} y_i \\
 &\text{unter d.N.} \\
 &\quad a_i x + y_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, k \\
 &\quad a_i x + x_{n+i} = b_i \quad i = k + 1, \dots, m \\
 &\quad x, y \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Das Starttableau ergibt sich wie in (5.17), wobei wir

$$z_0 = \sum_{i=1}^k b_i \text{ und } r_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}, j = 1, \dots, n$$

wählen müssen. In Phase I werden also die Basisvariablen  $y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$  in Nichtbasis-Variablen transformiert. Anschließend lässt sich dann wieder Phase II anwenden.

Bei diesen Betrachtungen haben wir wieder  $b \geq 0$  vorausgesetzt. Dies können wir jedoch nicht ohne Einschränkung machen, da wir die Ungleichungen  $a_i x \leq b_i$  nicht einfach so mit  $-1$  multiplizieren können, sodass die rechte Seite nichtnegativ ist. Denn dann ist für die entsprechenden Zeilen  $a_i x \geq b_i$  und die eingeführten Schlupfvariablen müssten von der linken Seite abgezogen werden, um eine Gleichung zu bekommen. In diesem Fall bilden die Schlupfvariablen keine zulässige Basis. Wir betrachten deshalb nun ein Problem mit „gemischten Ungleichungen“:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } z(x) = cx \\ &\text{unter d.N.} \\ &a_i x \geq b_i, \quad i = 1, \dots, k \\ &a_i x \leq b_i, \quad i = k + 1, \dots, m \\ &x \geq 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Hier können wir nun wieder davon ausgehen, dass  $b \geq 0$  ist. Durch Einführung von Schlupfvariablen  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  erhalten wir ein Problem in Standardform:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } z(x) = cx \\ &\text{unter d.N.} \\ &a_i x - x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, k \\ &a_i x + x_{n+i} = b_i, \quad i = k + 1, \dots, m \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n + m. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Um nun eine zulässige Basislösung zu erhalten, müssen wir wieder künstliche Variablen  $y_{n+m+1}, \dots, y_{n+m+k}$  für die ersten  $k$  Gleichungen einführen (da hier die Schlupfvariablen negativ auftreten).

Das zugehörige Hilfsproblem lautet dann

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } \sum_{i=n+m+1}^{n+m+k} y_i \\ &\text{unter d.N.} \\ &a_i x - x_{n+i} + y_{n+m+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, k \\ &a_i x + x_{n+i} = b_i, \quad i = k + 1, \dots, m \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n + m \\ &y_i \geq 0, \quad i = n + m + 1, \dots, n + m + k. \end{aligned} \tag{5.22}$$



Zur Bestimmung eines Starttableaus für dieses Hilfsproblem sortieren wir die  $n + m + k$  Variablen in der Reihenfolge

$$\underbrace{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}}_N \underbrace{y_{n+m+1}, \dots, y_{n+m+k}, x_{n+k+1}, \dots, x_{n+m}}_B.$$

Damit ist dann

$$c_B = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-k}) \in \mathbb{R}^m,$$

$$z_0 = c_B b = \sum_{i=1}^k b_i,$$

$$r_j = c_B a^j - c_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^k a_{ij}, & j = 1, \dots, n \\ -1, & j = n + 1, \dots, n + k \end{cases}$$

Abschließend können wir damit das Starttableau für Phase I aufstellen zu

	$x_1 \cdots x_n$	$x_{n+1} \cdots x_{n+k}$	
$z(x), r_N$	$\sum_{i=1}^k b_i$	$\sum_{i=1}^k a_{ij}$	$-1 \cdots -1$
$y_{n+m+1}$	$b_1$	$a_1$	$-I_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$y_{n+m+k}$	$b_k$	$a_k$	
$x_{n+k+1}$	$b_{k+1}$	$a_{k+1}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_{n+m}$	$b_m$	$a_m$	

**Bemerkung 5.11.** Ist nach Phase I die gefundene Ecke entartet, so kann es sein, dass noch nicht alle künstliche Variablen in der Nichtbasis enthalten sind. In diesem Fall müssen noch weitere Pivotschritte ausgeführt werden, um Zulässigkeit für  $Ax = b, x \geq 0$  zu erreichen. Bei diesen Pivotschritten ändert sich jedoch nicht die Ecke, sondern nur die Basis.



## Kapitel 6

# Dualität

Wir betrachten wiederum ein LP in Standardform

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x) &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Wir bezeichnen das Polyeder der zulässigen Punkte mit  $K$ , also

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Sei  $x \in K$  und betrachte einen beliebigen Vektor  $\lambda^T \in \mathbb{R}^m$ . Wir erhalten folgende äquivalente Darstellungen

$$b = Ax \Leftrightarrow \lambda b = \lambda Ax \quad \forall \lambda^T \in \mathbb{R}^m.$$

Wir erhalten nun eine untere Schranke an den Zielfunktionswert  $cx$  durch folgende Ungleichung:

$$\lambda b \leq cx \quad \forall \lambda^T \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \lambda A \leq c.$$

Unser Ziel ist nun, die "beste" untere Schranke an  $cx$  zu bestimmen. Das führt auf folgendes duale Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{maximiere } z^*(\lambda) &= \lambda b \\ \lambda A &\leq c. \end{aligned} \tag{D}$$

Wir bezeichnen mit  $K^*$  das Polyeder für obiges Problem.

$$K^* := \{\lambda^T \in \mathbb{R}^m \mid \lambda A \leq c\}.$$

Man beachte dass hier  $\lambda^T$  keinerlei Vorzeichenbeschränkung unterliegt.

### 6.1 Duale Programme

Allgemein kann jedem LP ein duales LP zugeordnet werden und zwischen diesen beiden bestehen wichtige Beziehungen, die wir später behandeln werden. Die Dualitätsbeziehungen können am besten für LP's mit Ungleichungen in symmetrischer Form ausgedrückt werden.

Symmetrische Form:

Primalproblem (P-sym):

$$\begin{aligned} & \text{minimiere } cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{P-sym})$$

Dualproblem (D-sym):

$$\begin{aligned} & \text{maximiere } \lambda b \\ & \lambda A \leq c \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{D-sym})$$

Dabei ist  $A$  eine  $m \times n$  Matrix,  $x \in \mathbb{R}^n$  Spaltenvektor, und  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  Zeilenvektor. Wie vorher werden die jeweiligen zulässigen Mengen mit  $K$  und  $K^*$  bezeichnet.

**Bemerkung 6.1.** Das Dualproblem des Dualproblems ist wieder das Primalproblem.  
Beweis: Übung.

Wir geben ein Beispiel an.

Primalproblem (P):

$$\begin{aligned} & \text{minimiere } 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Dualproblem (P):

$$\begin{aligned} & \text{maximiere } 5\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 3 \\ & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 4 \\ & 3\lambda_1 + \lambda_2 \leq 5 \\ & \lambda_i \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Das LP in Standardform kann auf die symmetrische Form zurückgeführt werden. Die Gleichung

$$Ax = b$$

entspricht

$$\begin{aligned} Ax & \geq b \\ -Ax & \geq -b. \end{aligned}$$

Das Dualproblem für die Variable  $w \in \mathbb{R}^{2m}$  ist dann nach (P-sym)

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } w \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ &w \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq c \\ &w \geq 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun  $w := (u, v)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^m$ , so erhält man

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } ub - vb \\ &uA - vA \leq c \\ &u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned}$$

Mit  $\lambda := u - v$  wird daraus das bereits definierte Dualproblem (D). Zu beachten ist dass die duale Variable  $\lambda = u - v$  keinen Vorzeichenbeschränkungen unterliegt.

Wir geben tabellarisch einige Rechenregeln bezüglich der Dualisierung.

Tabelle 6.1: Dualisierung.

Primales LP	Duales LP
(P <sub>1</sub> ) $\max cx, Ax \leq b, x \geq 0$	(D <sub>1</sub> ) $\min \lambda b, \lambda A \geq c, \lambda \geq 0$
(P <sub>2</sub> ) $\min cx, Ax \geq b, x \geq 0$	(D <sub>2</sub> ) $\max \lambda b, \lambda A \leq c, \lambda \geq 0$
(P <sub>3</sub> ) $\max cx, Ax = b, x \geq 0$	(D <sub>3</sub> ) $\min \lambda b, \lambda A \geq c$
(P <sub>4</sub> ) $\min cx, Ax = b, x \geq 0$	(D <sub>4</sub> ) $\max \lambda b, \lambda A \leq c$
(P <sub>5</sub> ) $\max cx, Ax \leq b$	(D <sub>5</sub> ) $\min \lambda b, \lambda A = c, \lambda \geq 0$
(P <sub>6</sub> ) $\min cx, Ax \geq b$	(D <sub>6</sub> ) $\max \lambda b, \lambda A = c, \lambda \geq 0$

Wir geben noch eine allgemeine Form der Dualität an.

**Lemma 6.2.** Es seien dimensionsverträgliche Matrizen  $A, B, C, D$  und Vektoren  $a, b, c, d$  gegeben. Zum primalen LP

$$\begin{aligned} &\text{maximiere } cx + dy \\ &Ax + By \leq a \\ &Cx + Dy = b \\ &x \geq 0, \end{aligned} \tag{LP}$$

gehört das duale LP

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiere } ua + vb \\
 & \quad uA + vC \geq c \\
 & \quad uB + vD = d \\
 & \quad u \geq 0.
 \end{aligned} \tag{DP}$$

*Beweis.* Übung. □

Bevor wir nun zum zentralen starken Dualitätssatz kommen, werden wir zunächst ein Beispiel und eine Interpretation von zueinander dualen Programmen geben.

## 6.2 Duale Programme für Transportprobleme

Wir wiederholen das in Abschnitt 3.1.3 eingeführte Transportproblem.

### Primalproblem:

In  $m$  Fabriken werden jeweils die Warenmengen  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  erzeugt. Diese Waren sollen an  $n$  Abnehmer, die jeweils die Warenmengen  $b_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  benötigen, so versandt werden, dass die Transportkosten minimiert werden. Bezeichnen wir mit  $c_{ij}$  die Transportkosten pro Wareneinheit von Fabrik  $i$  zum Abnehmer  $j$ , so lautet das zugehörige LP, in dem mit  $x_{ij}$  die tatsächlich von  $i$  nach  $j$  versandte Menge bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}
 \text{minimiere } z(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad 1 \leq i \leq m, \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad 1 \leq j \leq n, \\
 x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{P}$$

### Dualproblem:

Ein Unternehmer meint, den Versand kostengünstiger durchführen zu können. Er bietet dem Erzeuger an, seine Waren am Erzeugungsort zu kaufen und am Bestimmungsort wieder zu verkaufen. Der Preis der Produkte variiert von Ort zu Ort und wird vom Unternehmer im Voraus festgesetzt. Er muss jedoch die Preise so gestalten, dass sein Angebot attraktiv für den Erzeuger ist. Somit muss der Unternehmer Preise  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  für die  $m$  Produktionsorte und  $\mu_1, \dots, \mu_n$  für die  $n$  Bestimmungsorte wählen. Um gegenüber herkömmlichen Transportmöglichkeiten konkurrenzfähig zu sein, müssen seine Preise

$$\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

erfüllen. Die Gewinn-Maximierung des Unternehmers führt auf das Problem

$$\begin{aligned} \text{maximiere } z^*(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) &= \sum_{j=1}^n \mu_j b_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \\ \mu_j - \lambda_i &\leq c_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (\text{D})$$

### 6.3 Der Dualitätssatz

Wir bereiten nun den starken Dualitätssatz der linearen Optimierung vor. Dazu betrachten wir das Eingangs eingeführte Paar von zueinander dualen linearen Programmen

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x) &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} \text{maximiere } z^*(\lambda) &= \lambda b \\ \lambda A &\leq c. \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Wir bezeichnen wiederum die zulässigen Mengen der beiden LPs mit  $K$  und  $K^*$ .

Wir erhalten unmittelbar, den folgenden Zusammenhang zwischen Lösungen von (P) und (D).

**| Satz 6.3 (Schwacher Dualitätssatz).** Für  $x \in K, \lambda^T \in K^*$  gilt  $\lambda b \leq cx$ .

*Beweis.* Sei  $x \in K$  und  $\lambda^T \in K^*$ . Wir erhalten

$$b = Ax \Rightarrow \lambda b = \lambda Ax \underset{\lambda^T \in K^*}{\leq} cx.$$

□

Es ergibt sich folgendes wichtiges Korollar.

**| Korollar 6.4.** Seien  $x^* \in K$  und  $(\lambda^*)^T \in K^*$  mit  $\lambda^* b = cx^*$ . Dann sind jeweils  $x^*$  und  $(\lambda^*)^T$  optimal für die jeweiligen Probleme (P) und (D).

*Beweis.* Für beliebiges  $x \in K$  gilt

$$cx \geq \lambda^* b = cx^*.$$

Desweiteren gilt für beliebiges  $\lambda \in K^*$

$$\lambda b \leq cx^* = \lambda^* b.$$

□

**Satz 6.5 (Dualitätssatz der linearen Optimierung).** Besitzt eines der Probleme (P) oder (D) eine endliche Optimallösung, so besitzt auch das jeweils andere Problem eine endliche Optimallösung und der Optimalwert der beiden Zielfunktionen ist gleich:

$$\min\{cx \mid x \in K\} = \max\{\lambda b \mid \lambda^T \in K^*\}.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $x^* \in K$  optimal mit  $cx^* = z_0$  endlich. Definiere folgende Menge

$$C := \{(r, w) = t(cx - z_0, b - Ax)^T \mid x \geq 0, t > 0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

$C$  ist ein konvexer Kegel mit Spitze im Nullpunkt. Desweiteren gilt (ohne Beweis), dass  $C$  abgeschlossen ist. Wir erhalten folgende alternative Darstellung von  $C$ :

$$C = \{(r, w) = (cx - tz_0, tb - Ax)^T \mid x \geq 0, t > 0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

(Definiere  $\tilde{x} = x/t$ ).

Wir behaupten nun, dass der Punkt  $(-1, 0)$  nicht in  $C$  liegt, d.h.,  $(-1, 0) \notin C$ . Dies folgt unmittelbar, da  $t > 0$  und  $z_0 \leq cx$  für alle  $x \in K$ . Somit können wir den Trennungssatz für konvexe und abgeschlossene Kegel anwenden (vgl. Satz 2.9). Es existiert ein Vektor  $(\lambda_0, \lambda)^T \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$  mit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda^T \in \mathbb{R}^m$  so dass gilt

$$(\lambda_0, \lambda)^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda_0 < 0 \leq (\lambda_0, \lambda)^T \begin{pmatrix} cx - tz_0 \\ tb - Ax \end{pmatrix}$$

für alle  $t > 0, x \geq 0$ . Es gilt  $\lambda_0 > 0$  und ohne Einschränkung können wir  $\lambda_0 = 1$  setzen (zu erreichen durch Multiplikation mit  $1/\lambda_0$ ). Indem wir das Skalarprodukt ausrechnen erhalten wir für alle  $t > 0, x \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (cx - tz_0) + \lambda(tb - Ax) \\ \Leftrightarrow tz_0 - cx &\leq \lambda(tb - Ax). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Indem wir nun den Limes  $t \downarrow 0$  betrachten, erhalten wir

$$cx \geq \lambda Ax \text{ für alle } x \geq 0$$

und somit auch

$$c \geq \lambda A$$

was  $\lambda \in K^*$  impliziert. Setzen wir nun in (6.1) die Werte  $t = 1, x = 0$  ein, so erhalten wir

$$z_0 \leq \lambda b.$$

Mit dem schwachen Dualitätssatz 6.3 folgt  $z_0 = \lambda b$  und nach Korollar 6.4 sind dann auch  $x^* \in K$  und  $\lambda \in K^*$  optimal.  $\square$

**Bemerkung 6.6.** Der Beweis benutzt nicht die Rangvoraussetzung  $\text{Rang}(A) = m$  des Simplexverfahrens. Bei Existenz einer nichtentarteten optimalen Basis-Lösung ist der Beweis deutlich einfacher.

Mit den Sätzen (6.3) und (6.5) können in einfacher Weise die folgenden Existenz- und Optimalitätskriterien gewonnen werden.

**Satz 6.7 (Existenzsatz).** Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. (P) und (D) haben beide zulässige Lösungen.
2. (P) hat eine endliche Optimallösung.
3. (P) und (D) haben endliche Optimallösungen, deren Zielfunktionswerte übereinstimmen.
4. (D) hat eine endliche Optimallösung.
5. (P) hat zulässige Lösungen und ist nach unten beschränkt oder (D) hat zulässige Lösungen und ist nach oben beschränkt.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Mit Satz (6.3) gilt, dass die Zielfunktion von (P) nach unten beschränkt ist. Somit folgt (da (P) nach Voraussetzung eine zulässige Lösung besitzt) mit dem Satz von Weierstrass die Existenz einer optimalen Lösung.

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Dies entspricht ja genau der Aussage von Satz (6.5).

(3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5)  $\Rightarrow$  (1) : Trivial. □

**Satz 6.8 (Komplementarität).** Seien  $x \in K$  und  $\lambda \in K^*$  zulässig für (P) und (D). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1.  $x$  und  $\lambda$  sind optimal.
2.  $(\lambda A - c)x = 0$
3. Für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\begin{aligned} x_i > 0 &\Rightarrow \lambda a^i = c_i \\ \lambda a^i < c_i &\Rightarrow x_i = 0. \end{aligned}$$

Beweis: Übung (trivial).

## 6.4 Das Duale Simplex-Verfahren

Der Dualitätssatz 6.5 kann unter den Rangvoraussetzungen des Simplex-Verfahrens einfacher bewiesen werden. Gleichzeitig gelangt man so zum dualen Simplex-Verfahren. Ge-

geben seien die primal-dualen Programme

$$\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\} \quad (\text{P})$$

$$\max\{\lambda b \mid \lambda A \leq c\}. \quad (\text{D})$$

Wir setzen  $\text{rang}(A) = m$  voraus. Die Basis-Lösung zu einer Basis  $B$  von (P) ist nach dem vorigen Kapitel gegeben durch

$$x_B = A_B^{-1}b, x_N = 0.$$

Der Zeilenvektor

$$\lambda := c_B A_B^{-1} \in \mathbb{R}^m \quad (6.2)$$

heißt Simplex- oder Lagrange-Multiplikator. Damit sind die reduzierten Kosten gegeben durch

$$r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N = \lambda A_N - c_N.$$

Wir erhalten folgende Folgerungen aus dem starken Dualitätssatz.

**Satz 6.9.** 1.  $\lambda = c_B A_B^{-1}$  ist zulässig für (D)  $\Leftrightarrow r_N \leq 0$ .

2. Die Basis-Lösung  $x$  sei optimal und nicht entartet, d.h.,

$$x_B = A_B^{-1}b > 0, x_N = 0.$$

Dann ist  $\lambda = c_B A_B^{-1}$  optimal für (D) und es gilt

$$\lambda b = cx.$$

*Beweis.* Zu (1): Mit  $\lambda = c_B A_B^{-1}$  gilt

$$\lambda A \leq c \Leftrightarrow (\lambda A_B, \lambda A_N) \leq (c_B, c_N)$$

$$\Leftrightarrow \lambda A_N \leq c_N$$

$$\Leftrightarrow r_N = \lambda A_N - c_N \leq 0.$$

Zu (2): Ist  $x$  optimal und nicht entartet, so gilt notwendigerweise  $r_N \leq 0$  (siehe Korollar 5.4). Also ist  $\lambda = c_B A_B^{-1}$  zulässig für (D) (nach (1)) und es gilt

$$\lambda b = c_B A_B^{-1}b = c_B x_B = cx.$$

Wegen Korollar (6.4) ist daher  $\lambda = c_B A_B^{-1}$  optimal für D. □

Die Verknüpfung von primaler Optimalität und dualer Zulässigkeit wird in folgender Definition aufgegriffen.



1. **Start:** Sei  $x$  dual zulässig zur Basis  $B$ . Berechne die Matrix  $T = (t_{ij})$ , wie in (6.4). Bezeichne mit  $B(i)$  den zur  $i$ -ten Zeile von  $T$  gehörenden Basisindex für  $1 \leq i \leq m$ . Analog dazu bezeichne mit  $N(j)$  den zur  $j$ -ten Spalte von  $T$  gehörenden Nichtbasisindex für  $1 \leq j \leq n - m$ .

2. Ist  $t_{i0} \geq 0$  ( $1 \leq i \leq m$ ), so ist die Lösung optimal. Setze

$$\begin{aligned} x_{B(i)} &:= t_{i0}, 1 \leq i \leq m \\ x_{N(j)} &:= 0, 1 \leq j \leq n - m \\ z &:= t_{00} \end{aligned}$$

Andernfalls gehe zu 3.

3. **Bestimmung der Austausch-Zeile:** Wähle Index  $p \in [m]$  (mit  $B(p)$  kleinstmöglich) mit

$$t_{p0} = \min_{1 \leq i \leq m} t_{i0} \quad (t_{i0} = b_i).$$

4. Sind alle  $t_{pj} \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n - m$ , so besitzt (D) keine endliche Lösung. **Stopp.** Gibt es ein  $t_{pj} < 0$ , so gehe zu Schritt 5.

5. **Bestimmung der Austausch-Spalte:** Wähle Index  $s \in [n - m]$  (mit  $N(s)$  kleinstmöglich) mit

$$\frac{t_{0s}}{t_{ps}} = \min \left\{ \frac{t_{0j}}{t_{pj}} \mid t_{pj} < 0, j = 1, \dots, n - m \right\} \quad (t_{0j} = r_{N(j)} \leq 0).$$

Gehe zu Schritt 6.

6. Vertausche das  $s$ -te Element von  $N$  mit dem  $p$ -ten Element von  $B$ :

$$B \leftarrow (B(1), \dots, B(p-1), N(s), B(p+1), \dots, B(m))$$

$$N \leftarrow (N(1), \dots, N(s-1), B(p), N(s+1), \dots, N(n-m))$$

Führe an der Matrix  $T$  die Pivotoperation mit Pivotelement  $t_{ps} < 0$  durch wie in Abbildung 5.2 Punkt (6):

- Pivotelement:  $t'_{ps} := 1/t_{ps}$
- übrige Pivotspalte:  $t'_{is} := -\frac{t_{is}}{t_{ps}}, i = 0, 1, \dots, m, i \neq p$
- übrige Pivotzeile:  $t'_{pj} := \frac{t_{pj}}{t_{ps}}, j = 0, 1, \dots, n - m, j \neq s$
- sonstige Elemente:  $t'_{ij} := t_{ij} - t_{is} \frac{t_{pj}}{t_{ps}}, i \neq p, j \neq s$
- Setze  $t_{ij} := t'_{ij}$  und gehe zu Schritt 2.

Abbildung 6.2: Duales Simplex-Verfahren

Nun können wir den dualen Simplex-Algorithmus formal hinschreiben (siehe Abb. 6.2). Wir geben eine Anwendung. Das Primalproblem sei in der Form

$$\min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\}, c \geq 0 \quad (\text{P})$$

gegeben.  $Ax \geq b$  ist äquivalent zu

$$Ax - y = b, y \geq 0.$$

Zur Berechnung einer zulässigen Basislösung kann man z.B. die Phase I des Simplex benutzen. Wegen  $c \geq 0$  lässt sich das Problem (P) einfacher mit dem dualen Simplex-Verfahren lösen. Dazu betrachtet man das LGS

$$-Ax + y = -b, y \geq 0, x \geq 0.$$

Wir erhalten das Start-Tableau

$$B = (n+1, \dots, n+m), N = (1, \dots, n)$$

$$r_N = -c \leq 0.$$

Somit ist  $x = 0, y = -b$  dual zulässig und wir erhalten das folgende Tableau:

		$x$	
$z$	$z_0$	$r_N = -c \leq 0$	(6.5)
$y$	$-b$	$-A$	

Wir lösen nun damit das Beispiel aus dem letzten Abschnitt:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Das Start-Tableau hat die Form:

		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-3	-4	-5
$y_1$	-5	-1	-2	-3
$y_2$	-6	-2	-2	-1

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \min\{-5, -6\} &= -6 \Rightarrow p = 2 \\ \min\{3/2, 4/2, 5/1\} &= 3/2 \Rightarrow s = 1. \end{aligned}$$

Tausche  $y_2$  und  $x_1$ :

	$y_2$	$x_2$	$x_3$	
$z$	9	$-3/2$	-1	$-7/2$
$y_1$	-2	$-1/2$	-1	$-5/2$
$x_1$	3	$-1/2$	1	$1/2$

Tausche  $y_1$  und  $x_2$ :

	$y_2$	$y_1$	$x_3$	
$z$	11	-1	-1	-1
$x_2$	2	$1/2$	-1	$5/2$
$x_1$	1	-1	1	-2

Das Tableau ist optimal; die optimale Lösung ist

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0.$$

Die optimale Lösung des dualen Problems ist

$$\lambda = (1, 1).$$

## 6.5 Sensitivität und Schattenpreise

Das LP

$$\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\} \tag{6.6}$$

habe die optimale Basis  $B$  mit der zugehörigen nichtentarteten Basislösung

$$x_B = A_B^{-1}b > 0$$

Die optimale Lösung des Dualproblems ist dann

$$\lambda = c_B A_B^{-1}.$$

Bei kleinen Änderungen

$$b \rightarrow b + \Delta b$$

der rechten Seite in (6.6) bleibt die Basis  $B$  zulässig, da  $x_B$  nichtentartet ist. Desweiteren hängen die reduzierten Kosten zur Basis  $B$ 

$$r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N \leq 0$$

gar nicht von  $b$  ab, daher bleibt  $x$ , sofern es zulässig bleibt, sogar optimal.

Zu  $b + \Delta b$  gehört also die optimale Lösung

$$x = A_B^{-1}(b + \Delta b) = x_B + \Delta x_B, \text{ mit } \Delta x_B = A_B^{-1}\Delta b.$$

Die Zielfunktion  $z$  ändert sich also um den Wert

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(x) - z(x_B) \\ &= c_B \Delta x_B = \lambda \Delta b. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die duale Variable  $\lambda$  gibt also die Sensitivität des optimalen Wertes bzgl. Änderungen der rechten Seite  $b$  an; insbesondere folgt die sog. Schattenpreisformel:

$$\frac{\partial z}{\partial b_j} = \lambda_j, j = 1, \dots, m \tag{6.8}$$

Also hat  $\lambda_j$  die Bedeutung des marginalen Preises bzgl.  $b_j$ .



## Kapitel 7

# Postoptimierung

Wir betrachten in diesem Abschnitt verschiedene Möglichkeiten eine schon berechnete Optimallösung eines LPs bei gestörten Eingabedaten, so zu verändern, dass die veränderte Lösung optimal bzgl. der neuen Eingabedaten ist. Die Veränderungen sollen mit möglichst wenig Aufwand berechnet werden; es gibt ja immer die Möglichkeit alles “from scratch” neu zu berechnen.

Wir betrachten wiederum ein LP in Standardform

$$\begin{aligned} \text{minimiere } z(x) &= cx \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{LP}$$

sowie eine optimale Basis  $B$ .

### 7.1 Änderung der rechten Seite $b$

Wir betrachten eine Änderung der rechten Seite der Form

$$b' = b + d \text{ für ein } d \in \mathbb{R}^m.$$

Dann ergibt sich mit der optimalen Basis  $B$  für das ungestörte Problem eine neue Basis für das gestörte Problem durch

$$x'_B := A_B^{-1}(b + d) = x_B + A_B^{-1}d \text{ und } x'_N = 0.$$

Sollte nun  $x'_B \geq 0$  gelten, ist die so geänderte Basislösung weiterhin optimal, da sich die reduzierten Kosten nicht geändert haben

$$r'_N = r_N = c_B A_B^{-1} A_N - c_N \leq 0.$$

Der neue Zielfunktionswert ist gegeben durch

$$z' = c_B A_B^{-1} b' = z + c_B A_B^{-1} d.$$

Sollte jedoch  $x'_B \not\geq 0$  gelten, so ist die zugehörige Basislösung zwar nicht primal, aber **dual** zulässig. Damit können wir direkt das duale Simplexverfahren mit Basismatrix  $A_B$

## 7.2 Änderung der Zielfunktion $c$

Wir ersetzen  $c$  im LP durch  $c' = c + d$ . Dann ist der neue Zielfunktionswert für die gegebene Basis  $B$  gegeben durch

$$z' = (c + d)x = (c_B + d_B)A_B^{-1}b = z + d_B A_B^{-1}b.$$

Ob nun die aktuelle Basislösung optimal bleibt, liegt an den geänderten reduzierten Kosten. Sie berechnen sich durch

$$\begin{aligned} r'_N &= (c_B + d_B)A_B^{-1}A_N - c_N - d_N \\ &= r_N + d_B A_B^{-1}A_N - d_N. \end{aligned}$$

Falls  $r'_N \leq 0$ , so bleibt die aktuelle Basislösung optimal auch wenn sich  $z$  ändert. Andernfalls gibt es positive reduzierte Kosten  $r'_j > 0$ . Dann können wir das primale Simplex-Verfahren anwenden mit  $B$  als aktueller zulässiger Basis.

## 7.3 Hinzufügen einer neuen Variablen

Wir wollen eine neue Variable  $x_{n+1}$  mit Zielfunktionskoeffizient  $c_{n+1}$  in das bestehende LP einführen. Somit ergibt sich auch eine neue Spalte  $a^{n+1}$  in der bestehenden Matrix  $A$ . Wir können  $x_{n+1}$  als zusätzliche Nichtbasisvariable behandeln und das bestehende Tableau  $T$  um eine Spalte erweitern. Tableauspalten werden im Folgenden mit  $(a')^j$  bezeichnet.

$$\begin{aligned} (a')^{n+1} &= A_B^{-1}a^{n+1} \\ r'_{n+1} &= c_B A_B^{-1}a^{n+1} - c_{n+1} = \lambda a^{n+1} - c_{n+1}. \end{aligned}$$

Falls nun  $r'_{n+1} \leq 0$ , so liegt weiterhin Optimalität von  $B$  vor. Andernfalls können wir das primale Simplex-Verfahren benutzen und  $x_{n+1}$  in die Basis bringen.

## 7.4 Änderung einer Spalte von $A$

Wir ersetzen die Spalte  $a^j$  von  $A$  durch  $a^j + d$ . Es ergeben sich zwei Fälle:

1. Fall:  $j \in N$ .

Da dann die Basismatrix  $A_B$  unverändert bleibt, können wir die neue  $j$ -te Spalte  $(a')^j$  des Tableaus wie folgt berechnen:

$$(a')^j = A_B^{-1}(a^j + d). \quad (7.1)$$

Die Basis bleibt weiterhin primal zulässig, jedoch können sich die reduzierten Kosten verändern:

$$r'_j = c_B A_B^{-1}(a^j + d) - c_j.$$

Entweder bleibt die aktuelle Basis optimal, oder man führt nun ausgehend von dem geänderten Tableau das primale Simplex-Verfahren mit zulässiger Basis  $B$  durch.

Fall 2:  $j \in B$ : In diesem Fall kann sowohl die primale als auch die duale Zulässigkeit der aktuellen Basis verlorengehen. Auch kann die geänderte Basis Matrix  $A'_B$  singulär werden. Um einige dieser Probleme zu beheben, werden wir eine zusätzliche Spalte der Form

$$s := a^j + d$$

an  $A$  anfügen. Somit erhalten wir ein Problem mit einer zusätzlichen Variablen, die wir nun allerdings  $x'_j$  nennen. Der Zielfunktionskoeffizient  $c_j$  bleibt derselbe. Das Tableau wird um folgende Spalte erweitert

$$\begin{pmatrix} r'_j \\ s' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_B A_B^{-1} s - c_j \\ A_B^{-1} s \end{pmatrix}.$$

Falls der Eintrag  $s'_j$  in der mit  $x_j$  indizierten Zeile von  $s'$  nicht 0 ist, können wir diesen Wert als Pivotelement wählen und die alte Basisvariable  $x_j$  gegen die neue  $x'_j$  tauschen. Nach diesem Schritt lassen wir einfach die alte Variable  $x_j$  weg und benennen die neue  $x'_j$  in  $x_j$  um. Man beachte jedoch dass nach diesem Schritt die aktuelle Basis  $B$  weder primal noch dual zulässig sein muss. Falls einer der beiden Zulässigkeiten vorliegt, fahren wir mit dem entsprechenden Simplex-Verfahren fort. Falls keiner der beiden Fälle eintritt, müssen wir die erste Phase des primalen Simplex durchlaufen um eine Startbasis zu erhalten.

Im Fall  $s'_j = 0$  wäre selbst nach dem Tausch von  $x_j$  und  $x'_j$ ,  $B$  keine Basis mehr; somit kann man nicht viel mehr tun als das Simplex-Verfahren von Anfang an neu anzuwenden.

Wir geben ein Beispiel bezüglich des Abänderns einer Spalte an.

**Beispiel 7.1 (Änderung der Spalte).** Betrachte folgendes Problem:

Primalproblem (P):

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$

Wir benutzen Schlupfvariablen  $y_3$  und  $y_4$  und erhalten folgendes Tableau:

		$x_1$	$x_2$
$z$	0	-1	-2
$y_3$	-2	-1	-1
$y_4$	-3	-2	-1

Die aktuelle Basis ist dual zulässig und nach einigen Austauschschritten mittels des [dualen](#)

Simplex-Verfahrens erhalten wir folgendes optimales Tableau:

		$x_2$	$y_3$
$z$	2	-1	-1
$y_4$	1	1	-2
$x_1$	2	1	-1

Mit optimaler Basis  $B = (4, 1)$ .

Wir ersetzen nun die Nichtbasisspalte  $a^2$  durch

$$a^2 + d := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

und erhalten mit  $r_2 = -1$  und

$$\lambda = c_B A_B^{-1} = (0, 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 0)$$

die Gleichung

$$r'_2 = r_2 + \lambda d = -1 - \alpha.$$

Also gilt  $r'_2 \leq 0$  genau dann wenn  $\alpha \geq -1$ . Somit ist, falls  $\alpha \geq -1$  gilt, die berechnete Basis-Lösung mit  $B = (4, 1)$  optimal für alle linearen Programme der Form

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + (\alpha - 1)x_2 & \leq -2 \\ -2x_1 + (\beta - 1)x_2 & \leq -3 \\ x_i & \geq 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{LP}(\alpha, \beta))$$

Nun betrachten wir den Fall dass die Basisspalte  $a^1$  geändert wird. Wir erhalten

$$s := a^1 + d = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit Tableau-Spalte

$$s' = A_B^{-1} s = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix},$$

sowie

$$r'_1 = c_B s' - c_1 = (0, 1) \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} - 1 = -\alpha.$$

Somit müssen wir den Vektor  $\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$  als neue Spalte an das Tableau zur ursprünglich

optimalen Basis B anfügen:

	$x_2$	$y_3$	$x'_1$
$z$	2	-1 -1	$-\alpha$
$y_4$	1	1 -2	$-\alpha$
$x_1$	2	1 -1	$(1 - \alpha)$

Die für diesen Fall diskutierte Methode ist nun anwendbar wenn  $\alpha \neq 1$  gilt (da ja dann das erwähnte Pivotelement nicht gleich 0 ist). Der Pivotschritt mit dem Pivotelement  $(1 - \alpha)$  ergibt folgendes Tableau:

	$x_2$	$y_3$	$x_1$
$z$	$\frac{2}{1-\alpha}$	$\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}$ $\frac{-1}{1-\alpha}$	$\frac{\alpha}{1-\alpha}$
$y_4$	$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$ $\frac{\alpha-2}{1-\alpha}$	$\frac{\alpha}{1-\alpha}$
$x'_1$	$\frac{2}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$ $\frac{-1}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$

Wie beschrieben, werden wir nun die neue  $x_1$  Spalte streichen. Somit erhalten wir:

	$x_2$	$y_3$
$z$	$\frac{2}{1-\alpha}$	$\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}$ $\frac{-1}{1-\alpha}$
$y_4$	$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$ $\frac{\alpha-2}{1-\alpha}$
$x'_1$	$\frac{2}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$ $\frac{-1}{1-\alpha}$

Man sieht nun leicht, dass  $T'$  bezüglich B

- genau für  $\alpha \leq 1/2$  dual zulässig
- und genau für  $-1 \leq \alpha < 1$  primal zulässig

ist. Wenn einer der Fälle eintritt, kann man mit dem entsprechenden Simplex-Verfahren

fortfahren. Auch folgt direkt, dass für

$$-1 \leq \alpha \leq 1/2$$

die aktuelle Basis  $B$  optimal bleibt. Somit hat das Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ (\alpha - 1)x_1 - x_2 & \leq -2 \\ (\alpha - 2)x_1 - x_2 & \leq -3 \\ x_i & \geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$

für  $-1 \leq \alpha \leq 1/2$  die optimalen Lösungen

$$x_1^* = \frac{2}{1 - \alpha}, x_2^* = 0.$$

Der Zielfunktionswert ist  $z^* = \frac{2}{1 - \alpha}$ .

## Kapitel 8

# Parametrische Lineare Optimierung

Wir untersuchen nun wie sich Optimallösungen von LPs als Funktionen von Eingangsparametern beschreiben lassen.

### 8.1 Störung der Zielfunktion $c$

Dazu betrachten wir nun folgendes parametrisierte LP:

$$\begin{aligned} \min cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{LP(c)}$$

In dieser Formulierung sei nun  $c$  variabel.

Wir erhalten folgenden Satz.

**Satz 8.1.** Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$ , so dass

$$P^+(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

ein nichtleeres Polyeder ist. Definiere

$$BP(A, b) := \{c \in \mathbb{R}^n \mid cx \text{ ist auf } P^+(A, b) \text{ nach unten beschränkt}\}.$$

Für  $c \in BP(A, b)$  sei

$$M(c) := \min\{cx \mid x \in P^+(A, b)\}.$$

Dann gilt

1.  $BP(A, b)$  ist ein konvexer Kegel.
2. Es gibt endlich viele Vektoren  $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$  mit

$$M(c) = \min\{cv_i \mid i = 1, \dots, N\}$$

für alle  $c \in BP(A, b)$ .

3.  $M(c)$  ist **konkav** auf  $BP(A, b)$ .

## 98 | Kapitel 8. Parametrische Lineare Optimierung

*Beweis.* Zu (1): Offensichtlich ist  $BP(A, b)$  ein Kegel. Seien nun  $c, c' \in BP(A, b)$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann folgt für alle  $x \in P^+(A, b)$

$$(\alpha c + (1 - \alpha)c')x = \alpha cx + (1 - \alpha)c'x \geq \alpha M(c) + (1 - \alpha)M(c')$$

also folgt  $\alpha c + (1 - \alpha)c' \in BP(A, b)$ .

Zu 2.: Da mit dem Hauptsatz der linearen Optimierung jede beschränkte lineare Zielfunktion ihr Minimum auf einer der endlich vielen Ecken von  $P^+(A, b)$  annimmt, können wir die  $v_i$  als Ecken von  $P^+(A, b)$  wählen.

Zu 3. Mit Aussage 2. sehen wir, dass wir  $M(c)$  als Minimum von konkaven (sogar linearen) Funktion darstellen können, welches stets konkav ist (vgl. eine ähnlich Aussage über konvexe Funktionen in einem vorherigen Kapitel über Konvexität). □

**Korollar 8.2.** Die Aussagen von Satz 8.1 gelten auch für Polyeder der Form

$$P^-(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \text{ sowie } P^-(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

Wir erhalten ein ähnliches Resultat für Maximierungsprobleme:

$$\max\{cx \mid x \in P^+(A, b)\}.$$

**Satz 8.3.** Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix und  $b \in \mathbb{R}^m$ , so dass

$$P^+(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

ein nichtleeres Polyeder ist. Definiere

$$BP^*(A, b) := \{c \in \mathbb{R}^n \mid cx \text{ ist auf } P^+(A, b) \text{ nach oben beschränkt}\}.$$

Für  $c \in BP^*(A, b)$  sei

$$M^*(c) := \max\{cx \mid x \in P^+(A, b)\}.$$

Dann gilt

1.  $BP^*(A, b)$  ist ein konvexer Kegel.
2. Es gibt endlich viele Vektoren  $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$  mit

$$M^*(c) = \max\{cv_i \mid i = 1, \dots, N\}$$

für alle  $c \in BP^*(A, b)$ .

3.  $M^*(c)$  ist konvex auf  $BP^*(A, b)$ .

## 8.2 Störung der rechten Seite b

Als nächstes betrachten wir lineare Programme der Form

$$\begin{aligned} \min cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{LP}(b))$$

In dieser Formulierung sei nun  $b$  variabel. (Wir benutzen hier die Formulierung  $Ax \geq b$  aus Gründen der einfacheren Darstellung, wie sich später zeigen wird.) Es sei

$$P^-(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

**Satz 8.4.** Sei  $A$  eine  $m \times n$  Matrix und  $c \in \mathbb{R}^n$ , sodass die lineare Zielfunktion  $cx$  auf mindestens einem der nichtleeren Polyeder der Form  $P^-(A, b)$  nach unten beschränkt ist.

Definiere

$$AP(A, c) := \{b \in \mathbb{R}^m \mid P^-(A, b) \neq \emptyset, cx \text{ ist auf } P^-(A, b) \text{ nach unten beschränkt}\}.$$

Für  $b \in AP(A, c)$  sei

$$L(b) := \min\{cx \mid x \in P^-(A, b)\}.$$

Dann gilt

1.  $AP(A, c)$  ist ein konvexer Kegel.
2. Es gibt endlich viele Vektoren  $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^n$  mit

$$L(b) = \max\{b^T u_i \mid i = 1, \dots, N\}$$

für alle  $b \in AP(A, c)$ .

3.  $L(b)$  ist **konvex** auf  $AP(A, c)$ .

*Beweis.* Wir betrachten das folgende zu  $LP(b)$  duale LP:

$$\begin{aligned} \max \lambda b \\ \lambda A \leq c \\ \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{DP}(b))$$

welches ein parametrisches LP bezüglich des Zielfunktionsvektors  $b$ , bei fester rechten Seite  $c$  ist. Der starke Dualitätssatz besagt dann

$$AP(A, c) = BP^*(A^T, c),$$

wobei

$$\text{BP}^*(A^T, c) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid \lambda b \text{ ist auf } P^+(A^T, c) \text{ nach oben beschränkt}\}.$$

Desweiteren folgt

$$L(b) = M^*(c),$$

und somit folgt aus Satz 8.3 die Behauptung. □

Die obigen Sätze sind zwar theoretisch recht interessant, liefern aus “praktischer Sicht” jedoch kein nützliches Verfahren um eine parametrisierte Lösung zu berechnen. Dies wollen wir nun an einigen Beispielen nachholen.

Wir betrachten folgendes lineare Programm:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$

Es sollte klar sein, wie man nun Schlupfvariablen einführt ( $y_3, y_4$ ) und dann das Problem löst.

Wir erhalten die optimale Basis  $B = (1, 2)$  mit zugehörigem Tableau:

		$y_3$	$y_4$
$z$	-14	-5/3	-2/3
$x_1$	2	2/3	-1/3
$x_2$	4	1/3	1/3

Die Zielfunktion soll nun in Richtung  $d = (2, 1)$  gestört werden:

$$c' = c + td = (-1, -3) + t(2, 1) \text{ mit } t \geq 0.$$

Für die gegebene Basis  $B = (1, 2)$  führt  $c'$  zu den reduzierten Kosten

$$\begin{aligned} r'_N &= c'_B A_B^{-1} A_N - c'_N \\ &= r_N + t(d_B A_B^{-1} A_N - d_N) \\ &:= r_N + td'. \end{aligned}$$

Im Beispiel gilt  $r_N = (-5/3, -2/3)$  sowie

$$d' = (2, 1) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} - (0, 0) = (5/3, -1/3).$$

Somit folgt

$$r'_N = (-5/3 + 5/3t, -2/3 - 1/3t).$$

Die bisherige optimale Basis mit zugehöriger Optimallösung bleibt optimal, solange  $r'_N \leq 0$  gilt. Das ist für  $0 \leq t \leq 1$  der Fall. Also ist

		$y_3$	$y_4$
$z$	$-14 + 8t$	$-5/3 + 5/3t$	$-2/3 - 1/3t$
$x_1$	2	$2/3$	$-1/3$
$x_2$	4	$1/3$	$1/3$

ein optimales Tableau für  $LP(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Der Eintrag  $-14 + 8t$  ergibt sich durch

$$c'_B A_B^{-1} b = c_B A_B^{-1} b + t d_B A_N^{-1} b = -14 + t(2, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -14 + 8t.$$

Weil nun für  $t > 1$ ,  $r'_3 > 0$  würde, werden wir für solche Werte von  $t$  die Variable  $y_3$  in die Basis bringen und das eben berechnete Tableau mit  $t = 1$  verwenden. (Wegen  $r'_r = 0$  für diesen Fall, wird weiterhin Optimalität garantiert).

Wir ersetzen also das Tableau

		$y_3$	$y_4$
$z$	-6	0	-1
$x_1$	2	$2/3$	$-1/3$
$x_2$	4	$1/3$	$1/3$

durch das Tableau

		$x_1$	$y_4$
$z$	-6	0	-1
$y_3$	3	$3/2$	$-1/2$
$x_2$	3	$-1/2$	$1/2$

welches immer noch optimal ist.

Wir berechnen nun die reduzierten Kosten  $r'_N$ , als Funktion von  $t \geq 1$  bzgl. Basis  $B' = (3, 2)$  und  $N' = (1, 4)$  neu und erhalten

$$\begin{aligned}
r'_{N'} &= c'_{B'} A_{B'}^{-1} A_{N'} - c'_{N'} \\
&= ((0, -3) + t(0, 1)) \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - ((-1, 0) + t(2, 0)) \\
&= (3/2 - 1/2t, -3/2 + 1/2t) - (-1 + 2t, 0) \\
&= (5/2 - 5/2t, -3/2 + 1/2t).
\end{aligned}$$

Nun gilt  $r'_{N'} \leq 0$  für  $0 \leq t \leq 3$ . Mit

$$c'_{B'} x_{B'} = (c_{B'} + t d_{B'}) A_{B'}^{-1} b = ((0, -3) + t(0, 1)) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -9 + 3t$$

erhalten wir das Tableau

		$x_1$	$y_4$
$z$	$-9 + 3t$	$5/2 - 5/2t$	$-3/2 + 1/2t$
$y_3$	3	$3/2$	$-1/2$
$x_2$	3	$-1/2$	$1/2$

Dieses Tableau ist für  $1 \leq t \leq 3$  optimal und für  $t = 3$  erhalten wir  $r'_4 = 0$ , somit bringen wir dann für  $t \geq 3$  die Variable  $y_4$  in die Basis.

		$x_1$	$x_2$
$z$	0	-5	0
$y_3$	6	1	1
$y_4$	6	-1	2

Wenn man nun für  $B'' = (3, 4)$  wieder die reduzierten Kosten ausrechnet, bekommt man

$$\begin{aligned}
r'_{N''} &= c'_{B''} A_{B''}^{-1} A_{N''} - c'_{N''} \\
&= ((0, 0) + t(0, 0)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - ((-1, -3) + t(2, 1)) \\
&= (0, 0) - (-1 + 2t, -3 + t) \\
&= (1 - 2t, 3 - t).
\end{aligned}$$

Weil nun  $r_{N''} \leq 0$  für alle  $t \geq 3$ , bleibt die aktuelle Basis  $B''$  optimal für diesen Fall. Das

Tableau ist

		$x_1$	$x_2$
$z$	0	$1 - 2t$	$3 - t$
$y_3$	6	1	1
$y_4$	6	-1	2

Wir haben nun für alle  $t \geq 0$  die zugehörigen optimalen Lösungen und Zielfunktionswerte in Abhängigkeit von  $t$  berechnet.

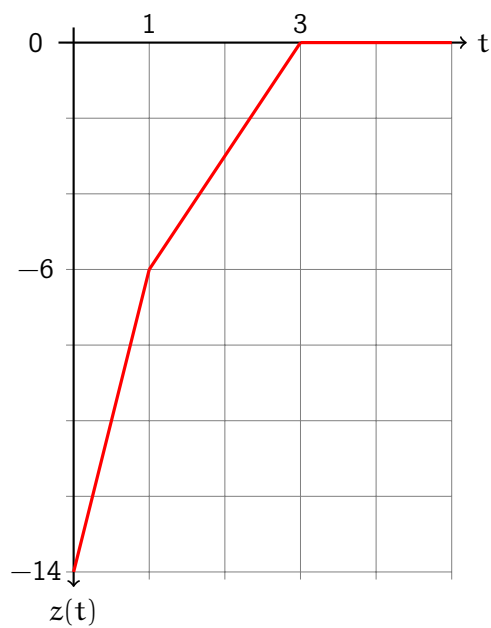


Abbildung 8.1: Optimalwertfunktion  $z(t)$ .

Eine ähnliche Vorgehensweise wird für Störungen der rechten Seite und/oder Störungen in der Koeffizientenmatrix durchgeführt (siehe Übungen).



## Kapitel 9

# Komplexität der Linearen Optimierung

In diesem Kapitel werden komplexitätstheoretische Grundlagen gelegt um eine Laufzeitanalyse eines polynomialen Algorithmus (der sogenannten **Ellipsoidmethode**) für LPs zu entwickeln. Zunächst werden wir jedoch zeigen, dass der Simplex-Algorithmus (mit einer **schlechten** Pivot-Regel) exponentielle Laufzeit haben kann.

### 9.1 Klee-Minty Würfel

Im Kapitel über das Simplex-Verfahren hatten wir gesehen, dass Dantzig's Pivot-Regel nicht notwendigerweise konvergiert sondern Kreiseln kann. Andererseits hatten wir für die lexikographische Pivot-Regel gezeigt, dass nach endlich vielen Schritten ein Optimum erreicht wird (falls es existiert). Nun stellt sich natürlicherweise die Frage, ob man eine **polynomielle** Laufzeitbeschränkung für besonders geeignete Pivotregeln angeben kann. Diese Frage ist bis heute ungelöst und wir werden später noch eingehend darauf zurückgehen. Wir werden nun zunächst ein Beispiel angeben, für das viele gängige Pivot-Regeln (Dantzig, Bland etc.) zu einer exponentiellen Laufzeit (in der Anzahl der besuchten Ecken) führen.

Dazu definieren wir die folgenden **Klee-Minty** Würfel.

**Definition 9.1.** Die  $d$ -dimensionalen Klee-Minty Würfel sind durch folgende Ungleichungen definiert:

$$\epsilon \leq x_1 \leq 1 \tag{9.1}$$

$$\epsilon x_{j-1} \leq x_j \leq 1 - \epsilon x_{j-1} \text{ für } j = 2, \dots, d, \tag{9.2}$$

wobei  $0 < \epsilon < 1/2$  gelte. Die Wahl  $\epsilon = 0$  würde auf den gewöhnlichen  $d$ -dimensionalen Würfel führen.

Wir geben ein Beispiel für  $d = 3$  und  $\epsilon = 1/4$  an.

$$1 \leq 4x_1 \leq 4 \tag{9.3}$$

$$x_1 \leq 4x_2 \leq 4 - x_1 \tag{9.4}$$

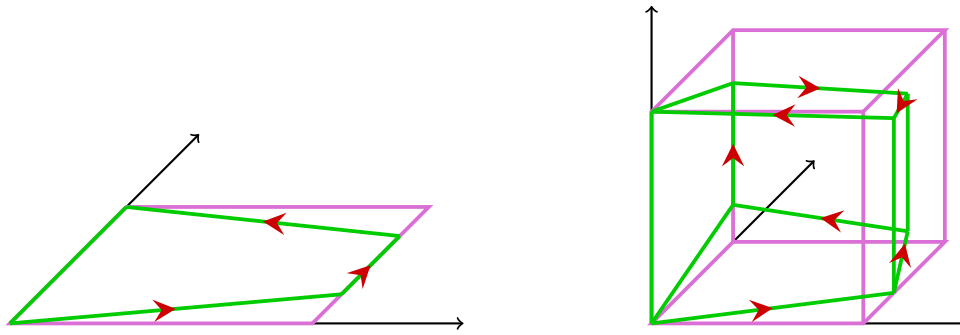


Abbildung 9.1: Der Klee-Minty Würfel mit entsprechendem Simplex-Pfad für Dimension  $d = 2$  und  $d = 3$ .

$$x_2 \leq 4x_3 \leq 4 - x_2 \tag{9.5}$$

In Abbildung 9.1 haben wir die Ecken und Kanten des Klee-Minty Würfels angegeben. Der dort eingezeichnete Weg über die Ecken  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8$  entspricht der Ausführung des Simplex-Algorithmus (mit entsprechender Pivot-Regel) für das LP mit  $d = 3$ , bei dem die  $-x_3$ -Koordinate minimiert wird.

Wir werden nun diese Beobachtung auf  $d$ -dimensionale Klee-Minty Würfel verallgemeinern.

$$\begin{aligned} \min -x_d \\ x_1 - r_1 &= \epsilon \\ x_1 + s_1 &= 1 \\ x_j - \epsilon x_{j-1} - r_j &= 0 \text{ für } j = 2, \dots, d \\ x_j + \epsilon x_{j-1} + s_j &= 1 \text{ für } j = 2, \dots, d \\ x, r, s &\geq 0, \end{aligned} \tag{KM(d)}$$

wobei wieder  $0 < \epsilon < 1/2$  gilt.

Wir erhalten folgendes Lemma, welches die Basen von  $KM(d)$  charakterisiert.

**Lemma 9.2.** Die zulässigen Basen für  $KM(d)$  entsprechen bijektiv den Teilmengen von  $\{1, \dots, d\}$  und sind alle nichtentartet. Dabei gilt folgende Darstellung für die Indizes einer Basis in Mengenschreibweise:

$$B_S := \{x_1, \dots, x_d\} \cup \{r_j | j \in S\} \cup \{s_j | j \notin S\}. \tag{9.6}$$

*Beweis.* Es sei  $B$  eine zulässige Basis für  $KM(d)$  mit zugehöriger Basis-Lösung  $x$ . Aus den Ungleichungen  $x_1 \geq \epsilon$  und  $x_j \geq \epsilon x_{j-1}$  für  $j = 2, \dots, d$  folgt dass

$$x_j \geq \epsilon^j > 0 \text{ für } j = 1, \dots, d,$$

was wiederum impliziert dass die Indizes  $1, \dots, d$  sämtlich in der Basis enthalten sind.

Desweiteren muss gelten, dass für jedes  $j$  mindestens eine der beiden Variablen  $r_j$  bzw.  $s_j$  auch in  $B_S$  enthalten sein muss. Angenommen es gilt  $r_j = s_j = 0$ . Für den Fall  $j = 1$  ergibt sich dann  $x_1 = \epsilon = 1$ , Widerspruch. Für  $j > 1$  ergibt sich mit  $x_j = \epsilon x_{j-1}$  und  $x_j + \epsilon x_{j-1} = 1$  die Bedingung

$$2\epsilon x_{j-1} = 1.$$

Wegen  $x_{j-1} \leq 1$  und  $\epsilon < 1/2$  ergibt das ebenfalls einen Widerspruch. Also ist für jede Variable  $x_j$  mindestens eine der beiden Variablen  $r_j$  bzw.  $s_j$  positiv und gehört somit zur Basis. Damit haben wir mindestens  $2d$  Basisvariablen mit positiven Einträgen gefunden. Wegen  $m = 2d$  kann es nicht mehr als  $2d$  Basisvariablen geben und somit ist genau eine der beiden Variablen  $r_j$  oder  $s_j$  positiv, so dass die Basis  $B_S$  in der Form (9.6) geschrieben werden kann. Desweiteren folgt dass die Basis nichtentartet ist.

Umgekehrt ist es leicht ausgehend von  $S$  eine zulässige Basis-Lösung zu berechnen (Übung).  $\square$

Wir erhalten mit Satz 4.22 folgende Folgerung:

**Korollar 9.3.** Der in  $KM(d)$  beschriebene Klee-Minty Würfel hat genau  $2^d$  Ecken.

Wir halten noch weitere Beobachtungen fest, die sich später als nützlich herausstellen werden.

**Korollar 9.4.** Sei  $B_S$  eine zulässige Basislösung für  $KM(d)$  wie in (9.6) angegeben. Dann gelten folgende Aussagen:

- Es gilt  $x_1 = 1$ , falls  $1 \in S$  und  $x_1 = \epsilon$ , sonst.
- Für  $j \in S$  mit  $j \geq 2$  gilt  $x_j = 1 - \epsilon x_{j-1}$ .
- Für  $j \notin S$  mit  $j \geq 2$  gilt  $x_j = \epsilon x_{j-1}$ .

Mit Korollar 9.4 kann man nun in einfacher Weise für eine vorgegebene Basis  $B_S$  die dazugehörige Basis-Lösung (rekursiv) berechnen.

Als nächstes betrachten wir die für den Simplex-Pfad wichtige  $d$ -te Koordinate von  $x$ .

**Lemma 9.5.** Seien  $S$  und  $S'$  zwei Teilmengen von  $\{1, \dots, d\}$  und  $x^S$  bzw.  $x^{S'}$  die zugehörigen Ecken des KM-Würfels. Falls  $d \in S \setminus S'$  gilt, folgt  $x_d^S > x_d^{S'}$ . Wenn sogar  $S' = S \setminus d$  gilt, folgt  $x_d^{S'} = 1 - x_d^S$ .

*Beweis.* Wir benutzen die Aussagen von Korollar (9.4). Mit  $d \in S$ ,  $x_{d-1}^S \leq 1$  und  $\epsilon < 1/2$  erhalten wir  $x_d^S = 1 - \epsilon x_{d-1}^S > 1/2$ . Andererseits folgt aus  $d \notin S'$  die Bedingung  $x_d^{S'} = \epsilon x_{d-1}^{S'} < 1/2$ , was dann  $x_d^S > x_d^{S'}$  zeigt. Falls zusätzlich noch  $S' = S \setminus d$  gilt, erhält man durch rekursive Anwendung von Korollar (9.4) die Gleichungen  $x_j^S = x_j^{S'}$  für  $j = 1, \dots, d-1$ . Damit ergibt sich sofort

$$x_d^{S'} = \epsilon x_{d-1}^{S'} = \epsilon x_{d-1}^S = 1 - (1 - \epsilon x_{d-1}^S) = 1 - x_d^S. \quad \square$$

Wir zeigen ein weiteres Lemma.

**Lemma 9.6.** Es seien die  $D = 2^d$  Teilmengen von  $\{1, \dots, d\}$  so nummeriert, dass

$$x_d^{S_1} \leq x_d^{S_2} \leq \dots \leq x_d^{S_D}. \quad (9.7)$$

Dann sind alle Ungleichungen strikt und die Ecken des KM-Würfels für  $i = 1, \dots, D - 1$  adjazent.

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma per Induktion nach  $d \in \mathbb{N}$ . Für  $d = 1$  gilt mit  $S_1 = \emptyset$  und  $S_2 = \{1\}$

$$x_1^{S_1} = \epsilon \text{ und } x_1^{S_2} = 1,$$

die Behauptung ist also korrekt. Für den Induktionsschluss  $d \rightarrow d + 1$  verwenden wir, dass  $S_1, \dots, S_D$  auch stets Teilmengen von  $\{1, \dots, d + 1\}$  sind und somit auch  $2^d$  Ecken der insgesamt  $2^{d+1}$  vielen Ecken des  $(d + 1)$ -dimensionalen KM-Würfels beschreiben. Beachte dass sich dabei die  $d + 1$ -erste Koordinate nach Korollar (9.4) durch

$$x_{d+1}^{S_i} = \epsilon x_d^{S_i}$$

ergibt. Mit der Induktionsvoraussetzung (9.7) ergibt sich

$$x_{d+1}^{S_1} < x_{d+1}^{S_2} < \dots < x_{d+1}^{S_D}. \quad (9.8)$$

Die restlichen  $D$  Teilmengen von  $\{1, \dots, d + 1\}$  haben die Form

$$\bar{S}_i := S_i \cup \{d + 1\} \text{ für } i = 1, \dots, D.$$

Nach Lemma 9.5 gilt nun ( $d + 1 \in \bar{S}_i \setminus S_j$ )

$$x_{d+1}^{\bar{S}_i} > x_{d+1}^{S_j} \text{ für } i, j = 1, \dots, D,$$

sowie ( $S_i = \bar{S}_i \setminus \{d + 1\}$ )

$$x_{d+1}^{\bar{S}_i} = 1 - x_{d+1}^{S_i} \text{ für } i = 1, \dots, D.$$

Somit erhalten wir mit (9.8) die Ungleichungen

$$x_{d+1}^{S_1} < x_{d+1}^{S_2} < \dots < x_{d+1}^{S_D} < x_{d+1}^{\bar{S}_D} < x_{d+1}^{\bar{S}_{D-1}} < \dots < x_{d+1}^{\bar{S}_1}.$$

Desweiteren sind die Ecken  $x^{S_i}$  und  $x^{S_{i+1}}$  aufgrund der Induktionsannahme für  $i = 1, \dots, D - 1$  adjazent. Dies impliziert nun dass auch  $x^{\bar{S}_i}$  und  $x^{\bar{S}_{i+1}}$  immer adjazent sind: die Basis  $B_{S_i}$  geht aus der Basis  $B_{S_{i+1}}$  durch Austausch einer Variablen hervorgeht und das gilt auch für die Basen  $B_{\bar{S}_i}$  und  $B_{\bar{S}_{i+1}}$ . Schlussendlich sind auch die Ecken  $x^{S_D}$  und  $x^{\bar{S}_D}$  adjazent, da  $B_{\bar{S}_D}$  aus  $B_{S_D}$  durch Weglassen von  $s_{d+1}$  und Hinzufügen von  $r_{d+1}$  hervorgeht.  $\square$

Kombination dieser Lemmata impliziert folgendes Resultat:

**Satz 9.7.** Für jedes  $d > 1$  gibt es ein LP in Standardform mit  $2d$  Gleichungen und  $3d$  Variablen, ganzzahligen Koeffizienten mit Betrag  $\leq 4$  sowie eine Pivot-Regel, für das das zugehörige Simplex-Verfahren  $2^d - 1$  Iterationen zur Bestimmung des Optimums benötigen kann.

*Beweis.* Wir setzen  $\epsilon := 1/4$  und multiplizieren die Gleichungen in  $KM(d)$  mit 4 womit alle Koeffizienten ganzzahlig werden. Mit der Zielfunktion  $-\chi_d$ , folgt die Behauptung direkt aus Lemma 9.6.  $\square$

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einigen Anmerkungen zur Existenz von Pivot-Regeln, die in polynomieller Zeit ein Optimum berechnen. Dazu definieren wir zunächst den Begriff des **Diameters von Polyedern**.

**Definition 9.8.**

1. Die Distanz  $d(x, y)$  zwischen zwei Ecken  $x, y$  eines Polyeders  $P$  ist definiert als die minimale Kantenanzahl eines Weges (definiert als Folge von adjazenten Ecken) von  $x$  zu  $y$ .
2. Der Diameter  $D(P)$  eines Polyeders ist das Maximum  $d(x, y)$  über alle Paare von Ecken  $(x, y)$  in  $P$ .
3.  $\Delta(n, m)$  ist definiert als das maximale  $D(P)$  über alle **Polytope** im  $\mathbb{R}^n$ , die durch  $n$  Variablen und  $m$  Ungleichungen beschrieben werden können.
4.  $\Delta_u(n, m)$  ist definiert als das maximale  $D(P)$  über alle **Polyeder** im  $\mathbb{R}^n$ , die durch  $n$  Variablen und  $m$  Ungleichungen beschrieben werden können.

Offensichtlich ist der Diameter eines Polyeders (oder Polytops) eine **untere** Schranke an die Laufzeit des Simplex-Verfahren **unabhängig** von der Auswahl der Pivot-Regel.

Die folgende berühmte **Hirsch-Vermutung** besagt Folgendes:

**Vermutung 9.9 (Polynomiale Hirsch-Vermutung).**

$$\Delta(n, m) \leq \text{poly}(n, m).$$

Bekannte **Schranken** sind:

Untere Schranke:

$$\Delta_u(n, m) \geq m - n + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor.$$

Obere Schranke:

$$\Delta(n, m) \leq \Delta_u(n, m) < m^{1+\log_2(n)} = (2n)^{\log_2(m)}$$

- Die **starke Hirsch Vermutung**  $\Delta(n, m) \leq m - n$  wurde 2010 von Paco Santos für  $n = 43, m = 86$  widerlegt.

**Bemerkung 9.10.** Es gibt einige erfolgreiche Versuche das gute empirische Verhalten des Simplex-Algorithmus mathematisch zu erklären. Zum Beispiel hat Borgwardt in einigen Arbeiten gezeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die erwartete Laufzeit des Simplex-Algorithmus in einem gewissen probabilistischen Modell polynomiell ist.

## 9.2 Polynomiale Algorithmen

Wir werden in den folgenden Abschnitten die erste bekannte Methode zur Lösung von linearen Programmen in Polynomialzeit kennenlernen. Sie geht auf den russischen Mathematiker Leonid Khachiyan (1979) zurück. Zunächst müssen wir jedoch formal den Begriff Laufzeit eines Algorithmus definieren.

Um Laufzeiten von Algorithmen zu beschreiben, benötigt man eine Definition des Maschinenmodells, Kodierungsvorschriften etc. Wir werden hier nur die für die Behandlung von LPs wichtigen Begriffe einführen.

Zunächst müssen wir beachten dass jede Zahl in einem Maschinenmodell nur durch endlich viele Bits dargestellt werden kann, daher nehmen wir im Folgenden an, dass die auftretenden LPs nur rationale Koeffizienten haben.

Haben wir eine Ungleichung der Form

$$ax \leq \alpha$$

mit  $a \in \mathbb{Q}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$  gegeben, so können wir das kleinste gemeinsame Vielfache  $p$  der Nenner der Komponenten von  $a$  und des Nenners von  $\alpha$  bestimmen. Die Ungleichung

$$pax \leq p\alpha$$

hat dann ganzzahlige Koeffizienten und ist offenbar äquivalent zur vorigen Ungleichung.

**Annahme 9.11.** Alle Daten der auftretenden LPs sind ganzzahlig, d.h., für  $\min\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  oder  $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  gilt  $c^T \in \mathbb{Z}^n$ ,  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ .

Der Computer (also auch ein vernünftiges Maschinenmodell) arbeitet mit Binärcodes. Die binäre Darstellung einer ganzen Zahl  $n$  benötigt  $\lceil \log_2(|n| + 1) \rceil$  viele Stellen (bits) und eine Stelle für das Vorzeichen.

**Definition 9.12.** Für  $n \in \mathbb{Z}$  heisst

$$\langle n \rangle := \lceil \log_2(|n| + 1) \rceil + 1$$

die Kodierungslänge von  $n$ . Für jede rationale Zahl  $r = p/q$  in teilerfremder Darstellung mit  $q > 0$  ist die Kodierungslänge

$$\langle r \rangle = \langle p \rangle + \langle q \rangle.$$

Die Kodierungslänge einer Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{m \times n}$  (analog für einen Vektor) ist

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle a_{ij} \rangle.$$

Wir beschreiben nun einige nützliche Eigenschaften der Kodierungslänge.

**Lemma 9.13.** 1. Für jede Zahl  $r \in \mathbb{Q}$  gilt:

$$|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1.$$

2. Für je zwei Zahlen  $r, s \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\langle rs \rangle \leq \langle r \rangle + \langle s \rangle.$$

3. Für jeden Vektor  $x \in \mathbb{Q}^n$  gilt

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 2^{\langle x \rangle - n} - 1.$$

4. Für jede Matrix  $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$  gilt:

$$|\det(A)| \leq 2^{\langle A \rangle - n^2} - 1.$$

*Beweis.* Aussagen (1),(2) werden in den Übungen behandelt.

Zu (3): Sei  $x \in \mathbb{Q}^n$ . Dann gilt mit (1)

$$1 + \|x\|_1 = 1 + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \prod_{i=1}^n (1 + |x_i|) \leq \prod_{i=1}^n 2^{\langle x_i \rangle - 1} = 2^{\langle x \rangle - n}.$$

Die Ungleichung

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$$

ist trivial.

Zu (4): Es gilt folgende Ungleichungskette:

$$1 + |\det(A)| \leq 1 + \prod_{j=1}^n \|a^j\|_2 \leq \prod_{j=1}^n (1 + \|a^j\|_2) \leq \prod_{j=1}^n 2^{\langle a^j \rangle - n} = 2^{\langle A \rangle - n^2}.$$

Die erste Ungleichung folgt aus der [Hadamard Ungleichung](#). Die dritte gilt wegen (3).  $\square$

Im Folgenden werden wir die Laufzeit eines Algorithmus in Form der Anzahl von [elementaren Rechenoperationen](#) angeben. Elementare Rechenoperationen sind [Addition](#), [Subtraktion](#),

tion, Multiplikation, Division und Vergleich von ganzen oder rationalen Zahlen. Zudem müssen wir die Multiplikation großer Zahlen mitberücksichtigen.

**Definition 9.14.** Die Laufzeit eines Algorithmus  $A$  zur Lösung eines Problems  $\Pi$  (kurz  $L_A(\Pi)$ ) ist die Anzahl der elementaren Rechenschritte, die während der Ausführung des Algorithmus durchgeführt werden, multipliziert mit der Kodierungslänge der größten auftretenden Zahl.

Nun können wir auch definieren was **polynomielle Laufzeit** bedeutet.

**Definition 9.15.** Sei  $A$  ein Algorithmus zur Lösung einer Klasse von Problemen mit Instanzen  $\Pi$ . Sei  $\langle \Pi \rangle$  die Kodierungslänge der Daten zur Beschreibung von  $\Pi$ .

1. Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert durch

$$f_A(n) := \max\{L_A(\Pi) \mid \langle \Pi \rangle \leq n\}$$

heißt **Laufzeitfunktion** von  $A$ .

2. Der Algorithmus  $A$  hat eine **polynomielle Laufzeit** ( $A$  ist ein polynomialer Algorithmus), wenn es ein Polynom  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$f_A(n) \leq p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 9.16.** Zur Lösung von LPs suchen wir also einen Algorithmus, dessen Laufzeit durch ein Polynom in  $\langle A \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  beschränkt ist.

### 9.3 Reduktion auf Zulässigkeitsprobleme – LP-Dualität

Die Ellipsoidmethode (die später eingeführt wird) ist im strengen Sinne kein Optimierungsverfahren sondern ein Algorithmus, der für ein gegebenes volldimensionales Polytop einen zulässigen Punkt findet oder feststellt, dass es leer ist. Wir müssen daher die Lösung eines LPs auf ein solches Zulässigkeitsproblem zurückführen.

Betrachten wir ein LP der Form

$$\begin{aligned} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{aligned} \tag{LP}$$

so erhalten wir das duale LP

$$\begin{aligned} \max \lambda b \\ \lambda A \leq c. \end{aligned} \tag{DP}$$

Aus dem starken Dualitätssatz wissen wir, dass die beiden Probleme genau dann Optimallösungen mit gleichem Zielfunktionswert haben, wenn beide Probleme **zulässig** sind. Somit folgt, dass jeder Punkt des Polyeders  $P^\leq$  definiert als

$$\begin{pmatrix} c & -b \\ -A & 0 \\ A & 0 \\ 0 & A^\top \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

ein Optimalpunkt von (LP) sein muss (betrachte dazu nur die Variablenbelegung von  $x$ ).

Der Nachteil dieser Reduktion ist, dass das entstehende Polyeder  $P^\leq$  häufig nicht volldimensional ist, d.h.  $\text{int}(P^\leq) = \emptyset$  auch wenn das primale Polyeder volldimensional war.

## 9.4 Reduktion mit Binärsuche

Wir benutzen Abschätzungen der “Größen” von Ecken um das Lösen eines LPs auf ein Zulässigkeitsproblem auf volldimensionalen Polytopen zurückzuführen.

**Satz 9.17.** Für jede Ecke  $v = (v_1, \dots, v_n)$  eines Polyeders  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  mit  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  und  $\text{rang}(A) = m$  gilt:

$$v_i \leq 2^{(A)+(b)-n^2} \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

*Beweis.* Ist  $v$  eine Ecke von  $P$ , so gibt es eine reguläre  $m \times m$  Teilmatrix  $A_B$  von  $A$ , so dass  $v_B$  die eindeutige Lösung des LGS

$$A_B v_B = b$$

ist. Mit der Cramerschen Regel gilt dann

$$v_i = \frac{\det A_B^i}{\det A_B} = \frac{|\det A_B^i|}{|\det A_B|} \text{ für } i \in B \text{ und } v_i = 0 \text{ für } i \in N,$$

wobei  $A_B^i$  aus  $A_B$  dadurch entsteht dass die  $i$ -te Spalte von  $A_B$  durch den Vektor  $b$  ersetzt wird. Beachte ausserdem dass  $v_i \geq 0$  gilt, somit folgt

$$\frac{\det A_B^i}{\det A_B} = \frac{|\det A_B^i|}{|\det A_B|}.$$

Wir wiederholen kurz den Laplaceschen Determinanten-Entwicklungssatz (nach der  $i$ -ten

Zeile einer  $n \times n$  Matrix  $F$ ):

$$\det F = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} f_{ij} \det F_{ij}, \quad (9.10)$$

wobei  $F_{ij}$  die  $(n-1) \times (n-1)$  Untermatrix von  $F$  ist, in der die  $i$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte gestrichen wird.

Aus (9.10) folgt

$$|\det A_B| \geq 1.$$

Ausserdem ist  $A_B$  eine Teilmatrix von  $A$ , und somit folgt aus Lemma 9.13(4):

$$|\det A_B^i| \leq 2^{\langle A \rangle + \langle b \rangle - n^2}.$$

□

Aus diesem Satz erhalten wir folgende Folgerung.

**Satz 9.18.** Das primale (LP) hat eine endliche Optimallösung genau dann wenn folgende zwei LPs

$$\begin{aligned} \min cx \\ Ax = b \\ x_i \leq 2^{\langle A \rangle + \langle b \rangle - n^2} \text{ für } i = 1, \dots, n \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{LP-Polytop})$$

$$\begin{aligned} \min cx \\ Ax = b \\ x_i \leq 2^{\langle A \rangle + \langle b \rangle - n^2} + 1 \text{ für } i = 1, \dots, n \\ x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{LP-Polytop}+1)$$

endliche Optimallösungen mit gleichem Zielfunktionswert besitzen. Das Problem (LP) ist genau dann unbeschränkt wenn die beiden Zielfunktionswerte der Probleme (LP-Polytop) und (LP-Polytop+1) nicht übereinstimmen. Das Problem (LP) ist genau dann unzulässig wenn eines der Probleme (LP-Polytop) bzw. (LP-Polytop+1) unzulässig ist.

Nun haben wir das Lösen eines allgemeinen LPs in Standardform auf das Lösen eines LPs über einem Polytop zurückgeführt.

Wir müssen im Folgenden also “nur” LPs über Polytope lösen.

**Satz 9.19.** Betrachte (LP) mit  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{Z}^n$ , so dass  $P = (A, b)$  ein nicht-leeres Polytop ist. Dann nimmt die Zielfunktion  $cx$  nur Optimalwerte in der endlichen Menge

$$\mathcal{S} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid |p| \leq n 2^{\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - n^2}, 1 \leq q \leq 2^{\langle A \rangle - n^2} \right\} \quad (9.11)$$

an.

*Beweis.* Mit dem Hauptsatz der linearen Optimierung müssen wir nur Ecken  $v$  des Polytops  $P^=(A, b)$  betrachten:

$$cv = \sum_{i=1}^n c_i v_i.$$

Wie im vorigen Beweis erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i = \sum_{i \in B} c_i \frac{|\det A_B^i|}{|\det A_B|} =: \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Wir setzen

$$q := |\det A_B|$$

und

$$p := \sum_{i \in B} c_i |\det A_B^i|$$

und erhalten

$$|p| \leq n 2^{\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - n^2}.$$

□

Dieser Satz erlaubt es nun eine **binäre Suche** über den endlichen Suchraum  $S$  durchzuführen.

### Binäre Suche

**Input:** Ein LP der Form  $\min\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$  mit  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  und  $c \in \mathbb{Z}^n$  und beschränktem Zulässigkeitsbereich.

**Output:** Eine Optimallösung  $x^*$ , oder die Aussage dass  $P^=(A, b) = \emptyset$ .

1. Überprüfe ob

$$P^=(A, b) = \emptyset.$$

Falls ja, dann STOP, LP ist unzulässig.

2. Wähle ein Element  $s \in S$  mit der Eigenschaft dass für  $S' = \{t \in S \mid t \leq s\}$  und  $S'' = \{t \in S \mid t > s\}$  gilt:

$$|S'| \leq |S''| \leq |S'| + 1.$$

3. Überprüfe ob

$$P_s := P^=(A, b) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \leq s\} = \emptyset.$$

4. Ist  $P_s = \emptyset$ , so setze  $S \leftarrow S''$ , andernfalls  $S \leftarrow S'$ .

5. Ist  $|\mathcal{S}| = 1$ , so gilt für  $s \in \mathcal{S}$ :

$$s = \min\{cx \mid x \in P^-(A, b)\},$$

und jeder Punkt in  $P_s$  ist optimal. Anderenfalls, gehe zu (2).

**Satz 9.20.** Binäre Suche ist ein korrektes Verfahren und terminiert nach höchstens

$$\log_2(n) + 2\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - 2n^2 + 3$$

vielen Ausführungen von Schritt (3).

*Beweis.* Da in jeder Iteration die Kardinalität von  $\mathcal{S}$  (nahezu) halbiert wird, sind höchstens

$$N' = \lceil \log_2(|\mathcal{S}|) \rceil$$

Aufspaltungen von  $\mathcal{S}$  in zwei (nahezu) gleich grosse Teilmengen nötig, um eine einelementige Menge zu erhalten. Mit Satz 9.19 folgt

$$|\mathcal{S}| \leq \left(2n \cdot 2^{\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - n^2} + 1\right) \cdot 2^{\langle A \rangle - n^2} \leq 2^2 \cdot n \cdot 2^{2\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - 2n^2}$$

und somit auch, dass Schritt (3) höchstens

$$\begin{aligned} N' &\leq \log_2(|\mathcal{S}|) + 1 \leq \log_2\left(2^2 \cdot n \cdot 2^{2\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - 2n^2}\right) + 1 \\ &= \log_2 n + \log_2 2^2 + \log_2\left(2^{2\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - 2n^2}\right) + 1 \\ &= \log_2 n + 2 + 2\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle - 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

viele Schritte benötigt. Diese Anzahl ist polynomiell in  $\langle A \rangle + \langle c \rangle + \langle b \rangle$  beschränkt.  $\square$

Wir können nun die bisherigen Resultate zu folgendem Ergebnis zusammenfassen.

**Satz 9.21.** Es gibt einen polynomialen Algorithmus zur Lösung von (LP), wenn es einen polynomialen Algorithmus gibt, der entscheidet ob ein Polyeder  $P^{\leq}(A, b)$  mit ganzzahligen Daten leer ist, und falls  $P^{\leq}(A, b) \neq \emptyset$ , einen Punkt in  $P^{\leq}(A, b)$  berechnet.

Für  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  löst die **Ellipsoidmethode** folgendes **Zulässigkeitsproblem**:

1. Finde  $x \in P := P^{\leq}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$  oder
2. stelle fest, dass  $\overset{\circ}{P} = \emptyset$ .

## 9.5 Geometrische Grundlagen von Ellipsoiden

**Definition 9.22.** Eine Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  heißt Ellipsoid, falls es einen Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  und eine symmetrische positiv definite  $n \times n$  Matrix  $A$  gibt, so dass gilt

$$E = E(A, \mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 1\}. \quad (9.12)$$

Man beachte, dass für eine positiv definite Matrix  $A$  auch stets  $A^{-1}$  positiv definit ist. Mit der Ellipsoid-Norm auf  $\mathbb{R}^n$  definiert durch eine positiv definite  $(n \times n)$ -Matrix  $A$ :

$$\|\mathbf{x}\|_A := \sqrt{\mathbf{x}^\top A^{-1}\mathbf{x}}$$

ergibt sich eine äquivalente Darstellung von  $E(A, \mathbf{a})$  durch

$$E(A, \mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_A \leq 1\}. \quad (9.13)$$

Somit ist  $E$  die Einheitskugel mit Zentrum  $\mathbf{a}$  im  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_A$ . Desweiteren gilt, dass  $E(A, \mathbf{a})$  das Bild der Einheitskugel

$$B_1(\mathbf{0}) := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{u}\|_2 \leq 1\}$$

unter einer affinen Transformation ist.

**Satz 9.23.** Es gilt

$$E(A, \mathbf{a}) = f(B_1(\mathbf{0})) := A^{1/2}B_1(\mathbf{0}) + \mathbf{a},$$

wobei  $A^{1/2}$  die eindeutig bestimmte Wurzel der symmetrischen positiv definiten Matrix  $A$  ist, für die gilt

$$A^{1/2}A^{1/2} = A.$$

*Beweis.* Wir erhalten

$$\begin{aligned} A^{1/2}B_1(\mathbf{0}) + \mathbf{a} &= \{A^{1/2}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \in B_1(\mathbf{0})\} + \mathbf{a} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (A^{1/2})^{-1}\mathbf{x} \in B_1(\mathbf{0})\} + \mathbf{a} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ((A^{1/2})^{-1}\mathbf{x})^\top ((A^{1/2})^{-1}\mathbf{x}) \leq 1\} + \mathbf{a} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top (A^{1/2}A^{1/2})^{-1}\mathbf{x} \leq 1\} + \mathbf{a} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top A^{-1}\mathbf{x} \leq 1\} + \mathbf{a} \\ &= \{\mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^\top A^{-1}\mathbf{x} \leq 1\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{z} - \mathbf{a})^\top A^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{a}) \leq 1\} \\ &= E(A, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

□

Ein Ellipsoid hat weitere schöne geometrische Eigenschaften, die man aus den algebraischen Eigenschaften von  $A$  ableiten kann:

1. Der Durchmesser von  $E(A, a)$  (definiert als längste Achse von  $E(A, a)$ ) ist gegeben durch  $2 \cdot \sqrt{\lambda^{\max}}$ , wobei  $\lambda^{\max}$  der grösste Eigenwert von  $A$  ist.
2. Die Breite (definiert als kürzeste Achse von  $E(A, a)$ ) ist gegeben durch  $2 \cdot \sqrt{\lambda^{\min}}$ , wobei  $\lambda^{\min}$  der kleinste Eigenwert von  $A$  ist.
3. Die Symmetrieachsen entsprechen den Eigenvektoren von  $A$ .

Diese Beobachtungen implizieren dass  $B_{\sqrt{\lambda^{\max}}}(a)$  die kleinste Einheitskugel (bzgl. des Radius) im  $\mathbb{R}^n$  ist, die  $E(A, a)$  enthält. Desweiteren ist  $B_{\sqrt{\lambda^{\min}}}(a)$  die grösste Einheitskugel (bzgl. Radius), die in  $E(A, a)$  enthalten ist.

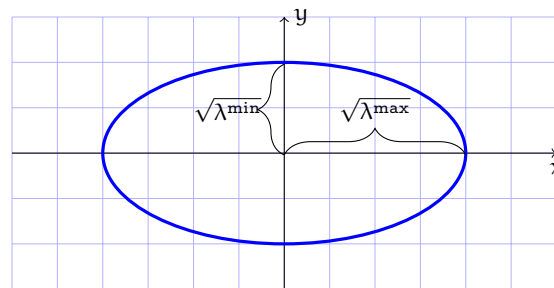


Abbildung 9.2: Ellipsoid  $E(A, 0)$  mit  $z = 0$ .

Das Ellipsoid in Abb. 9.2 ist definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 4$  mit Eigenvektoren  $v_1 = (1, 0)^T$  und  $v_2 = (0, 1)^T$ . Der Durchmesser von  $E(A, 0)$  ergibt sich durch  $2 \cdot \sqrt{\lambda^{\max}} = 8$  und die Breite durch  $2 \cdot \sqrt{\lambda^{\min}} = 4$ .

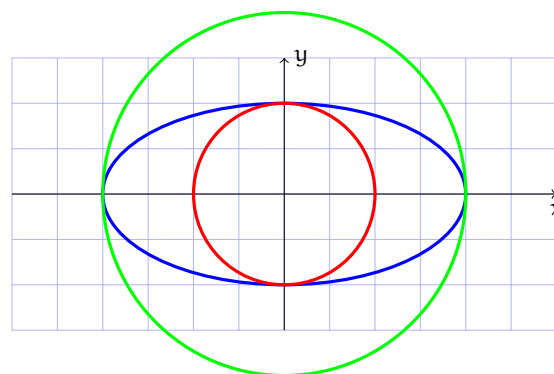


Abbildung 9.3: Ellipsoid  $E(A, 0)$  mit "kleinster" und "grösster" Einheitskugel.

Im Folgenden wird das Volumen von Ellipsoiden eine große Rolle spielen.

**Definition 9.24.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Das Volumen von  $K$  ist definiert als

$$\text{Vol}(K) := \int_{x \in K} dx.$$

Im Kontext von Ellipsoiden gilt folgende Eigenschaft.

**Satz 9.25.** Das Volumen eines Ellipsoids  $E(A, a)$  ist gegeben durch

$$\text{Vol}(E(A, a)) = \sqrt{\det A} \cdot V_n,$$

wobei  $V_n$  das Volumen der Einheitskugel  $B_1(0)$  im  $\mathbb{R}^n$  ist.

*Beweis.* Wir benutzen

$$E(A, a) = f(B_1(0)) = A^{1/2}B_1(0) + a,$$

somit folgt mittels Variablentausch

$$\int_{y \in f(B_1(0))} dy = \int_{x \in B_1(0)} |\det A^{1/2}| dx = \sqrt{\det A} \cdot V_n.$$

□

Für  $V_n$  gilt folgende Darstellung:

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \frac{2e\pi}{n} \right)^{n/2}, \quad (9.14)$$

wobei

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ für } x > 0$$

die Gamma-Funktion bezeichnet.

Wir werden häufiger Abschätzungen von  $V_n$  benötigen. Es gilt folgende grobe Abschätzung:

**Lemma 9.26.**

$$n^{-n} \leq V_n \leq 2^n.$$

*Beweis.* Es gilt dass  $B_1(0)$  die Menge  $B^1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1/n, i = 1, \dots, n\}$  enthält. Das Volumen von  $B^1$  ist gegeben durch  $\text{Vol}(B^1) = n^{-n}$ . Desweiteren ist  $B_1(0)$  vollständig in  $B^2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$  enthalten. Es gilt  $\text{Vol}(B^2) = 2^n$ . □

Wir werden nun das Volumenverhältnis von zwei Ellipsen vergleichen. Mit der Formel aus Satz 9.25 folgt für eine affine Transformationen  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Dx + d$

$$\text{Vol}(T(E(A, a))) = \det D \sqrt{\det A} V_n.$$

Somit gilt für das Verhältnis von zwei verschiedenen Ellipsoiden  $E(A, a)$  und  $E(B, b)$

$$\frac{\text{Vol}(E(A, a))}{\text{Vol}(E(B, b))} = \frac{\text{Vol}(T(E(A, a)))}{\text{Vol}(T(E(B, b)))}. \quad (9.15)$$

Im Weiteren wird die Optimierung einer linearen Funktion über ein Ellipsoid von Interesse sein. Wir werden hierzu die Tatsache benutzen dass eine lineare Funktion  $cx, c^T \neq 0$  über einer Einheitskugel  $B_1(a)$  mit Zentrum  $a \in \mathbb{R}^n$  ihr Maximum im Punkt  $a + \frac{c^T}{\|c^T\|_2}$  annimmt.

**Satz 9.27.** Sei  $E(A, a) \subset \mathbb{R}^n$  ein Ellipsoid und sei  $c^T \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} cz_{\max} &:= \max\{cx \mid x \in E(A, a)\} = ca + \sqrt{cAc^T} = ca + \left\|c^T\right\|_{A^{-1}}, \\ cz_{\min} &:= \min\{cx \mid x \in E(A, a)\} = ca - \sqrt{cAc^T} = ca - \left\|c^T\right\|_{A^{-1}}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

*Beweis.* Setze  $Q := A^{1/2}$ . Somit gilt

$$Q^{-1}E(A, a) = B_1(0) + Q^{-1}a = B_1(Q^{-1}a)$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} \max\{cx \mid x \in E(A, a)\} &= \max\{cQQ^{-1}x \mid Q^{-1}x \in Q^{-1}E(A, a)\} \\ &= \max\{cQy \mid y \in B_1(Q^{-1}a)\} \\ &= cQ \frac{1}{\|Qc^T\|_2} Qc^T + cQQ^{-1}a \\ &= c \frac{1}{\sqrt{cAc^T}} Ac^T + ca \\ &= ca + \sqrt{cAc^T}. \end{aligned}$$

□

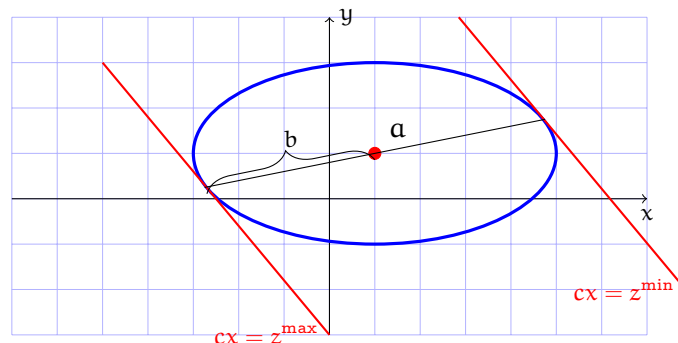


Abbildung 9.4: Ellipsoid  $E(A, a)$  mit  $b := \frac{1}{\sqrt{cAc^T}}Ac^T$ ,  $z_{\max} := a + b$ ,  $z_{\min} := a - b$ .

Wir werden nun folgendes klassisches Resultat festhalten (ohne Beweis), dass jede konvexe, kompakte und volldimensionale Menge im  $\mathbb{R}^n$  in einem eindeutig definierten Ellipsoid

kleinsten Volumens enthalten ist, und, ein eindeutiges Ellipsoid grössten Volumens enthält.

Wir wiederholen zunächst noch einmal die Begriffe **affine Unabhängigkeit** und **Dimension** einer Menge im  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 9.28.** Die Punkte  $x_1, \dots, x_k$  im  $\mathbb{R}^n$  heissen **affin unabhängig**, falls die Punkte  $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$  linear unabhängig sind. Für  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ist der **affine Rang** ( $\text{arank}(S)$ ) definiert als die Kardinalität einer größten affin unabhängigen Teilmenge von  $S$ . Die **Dimension** von  $S$  ( $\text{dim}(S)$ ) ist definiert als

$$\text{dim}(S) = \text{arank}(S) - 1.$$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst **volldimensional**, falls  $\text{dim}(S) = n$  gilt.

**Satz 9.29 (Löwner, John).** Für jede konvexe, kompakte und volldimensionale Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  existiert ein eindeutiges Ellipsoid  $E = E(A, a)$  mit kleinstem Volumen, welches  $K$  enthält.

Man bezeichnet das zu  $K$  gehörende Ellipsoid als **Löwner-John Ellipsoid**.

## 9.6 Die Ellipsoid-Methode

Wir werden nun eine geometrische Beschreibung der Ellipsoid-Methode angeben.

Gegen sei ein Polytop  $P := P^{\leq}(C, d)$ . Wir wollen ein  $x \in P$  finden oder zeigen dass  $\overset{\circ}{P} = \emptyset$  ist.

1. Konstruiere ein Ellipsoid  $E_0 = E(A_0, a_0)$  mit  $P \subseteq E_0$ ;  $k \leftarrow 0$ .
2. Ist das Volumen von  $E_k$  "zu klein", dann STOP:  $\overset{\circ}{P} = \emptyset$ .
3. Teste ob  $a_k \in P$ .
4. Gilt  $a_k \in P$ , dann STOP.
5. Gilt  $a_k \notin P$ , dann gibt es eine verletzte Ungleichung

$$ca_k > d_i,$$

wobei  $c$  die  $i$ -te Zeile der Matrix  $C$  ist. Bezeichne mit

$$E'_k := E_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid cx \leq ca_k\}$$

das **Halbellipsoid** von  $E_k$ , welches  $P$  enthält. Konstruiere das zu  $E'_k$  gehörige Löwner-John Ellipsoid und bezeichne es mit  $E_{k+1}$ .

6. Setze  $k \leftarrow k + 1$  und gehe zu (2).

In dieser geometrischen Variante der Ellipsoid-Methode müssen wir nun noch genauer erklären wie wir das Anfangsellipsoid bzw. das zu dem Halbellipsoid gehörende Löwner-John Ellipsoid konstruieren.

Das Anfangsellipsoid wird eine Kugel mit Zentrum 0 sein.

Enthält das Polytop  $P = P^{\leq}(C, d)$  explizite Ungleichungen der Form

$$\ell_i \leq x_i \leq u_i \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

so kann

$$R := \sqrt{\sum_{i=1}^n (\max\{|u_i|, |\ell_i|\})^2}$$

als Radius der Kugel gewählt werden. Im Allgemeinen gilt folgendes:

**Lemma 9.30.** Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx \leq d\}$  ein Polytop und  $C, d$  ganzzahlig. Dann gilt  $P \subseteq B_R(0)$  wobei  $R := \sqrt{n} 2^{(C)+(d)-n^2}$ .

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 9.17 kann man leicht zeigen dass für jede Ecke  $v$  von  $P$  gilt:

$$|v_i| \leq 2^{(C)+(d)-n^2} \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt für die Euklidische Norm von  $v$ :

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \leq \sqrt{n} \max\{|v_i|\} \leq \sqrt{n} 2^{(C)+(d)-n^2}.$$

Also ist jede Ecke von  $P$  in  $B_R(0)$  enthalten und weil  $P$  ein Polytop ist, gilt  $P \subseteq B_R(0)$ .  $\square$

Nun werden wir spezifizieren, wie wir in Iteration  $k$  der Ellipsoid-Methode ausgehend von einem Ellipsoid  $E_k$  und einer verletzten Ungleichung

$$ca_k > d_i$$

das zu

$$E'_k := E_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n | cx \leq ca_k\}$$

gehörige Löwner-John Ellipsoid konstruieren.

Wir setzen folgende Werte fest:

$$b := \frac{1}{\sqrt{cA_k c^T}} A_k c^T \tag{9.17}$$

$$a_{k+1} := a_k - \frac{1}{n+1} b \tag{9.18}$$

$$A_{k+1} := \frac{n^2}{n^2-1} \left( A_k - \frac{2}{n+1} b b^T \right). \tag{9.19}$$

Das so definierte neue Ellipsoid  $E_{k+1} = E_{k+1}(A_{k+1}, \alpha_{k+1})$  ist genau das gesuchte Löwner-John Ellipsoid. Geometrisch kann die Konstruktion von  $E_{k+1}$  folgendermaßen interpretiert werden. Mit  $c \neq 0$ , kann das Maximum und Minimum von  $cx$  über  $E_k$  explizit angegeben werden, siehe Satz 9.27. Nun sieht man leicht, dass der Mittelpunkt des neuen Ellipsoids  $E_{k+1}$  auf dem Geradenstück zwischen  $\alpha_k$  und  $z_{\min}$  liegt. Die Länge des Geradenstücks ist  $\|b\|_2$  und  $\alpha_{k+1}$  erreicht man von  $\alpha_k$  aus, indem man einen Schritt der Länge  $\frac{1}{n+1} \|b\|_2$  in Richtung  $-b$  macht. Der Punkt  $z_{\min}$  ist enthalten im Durchschnitt des Randes des Ellipsoids  $E_{k+1}$  mit dem Rand von  $E'_k$ .

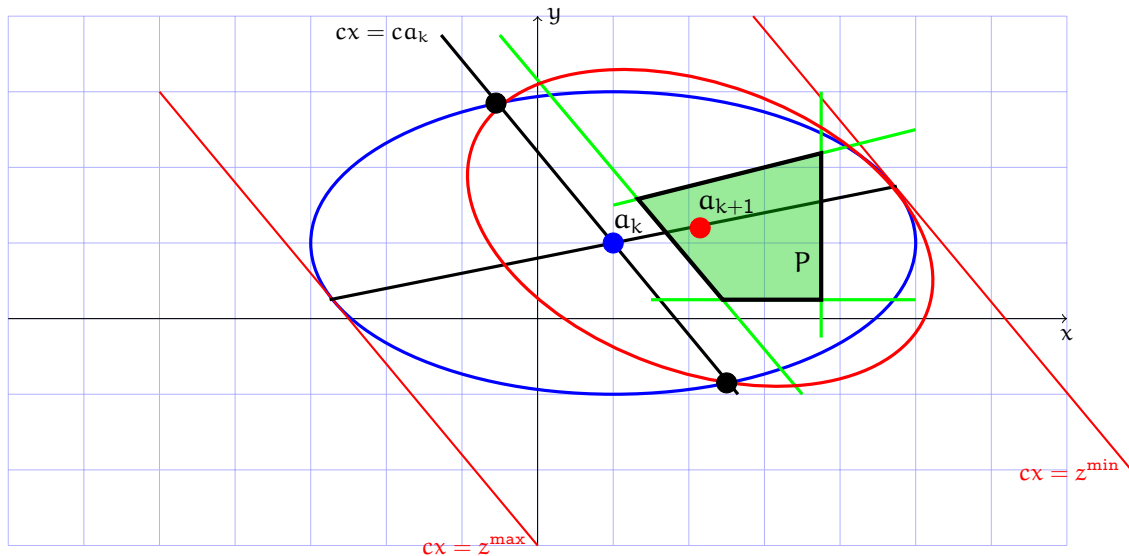


Abbildung 9.5:  $k$ -te Iteration der Ellipsoid-Methode.

Wir müssen zeigen, dass die Ellipsoid Methode nach polynomiell vielen Schritten terminiert. Dazu werden wir ein Volumenargument benutzen: In jeder Iteration konstruieren wir eine Ellipse mit strikt geringerem Volumen. Die **Geschwindigkeit** der Volumenabnahme werden wir im Folgenden untersuchen.

**Lemma 9.31.** Sei  $E_k = E(A_k, \alpha_k)$  ein Ellipsoid und  $E_{k+1} = E(A_{k+1}, \alpha_{k+1})$  das Löwner-John Ellipsoid, welches durch die Formeln (9.17),(9.18),(9.19) konstruiert wurde, wobei  $c \neq 0$  gilt. Dann gilt

$$\frac{\text{Vol}(E_{k+1})}{\text{Vol}(E_k)} = \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \left( \frac{n^2}{n^2-1} \right)^{n-1} \right)^{1/2} < e^{-1/(2(n+1))} < 1.$$

*Beweis.* Wir werden zunächst den Fall untersuchen dass das Ellipsoid  $E_k$  die Einheitskugel ist (gleichbedeutend mit  $k = 1$ ) und dass der Vektor  $c$  gegeben ist durch

$$c = (-1, 0, \dots, 0).$$

Somit erhalten wir durch Benutzung von (9.17),(9.18),(9.19):

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (-1, 0, \dots, 0)^\top \\ \mathbf{a}_{k+1} &= \mathbf{a}_k - \frac{1}{n+1} \mathbf{b} = \left( \frac{1}{n+1}, 0, \dots, 0 \right)^\top \\ \mathbf{A}_{k+1} &= \frac{n^2}{n^2-1} \left( \mathbf{I} - \frac{2}{n+1} (-1, 0, \dots, 0)^\top (-1, 0, \dots, 0) \right) \\ &= \text{diag} \left( \frac{n^2}{(n+1)^2}, \frac{n^2}{n^2-1}, \dots, \frac{n^2}{n^2-1} \right). \end{aligned}$$

Für das Volumenverhältnis der beiden Ellipsoiden  $E_k = E(\mathbf{I}, 0)$  und  $E_{k+1}$  erhalten wir  $E_k := E(\mathbf{I}, 0)$  und  $E_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}(E_{k+1})}{\text{Vol}(E_k)} &= \frac{\sqrt{\det \mathbf{A}_{k+1}} V_n}{\sqrt{\det \mathbf{A}_k} V_n} = \sqrt{\det \mathbf{A}_{k+1}} = \left( \frac{n^{2n}}{(n+1)^2 (n^2-1)^{n-1}} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{n^2}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Wir formen nun um und schätzen ab:

$$\begin{aligned} \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{n^2}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} &= \left( 1 + \frac{-1}{n+1} \right) \left( 1 + \frac{1}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\leq \left( e^{\frac{-1}{n+1}} \right) \left( e^{\frac{1}{n^2-1}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (9.20) \\ &= \left( e^{\frac{-1}{n+1}} \right) \left( e^{\frac{1}{2(n+1)}} \right) \\ &= e^{\frac{-1}{2(n+1)}}, \end{aligned}$$

wobei (9.20) durch  $1+x \leq e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgt. (Man überprüfe, dass die Funktion  $f(x) := 1+x - e^x$  ihr globales Maximum in  $x=0$  annimmt.)

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall mit beliebigem  $E_k$  und  $c \neq 0$ . Wir werden den allgemeinen Fall durch Angabe einer geeigneten affinen Transformation von  $E_k$  und  $E_{k+1}$  auf den bisher betrachteten Fall zurückführen.

Sei  $F := B_1(0)$  und  $F'$  das Ellipsoid, welches wie im ersten Fall durch anwenden der Regeln (9.17),(9.18),(9.19) aus  $F$  entsteht, wobei hier noch  $c = (-1, 0, \dots, 0)$  vorausgesetzt wird.

Mit Satz 9.23 folgt, dass  $E_k$  die Form

$$E_k(\mathbf{A}_k, \mathbf{a}_k) = \mathbf{A}_k^{1/2} B_1(0) + \mathbf{a}_k = \mathbf{A}_k^{1/2} F + \mathbf{a}_k$$

hat.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine orthogonale Matrix  $Q$  existiert, welche

$A_k^{1/2}c^\top$  in ein Vielfaches des Vektors  $(-1, 0, \dots, 0)$  rotiert, d.h.

$$(-1, 0, \dots, 0)^\top = \frac{1}{\|A_k^{1/2}c^\top\|_2} QA_k^{1/2}c^\top.$$

Die gesuchte (bijektive) affine Transformation hat also die Form

$$T(x) = A_k^{1/2}Q^\top x + a_k,$$

mit Inversem

$$T^{-1}(x) = QA_k^{-1/2}(x - a_k).$$

Man prüfe nun nach dass gilt

$$T(F) = E_k \text{ und } T(F') = E_{k+1}.$$

Nun benutzen wir dass das **relative** Volumentverhältnis von zwei Ellipsoiden nach einer affinen Transformation konstant bleibt (siehe (9.15)) und erhalten für die beiden Ellipsoide

$$\frac{\text{Vol}(E_{k+1})}{\text{Vol}(E_k)} = \frac{\text{Vol}(T(F'))}{\text{Vol}(T(F))} = \frac{\text{Vol}(F')}{\text{Vol}(F)} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \leq e^{\frac{-1}{2(n+1)}}.$$

□

Wir müssen nun auch zeigen, dass wir nicht “zu viele” Iterationen benötigen, um zu entscheiden ob das Polytop  $P$  leer ist oder nicht. Dazu werden wir im Folgenden eine untere Schranke an das Mindestvolumen eines volldimensionalen Polytops herleiten.

**Lemma 9.32.** Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx \leq d\}$  ein volldimensionales Polytop und die Matrix  $C$  sowie der Vektor  $d$  ganzzahlig. Dann gilt

$$\text{Vol}(P) \geq 2^{-(n+1)\langle C \rangle + n^3}.$$

*Beweis.* Ein volldimensionales Polytop in  $\mathbb{R}^n$  enthält  $n + 1$  **Ecken**, die affin unabhängig sind.

Die konvexe Hülle dieser Punkte spannt ein Simplex  $S := \text{co}(\{v_0, \dots, v_n\}) \subseteq P$  auf. Somit ist das Volumen von  $P$  mindestens so groß wie das von  $S$ . Für das Volumen von Simplexes gibt es eine geschlossene Formel

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v_0 & \dots & v_n \end{pmatrix} \right|.$$

(Diese Formel ergibt sich wiederum durch den Transformationssatz, da  $S$  eine affine Transformation des Einheitssimplex  $S_n := \{x \in \mathbb{R}_+^n | \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$  ist mit Volumen  $\text{Vol}(S_n) = \frac{1}{n!}$ .)

Nun benutzen wir, dass für jede Ecke  $v_i$  des Polytops  $P$  die  $j$ -te Komponente die Form  $\frac{\det B_{ij}}{\det B_i}$  hat, wobei  $B_i$  eine reguläre Teilmatrix von  $C$  ist und  $B_{ij}$  eine Teilmatrix von  $(C, d)$  ist. Wir erhalten (unter Benutzung von  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$  für alle  $n \times n$  Matrizen  $A, B$ ):

$$\begin{aligned} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v_0 & \dots & v_n \end{pmatrix} \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \det B_0 & \dots & \det B_n \\ \det B_{01} & \dots & \det B_{n1} \\ \dots \\ \det B_{0n} & \dots & \det B_{nn} \end{pmatrix} \text{diag} \left( \frac{1}{\det B_0}, \dots, \frac{1}{\det B_n} \right) \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\det B_0 \cdots \det B_n} \right| \left| \det \begin{pmatrix} \det B_0 & \dots & \det B_n \\ u_0 & \dots & u_n \end{pmatrix} \right|, \end{aligned}$$

wobei  $u_0, \dots, u_n$  Vektoren im  $\mathbb{Z}^n$  sind.

Wir wissen dass der zweite Ausdruck eine positive ganze Zahl grösser gleich 1 ist. Wir müssen somit nur  $\left| \frac{1}{\det B_0 \cdots \det B_n} \right|$  nach unten abschätzen. Aus Lemma 9.13 folgt

$$|\det B_j| \leq 2^{\langle B_j \rangle - n^2} - 1 \leq 2^{\langle C \rangle - n^2} \text{ für alle } j = 0, \dots, n,$$

somit gilt

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ v_0 & \dots & v_n \end{pmatrix} \right| \geq \left| \frac{1}{\det B_0 \cdots \det B_n} \right| \geq \left( 2^{\langle C \rangle - n^2} \right)^{-(n+1)}.$$

Mit der Ungleichung  $n! \leq 2^{n^2}$  gilt schlussendlich

$$\text{Vol}(P) \geq \text{Vol}(S) \geq \frac{1}{n!} \left( 2^{\langle C \rangle - n^2} \right)^{-(n+1)} \geq 2^{-(n+1)\langle C \rangle + n^3}.$$

□

Zuletzt gilt es noch, die Laufzeit der Ellipsoid-Methode abzuschätzen. Wie in Lemma 9.31 gezeigt, wird in jeder Iteration das Volumen des Ellipsoids um mindestens den Faktor  $e^{\frac{-1}{2(n+1)}}$  reduziert. Es gilt also abzuschätzen wie viele Iterationen bei einem Anfangsvolumen des Ellipsoids  $B_R(0)$  (mit  $R := \sqrt{n} 2^{\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2}$ ) nötig sind, um ein Volumen von maximal  $2^{-(n+1)\langle C \rangle + n^3}$  zu erreichen.

**Lemma 9.33.** Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$  ein volldimensionales Polytop und die Matrix  $C$  sowie der Vektor  $d$  ganzzahlig. Sei  $E_0 = B_R(0)$  mit  $R := \sqrt{n} 2^{\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2}$  das initiale Ellipsoid. Falls  $N := (2n + 2) \left( (n + 1)\langle C \rangle - n^3 + n(\langle C \rangle + \langle d \rangle) \right)$  Iterationen der Neuberechnung des Ellipsoids (vgl. Ellipsoid-Methode) ausgeführt werden, gilt

$$\text{Vol}(E_N) < 2^{-N/(2n+2)+nT} \leq \text{Vol}(P),$$

| wobei  $T := \langle C \rangle + \langle d \rangle$ .

*Beweis.* Es gilt dass  $E_0 = B_R(0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq R\}$ , wobei  $R := \sqrt{n}2^{\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2}$  (vgl. Lemma 9.30).

Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E_0) &\leq 2^n R^n = n^{n/2} 2^{n(\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^3 + n)} = 2^{n(\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^3 + n + n \log_2(n)/2} \\ &= 2^{n(\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2 + 1 + \log_2(n)/2)} < 2^{n(\langle C \rangle + \langle d \rangle)} := 2^{nT}, \end{aligned}$$

wobei  $T := \langle C \rangle + \langle d \rangle$ .

In jedem Schritt wird das Volumen des Ellipsoids um den Faktor  $e^{\frac{-1}{2(n+1)}}$  reduziert. Somit gilt

$$\text{Vol}(E_N) < e^{-N/(2n+2)} \text{Vol}(E_0) < 2^{-N/(2n+2) + nT}.$$

Wir müssen nun  $N$  gross genug wählen, so dass gilt

$$\begin{aligned} 2^{-N/(2n+2) + nT} &< 2^{-(n+1)\langle C \rangle + n^3} \\ \Leftrightarrow -N/(2n+2) + nT &< -(n+1)\langle C \rangle + n^3 \\ \Leftrightarrow N/(2n+2) &> (n+1)\langle C \rangle - n^3 + nT \\ \Leftrightarrow N &> (2n+2) \left( (n+1)\langle C \rangle - n^3 + nT \right). \end{aligned}$$

□

## 9.7 Polynomialität der Ellipsoid-Methode

Wir können nun die Ellipsoid-Methode formal hinschreiben:

1. Initialisierung:

- (a)  $k := 0$ ,
- (b)  $N := (2n+2) \left( (n+1)\langle C \rangle - n^3 + n(\langle C \rangle + \langle d \rangle) \right)$ ,
- (c)  $A_0 := R^2 I$  mit  $R := \sqrt{n}2^{\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2}$ ,
- (d)  $a_0 := 0$

2. Allgemeiner Schritt:

- (a) Falls  $k = N$  STOP:  $P = \emptyset$ .
- (b) Gilt  $a_k \in P$ , dann STOP.

(c) Gilt  $a_k \notin P$ , dann gibt es eine verletzte Ungleichung

$$ca_k > \gamma.$$

Setze:

$$\begin{aligned} b &:= \frac{1}{\sqrt{cA_k c^\top}} A_k c \\ a_{k+1} &:= a_k - \frac{1}{n+1} b \\ A_{k+1} &:= \frac{n^2}{n^2-1} \left( A_k - \frac{2}{n+1} b b^\top \right) \\ k &:= k+1. \end{aligned}$$

(d) Gehe zu (2).

Die Korrektheit der Methode folgt aus den bisher gezeigten Lemmata. Um die Laufzeit der Methode abzuschätzen müssen wir noch überprüfen, wie viele Elementaroperationen während der Initialisierung und des allgemeinen Schrittes notwendig sind.

Die Initialisierung kann in  $O(n \cdot m)$  Schritten ausgeführt werden.

In der Ausführung von Schritt (2) müssen wir  $a_k$  in das System  $Cx \leq d$  einsetzen, was  $O(m \cdot n)$  viele elementare Operationen erfordert. Für die Aktualisierung von  $a_k$  benötigen wir  $O(n)$  viele Operationen, für die von  $A_k$  benötigen wir  $O(n^2)$  viele Operationen.

Die Anzahl der Aufrufe von Schritt (2) ist maximal

$$N := (2n+2) \left( (n+1)\langle C \rangle - n^3 + n(\langle C \rangle + \langle d \rangle) \right) = O(n^2(\langle C \rangle + \langle d \rangle)).$$

Insgesamt erhalten wir eine obere Schranke an die Gesamtlaufzeit von  $O(m \cdot n^4(\langle C \rangle + \langle d \rangle))$ , welche **polynomiell** in der Eingabegrösse ist.

## 9.8 Nicht-Volldimensionale Polytope

Wir haben bisher vorausgesetzt dass die auftretenden Polytope volldimensional sind. Es wird nun gezeigt, dass diese Annahme ohne Einschränkung ist.

Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx \leq d\}$  ein Polytop mit  $C \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  und  $d \in \mathbb{Z}^m$ .

Wir definieren nun ein leicht gestörtes Polytop  $P(\epsilon)$  wie folgt:

$$P(\epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n | Cx \leq d + \epsilon e\}, \quad (9.21)$$

wobei  $e = (1, \dots, 1)^\top$  und

$$\epsilon := \frac{2^{-(2\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2 + 1)}}{n+1}. \quad (9.22)$$

Wir zeigen nun, dass  $P = \emptyset \Leftrightarrow P(\epsilon) = \emptyset$  und falls  $P \neq \emptyset$ , dann ist  $P(\epsilon)$  volldimensional. Somit reicht es die Ellipsoid-Methode auf  $P(\epsilon)$  anzuwenden.

**Lemma 9.34.** Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\}$  ein Polytop mit  $C \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  und  $d \in \mathbb{Z}^m$  und  $P(\epsilon)$  definiert wie in (9.21) mit  $\epsilon$  wie in (9.22). Dann gilt:  $P = \emptyset \Leftrightarrow P(\epsilon) = \emptyset$  und falls  $P \neq \emptyset$ , dann ist  $P(\epsilon)$  volldimensional.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $P = \emptyset \Rightarrow P(\epsilon) = \emptyset$ . (Die Rückrichtung  $P = \emptyset \Leftarrow P(\epsilon) = \emptyset$  ist trivial).

$P = \emptyset$  impliziert dass folgendes LP

$$\min\{0 \cdot x \mid Cx \leq d\}$$

unzulässig ist und somit ist das duale LP

$$\max\{-\lambda d \mid \lambda C = 0, \lambda \geq 0\}$$

unbeschränkt. (Hier wird benutzt dass  $\lambda = 0$  ein zulässige Lösung des dualen LPs ist und somit folgt mit Satz (6.7), dass das duale LP unbeschränkt ist.)

Wir definieren eine zusätzliche Hyperebene durch

$$\lambda d = -1.$$

Somit erhalten wir ein nichtleeres Polyeder im  $\mathbb{R}^m$  beschrieben durch

$$\lambda C = 0$$

$$\lambda d = -1$$

$$\lambda \geq 0.$$

Sei  $\lambda$  eine Ecke des so beschriebenen Polyeders. Wir können die Komponenten von  $\lambda_i$  abschätzen durch

$$\lambda_i \leq 2^{(2\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2)},$$

wobei wir die Kodierungslänge der rechten Seite abschätzen durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \langle C \rangle.$$

Weil  $\lambda$  eine zulässige Basislösung ist, können maximal  $n + 1$  viele Komponenten (Anzahl der Restriktionen viele) positiv sein. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \leq (n + 1) 2^{(2\langle C \rangle + \langle d \rangle - n^2)}.$$

Weiterhin gilt mit der Wahl von  $\epsilon$ :

$$\lambda(d + \epsilon\epsilon) = -1 + \lambda\epsilon\epsilon = -1 + \epsilon \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq -1 + \epsilon(n+1)2^{(2\langle C \rangle + (d) - n^2)} \leq -1 + 1/2 < 0.$$

Daher bleibt das zu  $P(\epsilon)$  duale Problem unbeschränkt (jede Lösung  $t\lambda$  für  $t > 0$  bleibt zulässig) und somit ist auch  $P(\epsilon) = \emptyset$ .

Es bleibt die Aussage ( $P \neq \emptyset \Rightarrow P(\epsilon)$  ist volldimensional) zu zeigen.

Sei  $x \in P$ . Dann ist folgendes Polytop  $S$  vollständig in  $P(\epsilon)$  enthalten:

$$S := \{y \in \mathbb{R}^n \mid x_i - \bar{\epsilon} \leq y_i \leq x_i + \bar{\epsilon} \text{ für alle } i = 1, \dots, n\},$$

wobei

$$\bar{\epsilon} := \frac{\epsilon}{\langle C \rangle}.$$

Sei  $y \in S$ , dann gilt

$$Cy \leq Cx + \bar{\epsilon}\tilde{C}e \leq d + \epsilon\epsilon,$$

wobei  $\tilde{C}$  die Matrix bezeichnet, bei der die Einträge  $c_{ij}$  durch  $|c_{ij}|$  ersetzt wurden.

Das Polytop  $S$  hat Volumen  $\text{Vol}(S) = (2\bar{\epsilon})^n > 0$ . □

## 9.9 Implementation

In der Initialisierung benutzen wir die Wurzel um  $R$  zu berechnen, was zu irrationalen Zahlen führen kann. Wir brauchen jedoch nur den Wert  $R^2$  in der Definition des Anfangsellipsoids, daher kann das Problem behoben werden.

Es gibt jedoch einige Schwierigkeiten in Schritt (2), wo wir auch die Wurzel benutzt haben. Eine bewährte Methode, ohne irrationale Zahlen auszukommen, ist das "Abschneiden" einer Zahl nach der  $p$ -ten Kommastelle. Diese Methode hat jedoch die theoretische Schwäche dass die Invariante "neues Ellipsoid enthält Polytop" verletzt sein kann. Um diesen Fehler zu umgehen, konstruiert man im allgemeinen Schritt nicht mehr das Löwner-John Ellipsoid, sondern ein Ellipsoid welches mit rationalen Zahlen (von polynomieller Länge) dargestellt werden kann und dann ein wenig grösser ist als das Löwner-John Ellipsoid. Hier gilt es nun, die richtige Balance zwischen einer effizienten Darstellung des neuen Ellipsoids (also durch rationale Daten polynomieller Länge) und dem verursachten Volumenanstieg (verglichen zum Volumen des Löwner-John Ellipsoids) zu erreichen. Lange Rede kurzer Sinn: All dies ist möglich, jedoch sehr technisch daher verzichten wir hier auf Details.

## Kapitel 10

# Lineare Ganzzahlige Optimierung

In diesem letzten Abschnitt beschäftigen wir uns (sehr oberflächlich) mit der linearen Optimierung über Teilmengen  $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Der fundamentale Unterschied zur linearen Optimierung besteht in der Forderung dass eine zulässige Lösung  $x \in S$  nur **ganzzahlige** Einträge haben darf. Diese Annahme “zerstört” alle wesentlichen topologischen Eigenschaften der Lösungsmenge, die wir in vorherigen Abschnitten benutzt hatten um z.B. die Dualitätstheorie zu entwickeln und auch die Korrektheit des Simplexverfahrens zu zeigen. Allgemein betrachten wir folgende Problemklasse.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } cx \\ & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned} \tag{IP}$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c^T \in \mathbb{R}^n$ . Die zulässige Menge kann folgendermassen geschrieben werden

$$S := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\} \cap \mathbb{Z}_+^n.$$

Falls  $S \neq \emptyset$  schreiben wir  $z_{IP} := \min\{cx : x \in S\}$ .

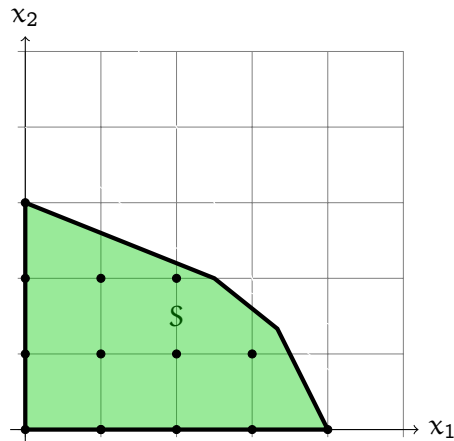
**Beispiel 10.1.** Wir betrachten ein Beispiel, das wir auch schon in der Einführung zur linearen Optimierung gesehen hatten. Die Menge  $S$  sei gegeben durch

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \cap \mathbb{Z}^n,$$

wobei  $Ax \leq b, x \geq 0$  wie unten definiert ist.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ 6x_1 + 15x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Menge  $S$  lässt sich nun leicht angeben, siehe unten.

Abbildung 10.1: Beispiel einer ganzzahligen Lösungsmenge  $S$ .

Wir werden nun zwei fundamentale **Heuristiken** kennenlernen, die ein solches IP lösen. (Das Wort “Heuristik” wird häufig für solche Algorithmen verwendet, die wenig Struktur bzw. keine beweisbar polynomielle Laufzeit und/oder keine Korrektheit im Sinne der beweisbaren Optimalität der berechneten Lösung aufweist.)

## 10.1 Die Branch & Bound Methode

**Definition 10.2.** Eine Familie von Mengen  $\{S^i, i = 1, \dots, k\}$  ist eine **Aufteilung** von  $S$ , falls  $\cup_{i=1}^k S^i = S$ . Eine Aufteilung ist eine **Partition**, falls zusätzlich  $S^i \cap S^j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$  gilt.

**Lemma 10.3.** Sei

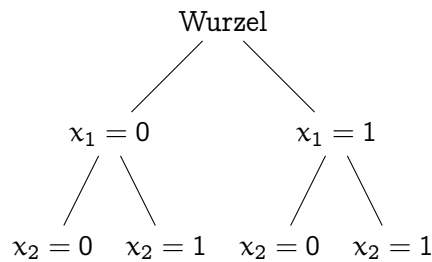
$$z_{IP}^i = \min\{cx : x \in S^i\}, \quad (\text{IP}^i)$$

wobei  $\{S^i, i = 1, \dots, k\}$  eine Aufteilung von  $S$  ist. Dann gilt,

$$z_{IP} = \min\{z_{IP}^i : i = 1, \dots, k\}.$$

**Beispiel 10.4.** Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem mit **binären** Variablen.

$$\begin{aligned} \text{minimize } & cx && (\text{IP}) \\ \text{subject to } & Ax \leq b \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$



Die Branch & Bound Methode berechnet iterativ Aufteilungsmengen  $S^i$  und versucht dann das auf  $S^i$  reduzierte IP zu lösen. Man kann sich die Vorgehensweise der Methode an einen **Enumerationsbaum** veranschaulichen. Wir starten mit dem Wurzelknoten  $S$  und bestimmen eine Aufteilung von  $S$  in Teilmengen  $S^i$ . Jede Aufteilungsmenge  $S^i$  wird mit einem Knoten assoziiert und mit einer Kante zur Wurzel  $S$  verbunden. Dieses Prinzip wird nun iterativ und top-down auf jeden Kindknoten  $S^i$  angewendet. Falls eine optimale Lösung auf  $S^i$  gefunden wird, so weiss man, dass keine weitere Aufteilung von  $S^i$  nötig ist. Man spricht davon, dass im assoziierten **Enumerationsbaum** der entsprechende Knoten **abgeschnitten** wird.

**Lemma 10.5.** Der Enumerationsbaum kann an einem Knoten  $S^i$  abgeschnitten werden, falls eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1. Unzulässigkeit:  $S^i = \emptyset$ .
2. Optimalität: Eine Optimallösung für  $IP^i$  ist bekannt.
3. Optimalwertdominanz:  $z_{IP}^i \geq \bar{z}_{IP}$ , wobei  $\bar{z}_{IP}$  der Wert einer beliebigen bekannten zulässigen Lösung des IPs ist.

Wir werden nun Lemma 10.5 dazu benutzen, einen exakten Algorithmus zu entwerfen. Dabei werden wir allerdings nicht die Unterprobleme  $IP^i$  explizit lösen, sondern **Relaxierungen** verwenden.

**Definition 10.6.** Eine **Relaxierung** des Problems  $IP^i$  ist ein Optimierungsproblem

$$\min\{z_R^i(x) \mid x \in S_R^i\}, \quad (RP^i)$$

für das gilt:

$$S^i \subseteq S_R^i \text{ und } z_R^i(x) \leq cx \text{ für alle } x \in S^i.$$

**Lemma 10.7.** Der Enumerationsbaum kann am Knoten  $S^i$  abgeschnitten werden, falls eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1.  $RP^i$  ist unzulässig.
2. Eine Optimallösung  $x_R^i$  für  $RP^i$  erfüllt  $x_R^i \in S^i$  und  $z_R^i(x_R^i) = cx^i$

3. Werte-Dominanz:  $z_R^i \geq \bar{z}_{IP}$ , wobei  $\bar{z}_{IP}$  ein beliebiger Zielfunktionswert einer zulässigen Lösung des IPs ist.

*Beweis.* 1. impliziert  $S^i = \emptyset$ . 2. impliziert, dass  $x_R^i$  das Problem  $IP^i$  löst. 3. impliziert  $z_{IP}^i \geq z_{IP}$ .  $\square$

## 10.2 LP-Basierte Relaxierungen

Wir entwickeln nun einen Enumerationsbaum bei dem eine LP-basierte Relaxierung benutzt wird.

Für den Wurzelknoten betrachten wir als zulässige Menge  $S_{LP}^0 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$  und definieren  $z_R(x) = cx$ .

Angenommen die LP Relaxierung am Knoten  $i$  ist gegeben durch

$$z_{LP}^i = \min\{cx : x \in S_{LP}^i\}, \quad (LP^i)$$

wobei  $S_{LP}^i = \{x \in \mathbb{R}_+^n : A^i x \leq b^i\}$ . Falls  $LP^i$  eine Optimallösung besitzt, bezeichnen wir diese mit  $x^i$ . Die Bedingungen um den Knoten  $i$  abzuschneiden ergeben sich durch:

1.  $S_{LP}^i = \emptyset$  (unzulässig).
2. Optimale Lösung, falls  $x^i \in \mathbb{Z}_+^n$ .
3. Werte-Dominanz:  $z_{LP}^i \geq \bar{z}_{IP}$ , wobei  $\bar{z}_{IP}$  ein beliebiger Zielfunktionswert einer zulässigen Lösung des IPs ist.

Wir müssen nun noch erklären, wie wir die einzelnen Knoten des Enumerationsbaums konstruieren, bzw. wie die Unterteilung konstruiert wird. Das wichtigste Verfahren ist die sog. **Variablen-Dichotomie**: falls  $x^i$  fraktional ist, wählen wir eine fraktionale Komponente  $x_j^i$  und fügen die Bedingungen

$$x_j \leq \lfloor x_j^i \rfloor \text{ and } x_j \geq \lceil x_j^i \rceil + 1.$$

hinzu.

**Satz 10.8.** Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$  ein Polytop. Dann ist ein Enumerationsbaum, der durch Variablen-Dichotomie erstellt wurde, stets endlich. Sei

$$\omega_j = \lceil \max\{x_j : x \in P\} \rceil.$$

Dann gilt, dass kein Pfad des Baums mehr als  $\sum_{j=1}^n \omega_j$  Kanten enthält.

*Beweis.* Sobald wir für einen Pfad die Nebenbedingung  $x_j \leq d$  für ein  $d \in \{0, \dots, \omega_j - 1\}$  hinzugefügt haben, können nur noch Nebenbedingungen des Typs  $x_j \leq d'$  für  $d' \in \{0, \dots, d - 1\}$  und  $x_j \geq \bar{d}$  für  $\bar{d} \in \{1, \dots, d\}$  entlang des Pfades auftreten.

Somit folgt dass die grösstmögliche Anzahl von Nebenbedingungen, welche  $x_j$  beschränken abgeschätzt werden kann durch das Auftreten der Nebenbedingungen  $x_j \leq d$  für alle  $d \in \{0, \dots, \omega_j - 1\}$  oder  $x_j \geq d$  für alle  $d \in \{1, \dots, \omega_j\}$ , oder  $x_j \geq d$  für alle  $d \in \{1, \dots, \alpha\}$  und  $x_j \leq d$  für alle  $d \in \{\alpha, \dots, \omega_j - 1\}$ . Insgesamt ist diese Anzahl durch  $\omega_j$  beschränkt und somit folgt die behauptete Schranke von  $\sum_{j=1}^n \omega_j$ .  $\square$

### Beispiel 10.9.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } x_1 - 2x_2 && \text{(IP)} \\ & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x \in \mathbb{Z}_+^2, \end{aligned}$$

Die LP-Lösung des Wurzelknotens  $S_{LP}^0$  ergibt  $cx^0 = -7/2$  mit  $x^0 = (3/2, 5/2)$ . Mit  $x_2^0 = 5/2$  können wir  $S^0$  unterteilen in  $S^1 = \{x \in S^0 : x_2 \leq 2\}$  und  $S^2 = \{x \in S^0 : x_2 \geq 3\}$ . Wir lösen die nachfolgenden Relaxierungen  $S_{LP}^1$  und  $S_{LP}^2$  und erhalten  $cx^1 = -13/4$  für  $x^1 = (3/4, 2)$ , und  $S^2 = \emptyset$ . Somit kann  $S^2$  abgeschnitten werden. Wir unterteilen  $S^1$  in  $S^{11} = \{x \in S^1 : x_1 \leq 0\}$  und  $S^{12} = \{x \in S^1 : x_1 \geq 1\}$ . Die zugehörigen optimalen Lösungen der LP Relaxierungen sind  $cx^{11} = -3$  für  $x^3 = x^{11} = (0, 3/2)$  und  $cx^{12} = -3$  für  $x^4 = x^{12} = (1, 2)$ . Weil nun  $x^4 = x^{12}$  ganzzahlig ist können wir  $\bar{z}_{IP} = -3$  setzen und  $S^{11}$  abschneiden.

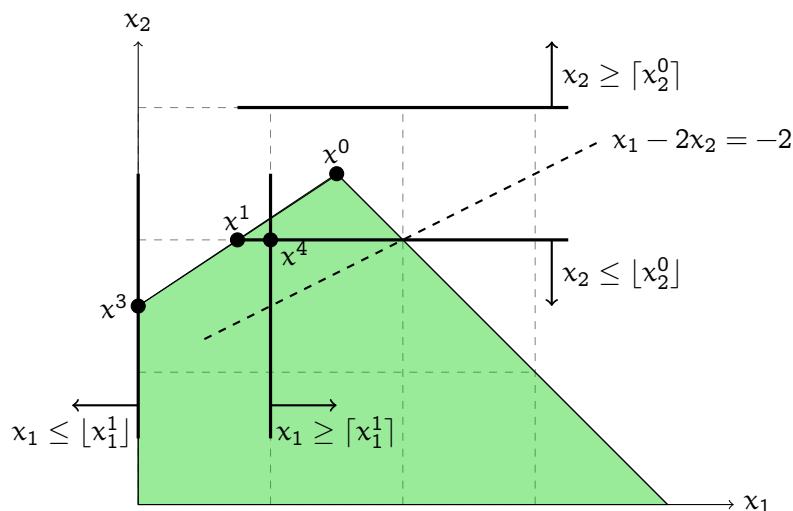


Abbildung 10.2: Beispiel des LP-basierten Branch & Bound Verfahrens.

## 10.3 Schnittebenenverfahren

Wir wollen abschliessend noch das **Schnittebenenverfahren** beschreiben. Die Idee ist folgende: Zu einem ganzzahligen Problem (IP) lösen wir die zugehörige LP Relaxierung und

überprüfen, ob die gefundene Ecke (also eine optimale Basis-Lösung) ganzzahlig ist. Falls ja, sind wir fertig, falls nicht, gilt es, eine gültige Ungleichung zu finden die die Basis-Lösung **abschneidet**.

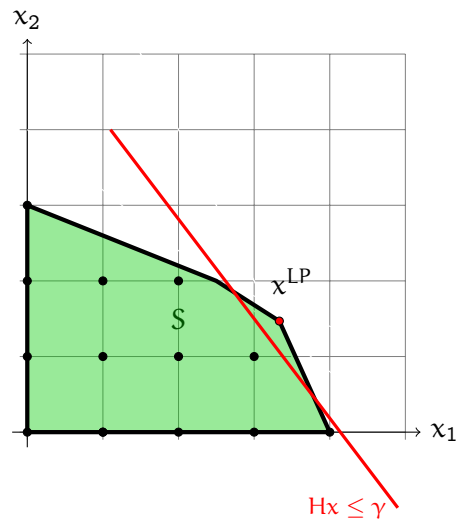


Abbildung 10.3: Beispiel einer Schnittebene  $Hx \leq \gamma$ .

Wir erhalten folgenden Algorithmus für das Problem (IP):  $\min\{cx \mid x \in S\}$  wobei  $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^n\}$ :

1. Setze  $k = 0$ . Setze  $P^0$  als relaxierte zulässige Menge von  $S$  indem die Ganzzahligkeit weggelassen wird.

Iterativ:

- (a) Berechne eine optimale Lösung  $x^k$  der LP Relaxierung bezüglich  $P^k$ .
- (b) Falls  $x^k \in \mathbb{Z}^n$ , STOP: optimale Lösung gefunden.
- (c) Falls  $x^k \notin \mathbb{Z}^n$ , finde eine trennende Hyperebene  $Hx \leq \gamma$  mit  $x^k \notin P^k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid Hx \leq \gamma\} \supseteq S$ .
- (d)  $P^{k+1} \leftarrow P^k \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid Hx \leq \gamma\}$
- (e)  $k \leftarrow k + 1$