

Mathematische Methoden zum
Zusammensetzen einzeln erfasster
dreidimensionaler Punktwolken für
eine hoch genaue Vermessung großer
optischer Oberflächen

Dr. Oleg Smirnow, Dr. Alexander Zimmermann

Fakultät für Informatik und Mathematik, Universität Passau
{oleg.smirnow,alexander.zimmermann}@uni-passau.de



Technischer Bericht, Nummer MIP-1211
Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau
November 2012

Einleitung

In diesem Bericht werden die mathematischen Methoden beschrieben, die beim Zusammensetzen einzelner Messpatches (einzeln erfasster dreidimensionaler Punktwolken) zu einer hoch genauen optischen Gesamtoberfläche notwendig sind. Die Arbeiten dazu wurden im Rahmen des Projektes Optasens (Combination and evaluation of different optical and tactile sensors and measuring methods for the analysis and global form-measurement on optical surfaces) durchgeführt.

Unter Stitching wird hier¹ das Zusammenführen einzelner Messpatches (Punktwolken, die durch das Vermessen von Oberflächenfragmenten erhalten wurden) zu einer kompletten Oberfläche verstanden. Die Notwendigkeit der Entwicklung des Stitching-Verfahrens wurde durch die Gegebenheiten der Anlage zur Vermessung von großen Oberflächen, deren Variante in Abbildung 1 schematisch dargestellt ist, hervorgerufen.

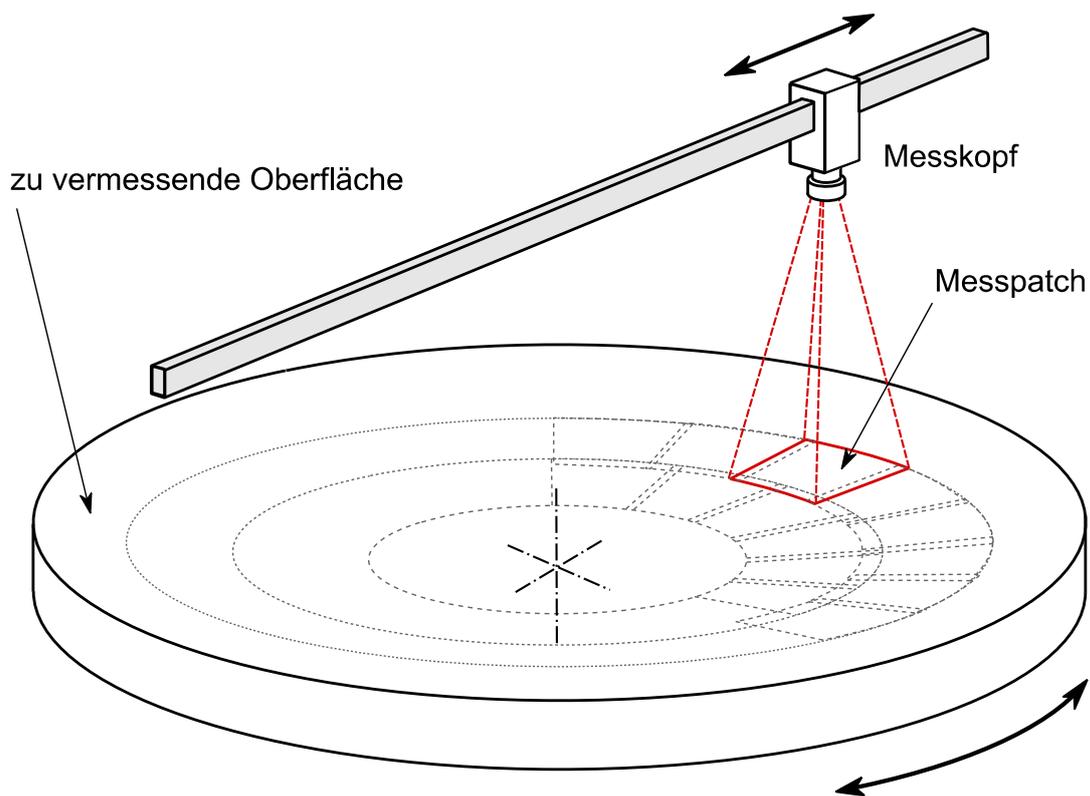


Abbildung 1: Schema der Anlage zur Vermessung von großen runden Oberflächen

Die Abbildung 1 zeigt einen runden Prüfling, der auf einem um die vertikale Achse rotierenden Tisch ruht. Der Messkopf kann über der zu vermessenden Prüflingsoberfläche radial bezüglich der

¹ Zum Vergleich: „Stitching (englisch stitch „nähen“, „heften“) bezeichnet in der Fotografie das Erstellen einer großen Fotografie aus verschiedenen kleineren Einzelaufnahmen“, <http://de.wikipedia.org/wiki/Stitching>.

Drehachse des Messtisches bewegt werden. Die Vorrichtung ermöglicht Aufnahmen der Messpatches, die ringförmig um die Rotationsachse des Messtisches angeordnet sind. Sind die Positionen des Prüflings auf dem Messtisch und des Messkopfes auf der radialen Führung fixiert, kann ein Oberflächenfragment hochgenau vermessen werden.² Dagegen kann die Positionierung des Prüflings auf dem Messtisch und die des Messkopfes bezüglich der Prüflingsoberfläche bei weitem nicht so genau vorgenommen werden. Das gilt vor allem dann, wenn der Prüfling große Ausmaße aufweist. Um eine möglichst genaue Rekonstruktion der Gesamtoberfläche zu erhalten, ist es deswegen notwendig, einzelne Patches aneinander anzupassen (zu stitchen). Der implementierte Stitching-Algorithmus beruht auf der Minimierung der Abstände zwischen einzelnen Patches in überlappenden Bereichen. Deshalb ist es zur erfolgreichen Anwendung des Stitching-Algorithmus zwingend notwendig, die Patch-Aufnahme so durchzuführen, dass die überlappenden Bereiche zwischen einzelnen Patches genügend groß sind. Insgesamt wurden folgende Voraussetzungen, die sich auf Grund der technischen Merkmale der Messanlage ergeben, bei der Entwicklung des Stitching-Algorithmus beachtet:

- Die einzelnen Messdatensätze (Messpatches) stehen in Form von Punktwolken (Menge von 3D-Oberflächenpunkten) zur Verfügung.
- Alle Patches befinden sich bereits in einem gemeinsamen Koordinatensystem, berechnet aus der Position des Messkopfes und den in lokaler Messung erhaltenen Koordinaten der Prüflingsoberfläche.
- Die Patches werden jeweils ringweise aufgenommen und bereitgestellt und überlappen sich gegenseitig jeweils zu ungefähr 50%.³
- Aufgrund der hohen Fertigungsgenauigkeit des Prüflings sind in keinem Patch irgendwelche Oberflächenmerkmale (Vertiefungen, Erhöhungen, Kratzer, usw.) vorhanden, die zur Orientierung oder Ausrichtung genutzt werden können. Aus gleichem Grund können auch keine Markierungen zur Erleichterung des Zusammenführens der Patches an der Prüflingsoberfläche angebracht werden. Deswegen war eine Algorithmik zu entwickeln, die die Punktwolken der einzelnen Messungen zusammensetzt und dabei nur die Lage der Oberflächenpunkte im Raum und keine zusätzliche Informationen nutzt. Mit anderen Worten: Da keine Informationen zur planaren (in der Ebene des Messtisches) Anpassung der Patches vorliegen, sollen die Änderungen der planaren Koordinaten der Patches während des Stitches möglichst gering gehalten werden. Die Passung einzelner Patches aneinander soll hauptsächlich durch die Veränderung der Höhenkoordinaten der Patch-Punkte erfolgen.

² Zum Vermessen eines Patches sind deflektometrische und/oder interferometrische Messverfahren im Rahmen des Projektes vorgesehen.

³ Der entwickelte Stitching-Algorithmus ermöglicht auch, Patches, die nicht ringförmig im Raum angeordnet sind, zu stitchen. Die Rolle eines Patch-Ringes übernimmt dabei die Patch-Schicht, zu der die Patches gehören, die in einem Schritt des Verfahrens gemeinsam aneinander angepasst werden.

Eingabedaten und Steuerungsparameter

Die Stitching-Software wurde in der Programmiersprache „C“ geschrieben, was eine leichte Portierung auf verschiedene Plattformen ermöglicht. Das ausführbare Programm (unter MS Windows „stitching.exe“, unter Linux „stitching“) stellt eine Konsolenapplikation dar, die beim Aufruf die Übergabe eines einzigen Parameters - den Namen der Konfigurationsdatei - erwartet. Ohne die Parameterübergabe wird der voreingestellte Name „stitching.cfg“ angenommen. Ein Beispiel der Konfigurationsdatei wird in Abbildung 2 gezeigt.

```
<<< PARAMETERS OF THE PATCH STITCHING >>>
```

```
[Patch Data]
```

```
Patch Parameter File = "data/patch_data.txt"    file with patch arrangement data
Patch Data Files = "data/patch%04d.txt"        patch files with point clouds
Transformation File = "data/transform3d.txt"    output file for calculated transformations
Stitching Log File = "data/stitching_log.txt"  stitching log file (may be not supplied)
Copy Parameters to Log File = 1                copy or not (=0) parameters (this file) to log file
Patch Outline File = "data/patch_outlines.txt" output file for patch outlines
```

```
[Calculation Parameters]
```

```
Number of Polygon Edges = 36                  number of edges in the polygon that restricts one patch
Overlap Point Step = 8.0                      distance in mm between points within patch overlapping area
Minimum Overlap Points = 30                   minimum points in an overlapping area
Rotation Axis Coordinates:                    x-/y-coordinates of rotation axis (parallel to z-axis)
0.0 0.0
Altitude Fitting Iterations = 25              maximum number of iterations of altitude patch fitting
Transform. Fitting Iterations = 30            maximum number of iterations of transformation patch fitting
Altitude Fitting Accuracy = 1.0E-7           accuracy of the altitude patch fitting in mm
Transform. Fitting Accuracy = 1.0E-8         accuracy of the transformation patch fitting in mm
Type of Patch Approximation = 2              types: 0 - quadric, 1 - sphere3par, 2 - sphere4par
Radius of spherical Surface = 6000.0          radius of spherical surface in mm (required for "sphere3par")
Patch Fitting Steps:                          0 - align, 1 - altitude fit, 2 - transform. fit, 3 - reduced tr.
0 1 2 3
```

Abbildung 2: Konfigurationsdatei des Stitching-Algorithmus

Die Sektion [Patch Data] enthält Namen aller Dateien, die von der Stitching-Software gelesen oder geschrieben werden. Im Abschnitt [Calculation Parameters] sind weitere Parameter, mit denen sich der Stitching-Algorithmus steuern lässt, zusammengefasst. Auf die Bedeutung der einzelnen Parameter wird nicht hier sondern dort, wo die entsprechenden algorithmischen Details behandelt werden, eingegangen. Der erste Parameter „Patch Parameter File“ bestimmt, aus welcher Datei die Daten bezüglich der Patch-Anordnung geladen werden müssen. Diese ASCII-Datei kann zwei verschiedene Formate besitzen:

```
patch ring points
    0    0    7921
    1    1    7883
    2    1    7934
    .    .    .
```

.
oder

```
patch ring filename
  0    0  ./stitching/data/patch0000.txt
  1    1  ./stitching/data/patch0001.txt
  2    1  ./stitching/data/patch0002.txt
. . . . .
. . . . .
```

Die ersten beiden Spalten „patch“ und „ring“ enthalten die Patch-Indizes und Ring-Indizes, zu denen die entsprechenden Patches gehören. In der ersten Format-Variante werden die Anzahlen der Patch-Punkte in der dritten Spalte angegeben und für diese Variante ist die Angabe „Patch Data Files“ in der Konfigurationsdatei, die Dateinamen mit Patch-Punkten festlegt, zwingend notwendig. In der zweiten Format-Variante werden die Patch-Dateinamen direkt aufgelistet, weswegen der Wert des Parameters „Patch Data Files“ ohne Bedeutung bleibt. Die Punktzahlen für die jeweiligen Patches werden in der zweiten Format-Variante im Unterschied zur ersten nicht vorgegeben und überprüft. Stattdessen werden einfach alle Punktkoordinaten aus den angegebenen Patch-Dateien eingelesen. Das Format einer Patch-Punktdatei ist denkbar einfach: Jede Dateizeile enthält x-, y- und z-Koordinaten eines Patch-Punktes in Millimeter, was das folgende Beispiel

```
-99.9950876  -99.7175922  +251.6780725
-97.6321210  -99.5950296  +251.6314011
-95.1693188  -99.7594770  +251.5886666
. . . . .
. . . . .
```

verdeutlicht.

Einzelne Schritte des Stitching-Verfahrens

Wie in der Einführung erwähnt wurde, basiert der vorliegende Stitching-Algorithmus auf der Minimierung der Abstände zwischen einzelnen Patches in überlappenden Bereichen. Bevor die eigentlichen Algorithmus-Schritte zur Anpassung der Patches aneinander durchgeführt werden können, müssen deshalb die Überlappungsbereiche einzelner Patches gebildet werden. Anschließend werden die Punkte einzelner Patches approximiert. Nun können auch die Schritte zur Passung der Patches aneinander, zu denen Patch-Ausrichtung an der Rotationsachse, Höhenpassung, Passung durch Rotation und Translation und Passung mittels eingeschränkter Transformation zählen, realisiert werden. Welche Passungsschritte in welcher Reihenfolge stattfinden, wird durch den Konfigurationsparameter „Patch Fitting Steps“ festgelegt.

Bilden von Überlappungsbereichen der Patches

Zur Bildung von Überlappungsbereichen der Patches müssen zuerst Konturlinien einzelner Patches gebildet werden. Dazu werden zuerst die geschlossenen Konturlinien gebildet, die alle Projektionen der Punkte eines Patches auf eine waagerechte Ebene (xy-Ebene oder Ebene des Messtisches) umfassen. Angesichts der großen Anzahlen der Patches und der 3D-Punkte innerhalb jedes Patches stand vor allem die algorithmische Effizienz (möglichst geringer Rechenaufwand) bei der Entwicklung der Algorithmik zur Bestimmung der Überlappungsbereiche im Vordergrund. Aus diesem Grunde wurden Patch-Konturlinien mit eingeschränkter Eckenanzahl gebildet. Dabei wurde auch festgelegt, dass die Winkelkoordinaten (gemessen vom Patch-Zentrum) einzelner Ecken der Patch-Konturlinie über dem Gesamtwinkel 2π gleichmäßig verteilt sind (siehe Abbildung 3). Die Gesamtanzahl der Ecken bzw. Kanten einer Patch-Konturlinie kann im Bereich von 12 bis 100 (Software interne Einschränkung) variiert werden und wird durch den Konfigurationsparameter „Number of Polygon Edges“ bestimmt. Zur Kontrolle können Eckenkoordinaten der Konturlinien aller Patches in eine ASCII-Datei ausgegeben werden, falls ein gültiger Dateiname dem Konfigurationsparameter „Patch Outline File“ zugewiesen wird.

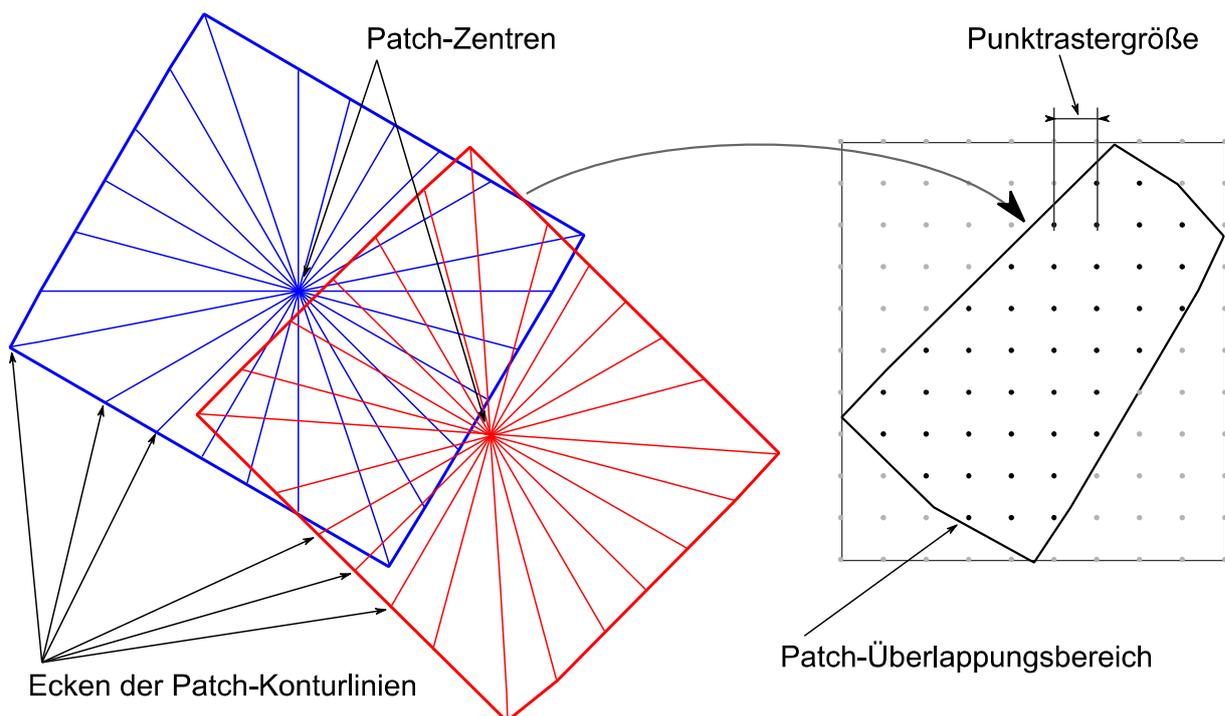


Abbildung 3: Patch-Konturlinien und Überlappungsbereich

Für die in dieser Form erfassten Konturlinien ist es verhältnismäßig einfach zu überprüfen, ob ein 2D-Punkt innerhalb der Konturlinie liegt oder nicht. Dafür ist Folgendes notwendig: Die globalen Koordinaten eines Punktes in lokale Polarkoordinaten des Patches umrechnen, den Index des Patch-Sektors, in dem sich der Punkt befindet, bestimmen und prüfen, ob der Punkt innerhalb des den

Sektor einschränkenden Geradensegments liegt. Nun kann die Punktmenge eines Überlappungsbereichs der zwei Patches gebildet werden. Dafür wird ein Punktraster mit der Rastergröße „Overlap Point Step“ (Konfigurationsparameter, siehe Abbildung 2) im gemeinsamen rechtwinkligen Bereich erzeugt, und anschließend wird die Zugehörigkeit einzelner Punkte zu den beiden Patches geprüft. Werden weniger Punkte gefunden, als durch den Konfigurationsparameter „Minimum Overlap Points“ vorgeschrieben ist, wird der Überlappungsbereich in weiteren Berechnungen nicht mehr berücksichtigt. Die Überlappungsbereiche werden nicht für alle möglichen Patch-Paare gesucht, sondern nur für Patches, die zu dem gleichen oder zu den benachbarten Ringen gehören. In diesem Zusammenhang sind die aus der Patch-Anordnungsdatei (Konfigurationsparameter „Patch Parameter File“) geladenen Daten wichtig.

Approximation der Punkte einzelner Patches

Derzeit sind drei verschiedene Typen von approximierenden Funktionen in der Software implementiert: Kugelapproximationen mit 3 und 4 Parametern und Quadrikenapproximation. Die Kugelapproximationen wurden vor allem wegen ihrer großen praktischen Bedeutung in der Software realisiert und Quadriken stellen eine Verallgemeinerung quadratischer Oberflächen dar. Der Typ der anzuwendenden Approximation wird durch den Konfigurationsparameter „Type of Patch Approximation“ festgelegt.

Kugelapproximation

Eine Kugeloberfläche im dreidimensionalen Raum wird durch die Gleichung

$$(x - c_0)^2 + (y - c_1)^2 + (z - c_2)^2 = r^2$$

beschrieben, wobei (c_0, c_1, c_2) das Zentrum und r den Radius einer Kugel darstellen. Zur Bestimmung der approximierenden Kugeloberfläche wird die Summe der Quadrate der Abweichungen der Patch-Punkte (x_i, y_i, z_i) von der Oberfläche

$$S = \sum_{i=1}^n [(x_i - c_0)^2 + (y_i - c_1)^2 + (z_i - c_2)^2 - r^2]^2$$

minimiert. Setzt man voraus, dass nicht nur die Zentrumskoordinaten sondern auch der Kugelradius unbekannt sind, so können die 4 unbekanntes Gleichungsparameter für gegebene Patch-Punkte durch die Lösung des folgenden linearen Ausgleichsproblems

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i y_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i z_i + a_3 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i y_i + a_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n y_i z_i + a_3 \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n y_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i z_i + a_1 \sum_{i=1}^n y_i z_i + a_2 \sum_{i=1}^n z_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n z_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n y_i + a_2 \sum_{i=1}^n z_i + a_3 n = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \end{array} \right.$$

mit

$$a_0 = 2c_0, \quad a_1 = 2c_1, \quad a_2 = 2c_2 \quad \text{und} \quad a_3 = r^2 - c_0^2 - c_1^2 - c_2^2$$

ermittelt werden. Die Approximation der Patch-Punkte mit einer Kugeloberfläche

$$(x - d_0)^2 + (y - d_1)^2 + (z - d_2)^2 = R^2,$$

die einen bekannten Radius R und unbekannte Zentrumskoordinaten (d_0, d_1, d_2) besitzt, kann im Gegensatz zum 4-Parameter-Fall nicht auf die Lösung eines linearen Ausgleichsproblems zurückgeführt werden. In diesem Falle ist allerdings eine Präzisierung der Zentrumskoordinaten möglich, wenn eine Approximation der Punktwolke mit der Kugel des Radius r und mit dem Zentrum in (c_0, c_1, c_2) schon vorliegt⁴. Dabei ist erforderlich, dass sich die Radien R und r voneinander nicht wesentlich unterscheiden. Der Korrekturvektor $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ der Kugelzentrumsposition, für den

$$d_i = c_i + \delta_i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2 \quad \text{und} \quad \delta_i \ll R \quad \text{und} \quad r \approx R$$

gilt, kann als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 \sum_{i=1}^n u_i^2 + \delta_1 \sum_{i=1}^n u_i v_i + \delta_2 \sum_{i=1}^n u_i w_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 - R^2) \\ \delta_0 \sum_{i=1}^n u_i v_i + \delta_1 \sum_{i=1}^n v_i^2 + \delta_2 \sum_{i=1}^n v_i w_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 - R^2) \\ \delta_0 \sum_{i=1}^n u_i w_i + \delta_1 \sum_{i=1}^n v_i w_i + \delta_2 \sum_{i=1}^n w_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 - R^2) \end{array} \right.$$

mit

$$u = x - c_0, \quad v = y - c_1, \quad w = z - c_2$$

⁴ Die Wahl der Bezeichnungen für das Zentrum (c_0, c_1, c_2) und des Radius r stimmt nicht ganz zufällig mit entsprechenden Bezeichnungen aus der 4-Parameter-Approximation überein, da diese in der Algorithmusimplementierung als Startlösung eingesetzt wird.

berechnet werden. In der Stitching-Software ist ein iteratives Verfahren auf Basis der obigen Korrektur des Kugelzentrums programmiert, so dass die Zentrumsposition mit einer ausreichenden Genauigkeit errechnet wird.

Quadrikenapproximation

Die Quadrik stellt eine Fläche im n-dimensionalen Raum dar, die durch eine quadratische Gleichung mehrerer Variablen

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

beschrieben wird, wobei \mathbf{x} den Ortsvektor darstellt und \mathbf{a} , \mathbf{b} und c die Gleichungskonstanten, die in der Matrix \mathbf{a} , dem Vektor \mathbf{b} und dem Skalar c enthalten sind. Die Matrix \mathbf{a} ist nach Definition symmetrisch. Im 3D-Raum haben \mathbf{x} , \mathbf{a} und \mathbf{b} die Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

und die Quadriken Gleichung wird auf eine quadratische Gleichung mit 3 Variablen

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$$

reduziert. Ähnlich wie im Falle der Kugeloberfläche werden die optimalen Koeffizientenwerte der approximierenden Quadrik durch die Minimierung der Summe der Fehlerquadrate

$$S = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{a} \mathbf{x}_i + \mathbf{b}^T \mathbf{x}_i + c)^2$$

bestimmt. Dieses Minimierungsproblem besitzt eine triviale Lösung:

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ und } c = 0 \rightarrow S = 0.$$

Um diese triviale Lösung zu umgehen, muss einem der 10 Quadrikenkoeffizienten (z.B. c) ein konstanter Wert (z.B. 1, aber auf jeden Fall nicht Null) zugewiesen werden. Dadurch wird ein lineares Gleichungssystem (mit Systemmatrix 9x9) aufgestellt, das sich in der Regel problemlos lösen lässt und hier wegen seiner unübersichtlichen Gestalt nicht angeführt wird.

Approximationsergebnisse

Hier werden die aus den numerischen Experimenten gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der oben beschriebenen Approximationsverfahren zusammengefasst. Zum Testen sowohl der Patch-Approximation als auch des gesamten Stitching-Verfahrens wurden einige simulierte sphärische Patch-Datensätze erstellt. In der Regel betragen die Patch-Größe 200 x 200 mm, die Streuung einzelner Punkte bezüglich der Patch-Oberfläche ca. $2 \cdot 10^{-5}$ mm und die z-Koordinatendifferenzen (Höhendifferenzen) der überlappenden Patches, die durch eine Translation und Rotation der Patches im Ganzen erzeugt wurden, erreichten bis zu 1 mm.

Bei der Passung der Patches mit Kugeloberflächen wurden Streuungswerte der Punkte bezüglich der erhaltenen approximierenden Oberfläche erzielt, die sehr nahe den vorgegebenen Streuungswerten liegen. Die konkreten Streuungswerte für einzelne Patches können dem Abschnitt „Patch Approximation and bounding Polygons / Deviation“ der Log-Datei, falls sie ausgegeben wird (siehe Konfigurationsparameter „Stitching Log File“), entnommen werden. Die Rechenzeiten inklusive 3-Parameter-Passung (siehe Kapitel „Kugelapproximation“), bei der eine iterative Nachbesserung der Kugelzentrumskoordinaten notwendig ist, waren gering (auf jeden Fall wesentlich kürzer als die Dauer des Patch-Ladens aus ASCII-Dateien). Die berechneten Koeffizientenwerte (Zentrumskoordinaten und Radius) waren auch ausreichend exakt (sofern es möglich war, dies zu beurteilen).

Die Quadrikenapproximation veranschlagt mehr Rechenzeit als die Kugelapproximation, aber sie ist immer noch schnell genug. Die Passungsqualitäten, wenn die verbleibende Standardabweichung der Patch-Punkte von der approximierenden Oberfläche als Maß dafür genommen wird, unterscheiden sich in den beiden Fällen kaum, was auch nicht überraschend ist, da eine sphärische Oberfläche ein spezieller Fall der Quadrikoberfläche ist. Im Unterschied zur Kugelpassung sind die errechneten Werte der Quadrikoeffizienten verhältnismäßig ungenau. Wegen dieser Ungenauigkeit scheitert meistens der darauf folgende Passungsschritt „Patch-Ausrichtung an der Rotationsachse“ (siehe gleichnamiges Kapitel). Dagegen können die anderen drei Passungsschritte auch nach der Quadrikenapproximation der Patches problemlos ausgeführt werden. Auf die Schwierigkeiten bei der Berechnung von Quadrikenkoeffizienten bzw. auf hohe „Empfindlichkeit“ dieser Werte bei leichten Datenveränderungen weisen auch große Konditionszahlen der Systemmatrizen der entsprechenden linearen Ausgleichsprobleme hin⁵.

Um die genaueren Werte der Quadrikenkoeffizienten zu erhalten, wurde versucht, eine gewichtete Approximation von Patch-Punkten anzuwenden. In einigen Fällen führte das zur Verbesserung der berechneten Koeffizientenwerte. Aber auch auf dieser Basis konnte kein zuverlässiges Approximationsverfahren mit Quadrikenoberflächen aufgestellt werden, mit dem der anschließende Passungsschritt „Patch-Ausrichtung an der Rotationsachse“ zuverlässig zu sinnvollen Ergebnissen geführt hätte. Deswegen ist es ratsam, falls weitere Typen der approximierenden Oberflächen implementiert werden sollten (z.B. Rotationsparaboloid), die Besonderheiten dieser Oberfläche (verglichen mit einer Quadrik) auszunutzen und eine spezielle Algorithmik zur Approximation zu implementieren statt auf die Quadrikapproximation als allgemeineren Fall zuzugreifen. Eine spezielle

⁵ Bei der Approximation der beschriebenen simulierten sphärischen Patches lagen die Werte der entsprechenden Konditionszahlen im Bereich zwischen 10^8 und $3 \cdot 10^9$.

Oberflächenform weist im Vergleich zur Quadrik eine geringere „Flexibilität“ (bzw. geringeren Freiheitsgrad) auf, was bessere Approximationsergebnisse verspricht.

Patch-Ausrichtung an der Rotationsachse

Die für das Projekt relevanten Oberflächen, die mittels Stitching-Verfahren zu bilden sind, sind meistens rotationssymmetrisch. Diese Tatsache kann zur Ausrichtung der Patches an der gegebenen Rotationsachse benutzt werden bevor die Patches aneinander angepasst werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Rotationsachse parallel zur z-Koordinatenachse (senkrecht zur Messtischebene) ist. Die Koordinaten (x_a, y_a) des Schnittpunktes der Rotationsachse mit der xy-Ebene werden durch den Konfigurationsparameter „Rotation Axis Coordinates“ definiert. Für einen sphärischen Patch besteht die Ausrichtung in der Verlagerung des Zentrums der Kugel, mit der Patch-Punkte approximiert werden, auf die Rotationsachse (siehe Abbildung 4). Diese Verlagerung wird mittels der Patch-Rotation um sein Zentrum (x_p, y_p, z_p) erzielt.

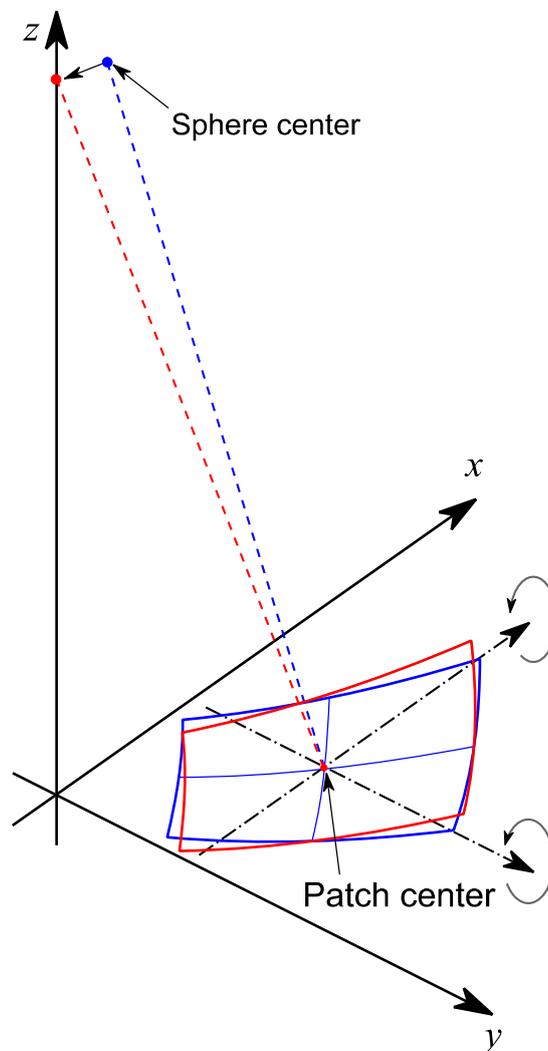


Abbildung 4: Ausrichtung der sphärischen Patches an der Rotationsachse

Die Koordinaten des Kugelzentrums (x_1, y_1, z_1) nach der Ausrichtung können als

$$\begin{aligned}x_1 &= x_a, & y_1 &= y_a \\z_1 &= z_p + \sqrt{R^2 - (x_p - x_a)^2 - (y_p - y_a)^2}\end{aligned}$$

berechnet werden. Mit Hilfe der Patch-Ausrichtung kann die Schiefelage der zusammengeführten Oberfläche verhindert und dadurch das Gesamtergebnis des Stitching-Verfahrens verbessert werden. So wurde z.B. durch das Vorschalten des Ausrichtungsschritts beim Stitchen eines Satzes aus 279 Patches in 10 Ringen die restliche durchschnittliche Patch-Abweichung von 0,582 nm auf 0,178 nm reduziert.

Höhenpassung der Patches

Die Höhenpassung ist das einfachste der drei implementierten Patch-Passungsverfahren. In allen drei Methoden werden einzelne Patches ringweise (schichtweise im Allgemeinen) aneinander angefügt. Dabei wird wie folgt vorgegangen: Die Zugehörigkeit der Patches zu den Ringen wird durch die Patch-Anordnungsdatei festgelegt (siehe Konfigurationsparameter „Patch Parameter File“). Zuerst werden Patches, die zu den Ringen 0 und 1 gehören, ausgewählt⁶.

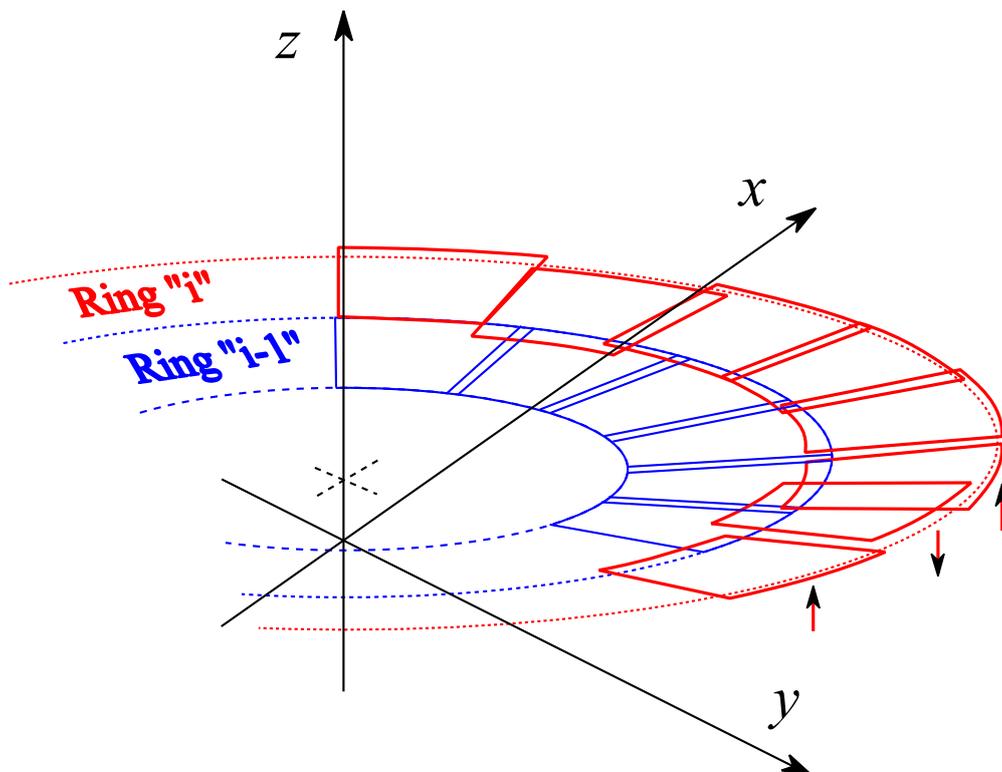


Abbildung 5: Ringweise Höhenpassung der Patches

⁶ Der Ring „0“ besteht meistens aus einem oder einigen wenigen Patches in der Mitte der Gesamtoberfläche und sollte deswegen nicht gesondert in einem Passungsschritt behandelt werden.

Für jeden der ausgewählten Patches wird bei der Höhenpassung die z-Koordinate (Höhenlage) des gesamten Patches so geändert, dass die algebraische Summe der Höhendifferenzen zwischen den Oberflächen der aktuellen und benachbarten Patches Null wird (siehe Abbildung 6). Werden die Höhenlagen aller selektierten Patches einmal auf beschriebene Weise korrigiert, wird damit ein Iterationsschritt der Höhenpassung für einen Ring (zu Beginn für zwei Ringe 0 und 1) abgeschlossen. Die Anzahl der Iterationsschritte ist durch den Konfigurationsparameter „Altitude Fitting Iterations“ beschränkt. Der iterative Vorgang kann auch eher beendet werden, wenn keine wesentliche Verbesserung der durchschnittlichen Höhendifferenz zwischen Patches von Schritt zu Schritt erreicht wird. Der Schwellenwert für diese Differenz der durchschnittlichen Höhendifferenz zwischen Patches von Schritt zu Schritt wird durch den Konfigurationsparameter „Altitude Fitting Accuracy“ angegeben. Ist das iterative Abarbeiten der Patches eines Ringes beendet, so werden die Patches des nächsten Ringes auf gleiche Art und Weise aneinander angepasst. Dabei werden nur die Überlappungsbereiche zwischen den Patches des aktuellen und des vorhergehenden Ringes, dessen Patches schon aneinander angepasst sind, berücksichtigt. Der Stitching-Prozess wird beendet, wenn die Patches des letzten (außen) Ringes bearbeitet wurden.

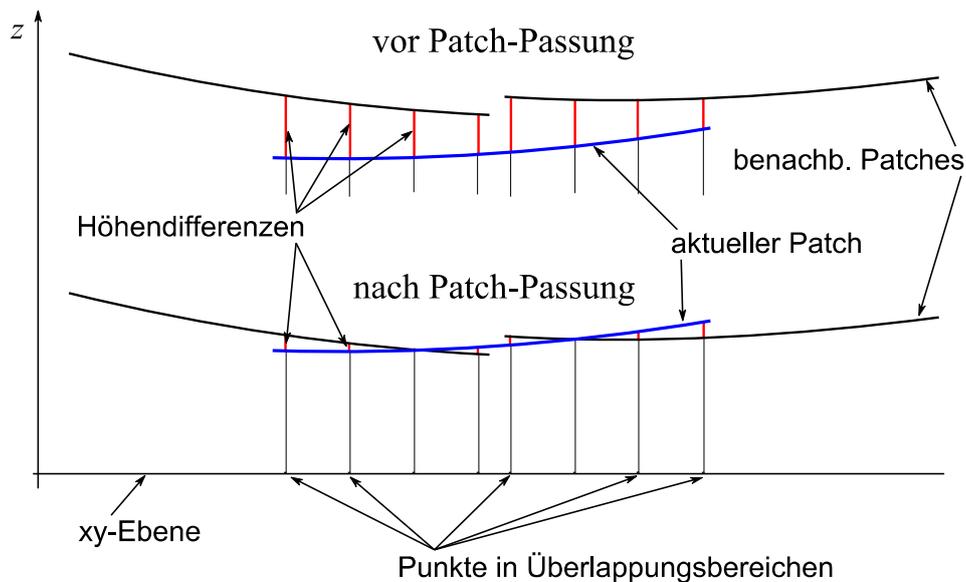


Abbildung 6: Höhenpassung eines einzelnen Patches

Die Reihenfolge der Patch-Abarbeitung der anderen zwei Patch-Passungsverfahren ist der oben beschriebenen Reihenfolge der Höhenpassung gleich. Im Allgemeinen führt die Höhenpassung zu schlechteren Stitching-Ergebnissen als die anderen auf der Patch-Transformation basierenden Passungsmethoden, da durch die Höhenpassung eine eventuelle Schiefelage einzelner Patches nicht korrigiert wird. Wenn allerdings die „Patch-Ausrichtung an der Rotationsachse“ vorher erfolgreich (z.B. wie im Falle der sphärischen Approximation, aber nicht bei der Quadrikenapproximation) ausgeführt werden kann, kann die Höhenpassung ein gutes, praktisch akzeptables Stitching-Gesamtergebnis liefern.

Passung durch Rotation und Translation der Patches

Bei der Passung mittels Rotation und Translation werden einzelne Patches auch ringweise aneinander angepasst, aber im Unterschied zur Höhenpassung wird eine Transformation, die aus einer Rotation und einer Translation zusammengesetzt wird, auf die Patches angewandt. Damit können die neuen 3D-Koordinaten \mathbf{x}_1 eines Patch-Punktes nach der Transformation als

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{T}$$

berechnet werden, worin \mathbf{R} eine Rotationsmatrix, \mathbf{T} ein Translationsvektor und \mathbf{x}_0 die ursprünglichen Punktkoordinaten sind. Zur Bestimmung von \mathbf{R} und \mathbf{T} werden zuerst Translationsvektoren für die korrespondierenden Punkte auf den Oberflächen des aktuellen und der benachbarten Patches gebildet. Für diese Vektormenge bzw. für zwei korrespondierende Punktwolken werden dann die Rotationsmatrix und der Translationsvektor kalkuliert, die die Summe der Vektorlängenquadrate minimieren. Die oben angeführte Transformation lässt an sich planare (zur xy-Ebene parallele) Translationen der Patch-Punkte zu. Jedoch werden sie wegen der Parallelität aller Translationsvektoren zur z-Achse und kleiner Werte von möglichen Rotationswinkeln gering ausfallen.

Patch-Passung durch eingeschränkte Transformation

Wie der Name bereits andeutet, wird in diesem Falle für die Patch-Zusammenführung eine eingeschränkte Transformation verwendet. Genau genommen wird diese Transformation auf eine Rotation der Patch-Punkte um zwei Achsen, die durch das Patch-Zentrum gehen und parallel zur x- und y-Achse sind, und auf eine zur z-Achse parallele Translation begrenzt. Damit ergeben sich spezielle Formen für die Rotationsmatrix \mathbf{R} und den Translationsvektor \mathbf{T} aus der Transformationsgleichung im vorigen Abschnitt:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_y & \sin \varphi_y \cdot \sin \varphi_x & \sin \varphi_y \cdot \cos \varphi_x \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ -\sin \varphi_y & \cos \varphi_y \cdot \sin \varphi_x & \cos \varphi_y \cdot \cos \varphi_x \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = (0, 0, t_z)^T$$

Da bei Patchaufnahmen keine großen Verkippungen der gesamten Punktwolken entstehen können, kann auch

$$\varphi_x \ll 1 \quad \text{und} \quad \varphi_y \ll 1$$

angenommen werden. Diese Annahmen ermöglichen es für n -Patchpunkte ein lineares Gleichungssystem (mit Systemmatrix $n \times 3$) zur Bestimmung der unbekanntenen Drehwinkel φ_x und φ_y und der Translation t_z zu bilden

$$p_{yi}\varphi_x - p_{xi}\varphi_y + t_z = z_{1i} - z_{0i} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Dabei sind $p_i = x_{0i} - x_p$ Patch-Punktekoordinaten bezüglich des Patch-Zentrums. Wie die numerischen Tests zeigen, führt die Patch-Passung mittels eingeschränkter Transformation zu ähnlichen Ergebnissen wie die Passung durch eine uneingeschränkte Rotation und Translation.

Ergebnisausgabe

Das eigentliche Ergebnis des Patch-Stitching besteht in den für einzelne Patches berechneten Transformationen. Deren Anwendungen auf die Punkte der entsprechenden Patches ermöglicht es, eine Gesamtpunktewolke für die komplette Oberfläche zu bilden.

```

0
+9.999971080150268E-001 -7.710327154751293E-007 -2.404986691902488E-003
+0.000000000000000E+000 +9.99999486086262E-001 -3.205974812445909E-004
+2.404986815498065E-003 +3.205965540814927E-004 +9.999970566238017E-001
+6.006295816705317E-001 +8.006710742087529E-002 +3.228178718291019E-002

1
+9.999931746444705E-001 +9.908329839175433E-006 +3.694667278460588E-003
+0.000000000000000E+000 +9.999964040147309E-001 -2.681782542837161E-003
-3.694680564477472E-003 +2.681764238717853E-003 +9.999895786837453E-001
-9.242466838749408E-001 +6.713618839881055E-001 +6.385554356085663E-001
.....

```

Abbildung 7: Format der Transformationsdatei

Die gewonnen Patch-Transformationen werden in eine ASCII-Datei, deren Name mit dem Konfigurationsparameter „Transformation File“ festgelegt wird, nach dem Ablauf des Stitching-Algorithmus gespeichert. Das Format dieser Datei, das in Abbildung 7 dargestellt ist, ist einfach: für jeden Patch werden der Reihe nach der Patch-Index, die Rotationsmatrix (die ersten 9 Gleitkommazahlen) und die 3 Komponenten des Translationsvektors ausgegeben. Die Maßeinheiten der Translationsvektorkomponenten sind Millimeter und alle ausgegebenen Daten beziehen sich auf das globale Koordinatensystem, in dem die ursprünglichen Koordinaten der Patch-Punkte angegeben wurden (siehe Abschnitt „Eingabedaten und Steuerungsparameter“).

Während der Abarbeitung einzelner Schritte des Stitching-Algorithmus werden einige wichtige Zwischenergebnisse auf der Kommandozeile ausgegeben, so dass der Benutzer über den Verlauf des Stitching jederzeit informiert wird. Sollten Fehler bei der Durchführung des Algorithmus auftreten, werden auch diese auf der Kommandozeile angezeigt. Eine typische Kommandozeilenausgabe zeigt Abbildung 8.

```

<*** Stitching of Point Patches ***>

Config-File <stitching.cfg> successfully loaded

Start Stitching of 279 Patches in 10 Rings? (or <q>uit):

* Patch Approximation and Building of bounding Polygons *
279 Patches of 279 processed
Standard Deviation of Patch Data:

```

```
Minimum = 11.366 nm Patch index = 143
Maximum = 11.668 nm Patch index = 64
Average = 11.541 nm
```

```
* Searching for overlapping Areas of Patches *
1200 overlapping Areas found
```

```
* Patch Stitching Steps *
- Alignment of Patches
- Altitude Fitting of Patches
- Fitting by Patch Transformations
- Fitting by reduced Patch Transformations
```

```
Initial Patch Deviation = 518374.523 nm
Final Patch Deviation   = 0.178 nm
```

```
279 Patch Transformations saved to <data\transform3d.txt>
```

```
Elapsed Time: 22.90 sec
```

Abbildung 8: Kommandozeilenausgabe des Stitching-Algorithmus

Sind ausführliche Informationen über Verlauf des Stitching-Verfahrens gewünscht, so kann eine Stitching-Logdatei erzeugt werden. Dafür ist dem Konfigurationsparameter „Stitching Log File“ ein gültiger Dateinamen zuzuweisen. Eine ASCII-Logdatei, deren Größe normalerweise zwischen 15 und 150 KBytes liegt, enthält folgende Daten:

- eine Kopie der eingelesenen Konfigurationsdatei; zu diesem Zweck muss der Konfigurationsparameter „Copy Parameters to Log File“ auf einen Wert, der sich von Null unterscheidet, gesetzt werden.
- Anzahl der Punkte und umgebendes Rechteck für jeden Patch.
- Koeffizientenwerte der approximierenden Oberfläche und die Standardabweichung der Patch-Punkte von der Oberfläche für jeden Patch.
- Anzahlen der Punkte in allen Überlappungsbereichen und dazugehörige Patch-Indizes.
- Ergebnisse der Patch-Ausrichtung an der Rotationsachse, falls sie durchgeführt wird; dazu gehören z.B. im Falle der Kugelapproximation die alten und neuen Koordinaten des Kugelzentrums.
- Resultate (Iterationsnummer und entsprechende Abweichung) der einzelnen Iterationen der Patch-Passungsschritte.
- Durchschnittliche Patch-Abweichung vor und nach der Durchführung des Stitching und gesamte Rechenzeit.

Darüber hinaus, wie im Abschnitt „Bilden von Überlappungsbereichen der Patches“ beschrieben wurde, können Eckenkoordinaten der Konturlinien aller Patches in eine ASCII-Datei ausgegeben werden.

Test des Stitching-Verfahrens

Zum Testen aller Schritte des implementierten Stitching-Verfahrens wurden einige Patch-Datensätze berechnet. Für die Berechnung der Patch-Datensätze wurde eine spezielle Software erstellt, die ähnlich der Stitching-Software selbst über eine Konfigurationsdatei parametrisierbar ist. Der größte Patch-Testsatz, der im Abschnitt „Approximationsergebnisse“ teilweise schon beschrieben wurde, umfasst 279 Patches, sodass seine Patches die Fläche eines Kreises mit einem Durchmesser von 2 Meter vollständig abdecken. Bei der Berechnung von Patch-Punktewolken wurde eine Kugeloberfläche mit einem Durchmesser von 6 Meter zu Grunde gelegt und das Verhältnis von Überlappungsbereichen zu Patch-Flächen betrug ca. 50%. Die in Abbildung 8 angeführte Konsolenausgabe stellt die Ergebnisse einer Stitching-Variante dieses simulierten Patch-Datensatzes dar. Das Ergebnis dokumentiert eine enorme Verbesserung der Passung einzelner Patches aneinander. Die nach dem Stitching verbliebene durchschnittliche Abweichung der Patches voneinander beträgt nur 0,178 nm, was sowohl angesichts des Projektziels, eine 20nm-Genauigkeit zu erreichen, als auch angesichts der Tatsache, dass die Patch-Punktstreuung etwa 11,5 nm beträgt, als sehr gering zu bewerten ist.

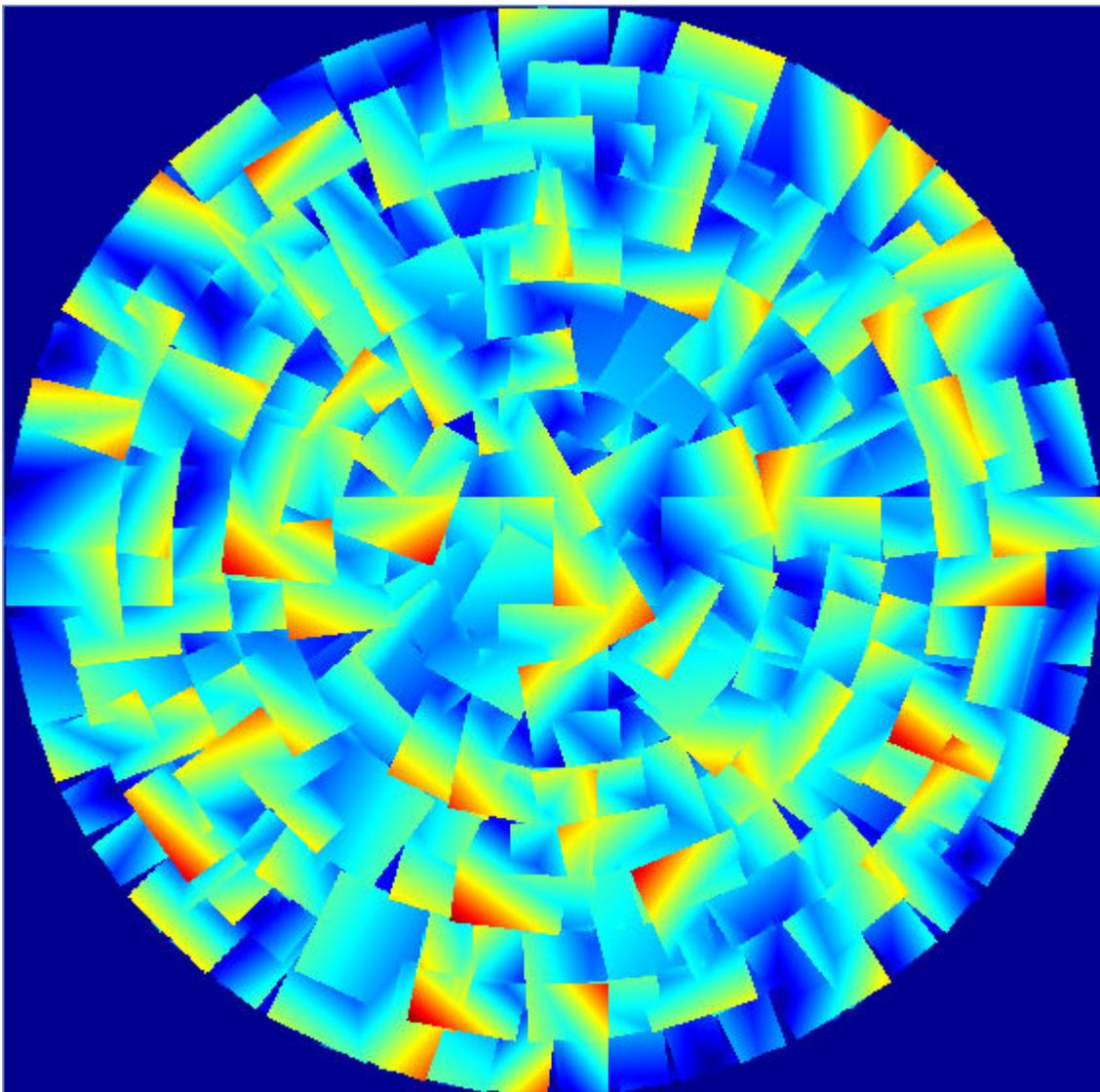


Abbildung 9: Ursprüngliche Abweichung der Patch-Punkte, Messbereich von 0 bis 1,40 mm

Die errechnete durchschnittliche Patch-Abweichung wird auf Basis der Höhendifferenzen im Überlappungsbereichen der Patches ermittelt und ist damit eine Kenngröße des implementierten Stitching-Verfahrens. Um ein vom numerischen Verfahren unabhängiges Kriterium zu bestimmen, wurden alle Patches vor und nach dem Stitching mit einer Kugeloberfläche approximiert und anschließend die Abweichungen der Patch-Punkte zu diesen Oberflächen berechnet.

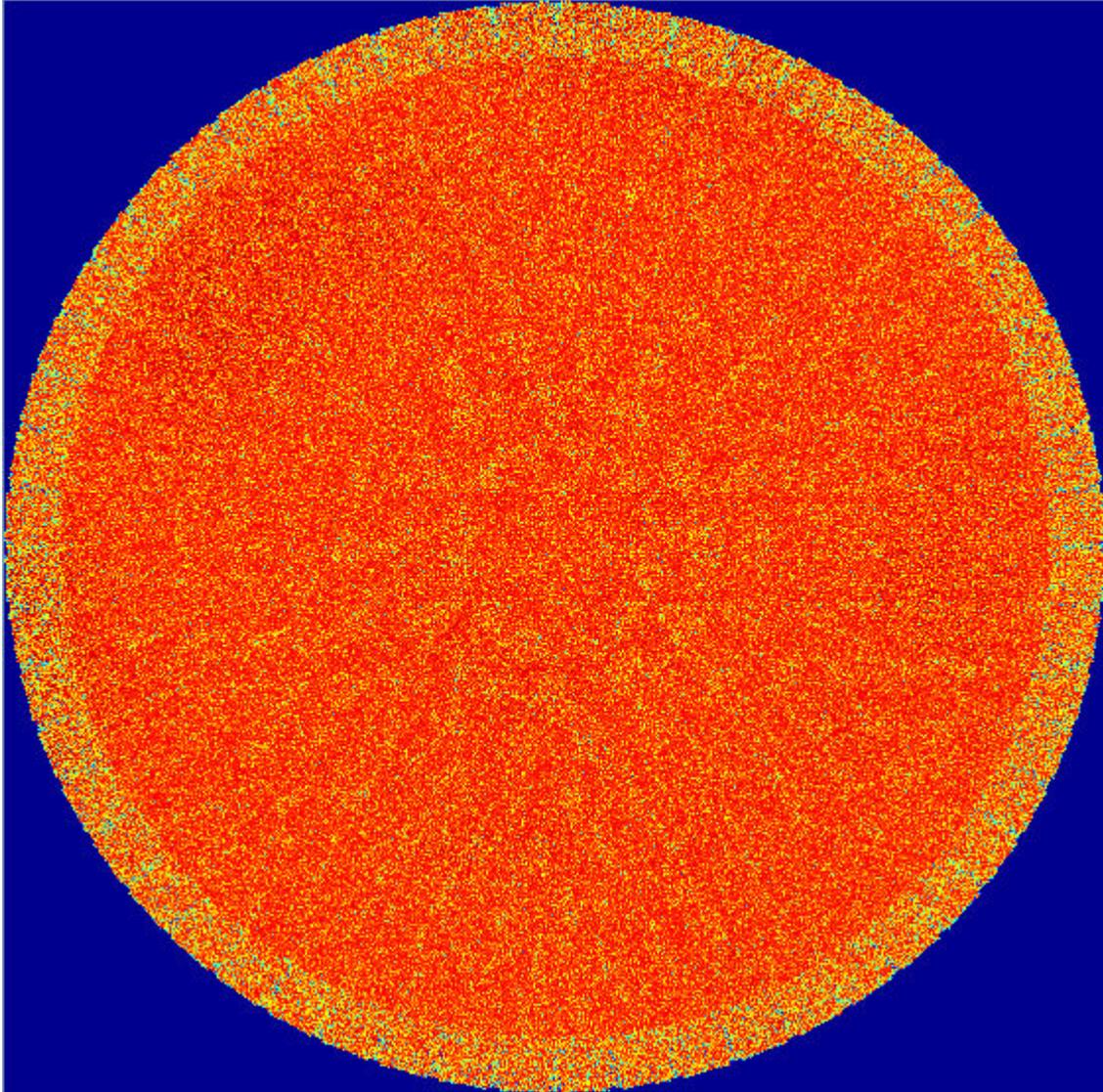


Abbildung 10: Abweichung der Patch-Punkte nach Stitching, Messbereich von 0 bis 22,7 nm

Für den besprochenen simulierten Patch-Datensatz wurde durch das Stitching die durchschnittliche Abweichung der Patch-Punkte von der approximierenden Oberfläche von 0,377 mm auf 11,5 nm verringert. Darüber hinaus wurden die in Abbildung 9 und Abbildung 10 dargestellten Verteilungen dieser Abweichungen über die Patch-Oberflächen berechnet.

Fazit

Die in diesem Bericht beschriebenen mathematischen Methoden erlauben es große Oberflächen aus einzeln aufgenommenen Punktwolken zusammensetzen, auch in einem Genauigkeitsbereich wie er für optische Anwendungen nötig ist. Die beschriebene Algorithmik ist ein wesentlicher Bestandteil für die Fertigung und Qualitätssicherung großer optischer Oberflächen.

Das IGF-Vorhaben Nr. 29 EN der Forschungsvereinigung Feinmechanik Optik und Medizintechnik e.V. wurde über die AiF im Rahmen des Programms zur Förderung der Industriellen Gemeinschaftsforschung (IGF) vom Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert.